第 1 章　向量代数与空间解析几何

空间解析几何通过坐标法把空间上的点与有序数组对应起来，把空间上的图形和方程对应起来，从而可以用代数方法来研究几何问题．空间解析几何知识对学习多元函数微积分是不可缺少的．

本章内容包括：向量代数、平面和直线、曲面和曲线等．

1-1 第 1 章知识点

1.1　向量及其运算

1.1.1　空间直角坐标系

在空间取定一点 O, 以 O 为原点作三条有相同的长度单位并且两两垂直的数轴，依次记作 x 轴、 y 轴和 z 轴，统称为 **坐标轴**. 通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上， z 轴则在铅直线上．它们的正方向符合右手规则，即以右手握住 z 轴，当四个手指从 x 轴的正向转过 $\dfrac{\pi}{2}$ 角度后指向 y 轴的正向时，竖起的拇指的指向为 z 轴的正向 (图 1.1). 这样就建立了空间直角坐标系，称为 $Oxyz$ **直角坐标系**, 点 O 称为该坐标系的 **原点**.

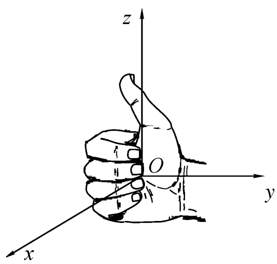

图　1.1

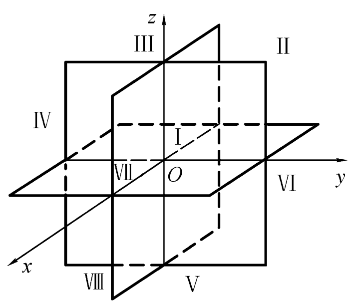

图　1.2

三条坐标轴中的每两条可以确定一个平面，称为 **坐标面**. 由 x 轴和 y 轴确定的坐标面称为 Oxy 平面，另外两个坐标面称为 Oyz 面和 Ozx 面．三个坐标面把空间分成八个部分，称为八个卦限．如图 1.2 所示，在 Oxy 面上方并且在 Oyz 面前方、 Ozx 面右方的那个卦限称为第 Ⅰ 卦限，在 Oxy 面上方按逆时针方向依次为 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限，在 Oxy 面下方与 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限相对的依次是Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限 (图 1.2).

设 M 是空间一点，过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、 y 轴和 z 轴并与这三个坐标轴分别交于点 P, Q 和 R(图 1.3). 设点 P, Q 和 R 在三个坐标轴上的坐标分别为 x, y 和 z, 这样，空间的一点 M 就唯一地确定了一个有序数组 x, y, z. 反过来，对给定的有序数组 x, y, z, 在三个坐标轴上分别取坐标为 x, y, z 的点 P, Q, R, 再过点 P, Q, R 作平面分别垂直于 x 轴、 y 轴、 z 轴，这三个平面的交点 M 就是由有序数组 x, y, z 所唯一确定的点. 这样，空间的点 M 与有序数组 x, y, z 之间就建立了一一对应的关系，称 x, y, z 为点 M 的 **坐标**, 依次称 x, y, z 为点 M 的 **横坐标** 、 **纵坐标** 和 **竖坐标**, 并把点 M 记作 $M(x, y, z)$.

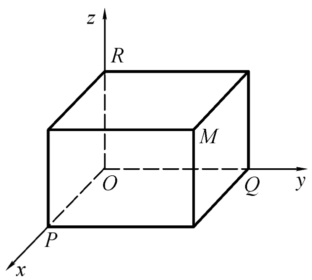

图　1.3

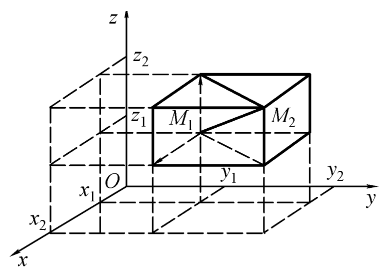

图　1.4

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 是空间两点，过 M_1, M_2 分别作垂直于三个坐标轴的平面，这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体 (图 1.4), 各棱的长度分别为

