

1.1 引言

自然界无时无刻都在变化和发展,它具有复杂多样性和系统性。非线性动力学问题开始涌现在许多学科之中,研究非线性动力学的一个重要方面是混沌理论。由于非线性系统的固有特性是混沌,因此,运用混沌动力学研究生物、生理学以及工程技术领域的问题具有非常重要的现实意义^[1]。

同步是自然界中普遍存在的一种现象。例如,天空中飞着的大雁排成一字形,萤火虫以相同的步调发光和熄灭,单摆的同步摆动等。Pecora 和 Carroll 小组最早通过对两个耦合混沌振子施加信号驱动实现混沌系统的同步^[2,3]。目前,混沌系统同步的研究主要是复杂网络中各个系统之间同步的实现、结构网络对同步能力的影响以及两个或两个以上混沌系统的同步问题^[4,5]。其在工程领域取得巨大的进展,具有非常重要的意义,例如保密通信^[6]。混沌系统的同步按表现形式主要分为广义同步^[7]、滞后同步^[8]、完全同步^[9]和相同步^[10]。

1.2 复杂网络动力学

一个或多个系统之间的同步和控制的研究相对比较简单,理论方面的研究已相对成熟。随着科技的发展,现实中的系统普遍存在于各种领域的关系网中,它们彼此之间相互作用。因此,掀起了复杂网络的研究热潮^[11-13]。近年来,人们在刻画复杂网络结构的统计特性上提出了许多方法和概念(如度分布、介数、集聚系数以及平均路径长度等)。

1.2.1 网络的图表示

现实中的网络可以抽象为由网络中所有节点的集合 V 和连接网络中所有节

点的边的集合 E 组成的图, 表示为 $G=(V, E)$ 。其中节点数记作 $N=|V|$, 边数可以记作 $M=|E|$, 边集 E 中的每条边都有点集 V 中一对点与之相对应。若任意点对 (i, j) 与 (j, i) 对应的是同一条边, 那么此网络称为无向网络 (undirected network), 否则为有向网络 (directed network)。若给网络中每条边赋有相应的权值, 那么此网络被称为加权网络 (weighted network), 否则称为无权网络 (unweighted network)。在图论中, 没有重边和自环的图称为简单图。在网络结构性质方面, 运用离散数学解析计算网络的结构性质, 主要包括度与度分布、介数、集聚系数和平均路径长度等。

1.2.2 度与度分布

节点 i 的度 k_i 是与该节点连接的其他节点的数目。有向网络中节点的度分为两种: 出度和入度。节点的出度指的是从该节点指向其他节点的边的数目, 而节点的入度指的是从其他节点指向该节点的边的数目。网络中节点的度分布用分布函数 $P(k)$ 描述, $P(k)$ 表示随机选定的节点的度为 k 的概率。

现实中的许多网络的度分布 $P(k) \sim k^{-\gamma}$ 用幂律形式描述, 幂律分布又称无标度分布, 具有幂律分布的网络称为无标度网络, 幂律分布函数有如下性质:

考虑概率分布函数 $f(x)$, 对于任意给定的常数 a , 存在常数 b 使得函数 $f(x)$ 满足如下条件, 即

$$f(ax) = bf(x), \quad (1.1)$$

假设 $f(1)f'(1) \neq 0$, 取 $x=1$, 有 $f(a) = bf(1)$, 所以 $b = f(a)/f(1)$, 有

$$f(ax) = \frac{f(a)f(x)}{f(1)}. \quad (1.2)$$

方程(1.2)中对任意 a 都成立, 将方程两边对 a 进行求导,

$$x \frac{df(ax)}{d(ax)} = \frac{f(x)}{f(1)} \frac{df(a)}{da}, \quad (1.3)$$

当 $a=1$ 时, 则有

$$x \frac{df(ax)}{d(ax)} = \frac{f'(1)}{f(1)} f(x). \quad (1.4)$$

方程(1.4)的解为

$$\ln f(x) = \frac{f'(1)}{f(1)} \ln x + \ln f(1), \quad (1.5)$$

方程两边进行指数运算, 可得

$$f(x) = f(1)x^{-\gamma}, \quad \gamma = -f'(1)/f'(1). \quad (1.6)$$

幂律分布函数满足无标度条件的分布函数。

1.2.3 介数

描述网络拓扑结构的重要参数是网络的介数和度, 介数^[14]分为边介数(网络

中所有最短路径中必须经过此边的次数)和节点介数(网络中所有最短路径中经过该节点的次数),节点的度描述单个节点或边对网络的影响。介数反映了相应的节点或边在整个网络中的作用和影响力。

定义 1.1 网络中不相邻的节点 v_j 和 v_l 之间的最短路径会途经某些节点,如果某个节点 v_i 被其他许多最短路径经过,则表示该节点在网络中很重要,其重要性或影响力可用节点的介数 B_i 来表征,定义为^[15]

$$B_i = \sum_{\substack{1 \leq j < l \leq N \\ j \neq i \neq l}} [n_{jl}(i)/n_{jl}], \quad (1.7)$$

式中, n_{jl} 为节点 v_j 和 v_l 之间的最短路径条数; $n_{jl}(i)$ 为节点 v_j 和 v_l 之间的最短路径经过节点 v_i 的条数; N 为网络中的节点总数。

1.2.4 集聚系数

集聚系数用来描述网络中节点周围的聚集情况,是网络的另一个重要参数,它衡量网络中的任意一个节点的邻居节点之间相连接的平均可能性,即网络的疏密程度。假设网络中的节点 i 有 k_i 条边将节点 i 与其他节点相连接,那么这 k_i 个节点称为节点 i 的邻居。 k_i 个节点之间最多有 $\frac{k_i(k_i-1)}{2}$ 条边。节点 i 的集聚系数 C_i , 即

$$C_i = \frac{2E_i}{k_i(k_i-1)}. \quad (1.8)$$

所有节点 i 的集聚系数 C_i 的平均值就是整个网络的集聚系数 $C(0 \leq C \leq 1)$ 。 $C=0$ 当且仅当网络中所有的节点都为孤立节点,即没有任何连接边。 $C=1$ 当且仅当网络中任意两个节点都直接相连时,即网络是全局耦合的。对于一个含有 N 个节点的完全随机网络,当 N 很大时, $C=O(N^{-1})$ 。

WS(Watts-Strogatz)小世界网络的集聚系数^[16]为

$$C(p) = \frac{3(K-2)}{4(K-1)}(1-p)^3. \quad (1.9)$$

式中, K 为节点近邻连接数, p 为重连概率,式(1.9)适用于规则网络向随机网络过渡的 WS 小世界模型。

NW(Newman-Watts)小世界网络的集聚系数^[17]为

$$C(p) = \frac{3(K-2)}{4(K-1) + 4Kp(p+2)}. \quad (1.10)$$

式(1.10)是 NW 小世界网络的集聚系数 $C(p)$ 随重连概率 p 的变化关系,其中 K 为近邻节点数。该公式适用于 p 较小时的情况。

1.2.5 平均路径长度

网络中用 d_{ij} 表示两个节点 i 和 j 之间的距离(连接两个节点的最短路径距

离)。网络的直径被定义为任意两个节点之间的距离的最大值,用 D 表示。

$$D = \max_{i,j} d_{ij}。 \quad (1.11)$$

网络中任意两个节点时间的平均值称为平均路径长度(也称为特征路径长度),用 L 表示,即

$$L = \frac{2}{N(N+1)} \sum_{i>j} d_{ij}, \quad (1.12)$$

式中, N 为节点数。

BA(Barabási 和 Albert)无标度网络的平均路径长度为^[18]

$$L \sim \frac{\log N}{\log \log N}。 \quad (1.13)$$

此网络也具有小世界特性。

1.2.6 随机网络模型

随机网络是由一些节点通过随机连接而组成的一种复杂网络。构造随机网络模型有两种方法:

