第 1 章　概率论的基本概念

本章是概率论最基础的部分，主要内容是随机事件及其运算、事件的概率及其性质、条件概率及与条件概率有关的三个公式和事件的独立性.

1.1　随机事件及其运算

在自然界和人类社会中的现象可分为两类，即确定性现象和非确定性现象.

确定性现象：在一定条件下，只有一个结果，也就是完全可以预测什么结果一定会出现，什么结果一定不会出现，称这类现象为确定性现象.

例如，在物理学中，同性电荷一定相互排斥，异性电荷一定相互吸引. 在标准大气压下，纯水被加热到 100 ℃时必然沸腾. 根据天文学知识预测，2035 年 9 月 2 日，将会在我国北方地区发生日全食，时长为 1 min 29 s.

非确定性现象（随机现象）：在一定的条件下，并不总是出现同一个结果，也就是可能出现这种结果，也可能出现那种结果的现象，称这类现象为随机现象.

例如，抛一枚密度均匀的硬币，有可能正面（字面）向上，也有可能背面（花面）朝上（一般不考虑硬币站立情况），如图 1－1 所示.

图 1－1　硬币的正面、背面和外缘

掷一颗质地均匀的正六面体骰（tóu）子，朝上一面出现的点数可能为 1 点、2 点、3 点、4 点、5 点、6 点共 6 种结果，如图 1－2 所示.

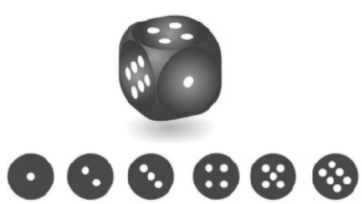


图 1－2　掷一颗质地均匀的正六面体骰子出现的可能点数

记录 24 h 内从外地进入北京的人数，可能是 0 人，1 人，…，1 000 万人，…. 虽然每天进入北京 0 人和 1 000 万人的情况很少发生，但也无法说这两种情况不可能发生，甚至很难准确地说出一天内外地进入北京的最多人数，一般假设为无穷，记作“…”. 这样既不脱离实际情况，又便于数学上的处理.

从一批下了生产线的手机中任取一只测试其寿命，寿命可用时间度量，由于不易确定最长寿命，为了符合实际且便于数学上的处理，用任意一个非负实数描述手机寿命.

读者还能举出一些其他的随机现象吗？

1.1.1 随机试验

随机试验：对相同条件下可以重复的随机现象的观察、记录和实验称为随机试验. 随机试验有以下 3 个特点：

（1）可重复性：可以在相同的条件下重复地进行；

（2）一次试验结果的随机性：在一次试验中可能出现这一结果，也可能出现那一结果，预先无法断定；

（3）所有结果的确定性：所有可能的试验结果是预先可知的.

在大量重复试验或观察中所呈现出的固有规律性称为统计规律性，人们可通过随机试验来研究随机现象的统计规律性.

也有很多随机现象不可重复，如某电影的票房，某同学的期末成绩. 概率论与数理统计主要研究大量能重复的随机现象，但也十分注意研究不能重复的随机现象.

需要指出的是，还有一类常见的非确定性现象——模糊现象. 如某喜剧演员看起来很胖，某男演员看起来很帅，这里的“胖”和“帅”的定义在不同人眼中有不同的标准，具有不确定性，这种由语言造成的定义不确定现象，称为模糊现象. 有一个数学分支——模糊数学来专门研究这类现象.

随机现象与模糊现象的共同特点是不确定性，随机现象中是指事件的结果不确定，而模糊现象中是指事物本身的定义不确定.

思考：司马迁在《报任少卿书/报任安书》中写道：“人固有一死，或重于泰山，或轻于鸿毛”. 请思考这里什么是确定性现象？什么是非确定性现象？

1.1.2 样本空间

集合是现代数学中最为基本的，也是应用最广泛的一个概念. 这里也把集合引入到概率论研究中.

对于随机试验 E，尽管每次试验之前不能预知试验的结果，但试验的所有可能结果组成的集合是已知的. 将随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间，记为 S. 在很多教材中，样本空间也用希腊字母 Ω 表示. 样本空间的元素 e，即随机试验 E 的每个可能结果，称为样本点. 样本点是今后抽样的最基本单元. 认识随机现象首先要列出它的样本空间. 样本空间和样本点的关系常记为 $S=\{e\}$ 或 $\Omega=\{\omega\}$.

【例 1-1】列出下列随机试验的样本空间：

（1）E_1：抛一枚硬币，观察正面、反面出现的情况.

（2）E_2：连续抛一枚硬币 3 次，观察正面、反面出现的情况.

（3）E_3：抛一枚硬币 3 次，观察正面出现的次数.

（4）E_4：掷一颗质地均匀的正六面体骰子（参见图 1−2），观察出现的点数.

（5）E_5：记录某城市 110 接警席电话台一昼夜接到的呼叫次数.

（6）E_6：从一批下了生产线的手机中任取一只，测试其寿命.

（7）E_7：在区间 $[0,1]$ 上任取一点，记录它的坐标.

（8）E_8：在平面区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$ 内任取一点，记录它的坐标.

解　（1）$S_1=\{H,T\}$，其中 H 表示正面朝上，T 表示反面朝上.

（2）$S_2=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\}$.

（3）$S_3=\{0,1,2,3\}$.

（4）$S_4=\{1,2,3,4,5,6\}$.

（5）$S_5=\{0,1,2,\cdots\}=N$，取为自然数集.

（6）$S_6=\{t\mid t\geqslant 0\}$.

（7）$S_7=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}=[0,1]$.

（8）$S_8=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$.

注意：（1）样本空间的元素可以是数，也可以不是数.

（2）随机事件的样本空间至少有 2 个样本点，如果将确定性现象放在一起考虑，则只含有一个样本点的样本空间对应的为确定性现象.

（3）从样本空间包含的样本点个数来区分，可将样本空间分为有限和无限两类. 如 S_1,S_2,S_3,S_4 中的样本点为有限个，S_5,S_6,S_7,S_8 中的样本点为无限个. 但由于 S_5 中的样本点可以与自然数集建立一一映射，称 S_5 中样本点个数为可列（或可数，countable）无限个. S_6,S_7,S_8 中样本点个数为不可列无限个. 在今后的数学处理中，往往将样本点个数为有限个或可列无限个的情况归为一类，称为离散样本空间，而将样本点个数为无限不可列个的情况归为一类，称为连续样本空间. 这两类样本空间有着本质上的差异.

1.1.3　随机事件

在实际问题中，当进行随机试验时，人们常常关心满足某些条件的那些样本点所组成的集合. 例如，在期末考试中，60 分以下的同学有多少？发生 7 级以上地震时，伤亡人数有多少？

一般地，称随机试验 E 的样本空间 S 的子集为 E 的随机事件，简称事件，通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 来表示. 如在试验 E_4 中，$A=$“出现奇数点”是一个用语言描述的事件，可用集合表示为 $A=\{1,3,5\}$，显然 A 是样本空间 S_4 的子集.

在理解概率论中的事件时，应注意以下几点.

（1）任一事件 A 是相应样本空间的一个子集. 常借用集合论的表示方法，用一个矩形表示样本空间 S，用其中的一个圆或其他图形表示事件 A，如图 1–3 所示. 这类图形称为维恩（Venn）图.

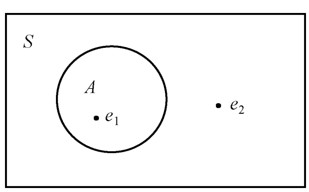


图 1−3　事件 A 的维恩图

（2）当且仅当一次试验的结果为 A 中的一个元素时，称事件 A 发生. 在试验 E_4 中，若令 A 表示“掷出奇数点”，这就意味着投掷一颗骰子，无论掷出 1 点，掷出 3 点，还是掷出 5 点，则都称事件 A 发生（出现）了，记作 $A=\{1,3,5\}$. 若掷出 2 点，则称事件 A 不发生. 在试验 E_8 中，若令 B 表示“在平面上任意投掷一点，落点到原点的距离小于 0.5”，这就表示无论该点的坐标为 $(0,0)$ ，还是 $(0.1,0.2)$ ，…，只要它的两个坐标分量 x,y 满足 $x^2+y^2<0.25$ ，则都称事件 B 在这次试验中发生了，因此也将事件 B 表示为 $\{(x,y)\mid x^2+y^2<0.25\}$.

（3）事件可用集合表示，也可用准确无误的语言描述.

（4）样本空间 S 的最大子集（S 本身）称为必然事件. 样本空间 S 的最小子集（空集 $\varnothing$ ）称为不可能事件. 由样本空间 S 一个样本点组成的单点集称为基本事件. 如试验 E_1 有两个基本事件 $\{H\}$ 和 $\{T\}$.

【例 1−2】掷一颗骰子的样本空间为 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$.

事件 $A=$“出现1点”，它由 S 的单个样本点“1”组成，也可记为 $A=\{1\}$ ，是一个基本事件.

事件 $B=$“出现偶数点”，它由 S 的 3 个样本点“2,4,6”组成，也可记为 $A=\{2,4,6\}$.

事件 $C=$ “出现点数小于 7”，它由 S 的全部样本点“1,2,3,4,5,6”组成，是必然事件 S.

事件 $D=$ “出现点数大于 8”，样本空间 S 的全部样本点都不满足，即不可能事件 $\varnothing$.

事件可用集合来描述，因而事件间的关系与事件的运算自然按照集合论中集合之间的关系和集合运算来处理. 下面给出这些关系和运算在概率论中的表述，并根据“事件发生”的含义，给出它们在概率论中的含义.

设试验 E 的样本空间为 S，则 $A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$ 是 S 的子集.

1.1.4 事件间的关系

1. 包含关系

如果对任意的样本点 $x\in A$ ，有 $x\in B$ ，则称事件 A 包含于 B 或事件 B 包含事件 A，记为 $A\subset B$ ，指的是事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

例如，掷一颗骰子，事件 $A=$ “出现 4 点”发生必然导致事件 $B=$“出现偶数点”发生，故 $A\subset B$. 一条中华田园犬的寿命 T 超过 8 年，记为 $A=(8,+\infty)$ ，寿命 T 超过 5 年，记为 $B=(5,+\infty)$ ，则显然 $A\subset B$.

以后，若无特殊需要，可不必写出样本空间，也可以不必把事件表示成样本点的集合，而是根据事件的关系、运算的定义及具体事件的含义来判断它们之间的关系.

对任一事件 A，必有 $\varnothing\subset A\subset S$.

2. 相等关系

如果事件 A 与事件 B 满足：属于 A 的样本点必属于 B，属于 B 的样本点必属于 A，即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$ ，则称 A，B 相等或 A，B 等价，记作 $A=B$.

例如，掷一颗骰子，若令事件 $A=$ “出现偶数点”，则 $A=\{2,4,6\}$ ，令事件 $B=$ “出现点数能被 2 整除”，则 $B=\{2,4,6\}$ ，显然 $A=B$.

掷一颗骰子两次，事件 $A=$ “两次点数之和为奇数”，事件 $B=$ “两次点数分别为一奇一偶”，容易证明：A 发生必然导致 B 发生，而且 B 发生必然导致 A 发生，所以 $A=B$.

3. 互斥关系

如果事件 A 与事件 B 没有公共的样本点，则称 A 与 B 互斥，也称互不相容. 用概率的语言说：A 与 B 互斥就是 A 与 B 不能同时发生.

例如，在手机寿命试验中，“寿命小于 10 000 小时”和“寿命大于 20 000 小时”就是两个互斥事件.

1.1.5　事件间的运算

事件的运算与集合的运算相同，这里讨论并、交、差和余四种运算，只是用概率论的说法.

1. 事件的并

设 A 与 B 为两事件，称事件 $A\bigcup B=\{x\,|\,x\in A$ 或 $x\in B\}$ 为事件 A 与 B 的和事件. 当且仅当 A 与 B 中至少有一个发生时，事件 $A\bigcup B$ 发生.

类似地，称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件，表示 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个事件发生；称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列无限个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的和事件，表示 $A_1,A_2,\cdots$ 至少有一个事件发生.

