

# 第 1 篇 结构动力学基础

- 结构动力学概述
- 单自由度体系的振动分析
- 多自由度体系的振动分析
- 频率和振型的实用计算方法



## 第 2 章 结构动力学概述

### 思政目标

坚持理论联系实际精神，培养动力学思维和方法，通过在工程问题中引入动荷载和阻尼力进行力学建模，了解结构动力学研究的主要问题和解题思路。

结构动力学是结构力学的一个分支，着重研究结构对于动荷载的响应（如位移、应力等的时间历程），以便确定结构的承载能力和动力学特性，或为改善结构的性能提供依据。结构动力学既是抗震设计的基础，也是减震、防震措施的理论依据。

### 2.1 结构动力学前期知识简介

#### 2.1.1 结构力学前期知识

结构力学是学习结构动力学的直接基础，结构力学中有关超静定结构求解的方法在结构动力学运动方程建立中非常重要。

全部反力和内力只靠平衡条件便可确定的结构，称为静定结构；而单靠平衡条件还不能确定全部反力和内力的结构，便成为超静定结构。超静定结构在几何构造上的特征是几何不变，而且具有多余联系。所谓“多余”，是指这些联系仅就保持结构的几何不变性来说，是不必要的。多余联系中产生的力称为多余未知力。

求解任何超静定问题，都必须综合考虑以下 3 个方面的条件。

- (1) 平衡条件。即结构的整体及任何一部分的受力状态都应满足平衡方程。
- (2) 几何条件。即变形条件或位移条件、协调条件、相容条件等，即结构的变形和位移必须符合支约束条件和各部分之间的变形连续条件。
- (3) 物理条件。即变形或位移与力之间的物理关系。

在具体求解时，根据计算途径的不同，可以有两种不同的基本方法，即力法（又称柔度法）和位移法（又称刚度法），这两种方法在结构动力学运动方程建立时都要涉及。

两种方法的主要区别在于基本未知量的选择不同。所谓基本未知量，是指这样一些未知量，当首先求出它们之后，即可用它们求出其他的未知量。在力法中，是以多余未知力作为基本未知量；在位移法中，则是以某些位移作为基本未知量。

#### 1. 力法

下面先用一个简单的例子来说明力法的基本概念。

图 2-1 (a) 所示梁为一次超静定结构。如果把支座 B 作为多余联系去掉, 则得到如图 2-1 (b) 中的静定结构。将原超静定结构中去掉多余联系后所得到的静定结构称为力法的基本结构。所去掉的多余联系, 则以相应的多余未知力  $X_1$  来代替其作用。这样, 基本结构就同时承受着已知荷载  $q$  和多余未知力  $X_1$  的作用, 基本结构在原有荷载和多余未知力共同作用下的体系称为力法的基本体系, 如图 2-1 (b) 所示。显然, 只要能设法求出多余未知力  $X_1$ , 其余一切计算就与静定结构完全相同。

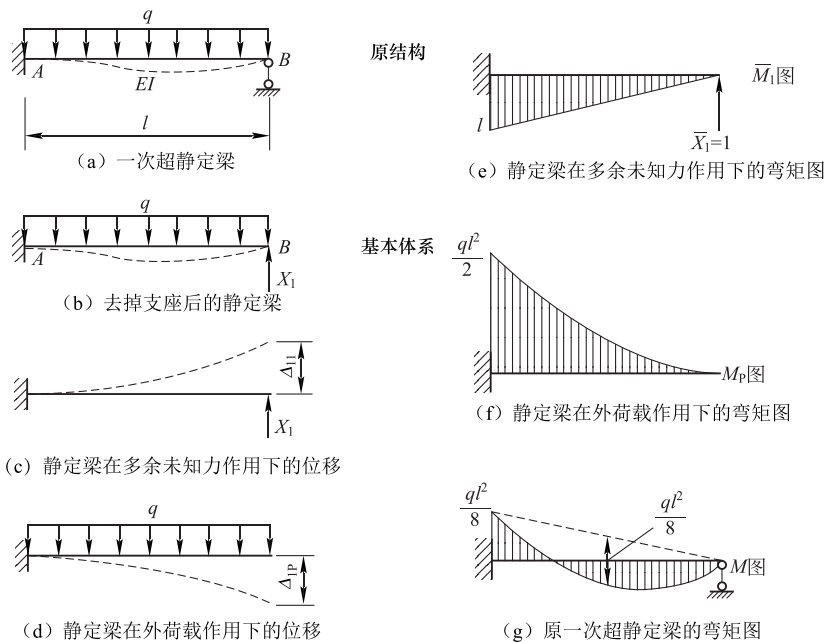


图 2-1 力法求解过程示意图

为了确定多余未知力  $X_1$ , 必须考虑变形条件以建立补充方程。为此, 我们来对比原结构与基本体系的变形情况。原结构在支座 B 处由于多余联系的约束而不可能有竖向位移; 基本体系上虽然该多余联系已被去掉, 但若其受力和变形情况与原结构完全一致, 则在荷载  $q$  和多余未知力  $X_1$  共同作用下, 其 B 点的竖向位移 (即沿力  $X_1$  方向上的位移)  $\Delta_1$  也应等于零。

这就是用以确定  $X_1$  的变形条件或称位移条件。

设以  $\Delta_{11}$  和  $\Delta_{1P}$  分别表示多余未知力  $X_1$  和荷载  $q$  单独作用在基本结构上时, B 点沿力  $X_1$  方向上的位移, 如图 2-1 (c)、(d) 所示, 其符号都以沿假定的未知力  $X_1$  作用的方向为正。两个下标的含义为: 第一个表示位移的地点和方向, 第二个表示产生位移的原因。根据叠加原理

$$\Delta_1 = \Delta_{11} + \Delta_{1P} = 0 \quad (2-1)$$

若  $\delta_{11}$  表示  $X_1$  为单位力时 B 点沿  $X_1$  方向的位移, 则有  $\Delta_{11} = \delta_{11} \cdot X_1$ , 于是上述位移条件 (2-1) 可写为

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1P} = 0 \quad (2-2)$$

由于  $\delta_{11}$  和  $\Delta_{1P}$  都是静定结构在已知力作用下的位移, 完全可以求出, 因而多余未知力  $X_1$  即可由此方程解出。此方程便称为一次超静定结构的力法基本方程。

为了计算  $\delta_{11}$  和  $\Delta_{1P}$ , 可分别绘出基本结构在  $\bar{X}_1=1$  和  $q$  作用下的弯矩图  $\bar{M}_1$  图和  $M_P$  图, 如图 2-1 (e)、(f) 所示, 然后用图乘法计算这些位移。求  $\delta_{11}$  时应为  $\bar{M}_1$  图乘  $\bar{M}_1$  图, 称为  $\bar{M}_1$  图“自乘”

$$\delta_{11} = \int \frac{\bar{M}_1^2}{EI} ds = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} l \cdot l \cdot \frac{2}{3} l \right) = \frac{l^3}{3EI}$$

求  $\Delta_{1P}$  则为  $\bar{M}_1$  图与  $\bar{M}_P$  图相乘

$$\Delta_{1P} = \int \frac{M_P \bar{M}_1}{EI} ds = \frac{-1}{EI} \left( \frac{1}{3} \frac{ql^2}{2} l \right) \frac{3}{4} l = -\frac{ql^4}{8EI}$$

将  $\delta_{11}$  和  $\Delta_{1P}$  代入式 (2-2) 可求得

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\left( -\frac{ql^4}{8EI} \right) \cdot \frac{3EI}{l^3} = \frac{3}{8} ql$$

正号表明  $X_1$  的实际方向与假定相同, 即沿未知力  $X_1$  的方向向上。

多余未知力  $X_1$  求出后, 其余所有反力、内力的计算都是静定问题, 无须赘述。在绘制最后弯矩图  $M$  图时, 可以利用已经绘出的  $\bar{M}_1$  图和  $M_P$  图按叠加法绘制, 即将  $\bar{M}_1$  图的竖标乘以  $X_1$  倍, 再与  $M_P$  图的对应竖标相加。于是, 可绘出  $M$  图如图 2-1 (g) 所示。此弯矩图既是基本体系的弯矩图, 同时也是原结构的弯矩图, 因此此时基本体系与原结构的受力、变形和位移情况已完全相同, 二者是等价的。

像上述这样解除超静定结构的多余联系而得到静定的基本结构, 以多余未知力作为基本未知量, 根据基本体系应与原结构变形相同而建立的位移条件, 首先求出多余未知力, 然后由平衡条件即可计算其余反力、内力的方法, 称为力法。