1. 通过给定任意节点数和两节点相连的概率随机构造网络模型

给定 N 个节点,每一对节点以概率 p 随机选取边,得到其对应顶点进行连接,最多可以存在 $m = N(N-1)/2$ 条边,随机生成 m 个 $(0,1)$ 内的随机数,通过构造邻接矩阵,找到邻接矩阵中满足条件的点的连线。取节点数 $n = 36$,两节点相连的概率 $p = 0.3$ 进行构造随机网络,如图 1.1 所示。

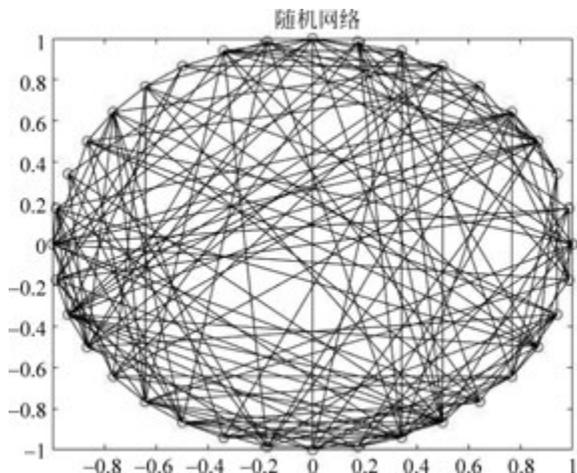


图 1.1 通过给定任意点数和两点相连的概率随机构造网络模型

2. 通过给定节点数和边数随机生成随机网络

首先,给定 N 个节点,最多可以存在 $m = N(N-1)/2$ 条边,从这些边中等概

率地选取 M 条边构造随机网络,然后用构造 N 个节点,以概率随机选取 M 条边得到其对应顶点,之后连接起来就可以得到随机网络。最后,通过构造邻接矩阵来找到满足条件的节点连线。取节点数 $N=25$,边数 $M=15$,如图 1.2 所示。

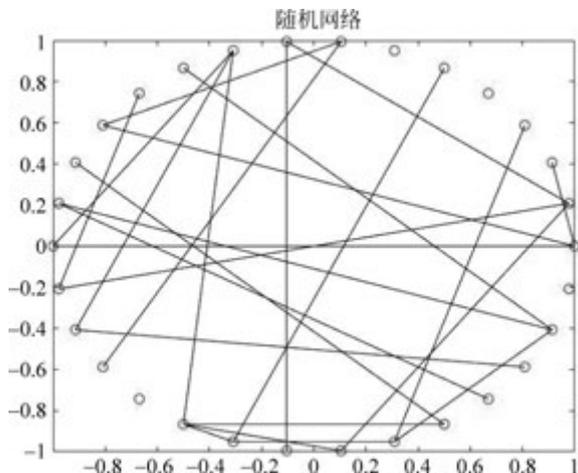


图 1.2 通过给定节点数和边数随机生成随机网络

随机网络的性质主要是 Poisson 度分布、平均距离短及聚集系数小。Erdős 和 Rényi 最早讨论随机图中最大度和最小度分布,随机网络中节点的度分布遵循 Poisson 度分布,随机网络有时也称为指数网络。

在连接概率为 p 的随机网络中,其平均度为^[19]

$$\langle k \rangle = p(N-1) \approx pN, \quad (1.14)$$

所有节点对之间的最大距离称为网络的直径,可以表示为

$$D = \frac{\ln N}{\ln \langle k \rangle} \approx \frac{\ln N}{\ln(pN)}. \quad (1.15)$$