例如，在 E_7 中，令 A 表示“任取一点的坐标在 $(0,0.2]$ 中”，则 $A=(0,0.2]$；B 表示“任取一点的坐标在 $(0.1,0.6]$ 中”，则 $B=(0.1,0.6]$；C 表示“任取一点的坐标在 $(0,0.6]$ 中”，则 $C=(0,0.6]$. 显然有 $C=A\bigcup B$.

2. 事件的交

设 A 与 B 为两事件，称事件 $A\bigcap B=\{x\,|\,x\in A$且$x\in B\}$ 为事件 A 与 B 的积事件. 当且仅当 A 与 B 同时发生，事件 $A\bigcap B$ 发生. $A\bigcap B$ 也记作 AB.

类似地，称 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件，表示 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生；称 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列无限个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的积事件，表示 $A_1,A_2,\cdots$ 同时发生.

例如，在 E_7 中，令 A 表示“任取一点的坐标在 $(0,0.2]$ 中”，则 $A=(0,0.2]$；B 表示“任取一点的坐标在 $(0.1,0.6]$ 中”，则 $B=(0.1,0.6]$；C 表示“任取一点的坐标在 $(0.1,0.2]$ 中”，则 $C=(0.1,0.2]$. 显然有 $C=A\bigcap B=AB$.

若事件 A 与 B 满足 $AB=\varnothing$，则称 A 与 B 互斥（互不相容）.

3. 事件的差

设 A 与 B 为两事件，称事件 $A-B=\{x\,|\,x\in A$ 且 $x\notin B\}$ 为事件 A 与 B 的差事件. 当且仅当 A 发生，且 B 不发生.

例如，在 E_5 中，A 表示“接到的呼叫次数不超过 10 次”，则 $A=\{0,1,\cdots,10\}$；B 表示“接到的呼叫次数超过 5 次”，则 $B=\{6,7,\cdots\}$；C 表示“接到的呼叫次数不超过 5 次”，则 $C=\{0,1,\cdots,5\}$. 显然有，$C=A-B$.

4. 事件的余和对立关系

称事件“A 不发生”为 A 的余事件或对立事件，记作 $\overline{A}$，$\overline{A}=\{e\,|\,e\notin A\}$.

显然有 $\overline{\overline{A}}=A$，因而 A 与 $\overline{A}$ 互为对立事件或相互对立，或者互逆. 其实，设 A 与 B 为两事件，若 $A\bigcup B=S$，$A\bigcap B=\varnothing$，则 $A=\overline{B}$，$B=\overline{A}$，A 与 B 互为逆事件，又称 A 与 B 互为

对立事件. 即对每次试验来说，事件 A 与 B 必有一个事件发生，且仅有一个事件发生，则 A 与 B 互为对立事件.

例如，在同一批次采购的同一型号的计算机中，A 表示“任取一台计算机的无故障运行时间不超过 1 000 小时”，B 表示“任取一台计算机的无故障运行时间大于 1 000 小时”，则 $B=\overline{A}$.

注意：（1）对立事件一定是互斥事件，即 $A\cap\overline{A}=\varnothing$ ，但反之不成立，即互斥事件未必是对立事件.

（2）对任意事件 A 与 B，有 $A-B=A\overline{B}$ ， $A-B=A-AB$.

【例 1－3】 设 A,B,C 为三个事件，则

（1）事件“A 与 B 发生，C 不发生”，可表示为：$AB\overline{C}=AB-C$.

（2）事件“ A,B,C 中至少有一个发生”，可表示为：$A\cup B\cup C$.

（3）事件“ A,B,C 中至少有两个发生”，可表示为：$AB\cup AC\cup BC$.

（4）事件“ A,B,C 中恰好有两个发生”，可表示为：$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$.

（5）事件“ A,B,C 同时发生”，可表示为：ABC .

（6）事件“ A,B,C 都不发生”，可表示为：$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

（7）事件“ A,B,C 不全发生”，可表示为：$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$.

5. 事件运算的性质

设 A,B,C 为三个事件，则

（1）交换律：$A\cup B=B\cup A$ ， $AB=BA$. （1－1）

（2）结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ ，$(AB)C=A(BC)$. （1－2）

（3）分配律：$(A\cup B)C=AC\cup BC$ ，$(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$. （1－3）

（4）对偶律（De Morgan’s law）：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\overline{B}$ ， $\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$ （1－4）

事件运算的对偶律是很有用的公式，可以推广到有限个和可列无限个事件的场合.

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i,\ \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A}_i \tag{1－5}$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A}_i,\ \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A}_i \tag{1－6}$$

1.1.6 事件域

为了在下一节定义事件的概率，这里给出“事件域”的概念.

从直观上讲，“事件域”就是一个样本空间的某些子集及其运算（并、交、差、对立）结果而组成的集合类，以后记事件域为 $\mathcal{F}$. 这里的“某些子集”可以是全体子集，也可以是部分子集，要看样本空间的性质而定.

对离散样本空间，用其所有子集的全体就可构成所需的事件域. 而对连续样本空间，构造事件域就不这么简单了. 如当样本空间是实数轴上的一个区间时，可以人为地构造出无法测量其长度的子集，这样的子集常被称为不可测（不可度量）集. 如果将这些不可测集也看成是事件，那么这些事件将无概率可言，这是不希望出现的现象，为了避免这种现象的出现，

没有必要将连续样本空间的所有子集都看成是事件，只需将可“度量”的子集（又称可测集）看成是事件即可.

现在的问题是：应该对哪些子集感兴趣，或者换句话说，$\mathscr{F}$ 中应该有哪些元素?首先，$\mathscr{F}$ 应该包括 S 和 $\varnothing$，其次应该保证事件经过前面所定义的各种运算（并、交、差、对立）后仍然是事件，特别地，对可列并和可列交运算也有封闭性，总之，$\mathscr{F}$ 要对集合的运算都有封闭性. 经过研究人们发现以下规律.

（1）交的运算可通过并与对立来实现（De Morgan’s law）.

（2）差的运算可通过对立与交来实现（$A-B=A\overline{B}$）.

这样一来，并与对立是最基本的运算，于是可给出事件域的定义如下.

定义 1－1 设 S 为一样本空间，$\mathscr{F}$ 为 S 的某些子集所组成的集合类. 如果 $\mathscr{F}$ 满足：

（1）$S\in\mathscr{F}$；

（2）$A\in\mathscr{F}$，则对立事件 $\overline{A}\in\mathscr{F}$；

（3）若 $A_i\in\mathscr{F},i=1,2,\cdots$，可列并 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{F}$，则称 $\mathscr{F}$ 为一个事件域，又称为 σ 域或 σ 代数.

在概率论中，又称 $(S,\mathscr{F})$ 为可测空间，在可测空间上才可定义概率. 这时，$\mathscr{F}$ 中都是有概率的事件.

【例 1－4】常见的事件域.

（1）事件若样本空间只含两个样本点 $S=\{e_1,e_2\}$，记 $A=\{e_1\}$，$\overline{A}=\{e_2\}$，则其事件域为 $\mathscr{F}=\{\varnothing,A,\overline{A},S\}$.

（2）若样本空间含有 n 个样本点 $S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，则其事件域 $\mathscr{F}$ 是由空集 $\varnothing$，n 个单元素集、C_n^2 个双元素集，C_n^3 个三元素集，$\cdots$ S 组成的集合类，这时 $\mathscr{F}$ 中共有 $\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2+\cdots+\mathrm{C}_n^n=2^n$ 个事件.

（3）若样本空间含有可列个样本点 $S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n,\cdots\}$，则其事件域 $\mathscr{F}$ 是由空集 $\varnothing$，可列个单元素集，可列个双元素集，…可列个 n 元素集，…S 组成的集合类，这时 $\mathscr{F}$ 由可列个的可列个（仍为可列个）元素（事件）组成.

（4）若样本空间含有全体实数 $S=(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$. 这时事件域 $\mathscr{F}$ 中的元素无法一一列出，而是由一个基本集合类逐步扩展形成，具体操作如下.

① 取基本集合类 $P=$“全体半直线组成的类”，即 $P=\{(-\infty,x)\,|\,-\infty<x<+\infty\}$.

② 利用事件域的要求，首先把有限的左闭右开区间扩展进来

$$[a,b)=(-\infty,b)-(-\infty,a)\text{，其中 } a,b\in\mathbf{R}.$$

③ 再把闭区间、单点集、左开右闭区间、开区间扩展进来

$$[a,b]=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[a,b+\frac{1}{n}\right),\ \{b\}=[a,b]-[a,b),$$

$$(a,b]=[a,b]-\{a\},\ (a,b)=[a,b)-\{a\}.$$

④ 最后用（有限个或可列无限个）并运算和交运算把实数集中一切有限集、可列集、开集、闭集都扩展进来，经过上述几步扩展所得之集的全体就是人们希望得到的事件域 $\mathscr{F}$，因为它满足事件域的定义. 这样的事件域又称为博雷尔（Borel）事件域，域中的每个元素（集合）又称为博雷尔集，或者称为可测集，这种可测集都是有概率可言的事件.

定义 1－2（样本空间的分割） 对样本空间 S，如果有 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足：$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互斥，且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=S$．则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 S 的一组分割（划分）．也可以是可列无限个互斥的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 组成 S 的一个分割．分割常在概率与统计研究中使用，因为它可以简化被研究的问题（具体可见 1.4.3 节全概率公式）．例如，电视机的彩色浓度 x 是重要的质量指标，它的目标值是 m．彩色浓度过大或过小都是不适当的，由于随机性，要在生产中把彩色浓度控制在点 m 上也是不可能的．因为没有必要对彩色浓度的每个可能出现的值进行考察，所以常把彩色浓度按顾客可接受的情况分为以下几档（其中 a 为某个常数）：$D_1=\{x\,\|\,x-m|\leqslant a\}$（一等品），$D_2=\{x\,|\,a<|x-m|\leqslant 2a\}$（二等品），$D_3=\{x\,|\,2a<|x-m|\leqslant 3a\}$（三等品），$D_4=\{x\,\|\,x-m|>3a\}$（不合格品）．这样就把彩色浓度的样本空间 $S=(-\infty,+\infty)$ 划分成四个互不相容的事件，产生一个分割 $\mathcal{D}=\{D_1,D_2,D_3,D_4\}$．这时人们的研究只要限制在由分割 $\mathcal{D}=\{D_1,D_2,D_3,D_4\}$ 中一切可能的并及空集 $\varnothing$ 组成的事件域上，因此该事件域称为由分割 $\mathcal{D}$ 产生的事件域，记为 $\sigma(\mathcal{D})$．该事件域仅含 $2^4=16$ 个不同的事件，研究就简化了．

一般情况下，若分割 $\mathcal{D}=\{D_1,D_2,\cdots,D_n\}$ 由 n 个事件组成，则其产生的事件域 $\sigma(\mathcal{D})$ 共含有 2^n 个不同的事件．分割方法常在一些问题的研究中使用，它可以使事件域简化．

1.2 概率的定义及其运算

什么是概率？一个简单而直观的说法是：概率是随机事件发生的可能性大小．本节给出概率的定义及其确定方法．先看下面一些经验事实．

（1）随机事件的发生具有偶然性，但发生的可能性有大小之分．天鹅羽毛主要有白和黑两种，任取一只天鹅，其羽毛是白色的可能性大．

（2）随机事件发生的可能性是可以设法度量的，就好比一根木棒有长度，一块土地有面积一样．例如，抛一枚硬币，出现正面与出现反面的可能性是相同的，各为 1/2．足球裁判就用抛硬币的方法让双方队长选择场地，以示机会均等．

（3）在日常生活中，人们对一些随机事件发生的可能性大小往往是用百分比（0 到 1 之间的一个数）进行度量的．例如，购买彩票后可能中奖，也可能不中奖，中奖的可能性大小可以用中奖率来度量；抽取一件产品可能为合格品，也可能为不合格品，产品质量的好坏可以用不合格品率来度量；新生婴儿可能为男孩，也可能为女孩，生男孩的可能性可以用男婴出生率来度量．这些中奖率、不合格品率、男婴出生率等都是概率的原型．

在概率论发展的历史上，曾有过概率的古典定义、概率的几何定义、概率的频率定义和概率的主观定义．这些定义各适合一类随机现象．那么如何给出适合一切随机现象的概率的最一般的定义呢? 1900 年，数学家希尔伯特（Hilbert，1862—1943）提出要建立概率的公理化定义以解决这个问题，即从最少的几条本质特性出发去刻画概率的概念．1933 年，苏联数学家柯尔莫戈罗夫（Kolmogorov，1903—1987）首次提出了概率的公理化定义，这个定义既概括了历史上几种概率定义中的共同特性，又避免了各自的局限性和含混之处，不管什么随

机现象，只有满足该定义中的三条公理，才能说它是概率. 这一公理化体系迅速获得举世公认，是概率论发展史上的一个里程碑. 有了这个公理化定义后，概率论得到了迅速发展.