## 2. 位移法

结构在一定的外因作用下, 其内力与位移之间恒具有一定的关系, 确定的内力只与确定的位移相对应。从这点出发, 在分析超静定结构时, 先设法求出内力, 然后即可计算相应的位移, 这便是力法; 但也可以反过来先确定某些位移, 再据此推求内力, 这便是位移法。为了说明位移法的基本概念, 先来分析图 2-2 所示刚架的位移。

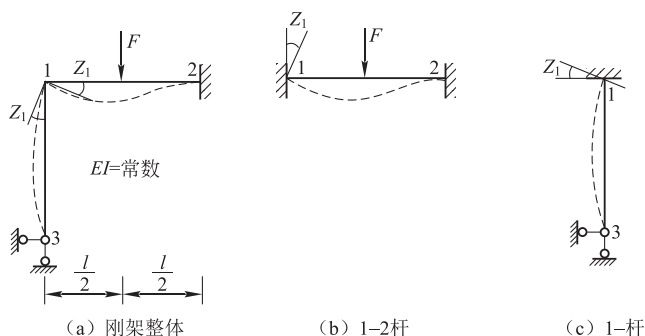


图 2-2 位移法求解过程示意图

刚架在荷载  $F$  作用下将发生如虚线所示的变形, 在刚结点 1 处两杆的杆端均发生相

同的转角  $Z_1$ 。此外，若略去轴向变形，则可认为两杆长度不变，因而结点 1 没有线位移。如何据此来确定各杆内力呢？对于 1—2 杆，可以把它看作是一根两端固定的梁，除了受到荷载  $F$  作用外，固定支座 1 还发生了转角  $Z_1$ ，如图 2-2 (b) 所示，而这两种情况下的内力都可以由力法算出。同理，1—3 杆则可以看作是一端固定另一端铰支的梁，而在固定端 1 处发生了转角  $Z_1$ ，如图 2-2 (c) 所示，其内力同样可用力法算出。可见，在计算此刚架时，如果以结点 1 的角位移  $Z_1$  为基本未知量，设法首先求出  $Z_1$ ，则各杆的内力随之均可确定，这就是位移法的基本思路。

根据以上思路，可以将单跨超静定梁由单位杆端位移引起的杆端内力（形常数）和跨间荷载引起的杆端内力（载常数）分别计算得出，如表 2-1 和表 2-2 所示，以备复杂结构应用时查用。

表 2-1 单跨超静定梁由单位杆端位移引起的形常数


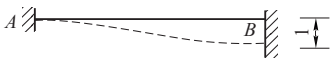
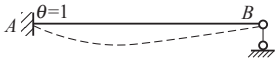
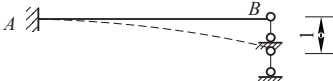
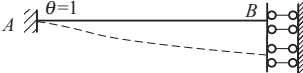
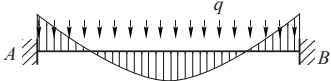
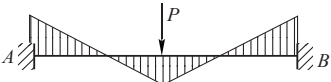
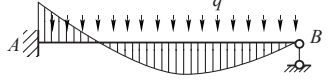
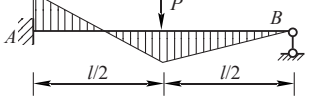
单跨超静定梁简图	$M_{AB}$	$M_{BA}$	$Q_{AB}=Q_{BA}$
	$4i$	$2i$	$-6i/l$
	$-6i/l$	$-6i/l$	$12i/l^2$
	$3i$	$0$	$-3i/l$
	$-3i/l$	$0$	$3i/l^2$
	$i$	$-i$	$0$

表 2-2 单跨超静定梁由跨间荷载引起的载常数

单跨超静定梁简图	$m_{AB}$	$m_{BA}$
	$-\frac{ql^2}{12}$	$\frac{ql^2}{12}$
	$-\frac{Pl}{8}$	$\frac{Pl}{8}$
	$-\frac{ql^2}{8}$	$0$
	$-\frac{3Pl}{16}$	$0$

### 3. 图乘法

计算梁和刚架在荷载作用下的位移时，可以写出  $\bar{M}$  和  $M_P$  方程式，然后代入公式

$$\Delta = \int \frac{\bar{M}M_P}{EI} ds \quad (2-3)$$

进行积分运算，这是比较麻烦的。但是，当结构的各杆段符合下列条件时：

- ① 杆轴为直线；
- ②  $EI = \text{常数}$ ；
- ③  $\bar{M}$  和  $M_P$  两个弯矩图中至少有一个是直线图形。

可用下述图乘法来代替积分运算，从而简化计算工作。图乘法示意如图 2-3 所示。

$$\begin{aligned} \Delta &= \int \frac{\bar{M}M_P}{EI} ds = \frac{1}{EI} \int x \tan \alpha \cdot M_P dx = \frac{\tan \alpha}{EI} \int x \cdot M_P dx \\ &= \frac{\tan \alpha}{EI} \int x \cdot dA_\omega = \frac{\tan \alpha}{EI} \cdot x_c \cdot A_\omega = \frac{A_\omega \cdot y_c}{EI} \end{aligned} \quad (2-4)$$

式中， $y_c$  是  $M_P$  图的形心  $C$  处所对应的  $\bar{M}$  图的竖标。可见，上述积分式等于一个弯矩图的面积  $A_\omega$  乘以其形心处所对应的另一个直线弯矩图上的竖标  $y_c$ ，再除以  $EI$ ，这就称为图乘法，图乘法在结构动力学中可以应用到柔度法列结构体系的运动方程中。

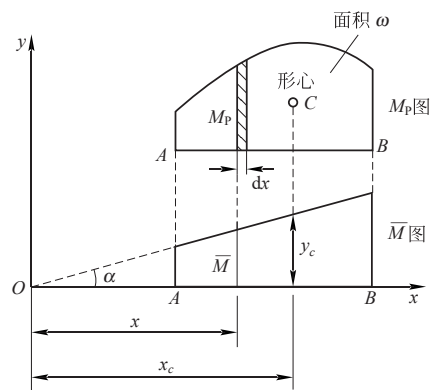


图 2-3 图乘法求解过程示意图

## 2.1.2 数学期前知识

在结构动力学问题求解过程中会涉及高等数学中关于微分方程的求解、线性代数中行列式和矩阵概念及简单运算等数学知识，下面做一个简单回顾。

### 1. 微分方程的求解

含有未知函数的导数或微分的方程称为微分方程。方程中未知函数最高阶导数的阶数称为微分方程的阶。在结构动力学的学习中将涉及二阶微分方程的求解问题。下面先介绍有关微分方程解的基本概念。

微分方程的解：如果一个函数代入微分方程后，使方程变成一个恒等式，则称此函数为该方程的解。微分方程的解分为通解和特解。

通解：若微分方程的解中含有与方程阶数相同个数的相互独立的任意常数，这样的解称为微分方程的通解。

定解条件：为了确定微分方程的一个特定的解，通常已知这个解所必须满足的条件，这些条件称为定解条件。

特解：根据定解条件确定了任意常数后所得的解称为微分方程的特解。

微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (2-5)$$

为二阶线性非齐次微分方程，若右端自由项  $f(x)$  为零，则化为二阶线性齐次微分方程，可写为

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (2-6)$$

若未知量的系数为常数，则化为二阶常系数齐次线性微分方程

$$y'' + p y' + q y = 0 \quad (2-7)$$

求解方程 (2-7) 通解的步骤如下。

(1) 令  $y = e^{rx}$ ，则可写出微分方程的特征方程

$$r^2 + pr + q = 0 \quad (2-8)$$

(2) 求出特征方程的两个根  $r_1$ 、 $r_2$ 。

(3) 根据特征方程两个根的不同情形，按照表 2-3 写出微分方程的通解。

表 2-3 二阶常系数线性微分方程通解表达式

特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的两个根 $r_1$ 、 $r_2$	微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的通解
两个不相等的实根 $r_1$ 、 $r_2$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
两个相等的实根 $r_1 = r_2$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$
一对共轭复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

通解得出后再根据定解条件可以将待定系数求出，最终确定其通解表达式。

而对于二阶常系数非齐次线性微分方程，其全解则由两部分相加而成，即其所对应齐次微分方程的通解（解法如上）和该非齐次微分方程的一个特解之和。

## 2. 线性代数相关知识

多自由度体系的结构动力学问题涉及线性微分方程组的求解问题，提到方程组就一定会应用到线性代数的有关概念。

首先，行列式的概念就是来源于对线性方程组的研究。设二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (2-9)$$

通过加减消元，若  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ ，则方程组的解为

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2 a_{11} - a_{21} b_1}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \quad (2-10)$$

将此种方法推广到多元方程组，为便于记忆，就引出了行列式的概念。将未知数的系数行列式写为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad (2-11)$$

再将系数行列式的第一列、第二列分别替换为常数列，可得

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \quad (2-12)$$

则当系数行列式不为零时，可以得到二元一次线性方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad (2-13)$$