随机网络中两个节点之间是否有共同的邻居节点,其连接概率都为 p 。因此,随机网络的平均聚集系数为

$$C_{ER} = \langle k \rangle / (N-1) \approx p, \quad (1.16)$$

式中, N 是网络中节点的总数。实际的复杂网络通常都具有聚类特性,现实生活中的复杂网络的聚集系数比相同规模大的聚集系数高很多。

1.3 复杂网络的传播动力学

Newman 和 Watts 在提出 NW 小世界网络模型的基础上,描述了一个 d 维 NW 小世界网络上的传播过程^[20]。Moukarzel 在文献[21]中做了更详细地分析。下面根据 Moukarzel 的思想介绍 d 维 NW 小世界网络上的传播过程。

假设从最初的感染节点 M 开始,病毒以 $v=1$ 开始传播,NW 小世界网络中

捷径端点的密度为 $r=2p$, 其中 p 是小世界网络模型中添加新捷径的概率参数, 假设传播过程是连续的, 网络中节点的感染量 $V(t)$ 是从 A 开始的以 t 为半径的球体 $\Gamma_d t^{d-1}$, 其中 Γ_d 是 d 维小世界网络中的超球体常数, 如图 1.3 所示。

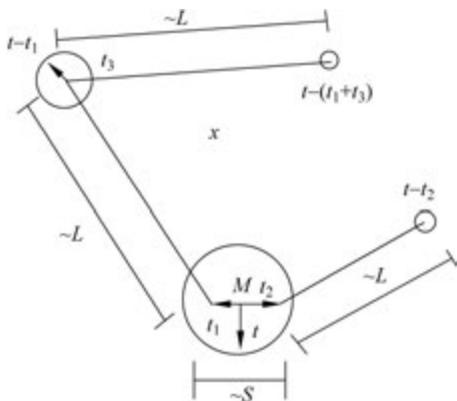


图 1.3 NW 小世界网络传播原理图

感染源在传播过程中碰到捷径端点的概率为 r , 因此会产生新的感染球体 $r\Gamma_d t^{d-1}$ 。因此, 平均总感染量 $V(t)$ 由积分方程可以得到:

$$V(t) = \Gamma_d \int_0^t \tau^{d-1} (1 + 2pV(t-\tau)) d\tau. \quad (1.17)$$

对式(1.17)作标度变换和微分后, 可得如下形式的线性传播方程:

$$V^{(p)}(t) = 1 + V(t), \quad (1.18)$$

可得

$$V(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{dk}}{(dk)!}, \quad d=1, 2, 3, \dots \quad (1.19)$$

很显然, 此方程的解是随着时间的增大而发散的。这里讨论的网络中传播现象的描述对象不仅是病毒的传播, 也可以是火灾、灾难以及通信网络中的拥塞。

1.4 时间分数阶 Fokker-Planck 方程

分数阶算子应用之一是描述生存粒子的反常扩散, 而回火分数阶算子描述的是正常扩散与反常扩散的转换。为了更深入讨论反常扩散, 有时会将 Lévy 等待时间分布截断, 由于粒子的生命有限或者是物理空间有界。Fokker-Planck 方程的时间导数描述的是有关回火分数阶导数的动力学, 因为回火分数阶算子仍然是非局部的, 通常有关数值求解回火时间问题的计算量与时间 t 呈平方增加。

分数阶导数在描述反常扩散过程中起着关键作用, 包括空间分数阶 Fokker-Planck 方程^[22]、时间分数阶 Fokker-Planck 方程和时间-空间分数阶 Fokker-Planck 方程^[23-25]。Fokker-Planck 方程(以 Adriaan Fokker 和 Max Planck 的名字

命名)描述了粒子位置和速度的概率密度函数的时间演化过程,是统计物理中应用最广泛的经典方程之一。本节主要介绍时间分数阶 Fokker-Planck 方程的数值算法,用来刻画欠扩散^[26]。时间分数阶 Fokker-Planck 方程的一般形式可以写为

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x, t) = \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{U'(x)}{m\eta_\alpha} + \kappa_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] P(x, t), \quad (1.20)$$