1.2.1　概率的公理化定义

定义 1－3　设 S 为一个样本空间，$\mathcal{F}$ 为 S 的某些子集组成的一个事件域. 如果对任一事件 $A\in\mathcal{F}$，定义在 $\mathcal{F}$ 上的一个实值映射（函数）满足：

（1）非负性公理：若 $A\in\mathcal{F}$，则 $P(A)\geqslant 0$；

（2）正则性公理：对必然事件 S，有 $P(S)=1$；

（3）可列可加性公理：若 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 互不相容，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i) \tag{1－7}$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率，称三元素 $(S,\mathcal{F},P)$ 为概率空间.

概率的公理化定义刻画了概率的数学本质，概率是集合（事件）的映射（函数），若在事件域 $\mathcal{F}$ 上定义一个映射，该映射能满足上述三条公理，则被称为概率；当这个映射不满足上述三条公理中的任一条，就被认为不是概率.

公理化定义没有告诉人们如何去确定概率. 历史上在公理化定义出现之前，概率的频率定义、古典定义、几何定义和主观定义都在一定的场合下有各自确定概率的方法，所以在有了概率的公理化定义之后，把它们看作确定概率的方法是恰当的. 下面先介绍在确定概率的古典方法中大量使用的排列与组合公式，然后分别讲述确定的方法.

1.2.2　排列与组合公式

排列与组合都是计算“从 n 个元素中任取 r 个元素”的取法总数公式，其主要区别在于是否考虑取出元素间的次序，如果考虑次序，则用排列公式，否则用组合公式. 可以从实际问题中分析是否考虑元素间的顺序.

例如，人们在排队和打扑克牌时往往讲先后次序，而在体育比赛中，把参赛队分为几个组，往往可以不考虑每个组的成员的顺序.

1. 计数原理

排列与组合公式的推导都基于以下两条计数原理.

1）加法原理

加法原理是分类计数原理. 如果做一件事，完成它可以有 k 类方法，在第一类方法中有 m_1 种不同方法，在第二类方法中有 m_2 种不同方法，…，在第 k 类方法中有 m_k 种不同方法，那么完成这件事共有 $m_1+m_2+\cdots+m_k$ 种不同的方法.

2）乘法原理

加法原理是分步计数原理. 如果做一件事，完成它需要分成 k 个步骤，做第一步有 m_1 种不同方法，做第二步有 m_2 种不同方法，…，做第 k 步有 m_k 种不同方法，那么完成这件事共有 $m_1\times m_2\times\cdots\times m_k$ 种不同的方法.

加法原理和乘法原理是两个基本原理，它们的区别在于一个与分类有关，另一个与分步有关. 运用以上两个原理的关键在于分类要恰当，分步要合理. 分类必须包括所有情况，又

不要交错在一起产生重复，要依据同一标准划分；而分步则应使各步依次完成，保证整个事件得到完成，不得多余、重复，也不得缺少某一个步骤.

分类计数原理、分步计数原理，回答的都是有关做一件事的不同方法种数的问题. 两者的区别在于：分类计数原理针对的是“分类”问题，其中各种方法相互独立，用其中任何一种方法都可以做完这件事；分步计数原理针对的是“分步”问题，各步骤中的方法相互依存，只有各个步骤都完成才算做完这件事. 两个计数原理渗透了“以简驭繁、化难为易”的基本思想.

2. 公式的定义及其计算公式

排列与组合公式的定义及其计算公式如下.

1）排列

从 n 个不同元素中任取 $r(r \leqslant n)$ 个元素排成一列（考虑元素先后出现次序），称此为一个排列. 这种排列的总数记为 P_n^r，按照乘法原理可得

$$\mathrm{P}_n^r = n\times(n-1)\times\cdots\times(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!} \tag{1-8}$$

当 $r < n$ 时，这个排列被称作选排列；当 $r = n$ 时，称作全排列，记为 P_n，显然 $\mathrm{P}_n = n!$.

2）重复排列

从 n 个不同元素中每次任取一个，放回后再取下一个，如此连续取 r 次所得的排列称为重复排列，这种重复数排列数共有 n^r 个. 注意：这里允许 $r > n$.

3）组合

从 n 个不同元素中任取 $r(r \leqslant n)$ 个元素并成一组（不考虑元素先后出现次序），称此为一个组合，此种组合的总数记为 $\binom{n}{r}$ 或 C_n^r. 按乘法原理此种组合的总数为

$$\binom{n}{r}=\frac{\mathrm{P}_n^r}{r!}=\frac{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{1-9}$$

这里规定 $0!=1,\binom{n}{0}=1$. 组合具有性质 $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$.

4）重复组合

重复组合是一种特殊的组合，从 n 个不同元素中可重复地选取 r 个元素，不管其顺序合成一组，也就是从 n 个不同元素中每次任取一个，放回后再取下一个，如此连续取 r 次所得的组合称为重复组合，这种重复排列数共有 $\binom{n+r-1}{r}$ 个. 注意：这里也允许 $r > n$.

例如，从 3 个元素的集合 $\{a,b,c\}$ 中，取 2 个元素，如果允许所取得元素重复，则有 $\{aa,ab,ac,bb,bc,cc\}$，共有 $\binom{n+r-1}{r}=\binom{3+2-1}{2}=\binom{4}{2}=6$ 种.

又如，同时抛 5 枚硬币，会出现多少种不同的情况呢?把各种不同的情况一一列举出来就是：

正面	5	4	3	2	1	0
反面	0	1	2	3	4	5

如果把硬币的“正面”和“反面”看成两个不同的元素，那么这个问题就是：从 2 个不同的元素中，取出 5 个元素的组合，显然，所取的元素允许重复，共有 $\binom{n+r-1}{r}=\binom{2+5-1}{5}=\binom{6}{5}=6$ 种情况.

上述四种排列组合及其计算公式，在确定概率的古典方法中经常使用，但在使用中要注意识别是否讲次序、是否重复.

1.2.3　确定概率的频率方法

确定概率的频率方法是通过大量的重复试验，用频率的稳定值去确定概率的一种方法，其基本思想如下.

（1）与事件 A 有关的随机试验可大量重复进行.

（2）在 n 次重复试验中，记 $n(A)$ 为事件 A 发生的次数，又称 $n(A)$ 为事件 A 的频数，称

$$f_n(A)=\frac{n(A)}{n}$$

为事件 A 发生的频率.

（3）人们通过长期的实践发现，随着试验重复的次数 n 的增加，频率 $f_n(A)$ 会稳定在某一个常数 p 附近，称常数 p 为频率的稳定值，可以把 p 作为事件 A 发生的概率.

注意：确定概率的频率方法虽然合理，但在现实世界里，人们把试验无限地重复下去，故无法精确获得频率的稳定值. 概率方法提供了概率的一个可供想象的具体值，在试验重复次数 n 较大时，可用频率给出概率的一个近似值，这一点是频率方法最有价值的地方. 在统计学中，就是这么做的，且称频率为概率的估计值.

容易验证：用频率方法确定的概率满足公理化定义，① 非负性：$f_n(A)\geqslant 0$；② 正则性：$f_n(S)=1$；③ 可加性：若 $AB=\varnothing$，则 $f_n(A\cup B)=\frac{n(A)+n(B)}{n}=\frac{n(A)}{n}+\frac{n(B)}{n}=f_n(A)+f_n(B)$.

【例 1−5】说明频率稳定性的例子.

1）抛硬币试验

历史上有不少人做过抛硬币试验，结果见表 1−1. 从表中可以看出：出现正面的频率稳定在 0.5 左右. 用频率的方法可以说：出现正面的频率为 0.5.

表 1–1　历史上抛硬币试验的若干结果

试验者	抛硬币次数	出现正面次数	频率
德・摩根（De Morgan）	2 048	1 061	0.518 1
布丰（Buffon）	4 040	2 048	0.506 9
费勒（Feller）	10 000	4 979	0.497 9
皮尔逊（Pearson）	12 000	6 019	0.501 6

2）女婴的出生频率

历史上较早研究这个问题的有拉普拉斯（Laplace，1749—1827），他对伦敦、彼得堡、柏林和全法国的大量人口资料进行研究，发现女婴出生频率总是在 $21/43 \approx 0.488\,4$ 左右波动.

出生人口性别比也叫婴儿性别比，正常情况下，每出生 100 个女婴，相应地出生 103～107 个男婴. 2019 年，我国出生人口性别比为 110.12，女婴出生频率为 $100/(100+110.12) \approx 0.475\,9$.

1.2.4　确定概率的古典方法

确定概率的古典方法是概率论历史上最先开始研究的情形. 它简单、直观、不需要做大量重复试验，而是在经验事实的基础上，对被考察事件的可能性进行逻辑分析后得出该事件的概率.

古典方法的基本思想如下.

（1）样本空间 S 中样本点的个数 $|S|=n$ 为有限个；

（2）每个样本点发生的可能性是相等的（称为等可能性）.

（3）若事件 A 含有 k 个样本点，即 $|A|=k$ ，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{|A|}{|S|}=\frac{k}{n} \tag{1-10}$$

容易验证，用上述方法确定的概率满足公理化定义，它的非负性与正则性是显然的，若 $AB=\varnothing$ ，则 $P(A\cup B)=\dfrac{|A|+|B|}{|S|}=\dfrac{|A|}{|S|}+\dfrac{|B|}{|S|}=P(A)+P(B)$.

古典方法是概率论发展初期确定概率的常用方法，故所得的概率又称古典概率. 具有以上（1）和（2）两个特点的试验模型称为古典概型，也称为等可能概型. 古典概型的计算公式非常简单，但应用却是千变万化的，而且经常要应用排列组合公式.

【例 1-6】抛两枚硬币，求出现一个正面 H 一个反面 T 的概率.

解　样本空间为 $S=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$ ，设 $A=$ “出现一个正面 H 一个反面 T”，则 $A=\{(H,T),(T,H)\}$ ，所以 $P(A)=\dfrac{|A|}{|S|}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

【例 1-7】（超几何分布）　一批产品共有 N 件，其中 D 件次品， $N-D$ 件正品. 现从中不放回任取 n 件，问其中恰有 $k(k\leqslant D)$ 件次品的概率是多少？

解　先计算样本空间 S 的样本点总数：从 N 件产品中不重复地任取 n 件，因为不讲次序，所以 $|S|=\dbinom{N}{n}$. 因为是随机抽取的，所以这 $\dbinom{N}{n}$ 个样本点是等可能的.

令 $A=$ “取出的 n 件产品中恰有 $k(k\leqslant D)$ 件次品”，下面计算 $|A|$.

要使取出的 n 件产品中有 k 件为次品，其他 $n-k$ 件为正品，可分两步进行：① 从 D 件次品中任取 k 件，共有 $\dbinom{D}{k}$ 种取法；② 从 $N-D$ 件次品中任取 $n-k$ 件，共有 $\dbinom{N-D}{n-k}$ 种取法，按照乘法原理 $|A|=\dbinom{D}{k}\dbinom{N-D}{n-k}$ ，所以

$$P(A)=\frac{|A|}{|S|}=\frac{\dbinom{D}{k}\dbinom{N-D}{n-k}}{\dbinom{N}{n}}.$$

注意：$\max\{n-N+D,0\}\leqslant k\leqslant\min\{D,n\}$.

例如，如当 $N=10, D=4, n=8$ 时，因为要不放回取 8 件产品，而只有 $N-D=6$ 件正品，所以至少要取 $n-(N-D)=2$ 件次品才能凑够 8 件，但次品只有 $D=4$ 件，所以 k 只能取 2, 3, 4.