上述方法可以推广到多元一次线性方程组的求解。

二阶和三阶行列式的计算可以应用对角线法则，如二阶行列式的计算为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (2-14)$$

对  $n$  阶行列式，如果把元素  $a_{ij}$  所在的第  $i$  行和第  $j$  列划去后，剩下的  $n-1$  阶行列式叫作元素  $a_{ij}$  的余子式，记为  $M_{ij}$ ；而  $M_{ij}$  前面附以符号  $(-1)^{i+j}$  后，叫作元素  $a_{ij}$  的代数余子式，用符号  $A_{ij}$  来表示，即  $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ 。

这样， $n$  阶行列式就等于它的任一行（列）的各元素与其相对应的代数余子式乘积之和，即

$$\begin{aligned} D &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (\text{按第 } i \text{ 行展开}) \\ D &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (\text{按第 } j \text{ 列展开}) \end{aligned} \quad (2-15)$$

如果把  $n$  阶行列式的行依次变为列，就得到一个新行列式  $D^T$ ，行列式  $D^T$  称为行列式  $D$  的转置行列式，它有如下性质： $n$  阶行列式的值等于它的转置行列式的值。

下面引入矩阵的概念，由  $m \times n$  个数排列成  $m$  行  $n$  列的数表

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (2-16)$$

称为  $m \times n$  阶矩阵，其中  $a_{ij}$  为矩阵  $\mathbf{A}$  的第  $i$  行第  $j$  列元素。式 (2-16) 可简记为  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$  或  $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 。当  $m=n$  时， $\mathbf{A}$  称为  $n$  阶方阵，记为  $\mathbf{A} = (a_{ij})_n$ 。只有一行的矩阵  $\mathbf{A} = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]$  称为行向量，或行矩阵；只有一列的矩阵  $\mathbf{A} = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_m]^T$  称为列向量，或列矩阵。符号  $\mathbf{A}^T$  是把矩阵  $\mathbf{A}$  的行依次换成列而得到的矩阵，叫作  $\mathbf{A}$  的转置矩阵。

矩阵运算必须满足一定的条件，如加减运算必须是行和列相等的矩阵，加减的结果是对应矩阵元素加减；矩阵的乘法必须满足左矩阵的列数等于右矩阵的行数，相乘后的结果为左矩阵的行数、右矩阵的列数。例如设

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = [b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n]$$

则

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} [b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n] = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_mb_1 & a_mb_2 & \cdots & a_mb_n \end{bmatrix}$$

设  $\mathbf{A}$  是  $n$  阶方阵,  $\mathbf{E}$  是  $n$  阶的单位方阵, 如果存在一个  $n$  阶方阵  $\mathbf{B}$ , 使得  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{E}$ , 则说方阵  $\mathbf{A}$  是可逆的, 并把方阵  $\mathbf{B}$  称为方阵  $\mathbf{A}$  的逆矩阵, 记  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ . 方阵  $\mathbf{A}$  有逆矩阵存在的充分必要条件是  $\mathbf{A}$  为非奇异矩阵, 则

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^* \quad (2-17)$$

其中,  $\mathbf{A}^*$  称为方阵  $\mathbf{A}$  的伴随方阵, 它是行列式  $|\mathbf{A}|$  的各元素的代数余子式所构成的方阵。

设  $\mathbf{A}$  是  $n$  阶方阵, 如果数  $\lambda_0$  和  $n$  维非零列向量  $\xi$  满足关系式

$$\mathbf{A}\xi = \lambda_0 \xi \quad (2-18)$$

则称  $\lambda_0$  为  $\mathbf{A}$  的特征值,  $\xi$  为  $\mathbf{A}$  的属于  $\lambda_0$  的一个特征向量。

设  $\mathbf{A}$  是  $n$  阶方阵,  $\lambda$  是参数, 则行列式

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \lambda - a_{mn} \end{vmatrix} \quad (2-19)$$

称为方阵  $\mathbf{A}$  的特征多项式。

$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0$  为方阵  $\mathbf{A}$  的特征方程。  $\mathbf{A}$  的特征值就是特征方程的解,  $n$  阶方阵  $\mathbf{A}$  有  $n$  个特征值。  $\mathbf{A}$  的属于特征值  $\lambda_i$  的特征向量就是齐次线性方程组  $(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = 0$  的所有非零解。

### 2.1.3 理论力学前期知识

理论力学中的一些有关动力学的原理和概念, 如牛顿第二定律、达朗伯原理、简谐振动等在结构动力学的学习中也非常重要, 下面针对有关重要原理和概念做一些简单回顾。

#### 1. 达朗伯原理

达朗伯原理是一种解决非自由质点和质点系动力学问题的普遍方法。这种方法是用静力学中研究平衡问题的方法来研究动力学问题, 因此又称为动静法。

当质点受到其他物体作用而使运动状态发生变化时, 由于质点本身的惯性, 对施力物体产生反作用力, 这种反作用力称为质点的惯性力。惯性力的大小等于质点的质量与其加速度的乘积, 方向与加速度的方向相反, 但作用于施力物体上。若用  $\mathbf{F}_1$  表示惯性力, 则  $\mathbf{F}_1 = -m\mathbf{a}$ 。

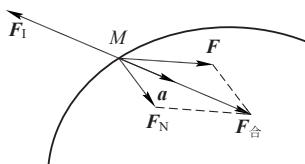


图 2-4 质点的达朗伯原理图

设质量为  $m$  的质点  $M$ , 受主动力  $\mathbf{F}$  和约束反力  $\mathbf{F}_N$  的作用, 沿曲线运动, 产生加速度  $\mathbf{a}$ , 如图 2-4 所示。根据牛顿第二定律, 有

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_N = m\mathbf{a} \quad (2-20)$$

代入惯性力得

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_N + \mathbf{F}_1 = 0 \quad (2-21)$$

上式表明: 任一瞬时, 作用于质点上的主动力、约束反力和虚加在质点上的惯性力在形式上组成平衡力系。这就是质点的达朗伯原理。

必须指出: 由于质点的惯性力并不作用于质点本身, 而是假想地虚加在质点上的, 质

点实际上也并不平衡。公式只反映了力与运动的关系，实质上仍然是动力学问题，但它提供了将动力学问题转化为静力学平衡问题的研究方法。这种方法对求解质点的动力学问题并未带来明显的方便，但在研究方法上显然是个新的突破，而且它对求解非自由质点系的动力学问题是十分有益的。

## 2. 弹簧振子简谐振动

弹簧振子是一个不考虑摩擦阻力，不考虑弹簧的质量，不考虑振子（金属小球）的大小和形状的理想化的物理模型，用来研究简谐振动的规律。

如图 2-5 所示是一个弹簧振子的模型，其中金属杆光滑，轻质弹簧质量远小于金属

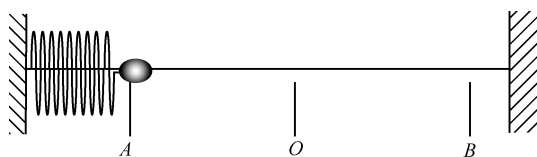


图 2-5 弹簧振子模型

小球的质量，故可忽略不计。假设将小球拉到 O 位置后松手，小球就会在 A、B 间来回往复运动。运动规律如表 2-4 所示。

表 2-4 弹簧振子运动规律

位置	A	A→O	O	O→B	B
位移大小	最大	减小	0	增大	最大
速度大小	0	增大	最大	减小	0
动能	0	增大	最大	减小	0
势能	最大	减小	0	增大	最大
总能	不变	不变	不变	不变	不变

弹簧振子的振动周期为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (2-22)$$

式中  $k$ ——弹簧的刚度系数；

$m$ ——弹簧振子（小球）的质量。

从式 (2-22) 可以看出，弹簧振子的振动周期与质量成正比，与弹簧刚度系数成反比。这一规律在结构动力学中仍然适用，我们将在后续的章节中加以展开讨论。

## 2.2 动荷载的定义和分类

### 2.2.1 动荷载的定义

作用在结构上的荷载是由 3 个因素确定的，即大小、方向和作用点。如果这些因素随

时间不变或缓慢变化,则在求解结构的响应时,可把荷载作为静荷载处理以简化计算,这是结构静力学的范畴。如果荷载在大小、方向和作用点方面随时间变化,使得质量运动加速度所引起的惯性力与荷载相比大到不可忽视时,则把这种荷载称为动荷载。

由动荷载的定义可引申到其他间接作用,如引起基础运动的地震作用等。其中,地震作用引起的地面运动通过基础传给上部结构,使之产生惯性力,而此惯性力往往可以达到较高的水平。因此,地震作用为典型的动力作用。