$$|x_2 - x_1|,\ |y_2 - y_1|,\ |z_2 - z_1|.$$

根据勾股定理，对角线 M_1M_2 的长度，即空间两点 M_1, M_2 的距离为

$$d(M_1, M_2) = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

特别地，点 $M(x, y, z)$ 与坐标原点 $O(0, 0, 0)$ 的距离为

$$d(O, M) = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

例 1.1.1　*在 z 轴上求一点 M, 使该点与点 $A(-4, 1, 7)$ 和 $B(3, 5, -2)$ 的距离相等.*

解　因为所求的点在 z 轴上，所以设该点为 $M(0, 0, z)$, 由题意有 $|MA| = |MB|$, 即

$$\sqrt{(-4)^2 + 1^2 + (7 - z)^2} = \sqrt{3^2 + 5^2 + (-2 - z)^2}.$$

两边平方，解得 $z = \dfrac{14}{9}$. 于是所求点为 $M\left(0, 0, \dfrac{14}{9}\right)$.

1.1.2 向量的概念

在研究实际问题时，我们通常会遇到两种不同类型的量，一类是只有大小的量，例如时间、温度、质量、体积等，这种量称为 **数量** 或标量；另一类是既有大小又有方向的量，例如力、速度、加速度等，这种量称为 **向量** 或矢量.

向量通常用黑体小写字母来表示，如 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{i}$ 等，手写时也可以用上方加箭头的字母来表示，如 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}, \vec{i}$ 等. 数学上往往用一个有方向的线段来表示向量，如果线段的起点是 M_0, 终点是 M, 那么这个有向线段记为 $\overrightarrow{M_0M}$, 它表示一个向量，线段的长度表示向量的大小，线段的方向表示向量的方向. 为以后讨论问题的方便，我们对向量和表示它的有向线段不加区分.

向量的大小称为向量的 **模**, 向量 $\boldsymbol{a}$ 的模记为 $|\boldsymbol{a}|$. 模为零的向量称为 **零向量**, 记为 $\mathbf{0}$, 规定零向量的方向是任意的. 模为 1 的向量称为 **单位向量**.

如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模相等, 方向相同, 则称这两个向量 **相等**, 记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 这说明，如果两个向量的大小与方向是相同的，那么不论它们的起点是否相同，我们就认为它们是同一向量，这样的向量称为 **自由向量**, 本书所讨论的向量都是自由向量.

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同方向或者反方向，称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **平行**, 记为 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$. 由于零向量的方向是任意的，故可认为零向量与任何向量都平行.

在直角坐标系中，以坐标原点 O 为起点，以点 M 为终点的向量 $\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 关于点 O 的 **向径**, 常用 $\boldsymbol{r}$ 表示，即 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$. 空间的每一点都对应着一个向径 $\overrightarrow{OM}$, 反过来，每个向径 $\overrightarrow{OM}$ 都和它的终点 M 相对应.

1.1.3 向量的线性运算

1. 向量的加法

设有两个不平行的向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, 任取一点 M, 作 $\overrightarrow{MA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{MB}=\boldsymbol{b}$, 以 MA, MB 为邻边的平行四边形 $MACB$ 的对角线为 MC(图 1.5), 则向量 $\overrightarrow{MC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的 **和**, 记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

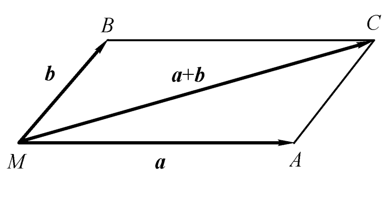

图 1.5

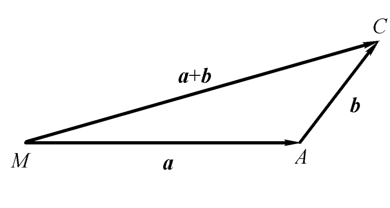

图 1.6

这个定义向量加法的规则称为向量加法的 **平行四边形法则**. 这个法则没有对两个平行向量的加法加以定义，为此我们再给出一个包含了平行四边形法则的加法定义：

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, 任取一点 M, 作 $\overrightarrow{MA}=\boldsymbol{a}$, 再以 A 为起点，作 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$, 连接 MC, 则向量 $\overrightarrow{MC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的 **和**, 记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(图 1.6).

这个规则称为向量加法的 **三角形法则**.