思考：*若把不放回抽样改为放回抽样，如何求这种情况下的概率.*

【例 1−8】（彩票问题）　一种福利彩票称为七乐彩，即购买时从 01，02，…，30 中任选 7 个号码，开奖时从 01，02，…，30 中不重复地选出 7 个基本号码和 1 个特殊号码. 根据投注号码与当期中奖号码相符个数的多少确定中奖资格，中各等奖的规则如下：

一等奖：投注号码与当期开奖号码中 7 个基本号码完全相同（顺序不限，下同）；

二等奖：投注号码与当期开奖号码中任意 6 个基本号码及特别号码相同；

三等奖：投注号码与当期开奖号码中任意 6 个基本号码相同；

四等奖：投注号码与当期开奖号码中任意 5 个基本号码及特别号码相同；

五等奖：投注号码与当期开奖号码中任意 5 个基本号码相同；

六等奖：投注号码与当期开奖号码中任意 4 个基本号码及特别号码相同；

七等奖：投注号码与开奖号码中任意 4 个基本号码相同.

试求各等奖的中奖概率.

解　因为不重复地选号码是一种不放回抽样，样本空间 S 含有 $\dbinom{30}{7}$ 个样本点. 要中奖应把抽取看成三种类型的抽取：

第一类号码：7 个基本号码.

第二类号码：1 个特殊号码.

第三类号码：22 个无用号码.

注意到例 1−7 是在两类元素（正品和次品）中抽取，这里是在三类号码中抽取，设 p_i 为中第 i 等奖的概率（$i=1,2,\cdots,7$），可得各等奖的中奖概率如下

$$p_1=\frac{\dbinom{7}{7}\dbinom{1}{0}\dbinom{22}{0}}{\dbinom{30}{7}}=\frac{1}{2\,035\,800}=0.491\,2\times10^{-6}$$

$$p_2=\frac{\dbinom{7}{6}\dbinom{1}{1}\dbinom{22}{0}}{\dbinom{30}{7}}=\frac{7}{2\,035\,800}=3.438\,5\times10^{-6}$$

$$p_3=\frac{\binom{7}{6}\binom{1}{0}\binom{22}{1}}{\binom{30}{7}}=\frac{154}{2\,035\,800}=7.564\,6\times10^{-5}$$

$$p_4=\frac{\binom{7}{5}\binom{1}{1}\binom{22}{1}}{\binom{30}{7}}=\frac{462}{2\,035\,800}=2.269\,5\times10^{-4}$$

$$p_5=\frac{\binom{7}{5}\binom{1}{0}\binom{22}{2}}{\binom{30}{7}}=\frac{4\,851}{2\,035\,800}=0.002\,4$$

$$p_6=\frac{\binom{7}{4}\binom{1}{1}\binom{22}{2}}{\binom{30}{7}}=\frac{8\,085}{2\,035\,800}=0.004$$

$$p_7=\frac{\binom{7}{4}\binom{1}{0}\binom{22}{3}+\binom{7}{3}\binom{1}{1}\binom{22}{3}}{\binom{30}{7}}=\frac{107\,800}{2\,035\,800}=0.053$$

若记 A 为事件“中奖”，则 $\overline{A}$ 为事件“不中奖”，且由 $P(A)+P(\overline{A})=P(S)=1$ 可得

$$P(A)=p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6+p_7=\frac{121\,360}{2\,035\,800}=0.059\,6$$

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-0.059\,6=0.940\,4$$

这说明：在一百位购买单张“七乐彩”彩票的彩民中，约有 6 人中奖，而中头奖的概率不足千万分之五. 因此，购买彩票时对中奖不能有太高期望.

【例 1−9】（盒子模型）设有 n 个球，每个球都等可能地被放到 N 个盒子中的任一个盒子，每个盒子能放的球数不限. 试求：

（1）指定的 $n(n\leqslant N)$ 个盒子中各有一球的概率 p_1；

（2）恰好有 $n(n\leqslant N)$ 个盒子各有一球的概率 p_2.

解 因为每个球都可放到 N 个盒子中的任一个盒子，所以 n 个球放的方式共有 N^n 种，它们是等可能的.

（1）因为各有一球的 n 个盒子已经指定，余下的没有球的 $N-n$ 个盒子也同时被指定，所以只要考虑 n 个球在这指定的 n 个盒子中各放 1 个的放法数. 设想第 1 个球有 n 种放法，第 2 个球只有 $n-1$ 种放法，…，第 n 个球只有 1 种放法，所以根据乘法原理，其可能总数为 $n!$，于是其概率为 $p_1=\dfrac{n!}{N^n}$.

（2）与（1）的差别在于：这 n 个盒子可以在 N 个盒子中任意选取. 此时可分两步做：一步从 N 个盒子中任取 n 个盒子准备放球，共有 $\binom{N}{n}$ 种取法；第二步将 n 个球放入选中的 n 个盒子中，每个盒子各放 1 个球，共有 $n!$ 种放法. 所以根据乘法原理共有 $\binom{N}{n}\times n! = \mathrm{P}_N^n = N(N-1)\cdots(N-n+1)$ 种放法. 其实这个放法数可以更直接地考虑成：第 1 个球可放在 N 个盒子中的任一个盒子，第 2 个球只可放在余下的 $N-1$ 个盒子中的任一个盒子，……，第 n 个球只可放在余下的 $N-(n-1)=N-n+1$ 个盒子中的任一个盒子，由乘法原理即可得以上放法数. 因此所求概率为

$$p_2 = \frac{\mathrm{P}_N^n}{N^n} = \frac{N!}{N^n(N-n)!}.$$

表面上看，盒子模型讨论的是球和盒子问题，似乎是一种游戏，但实际上可以将这个模型应用到很多实际问题中. 下面用盒子模型来讨论概率论历史上颇为有名的“生日问题”.

【例 1－10】（生日问题） n（$n \leqslant 365$）个人的生日全不相同的概率 p_n 是多少?

解　把 n 个人看成是 n 个球，将一年 365 天看成是 $N=365$ 个盒子，则“n 个人的生日全不相同”就相当于“恰好有 $n(n \leqslant N)$个盒子各有一球”，所以 n 个人的生日全不相同的概率为

$$p_n = \frac{365!}{365^n(365-n)!} = \left(1-\frac{1}{365}\right)\left(1-\frac{2}{365}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{365}\right) \tag{1－11}$$

上式看似简单，但其具体计算是烦琐的. 可用以下方法作近似计算.

（1）当 n 较小时，式（1－11）等号右边各因子的第二项之间的乘积 $\frac{i}{365}\times\frac{j}{365}$ 都可以忽略，于是有近似公式

$$p_n \approx 1-\frac{1+2+\cdots+n-1}{365} = 1-\frac{n(n-1)}{730} \tag{1－12}$$

（2）当 n 较大时，对于较小的正数 x，有 $\ln(1-x)\approx -x$，故由式（1－11）得

$$\ln p_n \approx -\frac{1+2+\cdots+n-1}{365} = -\frac{n(n-1)}{730} \tag{1－13}$$

例如，当 $n=10$ 时，式（1－12）计算的近似值为 0.884 0，精确值为 0.883 1…，当 $n=30$ 时，计算的近似值为 0.303 7，精确值为 0.293 7….

p_n 的近似值见表 1－2.

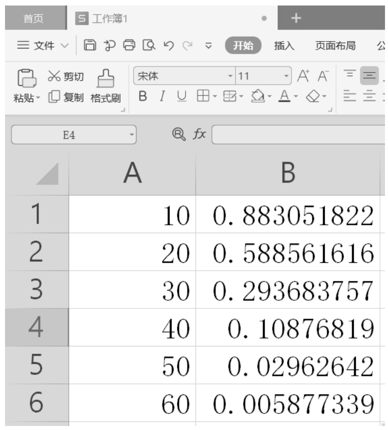
表 1–2　p_n 的近似值

n	10	20	30	40	50	60
p_n	0.884 0	0.594 2	0.303 7	0.118 0	0.034 9	0.007 8
$1-p_n$	0.116 0	0.405 8	0.696 3	0.822 0	0.965 1	0.992 2

表 1–2 中最后一行是对立事件“n 个人中至少有两人生日相同”概率$1-p_n$. 当$n=60$时，$1-p_n\approx 0.99$表明在 60 个人的群体中，至少有两人生日相同的概率超过 99%，这是出乎人们意料的.

现在几乎所有计算机和手机上都有办公软件套装，如微软的 Office 套装或金山公司的 WPS，这里以 WPS 为例，说明上面 p_n 精确值的计算.

打开 WPS，新建表格，在第一列输入 10～60，然后在第二列第一行中输入“=PERMUT(365,A1)/365^A1”，按回车键即可计算出对应 p_n 的概率值，选中，下拉表格可得其他情况下的计算结果如图 1–4 所示.



	A	B
1	10	0.883051822
2	20	0.588561616
3	30	0.293683757
4	40	0.10876819
5	50	0.02962642
6	60	0.005877339

图 1–4　计算结果

1.2.5　确定概率的几何方法

确定概率的几何方法的基本思想如下.

（1）样本空间 S 中的样本点充满某个区域，其度量（长度、面积或体积等）大小 m_S 为有限正实数.

（2）每个样本点落在度量相同的子区域内（位置可以不同）发生的可能性是相等的.

（3）若事件 $A\subset S$，其度量大小为 m_A，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{m_A}{m_S} \tag{1–14}$$

这个概率称为几何概率，它满足概率的公理化定义.

求几何概率的关键是找到样本空间 S 和事件 A 对应的几何图形表示，然后计算出几何图形的度量（长度、面积或体积）.

【例 1–11】（会面问题）　甲乙两人相约某时间段 T 内在某地会面，并约定先到者等候另一人，过一定时间 $t(t\leqslant T)$ 后即可离开. 设甲、乙两人在时间段 T 内的任一时间段内到达约会地点的概率正比于该时间段的长度，求两人能会面成功的概率.

解　以 x 和 y 分别表示甲、乙两人到达约会地点的时间（以分为单位）. 由于涉及两个自由变量，故在平面上建立 xOy 直角坐标系（见图 1–5）.

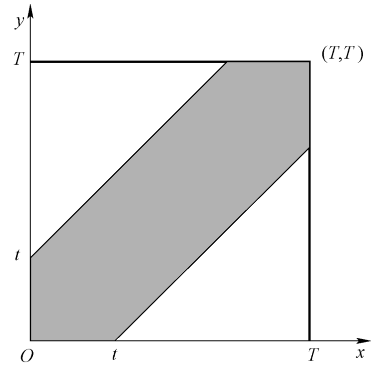


图 1−5　会面问题中的 S 和 A

因为甲、乙都在 $[0,T]$ 内等可能到达，故为一几何概率问题. (x,y) 所有可能的取值都在边长为 T 的正方形 $S=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant T,0\leqslant y\leqslant T\}$ 内，其面积为 T^2，事件 $A=$“两人能够会面”相当于 $|x-y|\leqslant t$，即对应集合 $A=\{(x,y)\,\big|\,|x-y|\leqslant t,(x,y)\in S\}$. 由式（1−14）可得

$$P(A)=\frac{m_A}{m_S}=\frac{A\text{的面积}}{S\text{的面积}}=\frac{T^2-(T-t)^2}{T^2}=1-\left(1-\frac{t}{T}\right)^2$$

若时间段为 $T=60$ min，先到者等待时间 $t=20$ min，则会面成功概率为 $\frac{5}{9}$.

思考：（1）若约定时间段改为 $T=30$，其余条件不变，则会面成功概率为多少？（2）若改为甲早到时需要等乙，而乙早到时不等甲，即乙到达会面地点后如果甲不在则马上离开，这时如何计算会面成功概率呢？

法国数学家布丰（Buffon）于 1777 年提出了著名的布丰投针问题.

【例 1−12】（布丰投针问题）　平面上画有间隔为 $a(a>0)$ 的等距平行线，向平面任意投掷一枚长为 $l(l\leqslant a)$ 的针，求针与任一平行线相交的概率.