## 2.2.2 动荷载的分类

动荷载是时间的函数,根据动荷载随时间变化的规律,可以分为确定性荷载与非确定性荷载两大类。

### 1. 确定性荷载

如果荷载的变化是时间的确定性函数,则称此类荷载为确定性荷载。经常用到的确定性荷载有简谐荷载、冲击荷载和突加荷载等。

简谐荷载是一种特殊的周期荷载(即随时间呈周期性变化的荷载),可用正弦函数  $F_0 \sin \theta t$  或余弦函数  $F_0 \cos \theta t$  来表示,  $F_0$  称为荷载幅值,  $\theta$  为外荷载频率,  $t$  为时间,其随时间的变化规律如图 2-6 (a) 所示。例如旋转机械装置因质量不平衡而引起的离心力,从而使结构受到转动件的动力作用,这种离心力就是典型的简谐荷载。对周期性的非简谐荷载可借助傅里叶分析分解成一系列简谐分量之和进行处理。

冲击荷载是一种非周期荷载,其特点是荷载的大小在极短的时间内有较大的变化,如图 2-6 (b) 所示。最典型的例子是爆炸引起的冲击荷载。

另一种非周期荷载为突加荷载,这种荷载以某一恒值突然施加于结构上并保持不变,如图 2-6 (c) 所示。较为典型的实例有锻锤或打桩机产生的荷载。结构受确定性荷载作用时的响应分析通常称为结构振动分析。

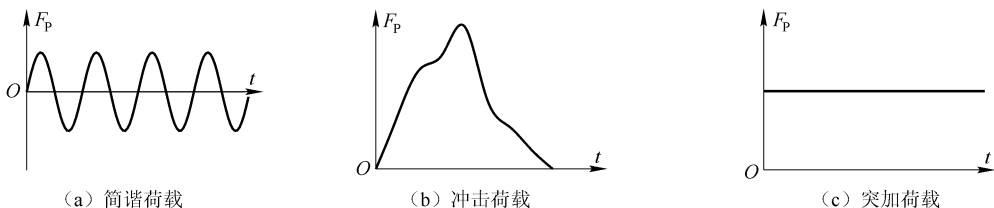


图 2-6 确定性荷载形式示意图

### 2. 非确定性荷载

如果荷载随时间的变化不能用确定时间函数来描述,则称此类荷载为非确定性荷载。随机荷载是一种非确定性荷载,在任一时刻荷载的大小是随机变量。图 2-7 (a) 所示为地震作用随时间的变化曲线,图 2-7 (b) 所示为一实测铁路列车作用于轨道上时某点的竖向荷载随时间变化的曲线,图 2-7 (c) 所示为局部放大图形。

随机荷载可按照随机过程的理论,用统计信息来描述。例如,脉动风和地震波等对建

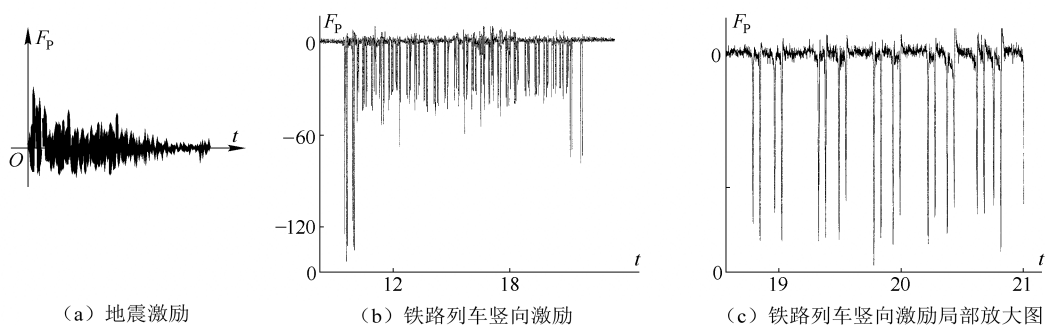


图 2-7 非确定性荷载形式示意图

筑物产生的荷载都是随机荷载。结构在随机荷载作用下的响应分析，称为结构的随机振动分析。本书仅介绍确定性荷载的作用，有关随机振动的内容，感兴趣的读者可参阅相关书籍。

## 2.3 结构动力学的任务和研究内容

### 2.3.1 结构动力问题的基本特性

结构动力学与结构静力学相比，分析上要复杂和困难得多，可以考虑以下几点。

其一，数学处理上要复杂。结构动力学中要考虑结构因振动而产生的惯性力和阻尼力（内容详见 2.5 节），而惯性力涉及位移对时间的二阶导数，这样按牛顿运动定律建立的运动方程为微分方程；而对结构静力学的线弹性问题，平衡方程为线性代数方程。另外，有关阻尼作用的机理，目前尚未完全清楚，只能在数学上做一些假设进行处理，结构静力学则不存在此类问题。

其二，动力问题具有随时间变化的性质，显然动力问题不像静力问题那样具有单一解，而必须建立与时间有关的感兴趣的一系列解答，因此动力分析比静力分析更复杂且更耗时间。

其三，结构的动力响应不仅与荷载如何随时间变化有关，还与结构的刚度分布、质量分布、能量耗散等情况有关（内容详见 2.5 节）。对于不同的结构，只要它们的动力特性相同，那么在相同的动荷载作用下，它们的动力响应（位移、速度、加速度等）的规律都是一样的，这和静力分析是不同的。

### 2.3.2 结构动力学的任务

结构动力学的任务可归纳为以下 3 个方面：

- ① 提供对结构进行动力响应分析的方法；
- ② 确定结构的固有动力特性，并建立结构的固有动力特性、动荷载和结构的动力响应三者之间的相互关系；
- ③ 提供对结构进行动力可靠性设计的依据。

### 2.3.3 结构动力学的研究内容

结构动力学的研究内容包括理论研究和实验研究两个方面。

#### 1. 理论研究

现代结构动力学的理论研究主要包括以下 5 个方面的内容。

(1) 结构的动力响应分析。已知动荷载（输入）和结构的动力特性（系统），求结构的响应（输出）。

(2) 结构的参数识别或系统识别。已知动荷载（输入）和结构的响应（输出），求结构的动力特性（系统）参数或数学模型。

(3) 荷载识别。已知结构的动力特性（系统）和结构的响应（输出），求动荷载（输入）。

(4) 结构的振动控制。综合输入、系统和输出的全部信息，对结构响应进行控制。

(5) 优化设计。设计一个结构，求出最优的设计方案，使其具有预定的动力特性。

以上 5 个方面问题中，第（1）类问题称为结构动力学的正问题；第（2）、（3）、（5）类问题称为结构动力学的逆问题；第（4）类问题称为结构振动控制问题，结构振动控制还分为被动控制、主动控制和混合控制，这将在第 4 章中具体介绍。

#### 2. 实验研究

实验研究不仅为理论分析奠定了基础，而且成为解决实际工程问题的主要手段。例如材料性能和结构阻尼特性的测定、振动环境试验（即在现场或实验室模拟振动环境，检验产品在振动环境中工作的可靠性）等工作，就是主要依靠实验研究。结构动力学实验研究的主要内容有材料性能的测定、结构动力相似模型的研究、结构固有（自由）振动参量的测定、振动环境试验等。

本书主要介绍结构的动力响应问题。

## 2.4 结构动力分析中体系的自由度

工程问题通常不可能得到精确的数学解，只有在某些简单的情况下，才能得到解析解。对于涉及复杂材料特性、荷载和边界条件的一些问题，将引入需要的各种假设和理想化的条件，建立数学模型，以便进行数学处理。在结构动力学中，要得到一个实际结构体系在数学上的合理解，需要一个理想化或简化的数学模型，体系的自由度便是模型建立过程中要研究的一个重要问题。

### 2.4.1 体系的动力自由度

在振动过程的任一时刻，为了表示全部有意义的惯性力的作用，所必须考虑的独立位移分量的个数，称为体系的动力自由度。按照体系的动力自由度的数目，将结构体系分为单自由度体系、多自由度体系（如 2 个自由度、3 个自由度等）及无限自由度体系。实际结构质

量都是连续分布的，因此都是无限自由度体系，但是在工程实际中这样考虑不仅困难，而且往往也是不必要的。所以通常设法将无限自由度问题简化为有限个自由度问题来处理。

与动力自由度相对应，在静力学中一个物体的自由度，通常定义为确定此物体在空间中的位置及全部变形状态所需要的独立参数的数目，应注意二者的区别。以后所提到的自由度均指动力自由度。

## 2.4.2 体系自由度的简化

### 1. 集中质量法

把结构的分布质量按一定的规则集中到结构的某个或某些位置上，成为一系列离散的质点或块，而把结构的其他地方看成没有质量但具有弹性性能，由于仅是这些质点或块才产生惯性力，故离散系统的运动方程只以这些质点的位移或块的位移与转动作为自由度，从而将无限自由度体系简化为有限个自由度的体系。这种方法对于大部分质量集中在若干离散点上的结构特别有效。