向量的加法满足如下运算规律：

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

2. 向量与数的乘法

对任意实数 λ 和向量 $\boldsymbol{a}$, 定义 λ 与 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量，记为 $\lambda\boldsymbol{a}$, 它的模和方向规定如下：

(1) $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$;

(2) 当 $\lambda>0$ 时， $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向；当 $\lambda<0$ 时， $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反方向；当 $\lambda=0$ 时， $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

向量与数的乘法运算又称为向量的 **数乘**.

几何直观上， $\lambda\boldsymbol{a}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 平行的向量，只是把 $\boldsymbol{a}$ 伸缩了 λ 倍 (图 1.7).

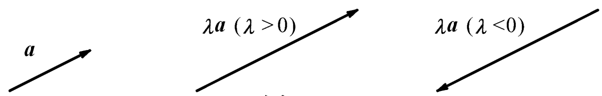

图 1.7

向量的数乘满足如下运算规律：

(1) 分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$, $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$;

(2) 结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

其中 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是任意向量， λ 和 μ 是任意实数.

对于非零向量 $\boldsymbol{a}$, 用 $\boldsymbol{e_a}$ 表示与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，由向量的数乘定义有

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e_a} \text{ 或 } \boldsymbol{e_a}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

即任何非零向量可以表示为它的模与同方向单位向量的数乘.

定理 1.1.1 设有向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$, 且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$ 的充要条件是存在实数 λ, 使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证明 必要性 设 $\boldsymbol{b}//\boldsymbol{a}$, 若 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, 则取 $\lambda=0$, 有 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}$. 若 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$, 当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向时 $\boldsymbol{e_b}=\boldsymbol{e_a}$, 取 $\lambda=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$, 有

$$\lambda\boldsymbol{a}=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{e_a}=|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{e_b}=\boldsymbol{b}.$$

同样的，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反方向时，取 $\lambda=-\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$, 有 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

充分性　若 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$, 由数乘的定义知 $\boldsymbol{b}//\boldsymbol{a}$. □

利用向量的加法和数乘，可以定义向量的减法.

对于向量 $\boldsymbol{b}$, 称 $(-1)\boldsymbol{b}$ 为 $\boldsymbol{b}$ 的 **负向量**, 记作 $-\boldsymbol{b}$. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的 **差** 规定为

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

若将向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的起点重合，则从向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点到向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点所引的向量就是 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$(图 1.8).

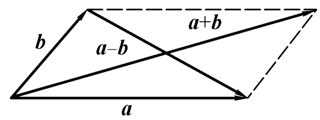

图　1.8

向量的加法和向量的数乘统称为向量的 **线性运算**.

例 1.1.2　证明三角形两边中点的连线 (中位线) 平行于第三边，其长度等于第三边长度的一半 (图 1.9).

证明　在 $\triangle ABC$ 中，设 $AD=DB$, $AE=EC$, 由向量的线性运算法则有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DE}&=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD},\\ \overrightarrow{BC}&=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\\ &=2\overrightarrow{AE}-2\overrightarrow{AD}\\ &=2(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD})\\ &=2\overrightarrow{DE},\end{aligned}$$

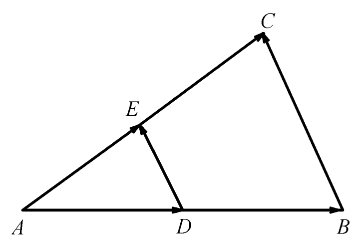

图 1.9

因此 $\overrightarrow{DE}//\overrightarrow{BC}$, 且 $|\overrightarrow{DE}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$. □

1.1.4　向量的坐标

1. 向量的坐标

为了建立向量与数的联系，我们把向量放在直角坐标系中加以讨论，定义向量的坐标，从而把向量与有序数组对应起来.

在空间直角坐标系中，记 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别是与 x 轴、y 轴、z 轴同方向的单位向量，称为 $Oxyz$ 坐标系下的 **基本单位向量**.