解　以 x 表示针的中点与最近一条平行线的距离，又以 φ 表示针与此直线间的夹角，如图 1−6 所示. 易知样本空间为 $S=\{(x,\varphi)\,|\,0\leqslant x\leqslant a/2,0\leqslant\varphi\leqslant\pi\}$，在 φOx 平面上对应一个矩形，其面积为 $m_S=\pi a/2$. 这时，事件 $A=$“针与平行线相交”$=\{(x,\varphi)\,|\,x\leqslant(a/2)\sin\varphi,(x,\varphi)\in S\}$，对应于图 1−7 中的阴影部分.

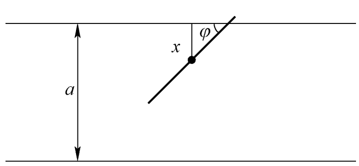


图 1−6　布丰投针问题

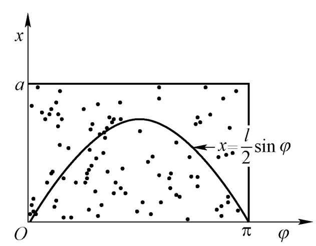


图 1−7　布丰投针问题中的 S 和 A

由于把针投向平面是任意的，由等可能性知对应于几何概型，故由式（1−14）可得

$$P(A)=\frac{m_A}{m_S}=\frac{\int_0^{\pi}(l/2)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{\pi a/2}=\frac{2l}{\pi a}.$$

如果 l、a 为已知，则以 π 的值代入，即可求得概率 $P(A)$．反之，若知道 $P(A)$ 的值，即可用上式求 π．若实际投针 n 次，针与直线相交 k 次，用频率 $\frac{k}{n}$ 估计 $P(A)$，由 $\frac{k}{n} \approx P(A) = \frac{2l}{\pi a}$，可得 $\pi \approx \frac{2nl}{ka}$．

历史上有一些学者亲自做过这个试验，表 1−3 记录了他们的试验结果.

表 1–3　布丰投针试验结果

试验者	年份	l/a	投掷次数	相交次数	π 的近似值
沃尔夫（Wolf）	1850	0.8	5 000	2 532	3.159 6
福克斯（Fox）	1884	0.75	1 030	489	3.159 5
拉泽里尼（Lazzerini）	1901	$0.8\dot{3}$	3 408	1 808	3.141 6
雷纳（Reina）	1925	0.541 9	2 520	859	3.179 5

这是一种非常神奇的方法：只要设计一个随机试验，使一个事件的概率与某个未知数有关，然后通过重复试验，用频率估计概率，即可求得未知数的一个近似解. 一般地，重复次数越多，近似解就越精确. 随着电子计算机的出现，人们可用它来大量重复模拟所设计的试验. 这种方法得到了迅速的发展和广泛的应用. 人们称这种方法为随机模拟法，也称为蒙特卡罗（Monte Carlo）法.

1.2.6　确定概率的主观方法

在现实世界中，有一些随机现象不能重复或不能大量重复，这时有关事件的概率如何确定呢？

贝叶斯派认为：一个事件的概率是人们根据经验对该事件发生的可能性所给出的个人信念，这样给出的概率称为主观概率.

利用经验确定随机事件发生可能性大小的例子很多，人们也常按照某些主观概率来行事.

【例 1−13】用主观方法确定概率的例子.

（1）在气象预报中，往往会说“明天下雨的概率为 90%”，这是气象专家根据气象专业知识和最近的气象情况给出的主观概率，听到这一信息的人，大多出门会带伞.

（2）一个企业家根据他多年的经验和当时的一些市场信息，认为“某项新产品在未来市场上会畅销”的可能性为 80%.

（3）一个外科医生根据自己多年的临床经验和一位患者的病情，认为“此手术成功”的可能性为 90%.

（4）一个教师根据自己多年的教学经验和甲、乙两学生的学习情况，认为“甲学生能考取大学”的可能性为 95%，“乙学生能考取大学”的可能性为 40%.

从以上例子可以得到以下结论.

（1）主观概率和主观臆造有本质上的不同，前者要求当事人对所考察的事件有透彻的了

解和丰富的经验，甚至是这一行业的专家，并能对历史信息和当时信息进行细致分析，如此确定的主观概率是可信的. 从某种意义上说，不利用这些丰富的经验也是一种浪费.

（2）用主观方法得出的随机事件发生的可能性大小，本质上是对随机事件概率的一种推断和估计. 虽然结论的精确性有待实践的检验和修正，但结论的可信性在统计意义上是有其价值的.

（3）在遇到的随机现象无法大量重复时，从用主观方法去做决策和判断是适合的这点看，主观方法至少是频率方法的一种补充.

另外要说明的是，主观概率的确定除根据自己的经验外，决策者还可以利用别的经验，例如，对一项有风险的投资，决策者向某位专家咨询的结果为“成功的可能为 60%”，而决策者很熟悉这位专家，认为专家的估计往往是偏保守的、过分谨慎的，此决策者遂将结论修改为“成功的可能性为 70%”.

主观给定的概率要符合公理化的定义.

1.3　概率的性质

利用概率的公理化定义（非负性、正则性和可列可加性），可以导出概率的一系列性质.

概率的正则性是说必然事件 S 的概率为 1，那么可想而知不可能事件 $\varnothing$ 的概率应该为 0. 下面性质说明了这一点.

性质 1−1　$P(\varnothing)=0$.

证明：显然有 $\varnothing=\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots$，再由可列可加性，可得

$P(\varnothing)=P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots$,

又由非负性，必有 $P(\varnothing)=0$.

性质 1−2（有限可加性）　若有限个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容，则 $P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$.

证明：令 $A_m=\varnothing, m=n+1,n+2,\cdots$，对 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots$ 应用可列可加性并利用 $P(\varnothing)=0$，可得

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

性质 1−3　对 A、B 两个事件，若 $A\subset B$，则有

$P(B-A)=P(B)-P(A)$，$P(A)\leqslant P(B)$.

证明：由于 $B=A\cup(B-A)$，且 $A(B-A)=\varnothing$，所以由有限可加性可得

$P(B)=P(A)+P(B-A)$，故 $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

又由概率的非负性，可得 $P(B-A)\geqslant 0$，故 $P(A)\leqslant P(B)$.

性质 1−4　对任一事件 A，有 $P(A)\leqslant 1$.

证明：由于 $A\subset S$，所以由概率的正则性和性质 1−3 可得 $P(A)\leqslant P(S)=1$.

性质 1−5（逆事件的概率）　对任一事件 A，有 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

证明：由于 $A\overline{A}=\varnothing$，$A\cup\overline{A}=S$，所以由概率的正则性和有限可加性可得

$1 = P(S) = P(A) + P(\overline{A})$，故 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

性质 1－6（加法公式） 对于任意两事件 A，B 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) .$$

证明：因为 $A \cup B = A \cup (B - AB)$，且 $A(B - AB) = \varnothing$，$AB \subset B$，所以由性质 1－2 和性质 1－3 可得

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - AB) = P(A) + P(B) - P(AB) .$$

此式可以推广到多个事件的情形. 如任意三事件 A, B, C 有

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) .$$

一般地，对任意 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，可用归纳法证明

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_i A_j A_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$$

推论（半可加性）：对于任意两事件 A，B 有

$$P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B) .$$

对任意 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，有 $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

【例 1－14】一副扑克牌有 52 张（不计两张王牌），从中任取 13 张，求其中至少有一张 Q 的概率.

解法 1　令 A =“任取 13 张，其中至少有一张 Q”，A_i =“任取 13 张，其中恰好有 i 张 Q”，$i = 1,2,3,4$，则 A_i 互不相容，由有限可加性得

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right) = \sum_{i=1}^{4} P(A_i) = \sum_{i=1}^{4} \frac{\mathrm{C}_4^i \mathrm{C}_{48}^{13-i}}{\mathrm{C}_{52}^{13}} \approx 0.696$$

解法 2　$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{\mathrm{C}_{48}^{13}}{\mathrm{C}_{52}^{13}} \approx 0.696$.

【例 1－15】设 A, B 为二事件，$P(A) = 0.5$，$P(A - B) = 0.3$，求 $P(\overline{AB})$.

解　由 $P(A - B) = P(A) - P(AB)$ 可得

$$P(AB) = P(A) - P(A - B) = 0.5 - 0.3 = 0.2$$

故 $P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 1 - 0.2 = 0.8$.

【例 1－16】 设口袋中有编号为 $1, 2, \cdots, n$ 的 n 个球，从中有放回地取 m 次，每次取一个. 求取出的 m 个球的最大号码为 k 的概率.

解　令 A_k =“取出的 m 个球的最大号码为 k”. 如果直接考虑事件 A_k，会比较复杂，因为“最大号码为 k”包括取到 1 次 k，取到 2 次 k，…，取到 m 次 k.

若令 B_i =“取出的 m 个球的最大号码小于等于 i”，$i = 1, 2, \cdots, n$，则 B_i 发生时只需要每次从 $1, 2, \cdots, i$ 中取球即可，根据古典概型概率计算公式

$$P(B_i) = \frac{i^m}{n^m}, i = 1, 2, \cdots, n.$$

又因为 $A_k = B_k - B_{k-1}$，且 $B_{k-1} \subset B_k$，所以由性质 1−3 可得

$$P(A_k) = P(B_k) - P(B_{k-1}) = \frac{k^m - (k-1)^m}{n^m}, k = 1, 2, \cdots, n .$$

若令 $n = 6$， $m = 3$，可以计算 $P(A_k)$，见表 1−4.

表 1−4　$P(A_k)$ 的值

k	1	2	3	4	5	6	和
$P(A_k)$	0.004 6	0.032 4	0.088 0	0.171 3	0.282 4	0.421 3	1.000 0

这可以说明，投掷 3 颗密度均匀的骰子，最大点数 k 是随机的，且 $P(k \leqslant 3) = 0.004\,6 + 0.032\,4 + 0.088\,0 = 0.125\,0$，即掷出骰子，最大点数不超过 3 的概率仅为 0.125 0.

【例 1−17】（配对问题）　在一个由 n 个人参加的晚会上，每个人带了一件礼物，且假定每个人带的礼物各不相同. 晚会期间每人从放在一起的 n 件礼物中随机地抽取一件，求至少一人拿到自己的礼物的概率？

解　令 $A_i =$“第 i 个人抽到自己的礼物”，$i = 1, 2, \cdots, n$. 所求的概率为 $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$. 因为

$$P(A_1) = P(A_2) = \cdots = P(A_n) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n},$$

$$P(A_1A_2) = P(A_1A_3) = \cdots = P(A_{n-1}A_n) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)},$$

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1A_2A_4) = \cdots = P(A_{n-2}A_{n-1}A_n) = \frac{(n-3)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)},$$

$$\vdots$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = \frac{1}{n!}.$$

所以由概率的加法公式得

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) &= \mathrm{C}_n^1 \bullet \frac{1}{n} - \mathrm{C}_n^2 \bullet \frac{1}{n(n-1)} + \mathrm{C}_n^3 \bullet \frac{1}{n(n-1)(n-2)} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!} \\ &\approx 1 - \mathrm{e}^{-1} \approx 0.632\,1. \end{aligned}$$

计算结果表明，即使人数很多，事件“至少一人拿到自己的礼物”的概率也不会很大. 还有很多其他的配对问题，有兴趣的同学可以查找相关文献.

1.4　条 件 概 率

条件概率是概率论中的一个既重要又实用的概念.

1.4.1 条件概率的定义

所谓条件概率，就是在已知一个事件发生的条件下另一个事件发生的概率. 先看下面的例子.

【例 1-18】随机考察一个有两个小孩家庭的孩子的性别，按孩子大小的次序，有样本空间 $S=\{bb,bg,gb,gg\}$，其中 b 表示男孩，g 表示女孩，bg 表示年龄大的是男孩，小的是女孩. 其他样本点可类似说明.

令 $A=$"家中至少有一个男孩"$=\{bb,bg,gb\}$，则显然 $P(A)=\dfrac{3}{4}$.

若已知事件 $B=$"家中至少有一个女孩"$=\{bg,gb,gg\}$ 发生条件下，再求家中至少有一个男孩的概率，则 $P(A\mid B)=\dfrac{2}{3}$. 这就是条件概率，它与（无条件）概率 $P(A)$ 是两个不同的概念. 若对分子分母各除 4，则可得

$$P(A\mid B)=\frac{2/4}{3/4}=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

这个关系具有一般性，条件概率可以表示为两个无条件概率之商.