如图 2-8 (a) 所示的三层结构，当楼板与柱相比具有无限刚度且不考虑柱子的轴向变形时，并假定结构的总质量集中在楼层上，此时结构可简化为图 2-8 (b) 所示的 3 个自由度的剪切结构模型。

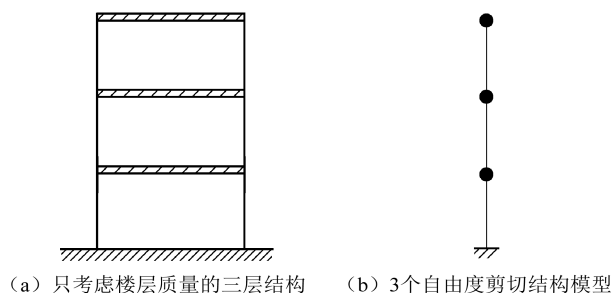


图 2-8 剪切结构模型自由度的简化

### 2. 广义坐标法

假定具有分布质量  $\bar{m}$  的简支梁结构如图 2-9 (a) 所示，振动时的竖向位移  $v(x)$  可以表示为

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

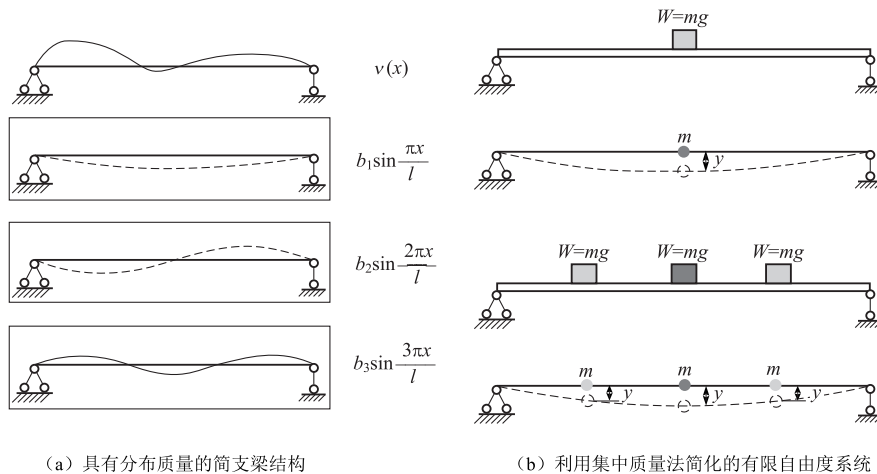
拓展到一般情况，假定具有分布质量的结构体系，在振动时的位移曲线为  $y(x, t)$ ，可用一系列位移函数  $\phi_k(x)$ （它们必须满足支承处的约束条件和结构内部位移的连续性条件）的线性组合来表示，如

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^n A_k(t) \phi_k(x)$$

式中的组合系数  $A_k(t)$  称为体系的广义坐标，表示相应位移函数的幅值，是随时间变化的参

数，其数目代表了所考虑的自由度数，一旦各个系数  $A_k(t)$  确定了，则可以由事先给定的位移函数确定结构振动的位移曲线，因而可以完全描述系统的状态，这样就以广义坐标作为自由度，将无限自由度体系简化为有限个自由度的体系。对于质量分布比较均匀，形状规则且边界条件易于处理的结构，这种方法很有效。体系的自由度数就等于广义坐标数。

当然，图 2-9 (a) 所示结构有时也可采用集中质量法进行简化，这样就将无限自由度系统变成有限自由度系统，如图 2-9 (b) 所示。



(a) 具有分布质量的简支梁结构

(b) 利用集中质量法简化的有限自由度系统

图 2-9 简支梁结构自由度的简化

### 3. 有限单元法

有限单元法是将有限元法的思想用于解决结构的动力计算问题。对分布质量的实际结构，体系的自由度数单元节点可发生的独立位移未知量的总个数，如图 2-10 所示。其要点是先把结构划分成适当数量的单元，然后对每个单元采用广义坐标法，通常取单元的若干个几何特征点处的广义位移作为广义坐标，并对每个广义坐标取相应的位移函数，这样无限自由度的体系就被简化为有限个自由度的体系。

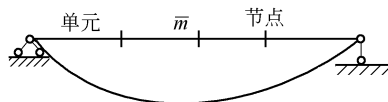


图 2-10 简支梁结构单元划分示意图

一般来说，有限元法综合了集中质量法和广义坐标法的某些特点，是最灵活有效的离散化方法，它提供了既方便又可靠的理想化模型，并特别适合于用电子计算机进行分析，因此是目前最为流行的方法，目前已有不少专用的或通用的程序（如 SAP，ANSYS 等）供结构动力分析之用。

图 2-11 为用通用有限元程序建立的某悬索桥的有限元模型示意图。

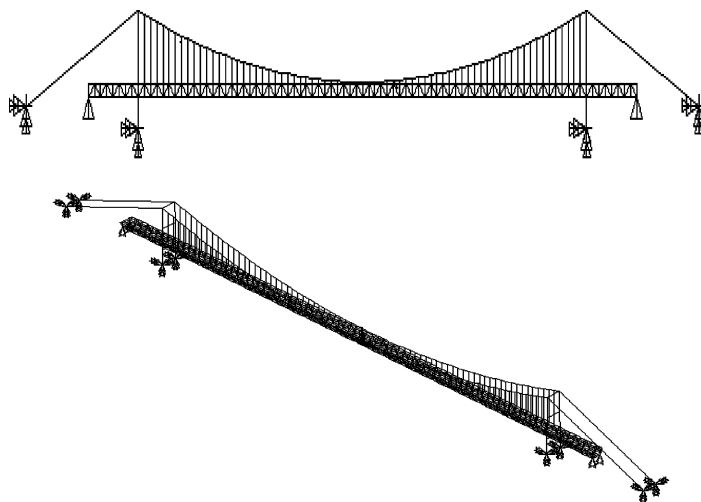


图 2-11 某悬索桥的有限元模型示意图

### 2.4.3 体系自由度的确定

对于广义坐标法或有限单元法，体系的自由度就等于广义坐标数或独立节点的位移数，本节主要介绍采用集中质量法确定体系的自由度。

如图 2-12 (a)~(f) 所示平面结构体系，由于质量  $m$  可能发生水平和竖向运动，因此根据是否忽略杆件轴向变形，可判断体系的自由度。自由度为 1 的体系称为单自由度体系；自由度大于 1 的体系称为多（有限）自由度体系；自由度无限多的体系称为无限自由度体系。

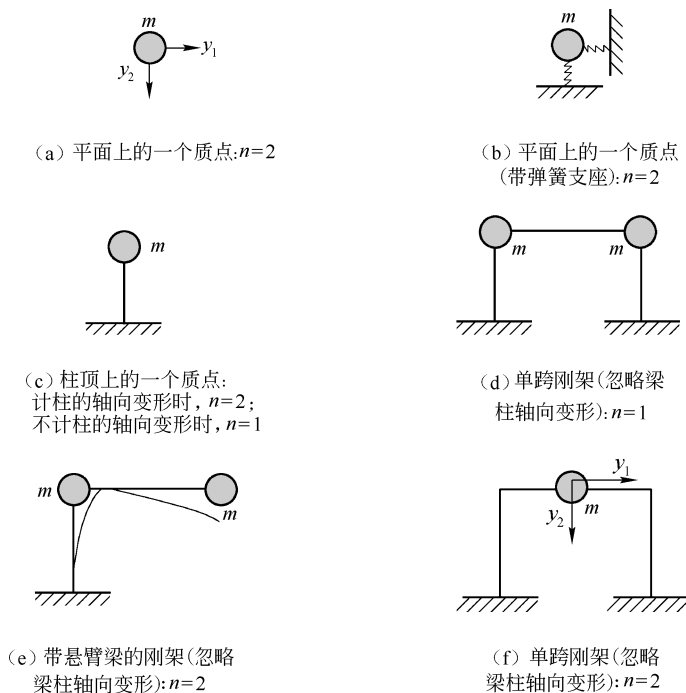


图 2-12 常见平面结构体系自由度的确定

从图 2-12 可以看出,体系的自由度数目与该体系是否超静定,或者超静定的次数多少没有关系。此外,体系的自由度数目也不一定和质点的数目相同,如图 2-12 (d) 的体系有两个质点,但由于忽略梁柱的轴向变形,只用一个水平坐标就可以确定全部两个质量的位移;而图 2-12 (f) 所示的体系虽然只有一个质点,但因为质点的位移需要两个独立的水平和竖向坐标才能确定,因此它有两个自由度。在分析结构自由度时,通常可忽略受弯构件的轴向变形。