式中, $U(x)$ 表示过阻尼布朗运动的势, $P(x, t)$ 是粒子在 x 位置 t 时刻的概率密度函数, η_α 表示具有维数 $[kgs^{\alpha-2}]$ 的广义摩擦系数, κ_α 表示物理维度为 $[m^2s^{-\alpha}]$ 的反常扩散系数。因为式(1.20)中的 $P(x, t)$ 是关于 t 的连续函数,那么有

$${}_0D_t^{\alpha-1} {}_0D_t^{1-\alpha} P(x, t) = P(x, t) - [{}_0D_t^{\alpha-1} P(x, t)]_{t=0} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} = P(x, t), \quad (1.21)$$

这是因为

$$\lim_{t \rightarrow 0} |{}_0D_t^{1-\alpha} P(x, t)| = \lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} P(x, \tau) d\tau \right| \leq \lim_{t \rightarrow 0} M \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} = 0, \quad (1.22)$$

式中, τ 是任意小的固定正数, 固定 x 时 $M = \max_{t \in [0, T]} P(x, t)$ 。

${}_0D_t^{\alpha-1}$ 作用于式(1.20)的两边,有

$${}_0D_t^{\alpha-1} \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{U'(x)}{\eta_\alpha} + \kappa_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] P(x, t), \quad (1.23)$$

即

$$D_*^\alpha P(x, t) = \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{U'(x)}{\eta_\alpha} + \kappa_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] P(x, t). \quad (1.24)$$

考虑分数阶 Fokker-Planck 方程如下:

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x, t) = {}_0D_t^{1-\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{U'(x)}{m\eta_\alpha} + \kappa_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] P(x, t), \quad (1.25)$$

式中, $0 < \alpha < 1, 0 < x < 2\pi$ 。

初始条件和边值条件为 $P(x, 0) = \sin\left(\frac{x}{2}\right), P(2\pi, t) = 0, P(0, t) = 0$, 精确解为

$$P(x, t) = E_\alpha(-t^\alpha) \sin\left(\frac{x}{2}\right), \quad (1.26)$$

式(1.25)中, $U'(x) = 1, \kappa_\alpha = 4, E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$ 。

1.5 参考文献

- [1] STROGATZ S H. Nonlinear dynamics: With application to physics, biology, chemistry and engineering[M]. Massachusetts: Perseus Books Publishing, 1994.
- [2] PECORA L M, CARROLL T L. Synchronization in Chaotic systems[J]. Physical Review Letters, 1990, 64: 821-825.
- [3] PECORA L M, CARROLL T L. Driving systems with chaotic signals[J]. Physical Review A, 1991, 44: 2374-2383.
- [4] WANG X F. Complex networks: topology, dynamics and synchronization [J]. International Journal of bifurcation and chaos, 2002, 12: 885-916.
- [5] NIXON M, FRIDMAN M, RONEN E, et al. Controlling synchronization in large laser networks[J]. Physical Review Letters, 2012, 108: 214101.
- [6] HUANG Y C, HU C K. Chaotic communication via temporal Transfer entropy[J]. Physical Review Letters, 2008, 101: 244102.
- [7] ZHOU P, CHEN X F, ZHANG N Y. Generalized synchronization between different fractional-order chaotic systems [J]. Communications in Theoretical Physics, 2008, 50: 931-934.
- [8] LI C D, LIAO X F. Lag synchronization of Rössler system and Chua circuit via scalar signal [J]. Physica Letters A, 2004, 329: 301-308.
- [9] LIN W, HE Y B. Complete synchronization of the noise-perturbed Chua's circuit [J]. Chaos, 2005, 15: 023705.
- [10] LI X W, ZHENG Z G. Phase synchronization of coupled Rössler oscillators: amplitude Effect[J]. Communications in Theoretical Physics, 2007, 47: 265-269.
- [11] ALBERT R, BARABÁSI A L. Statistical physics of complex networks[J]. Reviews of Modern Physics, 2002, 74: 47-97.
- [12] 吴金闪, 狄增如. 从统计物理学看复杂网络研究[J]. 物理学进展, 2004, 24: 18-46.
- [13] CASTELLANO C, FORTUNATO S, LORETO V. Statistical physics of social dynamics [J]. Reviews of Modern Physics, 2009, 81: 591-646.
- [14] 刘强, 方锦清, 李永, 等. 探讨小世界特性产生的一种新方法[J]. 复杂系统与复杂性科学, 2005, 2, 2: 13-19.
- [15] 郭世泽, 陆哲明. 复杂网络基础理论[M]. 北京: 科学出版社, 2012.
- [16] BARRAT A, WEIGT M. On the properties of small world networks [J]. European Physical Journal B, 2000, 13: 547-560.
- [17] NEWMAN M E J. The structure and function of networks [J]. Computer Physics Communications, 2002, 147: 40-45.
- [18] COHEN R, HAVLIN S. Scale-free networks are ultrasmall[J]. Physical Review Letters, 2003, 86: 3682-3685.
- [19] 汪小帆, 李翔, 陈关荣. 复杂网络理论及其应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006.
- [20] NEWMAN M E J, WATTS D J. Scaling and percolation in the small-world network model[J]. Physical Review E, 1999, 60: 332-342.
- [21] MOUKARZEL C F. Spreading and shortest paths in systems with sparse long-range connections[J]. Physical Review E, 1999, 60, 6: R6263.