定义 1-4 设 A,B 是两事件，若 $P(B)>0$，则称

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \tag{1-15}$$

为在 B 发生下 A 的条件概率.

性质 1-7 条件概率是概率，即若设 $P(B)>0$，则

（1）$P(A\mid B)\geqslant 0, A\in\mathscr{F}$.

（2）$P(S\mid B)=1$.

（3）若 $\mathscr{F}$ 中的 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 互不相容，则

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\mid B\Big)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i\mid B), A\in\mathscr{F}.$$

证明：用条件概率的定义容易证明（1）和（2）. 下面证明（3）. 因为 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 互不相容，所以 $A_1B,A_2B,\cdots,A_nB,\cdots$ 也互不相容，故

$$\begin{aligned}P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\mid B\Big)&=\frac{P\left(\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\Big)B\right)}{P(B)}=\frac{P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(A_iB)\right)}{P(B)}\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{P\left(A_iB\right)}{P(B)}=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i\mid B).\end{aligned}$$

由性质 1-7 可以退出条件概率，满足无条件概率的其他相应性质. 例如，$P(A_1\cup A_2\mid B)=P(A_1\mid B)+P(A_2\mid B)-P(A_1A_2\mid B)$，$P(\overline{A}\mid B)=1-P(A\mid B)$ 等，其他性质不再一一列举.

以下给出条件概率特有的三个非常实用的公式：乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式. 这些公式可以计算一些复杂事件的概率.

下面给出条件概率的两种计算方法.

（1）按定义计算：$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$.

【例 1−19】如果在全部产品中，有 4%是废品，有 72%是一级品，现从中任取一件合格品，求它是一级品的概率.

解　令 $A=$“任取一件为合格品”，$B=$“任取一件为一级品”，则 $B\subset A$，且 $P(A)=1-0.04=0.96$，$P(B)=0.72$，有

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{0.72}{0.96}=0.75.$$

（2）在等可能试验中，当一事件 A 发生，在变化了的样本空间中利用等可能性直接计算另一事件 B 的条件概率.

【例 1−20】袋中有 5 个黑球，3 个白球，连续不放回地在其中任取两个球. 若已知第一次取出的是白球，求第二次取出的仍是白球的概率.

解　令 $A=$“第一次取到白球”，$B=$“第二次取到白球”，则 $P(B|A)=\dfrac{2}{7}$.

1.4.2　乘法公式

（1）若 $P(B)>0$，则 $P(AB)=P(B)P(A|B)$.

（2）若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

【例 1−21】一批零件有 100 件，其中有 10 件次品. 从中一件一件地取出，求第三次才取得次品的概率.

解　令 $A_i=$“第 i 次取出的是次品”，$i=1,2,3$，则所求的概率为

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)=\frac{90}{100}\times\frac{89}{100}\times\frac{10}{100}=0.0801.$$

其实，例 1−21 是例 1−22 的特例.

【例 1−22】设罐子中有 b 个黑球，r 个红球. 每次随机地取出一个球，察其色后将原球放回，再加进 c 个同色球和 d 个异色球. 记 $B_i=$“第 i 次取出的是黑球”，$R_j=$“第 j 次取出的是红球”.

若连续从罐中取出三球，其中两个红球，一个黑球，则由乘法公式得

$$\begin{aligned}P(B_1R_2R_3)&=P(B_1)P(R_2|B_1)P(R_3|B_1R_2)\\&=\frac{b}{b+r}\cdot\frac{r+d}{b+r+c+d}\cdot\frac{r+c+d}{b+r+2c+2d},\\P(R_1B_2R_3)&=P(R_1)P(B_2|R_1)P(R_3|R_1B_2)\\&=\frac{r}{b+r}\cdot\frac{b+d}{b+r+c+d}\cdot\frac{r+c+d}{b+r+2c+2d},\\P(R_1R_2B_3)&=P(R_1)P(R_2|R_1)P(B_3|R_1R_2)\\&=\frac{r}{b+r}\cdot\frac{r+c}{b+r+c+d}\cdot\frac{b+2d}{b+r+2c+2d}.\end{aligned}$$

以上概率与黑球在第几次被取出有关.

罐子模型也称为波利亚罐子模型（Polya’s urn scheme），这个模型可以有多种变化．如：

（1）当 $c=-1, d=0$ 时，即为不放回抽样．这时，前面抽取结果会影响后面抽取结果，但只要抽取的黑球与红球个数确定，则概率不依赖其抽出球的次序．此例中有 $P(B_1R_2R_3)=P(R_1B_2R_3)=P(R_1R_2B_3)=\dfrac{br(r-1)}{(b+r)(b+r-1)(b+r-2)}$．

（2）当 $c=0, d=0$ 时，即为放回抽样．这时，前面抽取结果不影响后面抽取结果，此例中三个概率相等，有

$$P(B_1R_2R_3)=P(R_1B_2R_3)=P(R_1R_2B_3)=\frac{br^2}{(b+r)^3}.$$

（3）当 $c>0, d=0$ 时，称为传染病模型．这时，每次取出球后会增加下一次取到同色球的概率，换句话说，每次发现一个传染病患者，以后都会增加再传染的概率．与（1），（2）一样，以上三个概率都相等，且都等于

$$P(B_1R_2R_3)=P(R_1B_2R_3)=P(R_1R_2B_3)=\frac{br(r+c)}{(b+r)(b+r+c)(b+r+2c)}.$$

从以上（1）、（2）和（3）可以看出，只要 $d=0$，则概率不依赖其抽出球的次序，以上三个概率都相等．但当 $d>0$ 时，就不同了，见下面（4）．

（4）当 $c=0, d>0$ 时，称为安全模型．此模型可解释为，每当事故发生了（红球被取出），安全工作就抓紧一些，下次再发生事故的概率就会减少，当事故没有发生时（黑球被取出），安全工作就放松一些，下次再发生事故的概率就会增大．在这种场合，上述三个概率分别为

$$P(B_1R_2R_3)=\frac{b}{b+r}\cdot\frac{d}{b+r+d}\cdot\frac{r+d}{b+r+2d},$$

$$P(R_1B_2R_3)=\frac{r}{b+r}\cdot\frac{b+d}{b+r+d}\cdot\frac{r+d}{b+r+2d},$$

$$\begin{aligned}P(R_1R_2B_3)&=P(R_1)P(R_2\mid R_1)P(B_3\mid R_1R_2)\\&=\frac{r}{b+r}\cdot\frac{r+c}{b+r+c+d}\cdot\frac{b+2d}{b+r+2c+2d}.\end{aligned}$$

1.4.3 全概率公式

全概率公式是概率论中的一个重要公式，它提供了计算复杂事件概率的一条有效途径，使一个复杂事件的概率计算问题化繁为简．

定义 1–5（划分） 设 S 是随机试验 E 的样本空间，$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 是 E 的一组事件，若满足

（1）$B_iB_j=\varnothing$，$i, j=1,2,\cdots,n$，

（2）$\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i=S$，

则称 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为样本空间 S 的一个划分．

若 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为样本空间 S 的一个划分，则在每次试验中，事件 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 中必有一个且仅有一个发生．

例如，在试验 E 为“掷一颗骰子观察其点数”．它的样本空间为 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$，

$B_1=\{1,2\},B_2=\{3,4,5\},B_3=\{6\}$ 是 S 的一个划分. 而事件组 $C_1=\{1,2,3\},C_2=\{3,4,5\},C_3=\{5,6\}$ 不是 S 的划分.

性质 1－8（全概率公式） 设随机试验 E 的样本空间为 S，A 是 E 的事件，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 S 的一个划分，且 $P(B_i)>0,i=1,2,\cdots,n$，则

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i). \tag{1－16}$$

证明：由 $A=AS=A\bigcup_{i=1}^{n}B_i=\bigcup_{i=1}^{n}(AB_i)$，$(AB_i)(AB_j)=\varnothing,i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n$ 和乘法公式得

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(AB_i)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i).$$

证毕.

式（1－16）称为全概率公式. 另一个重要的公式是贝叶斯公式.

性质 1－9（贝叶斯公式） 设随机试验 E 的样本空间为 S，A 是 E 的事件，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 S 的一个划分，且 $P(A)>0,P(B_i)>0,i=1,2,\cdots,n$，则

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)},i=1,2,\cdots,n \tag{1－17}$$

证明：由条件概率定义和全概率公式得

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(AB_i)}{P(A)}=\frac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)},i=1,2,\cdots,n.$$

证毕.

这两个公式在概率论与数理统计中有很重要的应用. 可以把 A 看成试验的结果，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 看成产生这个结果的“原因”，$P(B_i),i=1,2,\cdots,n$ 称为先验概率，表示各种“原因”发生的可能性的大小，一般根据以往经验和数据来确定. 若事件 A 出现，则这个信息将帮助人们探索事件发生的“原因”，称这个概率 $P(B_i\mid A)$ 为后验概率. 例如，在医疗诊断中，看到的是临床现象，如体温升高，脉搏加速等，产生这类现象的疾病可能是 $B_1,B_2,\cdots,B_n$. 如果有某类地区、某类人群发生这些疾病的大数据，即可粗略估计 $P(B_i),i=1,2,\cdots,n$，再由医学知识确定 $P(A\mid B_i),i=1,2,\cdots,n$，则根据贝叶斯公式可以计算 $P(B_i\mid A),i=1,2,\cdots,n$. 若其中某个 $P(B_i\mid A)$ 明显较大，则有理由认为该病人患上了疾病. 这种思想可用于疾病的计算机辅助诊断. 在百度搜索或搜狗拼音输入法中，也利用了类似的思想，用于提高搜索和输入效率.

【例 1－23】（摸彩模型） 设 n 张彩票中有一张可中奖，求第二人摸到中奖彩票的概率.

解 设 A_i＝“第 i 人摸到中奖彩票”，$i=1,2,\cdots,n$.下面求 $P(A_2)$. 由于 A_1 是否发生影响 A_2，即 $P(A_2\mid A_1)=0$，$P(A_2\mid\overline{A}_1)=\dfrac{1}{n-1}$.

而 $P(A_1)=\dfrac{1}{n}$，$P(\overline{A}_1)=\dfrac{n-1}{n}$，于是由全概率公式得

$$P(A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2\mid\overline{A}_1)=\frac{1}{n}\bullet 0+\frac{n-1}{n}\bullet\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n}.$$

这表明：摸到中奖彩票的机会与先后次序无关. 因后者处于“不利情况”（前者已摸到中奖彩票），但也可能处于“有利情况”（前者没摸到奖，从而增加后者摸到中奖彩票的机会），两种情况用全概率公式综合（加权平均）所得结果（机会均等）既公平又合理.

用类似方法可得

$$P(A_3)=P(A_4)=\cdots=P(A_n)=\frac{1}{n}.$$

如果 n 张彩票中有 k 张可中奖，则可得

$$P(A_1)=P(A_2)=\cdots=P(A_n)=\frac{k}{n}.$$

这说明，在购买彩票时，不论先买还是后买，中奖机会都是均等的.

【例 1－24】在某工厂中有甲、乙、丙 3 台机器生产同一型号的产品，它们的产量分别为 30%、35%、35%，并且在各自的产品中次品率分别为 5%、4%、3%.

（1）从该厂的这种产品中任取一件是次品的概率.

（2）若任取一件产品为次品，分别求它是由甲、乙、丙生产的概率.