## 2.5 结构的动力特性

首先,研究一个最简单的有阻尼单自由度体系的数学模型,如图 2-13 所示。此模型包括下列集中参量元件:

- ① 质量块  $m$ , 用来表示结构的质量和惯性特性;
- ② 弹簧  $k$ , 用来表示结构的弹性恢复力和势能或刚度;
- ③ 阻尼器  $c$ , 用来表示结构的能量耗散;
- ④ 激励荷载  $F(t)$ , 用来表示作用于结构体系上的外力。

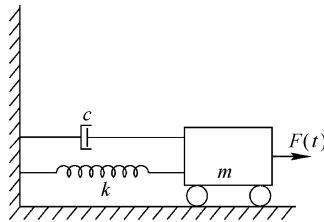


图 2-13 有阻尼单自由度体系的数学模型

在该模型中,假设每个元件只表示一个特性,即质量  $m$  仅表示结构的惯性特性;弹簧  $k$  仅表示结构的刚度;阻尼器  $c$  仅表示结构的能量耗散。则该体系在激励荷载的作用下,响应规律必然与结构的质量、刚度、阻尼特性有关,推广到一般的结构体系,在动荷载作用下,结构的动力响应规律亦与结构的质量(包括转动惯量)分布、刚度分布和能量耗散机制等有关。由这些参量导出的、表征结构动力响应特性的一些固有量,称为结构的动力特性。结构的动力特性包括以下 3 个方面的内容。

### 2.5.1 结构的自振频率

当结构受到某种外界干扰后会产生位移或速度而偏离平衡状态,但外界干扰消失后结构将在其平衡位置附近继续振动,这种振动称为结构的自由振动。而结构在外部激励作用下的振动称为强迫振动。自由振动是受结构的固有特性支配的,并在强迫振动分析中有重要应用。

结构自由振动时的频率称为结构的自振频率或固有频率,记作  $\omega$ 。对大部分工程结构来说,结构的自振频率个数与结构的动力自由度相等。结构的自振频率按由小到大的顺序排列称为结构的频率谱,不同类型的结构具有不同的频率谱特征,其中频率间隔较大的称为稀疏型频率谱,如单跨梁、悬臂梁和不考虑扭转振动的房屋建筑等结构,其频率谱为

稀疏型频率谱；频率间隔较小的称为密集型频率谱，如连续梁、板、空间结构和考虑扭转振动的房屋建筑等结构，其频率谱为密集型频率谱。频率谱中最小的频率称为结构的基本频率，简称基频（或第1频率），记为 $\omega_1$ ，其余依次记为 $\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n$ ，相应地称为第2, 3,  $\dots, n$ 阶频率。

## 2.5.2 结构的振型

当结构按频率谱中某一自振频率做自由振动时，其变形形状保持不变（振动过程中各个质量的位移之比保持一个确定的关系），这种变形形状称为结构的主振型（或固有振型），简称振型。结构按基频做自由振动时的振型称为结构的基本振型，其余依次称为第2, 3,  $\dots, n$ 阶振型。如图2-14所示。

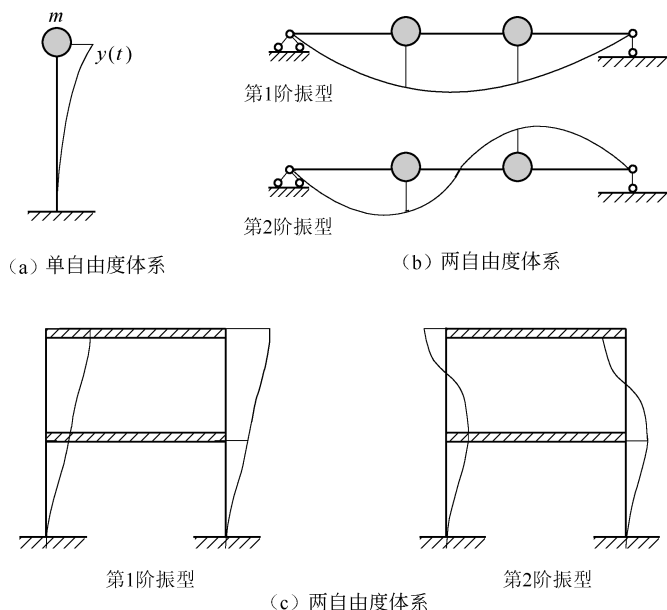


图2-14 简单结构体系的振型

一个 $n$ 自由度的线弹性系统有 $n$ 个固有频率和 $n$ 个振型，而该结构在动荷载作用下的位移响应可用结构振型的线性组合来表示，因此结构振型是结构动力学研究的重要内容之一。

## 2.5.3 结构的阻尼

结构在自由振动过程中，如果没有能量的耗散，振动将永远保持由初始条件决定的振幅，并持续运动下去。但实际上，结构自由振动的振幅都会随时间而衰减，经过一定时间后停止振动，这是因为系统的能量因某些原因而消耗。这种能量的耗散作用称为阻尼，由于阻尼使振动衰减的系统称为有阻尼系统。

通常认为，产生能量耗散的原因有结构材料的内摩擦（或黏性）、构件连接处的摩擦、周围介质（如空气、建筑物地基）的阻力影响等。但有关阻尼的作用机理，目前尚未完全

研究清楚。为了从数学上便于处理，目前通常进行一些假定，采用等效黏滞阻尼理论，即不计空气、地基等因素，假设结构物内部有所谓的阻尼器，以此代表产生阻尼的机制，并且假定作用于质量上的阻尼力大小与质量的运动速度成正比，方向与运动速度方向相反，如单自由度体系，阻尼力可表示为

$$F_D = -c\dot{y}$$

式中， $c$  称为阻尼系数（或黏阻系数）， $\dot{y}$  为质量的速度。等式右边的负号表示阻尼力的方向与运动速度方向相反，这种阻尼称为黏滞阻尼。

利用以上思路可开发出耗散结构能量的实际阻尼器，如摩擦消耗装置、铅挤压阻尼器、黏弹性材料阻尼器、钢件非弹性消能装置、液体阻尼装置等。将它们安装在结构的适当位置，以减小结构的振动。这属于结构振动控制方面的内容。

## 2.6 建立结构体系运动方程的一般方法

### 2.6.1 体系运动方程建立的一般方法

在结构动力学分析中，建立描述体系质量运动位移的数学方程，称为体系的运动方程。该方程的解答揭示了体系在各自由度方向的位移随时间变化的规律，这样结构的振动问题就归结为求解微分方程的数学问题。通常，建立结构运动方程有以下 3 种方法。

#### 1. 直接平衡法

直接平衡法也称为动静法，是将动力学问题转化为任一时刻的静力学问题，按照力的平衡列方程。具体地说，就是利用达朗伯原理，把惯性力作为附加的虚拟力，并考虑阻尼力和作用在结构上的动荷载，使体系处于动力平衡状态。按照静力学中建立平衡方程的思路，根据作用在体系或其微元体上全部力的平衡条件直接写出运动方程。

用直接平衡法建立有限自由度体系运动方程的一般步骤为：

- ① 根据问题的具体情况和对计算精度的要求，确定动力自由度数目，建立计算模型（建模）；
- ② 建立坐标系，给出各自由度的位移参数；
- ③ 沿质量各自由度方向附加惯性力和阻尼力；
- ④ 通过分析质量力的平衡或考虑变形协调，建立体系的运动方程。

直接平衡法有两种，即刚度法（列力的平衡方程）和柔度法（列位移协调方程），具体步骤见 2.6.2 节。

#### 2. 虚功法

根据虚功原理，即作用在体系上的全部力（包括惯性力和阻尼力）在虚位移上所做虚功的总和为零的条件，导出以广义坐标表示的运动方程。此方法对于刚体集合类的广义单自由度体系来说，应用比较方便。

### 3. 变分法

变分法是通过表示能量关系的泛函的变分建立动力平衡方程。首先，利用广义坐标写出系统的动能、势能、阻尼耗散函数及广义力的表达式；其次，根据理论力学中的哈密顿原理或其等价形式的拉格朗日方程导出以广义坐标表示的运动方程。

因为该方法不是明显地应用惯性力、阻尼力和弹性力，而是用动能、耗能和势能的变分项来代替，故称为变分法。此方法对于具有分布柔性的广义单自由度体系来说，应用比较方便。

以上3种方法，形式不同，但实质上都是建立在动平衡的概念上，因此是3种等价的方法。只是对于不同的结构体系，建立运动方程时，3种方法的应用各有所长。本书仅讨论直接平衡法，对其他方法有兴趣的读者，可参阅有关书籍。