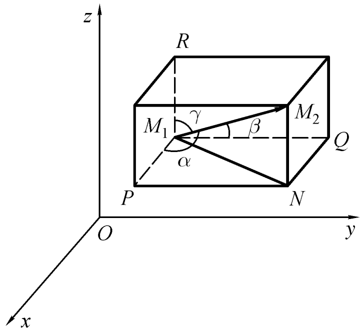

图 1.10

设 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ 是空间直角坐标系中的一个向量，其起点和终点的坐标为 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$. 以 M_1M_2 为对角线作一个各棱分别平行于三个坐标轴的长方体 (图 1.10), 有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1P} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NM_2} \\ &= \overrightarrow{M_1P} + \overrightarrow{M_1Q} + \overrightarrow{M_1R},\end{aligned}$$

由向量与和它同方向的单位向量的关系知

$$\overrightarrow{M_1P} = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i}, \quad \overrightarrow{M_1Q} = (y_2 - y_1)\boldsymbol{j}, \quad \overrightarrow{M_1R} = (z_2 - z_1)\boldsymbol{k},$$

分别称 $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的 **投影**, 并记为

$$x_2 - x_1 = a_x, \quad y_2 - y_1 = a_y, \quad z_2 - z_1 = a_z,$$

则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k} \\ &= a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

称为向量 $\boldsymbol{a}$ 按基本单位向量的分解表示式，其中 $a_x\boldsymbol{i}$, $a_y\boldsymbol{j}$, $a_z\boldsymbol{k}$ 分别称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的 **分向量**.

称有序数组 a_x, a_y, a_z 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的 **坐标**, 并把向量 $\boldsymbol{a}$ 记为

$$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z).$$

上式称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的 **坐标表示式**.

特别地，从原点到 $M(x, y, z)$ 的向径

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = (x, y, z),$$

即如果向量的起点为坐标原点，那么这个向量的坐标与它的终点的坐标是一致的.

由此可知，每个向量都唯一地确定一个有序数组；反过来，每一个有序数组都能唯一地确定一个向径，而我们讨论的是自由向量，因而每一个有序数组都能唯一地确定一个向量. 这样向量和它的坐标就是一一对应的.

向量的坐标表示使用的是圆括号，这与点的坐标表示相同，我们从上下文是容易区别它们的.

2. 向量的模及方向余弦的坐标表示

设向量 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{M_1M_2} = (a_x, a_y, a_z)$, 其起点和终点的坐标为 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$, 由空间两点距离公式，知 $\boldsymbol{a}$ 的模

$$|\boldsymbol{a}| = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2},$$

而

$$a_x = x_2 - x_1, \quad a_y = y_2 - y_1, \quad a_z = z_2 - z_1,$$

于是得

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \tag{1.1.1}$$

非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴、y 轴、z 轴正方向之间的夹角 α, β, γ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的方向角 (规定 $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi, 0 \leqslant \beta \leqslant \pi, 0 \leqslant \gamma \leqslant \pi$), 方向角的余弦 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**. 由图 1.10 知

$$\begin{aligned} a_x &= |\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\alpha = |\boldsymbol{a}|\cos\alpha, \\ a_y &= |\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\beta = |\boldsymbol{a}|\cos\beta, \\ a_z &= |\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\gamma = |\boldsymbol{a}|\cos\gamma. \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

即

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}, \\ \cos\beta &= \frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}, \\ \cos\gamma &= \frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}. \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

当 $\boldsymbol{a}$ 的坐标给出后，由式 (1.1.1) 和 (1.1.3) 可以确定它的模和方向角 (即大小和方向); 反过来，当 $\boldsymbol{a}$ 的模和方向角已知时，由式 (1.1.2) 可以确定它的坐标.

容易验证方向余弦满足如下的关系式：

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量的坐标表示式为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e_a} &= \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}(a_x, a_y, a_z) \\ &= (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma), \end{aligned}$$

即 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 是与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量.

例 1.1.3 已知两点 $M_1(2,2,\sqrt{2})$ 和 $M_2(1,3,0)$, 求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解 $\overrightarrow{M_1M_2} = (1-2, 3-2, 0-\sqrt{2}) = (-1, 1, -\sqrt{2})$,

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2,$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \cos\beta = \frac{1}{2}, \quad \cos\gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{3}, \quad \beta = \frac{\pi}{3}, \quad \gamma = \frac{3\pi}{4}.$$

例 1.1.4 设点 M 位于第二卦限, 向径 $\overrightarrow{OM}$ 与 y 轴、 z 轴的夹角依次为 $\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{\pi}{4}$, 且 $|\overrightarrow{OM}| = 8$, 求点 M 的坐标.