解　设 A_1,A_2,A_3 分别表示从该厂的这种产品中任取一件是由甲、乙、丙机器生产的产品，B 表示“从该厂的这种产品中任取一件是次品”，则 A_1,A_2,A_3 是样本空间 S 的划分. 由题设

$$P(A_1)=30\%,P(A_2)=35\%,P(A_3)=35\%,$$
$$P(B\mid A_1)=5\%,P(B\mid A_2)=4\%,P(B\mid A_3)=3\%,$$

（1）由全概率公式，有

$$P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)+P(A_3)P(B\mid A_3)=3.95\%.$$

（2）由贝叶斯公式，有

$$P(A_1\mid B)=\frac{P(A_1)P(B\mid A_1)}{\sum_{k=1}^{3}P(A_k)P(B\mid A_k)}=\frac{30\%\times5\%}{3.95\%}=\frac{30}{79},$$

$$P(A_2\mid B)=\frac{P(A_2)P(B\mid A_2)}{\sum_{k=1}^{3}P(A_k)P(B\mid A_k)}=\frac{35\%\times4\%}{3.95\%}=\frac{28}{79},$$

$$P(A_3\mid B)=\frac{P(A_3)P(B\mid A_3)}{\sum_{k=1}^{3}P(A_k)P(B\mid A_k)}=\frac{35\%\times3\%}{3.95\%}=\frac{21}{79}.$$

【例 1－25】在数字通信中，若发报机以 0.7 和 0.3 的概率发出信号 0 和 1，由于干扰的影响，当发出信号 0 时，接收机以概率 0.8 和 0.2 收到信号 0 和 1；同样，当信号机发出信号 1 时，接收机以概率 0.9 和 0.1 收到信号 1 和 0，记 A_i 为发出信号 i，B_i 为接收信号 i，$i=0,1$，求 $P(A_0\mid B_0)$.

解　由于 $P(A_0)=0.7$，$P(A_1)=0.3$，$P(B_0\mid A_0)=0.8$，$P(B_0\mid A_1)=0.1$，用贝叶斯公式求得

$$\begin{aligned}P(A_0\mid B_0)&=\frac{P(B_0\mid A_0)P(A_0)}{P(B_0\mid A_0)P(A_0)+P(B_0\mid A_1)P(A_1)}\\&=\frac{0.7\times0.8}{0.7\times0.8+0.3\times0.1}=0.949\end{aligned},$$

同样可计算得

$$P(A_1 \mid B_0)=\frac{P(B_0 \mid A_1)P(A_1)}{P(B_0 \mid A_0)P(A_0)+P(B_0 \mid A_1)P(A_1)}$$
$$=\frac{0.3\times 0.1}{0.7\times 0.8+0.3\times 0.1}=0.05.$$

1.5　独 立 性

独立性是概率论中又一个重要的概念，利用独立性可以简化概率的计算. 下面先讨论两个事件的独立性，再讨论多个事件的独立性.

1.5.1　两个事件的独立性

两个事件之间的独立性是指：事件 A 的发生不影响另一个事件的发生. 设 $P(B)>0$，若 $P(A|B)=P(A)$，则 $P(AB)=P(A|B)P(B)=P(A)P(B)$. 把具有这种性质的两事件称为独立.

定义 1－6　设 A,B 为两个事件，如果

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则称事件 A 与 B 相互独立，简称 A 与 B 独立. 否则称 A 与 B 不独立或相依.

在许多实际问题中，两个事件是否独立大多是是根据经验（相互有无影响）来判断的，如在抛硬币试验中，一般可假设两次的结果互不影响，即出现正反面的情况相互独立.

性质 1－10　若事件 A 与 B 相互独立，则 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 独立.

证明：由概率的性质和题设 $P(AB)=P(A)P(B)$ 得

$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)=P(A)[1-P(B)]=P(A)P(\overline{B})$，这说明 A 与 $\overline{B}$ 相互独立. 类似可证，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 独立.

性质 1－10 是说 A 与 B，A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 独立是相互等价的，可直观理解为若 A 与 B 相互独立，则 A 的发生不影响 B 的发生，那么 A 的发生也不会影响 B 的不发生，A 的不发生也不会影响 B 的发生，A 的不发生也不会影响 B 的不发生.

1.5.2　多个事件的独立性

首先看三个事件之间的独立性.

定义 1－7　设 A,B,C 为三个事件，如果

$$\begin{cases}P(AB)=P(A)P(B)\\ P(AC)=P(A)P(C)\\ P(BC)=P(B)P(C)\end{cases}$$

则称 A,B,C 两两独立. 若还有

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$

则称 A,B,C 相互独立.

【例 1－26】一均匀正四面体，一面涂上红色，另一面涂上白色，第三面涂上蓝色，第四

个面分别涂上红色、白色和蓝色（共 3 色）. 在一个水平面上抛此四面体，令 A,B,C 分别表示“抛得底面涂有红色”“抛得底面涂有白色”“抛得底面涂有蓝色”. 验证：$P(AB)=P(A)P(B)$，$P(AC)=P(A)P(C)$，$P(BC)=P(B)P(C)$，但 $P(ABC)\neq P(A)P(B)P(C)$，即 A,B,C 两两独立但不相互独立.

解 容易算得 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{2}$，

$$P(AB)=P(AC)=P(BC)=P(ABC)=\frac{1}{4},$$

所以

$$P(AB)=P(A)P(B), \quad P(AC)=P(A)P(C), \quad P(BC)=P(B)P(C),$$

但

$$P(ABC)\neq P(A)P(B)P(C).$$

定义 1-8 若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时满足下列的 2^n-n-1 个等式：

$$
\begin{aligned}
&P(A_{i_1}A_{i2})=P(A_{i_1})P(A_{i_2}), \quad 1\leqslant i_1<i_2\leqslant n,\\
&P(A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})P(A_{i_3}), \quad 1\leqslant i_1<i_2<i_3\leqslant n,\\
&\quad\vdots\\
&P(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_{n-1}})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_{n-1}}), \quad 1\leqslant i_1<i_2<i_3\leqslant n,\\
&P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n), \quad 1\leqslant i_1<i_2<i_3\leqslant n,
\end{aligned}
$$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

性质 1-11 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，把其中的任何 $m(1\leqslant m\leqslant n)$ 个事件换成各自的对立事件后所构成的 n 个事件也相互独立.

【例 1-27】设 A,B,C 相互独立，试证：$A\cup B$ 与 C 相互独立.

证明 因为

$$
\begin{aligned}
P((A\cup B)C)&=P(AC\cup BC)=P(AC)+P(BC)-P(ABC)\\
&=P(A)P(C)+P(B)P(C)-P(A)P(B)P(C)\\
&=(P(A)+P(B)-P(A)P(B))P(C)=P(A\cup B)P(C).
\end{aligned}
$$

所以，$A\cup B$ 与 C 相互独立.

【例 1-28】两射手彼此独立地朝同一目标射击，设甲击中目标的概率是 0.9，乙击中目标的概率是 0.8，求目标被击中的概率是多少？

解 令 $A=$“甲击中目标”，$B=$“乙击中目标”，注意到“目标被击中”$=A\cup B$，所以

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=0.9+0.8-0.9\times0.8=0.98.$$

本题也可用对立事件求解，

$$P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})=1-P(\bar{A})P(\bar{B})=1-(1-0.9)\times(1-0.8)=0.98.$$

【例 1-29】两射手彼此独立地朝同一目标射击，设甲击中目标的概率是 α，乙击中目标的概率是 β，甲先射击，谁先命中谁得胜. 问甲、乙两人获胜的概率各为多少？

解法 1 令 $A_i=$“第 i 次射击命中目标”，$i=1,2,\cdots$. 因为甲先射，所以事件“甲获胜”可以表示为

$$A_1 \cup \overline{A}_1\overline{A}_2A_3 \cup \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4A_5 \cup \cdots$$

又因为各次射击是独立的，所以

$$\begin{aligned} P（甲获胜）&= \alpha + (1-\alpha)(1-\beta)\alpha + (1-\alpha)^2(1-\beta)^2\alpha + \cdots \\ &= \alpha\sum_{n=0}^{\infty}(1-\alpha)^n(1-\beta)^n = \frac{\alpha}{1-(1-\alpha)(1-\beta)}. \end{aligned}$$

同理可得事件“乙获胜”可以表示为

$$\overline{A}_1A_2 \cup \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4 \cup \cdots$$

又因为各次射击是独立的，所以

$$\begin{aligned} P（乙获胜）&= (1-\alpha)\beta + (1-\alpha)(1-\beta)(1-\alpha)\beta + \cdots \\ &= \beta(1-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}(1-\alpha)^n(1-\beta)^n = \frac{\beta(1-\alpha)}{1-(1-\alpha)(1-\beta)}. \end{aligned}$$

由题意，$\alpha,\beta \in (0,1)$，公比 $0 < (1-\alpha)(1-\beta) < 1$，符合收敛性条件.

解法 2　由于“甲第 1 枪不中且乙第 1 枪也不中”之后，比赛可视为从头开始，于是

$$P（甲获胜）= \alpha + (1-\alpha)(1-\beta)P（甲获胜），$$

解得

$$P（甲获胜）= \frac{\alpha}{1-(1-\alpha)(1-\beta)},$$

从而

$$P（乙获胜）= 1 - P（甲获胜）= 1 - \frac{\alpha}{1-(1-\alpha)(1-\beta)} = \frac{\beta(1-\alpha)}{1-(1-\alpha)(1-\beta)}.$$

1.5.3　事件的独立性与试验的独立性

利用事件的独立性可以定义两个或更多个试验的独立性.

定义 1−9　设 E_1, E_2 为两个随机试验，如果 E_1 的任一结果（事件）与 E_2 的任一结果（事件）都是相互独立的事件，则称这两个试验相互独立.

如“E_1：抛一枚硬币”和“E_2：掷一颗骰子”是两个相互独立的试验.

类似地，可以定义 n 个随机试验的独立性，如果 E_1 的任一结果，E_2 的任一结果，…，E_n 的任一结果都是相互独立的事件，则称试验 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 相互独立. 如果这 n 个随机试验还是相同的，则称它为 n 重独立重复试验. 如果在 n 重独立重复试验中，每次试验的结果可能为两个：A 和 $\overline{A}$，则称这种试验为 n 重伯努利（Bernoulli）试验.

将伯努利试验独立重复 n 次，求

（1）前 $k(k = 0,1,\cdots,n)$ 次出现 A，后 $n-k$ 次出现 $\overline{A}$ 的概率；

（2）恰有 $k(k = 0,1,\cdots,n)$ 次出现 A 的概率.

先对 $n = 5, k = 2$ 求上述概率，再推广.

设 $A_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 表示“在第 i 次试验中出现 A”，则当 $n = 5, k = 2$ 时有

（1）$P(A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4\overline{A}_5) = p^2(1-p)^3$；

（2）设 D_n^k 表示“在 n 次试验中，恰有 k 次出现 A”，则

$$D_5^2 = A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4\overline{A}_5 \cup A_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4\overline{A}_5 \cup A_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4\overline{A}_5 \cup A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4A_5 \cup \overline{A}_1A_2A_3\overline{A}_4\overline{A}_5 \cup \overline{A}_1A_2\overline{A}_3A_4\overline{A}_5 \cup \overline{A}_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4A_5 \cup \overline{A}_1\overline{A}_2A_3A_4\overline{A}_5 \cup \overline{A}_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4A_5 \cup \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4A_5,$$

于是

$$\begin{aligned}P(D_5^2) &= P(A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4\overline{A}_5) + P(A_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4\overline{A}_5) + P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4\overline{A}_5) + P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4A_5) + \\ &\quad P(\overline{A}_1A_2A_3\overline{A}_4\overline{A}_5) + P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3A_4\overline{A}_5) + P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4A_5) + \\ &\quad P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3A_4\overline{A}_5) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4A_5) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4A_5) \\ &= 10p^2(1-p)^3 = \mathrm{C}_5^2 p^2(1-p)^3.\end{aligned}$$

推广：对于一般的 n 和 $k(k=0,1,\cdots,n)$ 有

$$P(A_1A_2\cdots A_k\overline{A}_{k+1}\cdots\overline{A}_n) = p^k(1-p)^{n-k},$$

$$P(D_n^k) = \mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k}.$$

【例 1−30】在投篮测试中，每人投 3 次，至少投中 2 次才能通过测试. 已知某同学每次投篮投中的概率为 0.6，且各次投篮是否投中相互独立，求该同学通过测试的概率.

解　投 3 次篮球相当于做了 3 次伯努利试验，即 $n=3$，令 A 表示“投篮时投中”，则 $P(A)=0.6$，该同学投中 2 次或 3 次时则通过测试，概率为

$$P(D_3^2)+P(D_3^3) = \mathrm{C}_3^2\times 0.6^2\times 0.4 + 0.6^3 = 0.648.$$

【例 1−31】某写字楼有 5 台公共饮水机同时工作. 调查表明，在工作时间任一时刻 t，每台饮水机被使用的概率为 0.2，求在同一时刻：

（1）恰好有 2 台饮水机被使用的概率；

（2）至少有 3 台饮水机被使用的概率；

（3）至多有 3 台饮水机被使用的概率；

（4）至少有 1 台饮水机被使用的概率.