## 2.6.2 体系运动方程的建立

### 1. 刚度法

取每一运动质量为隔离体，分析质量所受的全部外力（包括惯性力、阻尼力、动荷载，以及阻止质量沿自由度方向运动的恢复力如约束反力和弹性力），建立质量各自由度的瞬时动平衡方程，即得到体系的运动方程。

### 2. 柔度法

以结构整体为研究对象，假想加上全部惯性力和阻尼力，与动荷载一起在一时刻视为静力荷载，用结构静力分析中计算位移的方法，求出在  $j$  自由度方向上单位广义力 ( $X_{ij}=1$ ) 作用下，第  $i$  ( $i=1, 2, 3, \dots$ ) 自由度方向的位移系数  $\delta_{ij}$  和荷载引起的  $i$  自由度方向的位移  $\Delta_{ip}$ ，然后根据叠加原理列出该时刻第  $i$  自由度方向位移的协调条件，即可得到体系的运动方程。

**【例 2-1】** 如图 2-15 所示，试用刚度法建立刚架在动荷载  $F_P(t)$  作用下的运动方程。

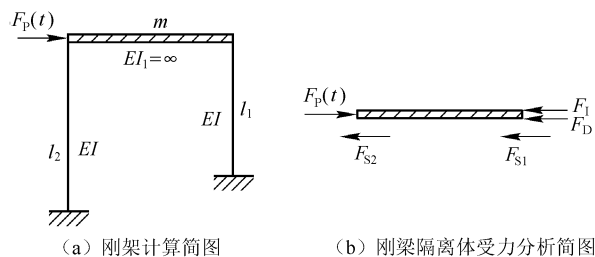


图 2-15 例 2-1 图

**[解]**

(1) 确定自由度数。

由图 2-15 (a) 可知，略去刚架柱的轴向变形，假定横梁为刚性梁，结构只能发生刚梁水平位移，属于单自由度体系。

(2) 确定自由度的位移参数。

设刚梁在任一时刻的位移为  $y$ ，向右为正。

(3) 取质量为隔离体，作为研究对象，进行受力分析。

取刚梁为隔离体，分析所受全部外力，包括质量运动所产生的力：惯性力  $F_I$ （大小与加速度成正比，方向相反），阻尼力  $F_D$ （大小与速度成正比，方向相反），立柱的弹性恢复力  $F_{S1}$ ， $F_{S2}$ （方向与位移方向相反），还包括沿自由度方向作用的外荷载  $F_P(t)$ ，如图 2-15 (b) 所示。

(4) 列动平衡方程。

根据力的平衡条件，得

$$F_P(t) - F_I - F_D - F_{S1} - F_{S2} = 0 \quad (2-23)$$

其中各力的大小如下。

按达朗贝尔原理，得

$$F_I = m\ddot{y}$$

按结构静力分析中的位移法，得

$$F_{S1} = \frac{12EI}{l_1^3} y$$

$$F_{S2} = \frac{12EI}{l_2^3} y$$

按等效黏滞阻尼理论，得

$$F_D = c\dot{y}$$

式中  $c$ ——体系的阻尼系数。

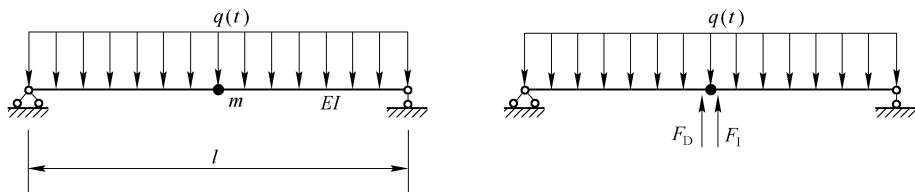
将各力的大小代入式 (2-23) 中，并整理得

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F_P(t) \quad (2-24)$$

式中， $k = \frac{12EI}{l_1^3} + \frac{12EI}{l_2^3}$  为刚度系数。

式 (2-24) 即为图 2-15 所示刚架以刚度系数  $k$  表示的单自由度体系的运动方程。

**【例 2-2】** 如图 2-16 所示，试用柔度法建立图中所示受均布动荷载  $q(t)$  作用的一个集中质量简支梁的运动方程。



(a) 简支梁计算简图

(b) 简支梁受力分析简图

图 2-16 例 2-2 图

**[解]**

(1) 确定自由度数。

由图 2-16 (a) 可知，简支梁的质量集中在一点上，质点仅产生竖向位移，体系为单自由度体系。

(2) 确定自由度的位移参数。

设质点  $m$  的位移为  $y$ ，向下为正。

(3) 取结构整体为研究对象, 进行受力分析。

质点受惯性力  $F_I$  和阻尼力  $F_D$ ; 简支梁上受动荷载  $q(t)$ , 在任一时刻可视为静荷载。

(4) 列位移方程。

结构的动位移为

$$y = \Delta_p - \delta(F_I + F_D) \quad (2-25)$$

式中  $\Delta_p$ ——由动荷载引起质量沿自由度方向的位移;

$\delta$ ——自由度方向加单位广义力所引起的自身方向位移 (柔度)。

由结构位移计算得

$$\Delta_p = \frac{5l^4}{384EI} q(t)$$

$$\delta = \frac{l^3}{48EI}$$

代入式 (2-25), 且  $F_I = m\ddot{y}$ ,  $F_D = c\dot{y}$ , 整理得

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + \frac{1}{\delta}y = \frac{5l}{8}q(t) \quad (2-26)$$

式 (2-26) 即为用柔度系数  $\delta$  表示的图 2-16 中简支梁单自由度体系的运动方程。

在此, 引入等效动荷载或等效干扰力的概念。其含义为: 等效动荷载直接作用在质量上产生的位移和实际动荷载产生的位移相等, 等效动荷载记为  $F_E(t)$ 。按其含义可知, 例 2-2 中  $F_E(t) \cdot \delta = \Delta_p$ , 代入  $\delta$  和  $\Delta_p$  的计算式, 整理得  $F_E(t) = \frac{5l}{8}q(t)$ , 恰等于式 (2-26) 的右端项。因此, 式 (2-26) 又可表示为

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + \frac{1}{\delta}y = F_E(t) \quad (2-27)$$

因为  $k = \frac{1}{\delta}$ , 所以式 (2-27) 又可以写成以刚度系数  $k$  表示的运动方程, 具体为

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F_E(t) \quad (2-28)$$

由例 2-2 可以看出: 任意一个单自由度体系的运动方程都可以抽象为一个质量、弹簧、阻尼器体系的运动方程, 其一般形式为

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F_P(t) \quad (2-29)$$

当动荷载不作用于质量自由度方向时, 用  $F_E(t)$  代替  $F_P(t)$ 。

刚度与柔度是互逆的关系。用刚度法、柔度法这两种方法均可建立运动方程, 但计算量有差异, 要根据具体情况, 灵活应用。

### 2.6.3 多自由度体系运动方程的一般形式

2.6.2 节例题推导了单自由度体系运动方程的形式, 但实际结构简化为单自由度体系只是一种近似, 其结果的精度取决于很多因素, 如果体系真实的动力行为与计算得到的反应很不相似, 则用单自由度简化就很难保证结果的可靠性, 因此就必须用多自由度模型来描述体系的动力反应。本节先介绍两个自由度体系的运动方程的形式, 进而推广到一般的多自由度体系的运动方程。

1. 两个自由度体系的运动方程

**【例 2-3】** 试用刚度法建立图 2-17 所示刚架的运动方程。(假定体系为无阻尼体系)  
[解]

(1) 确定自由度数。

由图 2-17 可知, 结构为剪切型模型, 自由度数为 2。

(2) 确定位移参数。

设质量  $m_1$  的位移为  $y_1$ , 质量  $m_2$  的位移为  $y_2$ 。

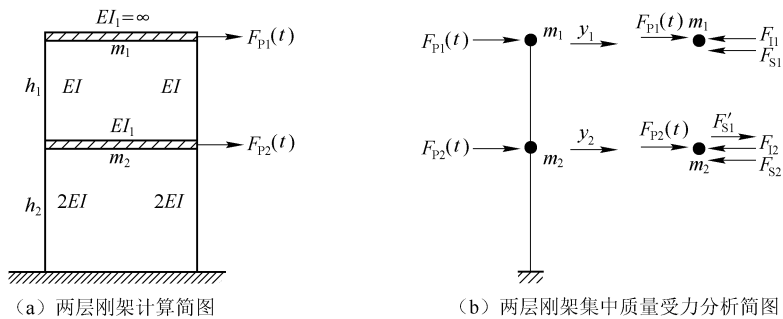


图 2-17 例 2-3 图

(3) 取两个质量为研究对象, 进行受力分析。隔离体受力如图 2-17 所示。  
(4) 对两个质量建立平衡方程。

$$\begin{aligned} F_{P1}(t) - F_{11} - F_{S1} &= 0 \\ F_{P2}(t) - F_{12} - F_{S2} + F'_{S1} &= 0 \end{aligned} \tag{2-30}$$