解 由 $\beta = \frac{\pi}{3}, \gamma = \frac{\pi}{4}$ 和 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ 得

$$\cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

又点 M 在第二卦限, $\cos\alpha < 0$, 所以

$$\cos\alpha = -\frac{1}{2},$$

于是

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= |\overrightarrow{OM}|(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)\\ &= 8\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &= (-4, 4, 4\sqrt{2}),\end{aligned}$$

这就是点 M 的坐标.

3. 向量线性运算的坐标表示

设有向量

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} = (a_x, a_y, a_z),$$

$$\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k} = (b_x, b_y, b_z),$$

由向量加法和数乘的运算律有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\pm(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_x\pm b_x)\boldsymbol{i}+(a_y\pm b_y)\boldsymbol{j}+(a_z\pm b_z)\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda\boldsymbol{a}&=\lambda(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\\&=\lambda a_x\boldsymbol{i}+\lambda a_y\boldsymbol{j}+\lambda a_z\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

或

$$(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z),$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z).$$

即两个向量相加减等于对应坐标相加减，数乘向量等于用这个数乘以向量的各个坐标.

由定理 1.1.1 知，当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时， $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 按照向量的坐标表示式即为

$$(b_x,b_y,b_z)=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z).$$

因此，当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时， $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$ 的充要条件为

$$b_x=\lambda a_x,\quad b_y=\lambda a_y,\quad b_z=\lambda a_z,$$

或写成

$$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}=\lambda,$$

即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的对应坐标成比例 (若 a_x,a_y,a_z 中某个为零时，则上式中理解为相应的分子为零).

1.1.5 向量的乘积运算

1. 向量的数量积

首先，我们定义向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角：将 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 平移使它们的起点重合，它们所在的射线之间的夹角 θ $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的 **夹角**(图 1.11), 记为 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$. 如果 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{2}$, 则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **垂直**, 记为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

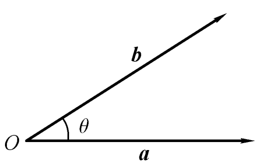

图 1.11

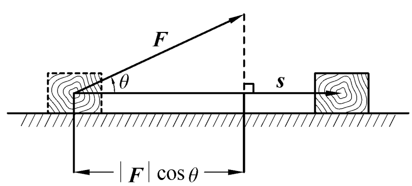

图 1.12

如果某物体在外力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下沿直线移动，位移向量为 $\boldsymbol{s}$, 则力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为

$$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta,$$

其中 $\theta=(\widehat{\boldsymbol{F},\boldsymbol{s}})$(图 1.12). 由此实际背景出发，我们来定义向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积.

定义 1.1.1 设有向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, $\theta=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$, 规定向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的 **数量积** 是一个数，记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, 其值为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta. \tag{1.1.4}$$

两个向量的数量积又称为点积或内积. 根据数量积的定义，上述问题中力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功就可以表示为 $W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$.

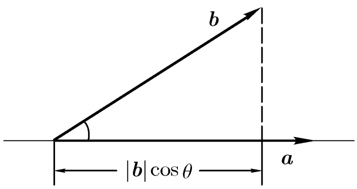

图 1.13

式 (1.1.4) 中的因子 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 称为向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影， 记为 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$, 即 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cos\theta$. 当 θ 是锐角时， $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ 是 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 所在直线上投影线段的长度 (图 1.13); 当 θ 是钝角时， $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ 是投影线段长度的相反数.

同样，因子 $|\boldsymbol{a}|\cos\theta$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影，记为 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$, 即 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta$. 因此，有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}.$$

数量积具有下列性质：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$.

(2) 向量 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

事实上，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 有一个为 $\mathbf{0}$ 时，结论显然成立；当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 均不为 $\mathbf{0}$ 时，按定义， $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充要条件是 $\theta=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{2}$, 即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=0$.

数量积具有下列运算规律：

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

(2) 分配律 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$;

(3) 结合律 $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$ (λ 为实数).

下面推导数量积的坐标表示式. 设

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=(a_x,a_y,a_z),$$

$$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}=(b_x,b_y,b_z).$$

由数量积的运算规律有