解　观察 5 台独立工作的饮水机相当于做了 5 次伯努利试验，即 $n=5$，令 A 表示“饮水机被使用”，则 $P(A)=0.2$，因此

（1）$P(D_5^2) = \mathrm{C}_5^2 0.2^2 0.8^3 = 0.204\,8$；

（2）
$$\begin{aligned}P(D_5^3\cup D_5^4\cup D_5^5) &= P(D_5^3)+P(D_5^4)+P(D_5^5) \\ &= \mathrm{C}_5^3\times 0.2^3\times 0.8^2 + \mathrm{C}_5^4\times 0.2^4\times 0.8 + 0.2^5 = 0.057\,9;\end{aligned}$$

（3）
$$\begin{aligned}P\left(\bigcup_{k=0}^{3} D_5^k\right) &= 1-P(D_5^4)-P(D_5^5) \\ &= 1-(\mathrm{C}_5^4\times 0.2^4\times 0.8+0.2^5) = 0.993\,3;\end{aligned}$$

（4）$P\left(\bigcup_{k=1}^{5} D_5^k\right) = 1-P(D_5^0) = 1-0.8^5 = 0.672\,3$.

习 题 1

1. 写出下列随机试验的样本空间：

（1）抛三枚硬币；

（2）抛三颗骰子；

（3）连续抛一枚硬币，直至出现正面为止；

（4）不透明罐子中有外形和大小相同的黑、白、红球各一个，先从中任取出一个，放回后再任取出一个；

（5）不透明罐子中有外形和大小相同的黑、白、红球各一个，先从中任取出一个，不放回后取样.

2. 先抛一枚硬币，若出现正面（记为 H），则再掷一颗骰子，试验停止；若出现反面（记为 T），则再抛一枚硬币. 那么该试验的样本空间 S 是什么？

3. 设 A，B，C 为三事件，试表示下列事件：

（1）A，B，C 都发生或都不发生；

（2）A，B，C 中不多于一个发生；

（3）A，B，C 中不多于两个发生；

（4）A，B，C 中至少有两个发生.

4. 指出下列事件等式成立的条件：

（1）$A\cup B=A$；

（2）$AB=A$；

（3）$A-B=A$.

5. 试问下列命题是否成立?（1）$A-(B-C)=(A-B)-C$；（2）若 $AB=\varnothing$ 且 $C\subset A$，则 $BC=\varnothing$；（3）$(A\cup B)-B=A$；（4）$(A-B)\cup B=A$.

6. 若事件 $ABC=\varnothing$，是否一定有 $AB=\varnothing$？

7. 请叙述下列事件的对立事件：

（1）A=“掷两枚硬币，皆为正面”；

（2）B=“射击三次，皆命中目标”；

（3）C=“加工四个零件，至少有一个合格品”.

8. 证明下列事件的运算公式：（1）$A=AB\cup A\overline{B}$；（2）$A\cup B=A\cup AB$.

9. 设 A 表示事件“甲种产品畅销，乙种产品滞销”，则其对立事件 $\overline{A}$ 为（　　）.

（A）“甲种产品滞销或乙种产品畅销”　（B）“甲种产品滞销”

（C）“乙种产品畅销”　（D）“甲种产品滞销，乙种产品畅销”

10. 设 A、B、C 为三个事件，则事件“A、B、C 都不发生”可表示为（　　）.

（A）$\overline{ABC}$　（B）$1-ABC$

（C）$\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$　（D）$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$

11. 某地震现场应急工作组对震区三幢楼房开展建筑安全评估与鉴定，设事件 A_i 表示“第 i 幢楼房经评估鉴定为安全”（$i=1，2，3$）. 事件“恰有一幢楼房经评估鉴定为安全”用 A_1、A_2、A_3

可表示为________.

12. 某人向同一目标独立地重复射击，每次射击命中目标的概率为 $p(0<p<1)$，则此人第 4 次射击恰好是第 2 次命中的概率为（　　）.

（A）$3p(1-p)^2$　　（B）$6p(1-p)^2$

（C）$3p^2(1-p)^2$　　（D）$6p^2(1-p)^2$

13. 设 X 在 $1,2,3,4$ 中等可能取值，Y 再从 $1,\cdots,X$ 中等可能取一整数，则 $P(Y=4)=$（　　）.

（A）$\dfrac{1}{16}$　　（B）$\dfrac{7}{48}$　　（C）$\dfrac{13}{48}$　　（D）$\dfrac{25}{48}$

14. 设 10 件产品中有 3 件是次品. 今从中随机地取 3 件，则这 3 件产品中至少有 1 件是次品的概率为____________.

15. 已知 10 件产品中有 2 件次品，在其中任取 2 次，每次任取一件，作不放回抽样，则其中一件是正品，一件是次品的概率为________.

16. 10 张彩票中有 5 张是有奖彩票. 从中任意抽取 5 张，其中至少有两张中奖的概率为____________.

17. 10 张彩票中有 5 张是有奖彩票. 从中每次取一张，作不放回抽样，前 3 次都中奖的概率为__________.

18. 一部 4 卷的文集随机地排放在书架上，卷号恰好是自左向右或自右向左地呈 1、2、3、4 排列的概率是____________.

19. 同时抛掷 3 枚硬币，则恰好有两枚正面朝上的概率为____________.

20. 袋中有 10 个球（3 个红球，7 个白球），每次取 1 个球，无放回地抽取两次，则第二次取到红球的概率为__________.

21. 同时抛掷 3 枚硬币，则恰好有两枚硬币正面向上的概率为（　　）.

（A）$\dfrac{1}{8}$　　（B）$\dfrac{2}{8}$　　（C）$\dfrac{3}{8}$　　（D）$\dfrac{4}{8}$

22. 袋中有 5 个球（3 个红球，2 个白球），每次取 1 个球，无放回地抽取两次，则第二次取到红球的概率为（　　）.

（A）$\dfrac{3}{5}$　　（B）$\dfrac{3}{4}$　　（C）$\dfrac{1}{2}$　　（D）$\dfrac{3}{10}$

23. 在桥牌比赛中，将 52 张牌任意地分给东、南、西、北四家，求在北家的 13 张牌中：

（1）恰有 5 张黑桃、5 张红心、2 张方块、1 张梅花的概率；

（2）在已知有一张 K 的情况下，这张 K 是黑桃的概率.

24. 若随机事件 A 与 B 相互独立，则 $P(A\cup B)=$（　　）.

（A）$P(A)+P(B)$　　（B）$P(A)+P(B)-P(A)P(B)$

（C）$P(A)P(B)$　　（D）$P(\overline{A})+P(\overline{B})$

25. A、B 为两事件，若 $P(A\cup B)=0.8$，$P(A)=0.2$，$P(\overline{B})=0.4$，则（　　）成立.

（A）$P(A\overline{B})=0.32$　　（B）$P(\overline{A}\,\overline{B})=0.2$

（C）$P(B-A)=0.4$　　（D）$P(\overline{B}A)=0.48$

26. 设 A，B 为任意两个事件，则（　　）.

（A）$P(A-B)=P(A)-P(B)$　　（B）$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

（C）$P(AB)=P(A)P(B)$　　（D）$P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$

27. 对任意两个事件 A 和 B，若 $P(AB)=0$，则（　　）.

（A）$AB=\varnothing$　　（B）$\overline{A}\overline{B}=\varnothing$

（C）$P(A)P(B)=0$　　（D）$P(A-B)=P(A)$

28. 已知$P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=\dfrac{1}{8}$，则$P(A\cup B\cup C)=$ ________.

29. 设 A、B 是任意两事件，则 $P(A-B)=$（　　）.

（A）$P(A)-P(B)$　　（B）$P(A)-P(B)+P(AB)$

（C）$P(A)-P(AB)$　　（D）$P(A)+P(B)-P(AB)$

30. 已知 $P(B)=b$，$P(AB)=c$，且 $b>c$，则 $P(B-A)=$______.

31. 设事件 A、B 互不相容，$P(A)=p$，$P(B)=q$，则 $P(A-B)=$（　　）.

（A）$(1-p)q$　　（B）pq　　（C）$p-q$　　（D）p

32. 已知事件 A，B 有概率 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.5$，条件概率 $P(\overline{B}\,|\,A)=0.3$，则 $P(A\cup B)=$ ____________.

33. 已知事件 A，B 有概率 $P(A)=0.4$，条件概率 $P(\overline{B}\,|\,A)=0.3$，则 $P(A\cap B)=$________.

34. 若 $P(A)=\dfrac{1}{4}$，$P(B|A)=\dfrac{1}{3}$，$P(A|B)=\dfrac{1}{2}$，则 $P(A\cup B)=$（　　）.

（A）$\dfrac{1}{5}$　　（B）$\dfrac{1}{4}$　　（C）$\dfrac{1}{3}$　　（D）$\dfrac{1}{2}$

35. 设 $P(A)=0.8$，$P(B)=0.7$，$P(A\,|\,B)=0.8$，则下列结论正确的是（　　）.

（A）A 与 B 相互独立　　（B）A 与 B 互斥

（C）$B\supset A$　　（D）$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

36. 在某工厂里有甲、乙、丙三台机器生产螺丝钉，它们的产量各占 25%、35%、40%，并且在各自的产品里，不合格品各占 5%、4%、2%.

问：（1）全部螺丝钉的不合格品率为多少？（2）若现在从产品中任取一件恰好是不合格品，则该不合格品是甲厂生产的概率为多大？

37. 已知一批产品中 90%是合格品，检查时，一个合格品被误认为是次品的概率为 0.05，一个次品被误认为是合格品的概率为 0.02，求（1）一个产品经检查后被认为是合格品的概率；（2）一个产品经检查后被认为是合格品的产品确是合格品的概率.

38. 有甲、乙、丙三个盒子，其中分别有一个白球和两个黑球、一个黑球和两个白球、三个白球和三个黑球. 掷一枚骰子，若出现 1、2、3 点则选甲盒，若出现 4 点则选乙盒，否则选丙盒. 然后从所选中的盒子中任取一球. 求：

（1）取出的球是白球的概率；

（2）当取出的球为白球时，此球来自甲盒的概率.

39. 设 A、B、C 是随机事件，A 与 C 互不相容，$P(AB)=\dfrac{1}{2}$，$P(C)=\dfrac{1}{3}$，则__________
$P(AB\,|\,\overline{C})=$________.

40. 若随机事件 A，B 的概率分别为 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.5$，则 A 与 B 一定（　　）.

（A）相互对立　　（B）相互独立

（C）互不相容　　（D）相容

41. 设 A_1, A_2 两个随机事件相互独立，当 A_1, A_2 同时发生时，必有 A 发生，则（　　）.

（A）$P(A_1A_2)\leqslant P(A)$

（B）$P(A_1A_2)\geqslant P(A)$

（C）$P(A_1A_2)=P(A)$

（D）$P(A_1)P(A_2)=P(A)$

42. 若事件 A_1, A_2, A_3 两两独立，则下列结论成立的是（　　）.

（A）A_1, A_2, A_3 相互独立

（B）$\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ 两两独立

（C）$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)$

（D）$\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ 相互独立

43. 设 $P(A)=0.8, P(B)=0.7, P(A\,|\,B)=0.8$，则下面结论正确的是（　　）.

（A）事件 A 与 B 相互独立

（B）事件 A 与 B 互不相容

（C）$A\subset B$

（D）$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

数学实验

抛硬币的计算机模拟

抛一枚密度均匀的硬币，容易知道正面朝上的概率为 0.5. 若抛 n 次硬币，正面朝上的次数为 k 次，则正面朝上的频率为 k/n，由频率的稳定性可知，k/n 会趋近于概率 0.5，这体现了频率的稳定性.

在 MATLAB 中建立新的脚本文件 coin.m.

```
function y=coin(n)
for i=1:i:n
x(i)=binornd(1,0.5);
end;
K=sum(x);
```

```
Y=k/n
```

在 MATLAB 命令窗口中输入：

```
coin(100)
y=
0.4600
coin(1000)
y=
0.4820
coin(10000)
y=
0.4987
```