其中

$$\begin{aligned} F_{11} &= m_1 \ddot{y}_1 \\ F_{S1} &= k_1 (y_1 - y_2) = 2 \times \frac{12EI}{h_1^3} (y_1 - y_2) \\ F_{12} &= m_2 \ddot{y}_2 \\ F_{S2} &= k_2 y_2 = 2 \times \frac{12 \times 2EI}{h_2^3} y_2 \\ F'_{S1} &= F_{S1} \end{aligned}$$

将以上各力的表达式代入式 (2-30), 整理得体系的运动方程。

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + k_{11} y_1 + k_{12} y_2 &= F_{P1}(t) \\ m_2 \ddot{y}_2 + k_{21} y_1 + k_{22} y_2 &= F_{P2}(t) \end{aligned} \right\} \tag{2-31}$$

式中

$$\begin{aligned} k_{11} &= k_1 \\ k_{12} &= k_{21} = -k_1 \\ k_{22} &= k_1 + k_2 \end{aligned}$$

均为体系的刚度系数, 记为  $k_{ij}$ 。

$k_{ij}$  定义为:  $k_{ij}$  等于仅由  $j$  自由度单位位移所引起对应于  $i$  自由度的力, 可由结构静力分析方法求得。式 (2-31) 称为两个自由度体系的运动方程, 用矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{P1} \\ F_{P2} \end{bmatrix} \quad (2-32)$$

用符号表示为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{K}\mathbf{Y} = \mathbf{F}_p \quad (2-33)$$

其中

$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$  为质量矩阵;

$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$  为刚度矩阵;

$\ddot{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix}$  为加速度向量;

$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$  为位移向量;

$\mathbf{F}_p = \begin{bmatrix} F_{P1} \\ F_{P2} \end{bmatrix}$  为干扰力向量。

如果再考虑阻尼影响,容易从形式上推导出  $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$ , 它称为阻尼矩阵,  $c_{ij}$  称为阻尼系数,其定义类似于刚度系数的定义,即  $c_{ij}$  等于仅由  $j$  自由度单位速度所引起对应于  $i$  自由度的阻尼力;  $\dot{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix}$  称为速度向量,则运动方程可表示为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{K}\mathbf{Y} = \mathbf{F}_p \quad (2-34)$$

其中,质量矩阵为对角线矩阵,刚度矩阵为对称矩阵,矩阵或向量的阶数等价于描述结构位移的自由度数,这对于任一集中质量的线性体系均成立。至于阻尼矩阵,前面提到过,阻尼力的机理十分复杂,阻尼系数的确定十分困难,一般可从实验测得的阻尼比  $\xi$  计算得到,关于阻尼比  $\xi$  的概念将在后续章节中介绍。

对例 2-3 再采用柔度法建立运动方程,首先引入柔度影响系数  $\delta_{ij}$ , 定义为:  $\delta_{ij}$  等于仅在  $j$  自由度施加单位荷载而引起  $i$  自由度的位移,可由静力学方法求得。进一步可求出在任意荷载组合作用下各自由度的位移  $y_i$ , 即位移方程,得到运动方程为

$$\mathbf{Y} = \boldsymbol{\delta}(\mathbf{F}_p - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{Y}} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{Y}}) \quad (2-35)$$

式中,  $\boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix}$  为柔度矩阵。

对式(2-35)进行变换得

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{Y}} + \boldsymbol{\delta}^{-1}\mathbf{Y} = \mathbf{F}_p \quad (2-36)$$

式(2-36)与式(2-34)相比较,可知  $\mathbf{K} = \boldsymbol{\delta}^{-1}$ , 即刚度矩阵和柔度矩阵互为逆矩阵,这一结论对任意多自由度体系均成立。但应注意,刚度矩阵和柔度矩阵的对应系数不存在互为倒数的关系,只是在单自由度体系中,刚度系数和柔度系数互为倒数。另外,此处刚度矩阵和柔度矩阵与静力分析中力法、位移法中的刚度矩阵和柔度矩阵不等同,这一点可从对应系

数的含义来理解。

## 2. 多自由度体系的运动方程

由两个自由度体系的运动方程不难推广到  $n$  个自由度体系的运动方程, 同样采用刚度法或柔度法建立的运动方程用矩阵符号表示为

刚度形式

$$M\ddot{Y} + C\dot{Y} + KY = F_E(t) \quad (2-37)$$

柔度形式

$$Y = \delta(F_E(t) - M\ddot{Y} - C\dot{Y}) \quad (2-38)$$

式(2-38)可进一步表示为

$$Y = \Delta_P - \delta(M\ddot{Y} + C\dot{Y}) \quad (2-39)$$

其中

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_n \end{bmatrix} \text{ 为质量矩阵;}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nm} \end{bmatrix} \text{ 为刚度矩阵;}$$

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nm} \end{bmatrix} \text{ 为柔度矩阵;}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nm} \end{bmatrix} \text{ 为阻尼矩阵;}$$

$$Y = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n]^T \text{ 为位移向量;}$$

$$\dot{Y} = [\dot{y}_1 \quad \dot{y}_2 \quad \cdots \quad \dot{y}_n]^T \text{ 为速度向量;}$$

$$\ddot{Y} = [\ddot{y}_1 \quad \ddot{y}_2 \quad \cdots \quad \ddot{y}_n]^T \text{ 为加速度向量;}$$

$$F_E = [F_{E1} \quad F_{E2} \quad \cdots \quad F_{En}]^T \text{ 为等效干扰力向量;}$$

$$\Delta_P = [\Delta_{P1} \quad \Delta_{P2} \quad \cdots \quad \Delta_{Pn}]^T \text{ 为荷载位移向量。}$$

## 思考题与习题

1. 结构动力计算与静力计算的主要区别是什么?

2. 动力自由度的概念与静力自由度有何异同?
3. 结构具有哪些动力特性?
4. 试总结应用刚度法和柔度法建立结构体系运动方程的步骤。
5. 分析图 2-18 所示结构体系的动力自由度。图中杆件抗弯刚度除注明外均为  $EI$ ，不计轴向变形。

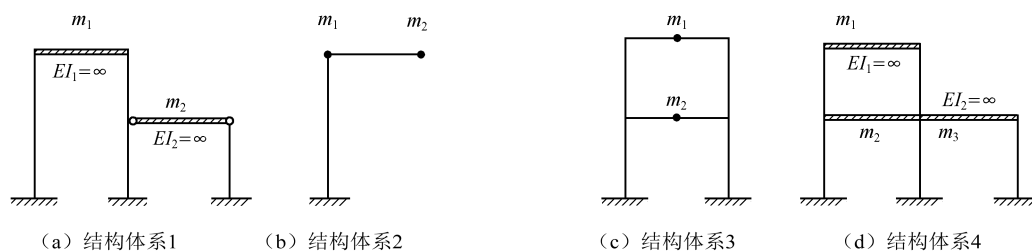


图 2-18 思考题与习题 5 图

6. 试用刚度法写出图 2-19 所示刚性梁体系的运动方程，各柱弹性模量均为  $E$ ，不计轴向变形。(a) 不计阻尼；(b) 计阻尼。

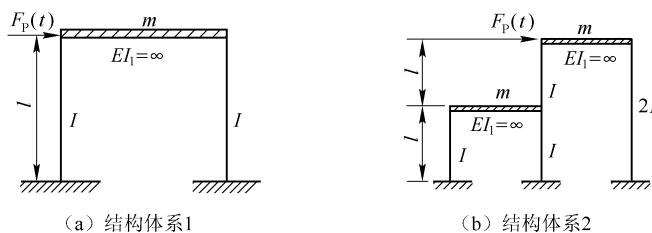


图 2-19 思考题与习题 6 图

7. 试写出图 2-20 所示剪切型结构的无阻尼运动方程。
8. 试建立图 2-21 所示结构的运动方程。各杆的长度为  $l$ ，抗弯刚度为  $EI$ ，荷载作用在杆中间。

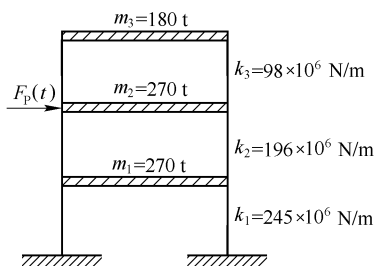


图 2-20 思考题与习题 7 图

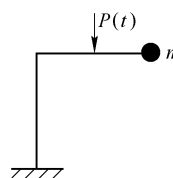


图 2-21 思考题与习题 8 图