- [22] LIU F, ANH V, TURNER I. Numerical solution of the space fractional Fokker-Planck equation[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2004, 166: 209-219.
- [23] JUMARIE G. A Fokker-Planck equation of fractional order with respect to time [J]. Journal of Mathematical Physics, 1992, 33: 3536-3542.
- [24] BARKAI E, METZLER R, KLAFTER J. From continuous time random walks to the fractional Fokker-Planck equation[J]. Physical Review E, 2000, 61: 132-138.
- [25] LENZI E K, MENDES R S, FA K S, et al. Anomalous diffusion: Fractional Fokker-Planck equation and its solutions[J]. Journal of Mathematical Physics, 2003, 44: 2179-2185.
- [26] DENG W H. Numerical algorithm for the time fractional Fokker-Planck equation [J]. Journal of Computational Physics, 2007, 227: 1510-1522.

分数阶微积分^[1-3]的出现已经有三百多年的历史,它是整数阶微积分的一个推广,在现代科学中扮演着十分重要的角色^[4,5],它是研究任意阶微积分的理论基础内容和基本知识。分数阶导数是具有幂律记忆核的一种积分运算,经典微分算子是局部算子,但分数阶微分算子是非局部算子,为拟微分算子。分数阶微分方程与整数阶微分方程最大的区别在于分数阶微积分具有非局域性(非局域性是指一个系统的下一个状态不仅依赖于它的当前状态,而且还依赖于它的起始于初始时刻的历史状态),时间非局域性主要表现在保持记忆性。

2.1 分数阶微积分知识

分数阶微积分理论可以追溯到 Leibniz, Riemann, Liouville, Grünwald 和 Letnikov 的研究。然而,它很长一段时间都没有得到足够的重视。目前,分数阶微积分应用在许多科学领域,特别在刻画现实世界中一些具有记忆和遗传异质性的材料和动态系统过程中非常有用,对于经典微积分而言这些性质经常会被忽略,而空间非局部性主要体现在分数阶扩散方程的“胖尾”现象^[6,7]。

2.1.1 基本概念

1. Fourier 变换

Fourier(傅里叶)变换是对连续时间函数的积分变换,它是通过积分建立函数之间的对应关系。Fourier 变换在物理、数学、通信和控制以及工程技术等许多领域中被广泛应用。要给出 Fourier 变换和 Fourier 逆变换的定义,我们首先需要介绍 Fourier 积分定理:

假设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上满足如下两个条件:

(1) $f(x)$ 在任意有限区间都满足展开为 Fourier 级数的条件,也就是只存在