第 1 章　行　列　式

本章介绍用行列式的定义、性质及展开定理计算行列式，介绍行列式在解特殊类型线性方程组中的应用. 行列式作为基础的数学工具，有着重要的应用.

本章重点　n 阶行列式的定义、性质、展开定理和计算方法及 Cramer 法则.

本章难点　行列式的计算.

一、主要内容

n 阶行列式的定义，n 阶行列式的性质，代数余子式，行列式展开定理，Cramer 法则.

二、教学要求

1. 理解 n 阶行列式的定义.
2. 熟练掌握行列式的性质.
3. 熟练掌握行列式的计算方法.
4. 熟练掌握行列式按行(列)展开定理.
5. 掌握 Cramer 法则.

三、例题选讲

例 1.1　计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a-x & a-y & a-z \\ b-x & b-y & b-z \\ c-x & c-y & c-z \end{vmatrix}.$$

分析　利用行列式的性质.

解

$$D=\begin{vmatrix} a-x & a-y & a-z \\ b-x & b-y & b-z \\ c-x & c-y & c-z \end{vmatrix} \xlongequal[-r_1+r_3]{-r_1+r_2} \begin{vmatrix} a-x & a-y & a-z \\ b-a & b-a & b-a \\ c-a & c-a & c-a \end{vmatrix}=0.$$

例 1.2 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c+d & 1 \\ b & c & a+d & 1 \\ c & d & a+b & 1 \\ d & a & b+c & 1 \end{vmatrix}.$$

分析 将第1列、第2列加到第3列,然后提取公因子.

解

$$D\xlongequal[c_2+c_3]{c_1+c_3}\begin{vmatrix} a & b & a+b+c+d & 1 \\ b & c & a+b+c+d & 1 \\ c & d & a+b+c+d & 1 \\ d & a & a+b+c+d & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c+d)\begin{vmatrix} a & b & 1 & 1 \\ b & c & 1 & 1 \\ c & d & 1 & 1 \\ d & a & 1 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

例 1.3 计算5阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 8 & -2 & -3 \\ 2 & -8 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -6 \\ -4 & 3 & -5 & 6 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 由

$$D=D^{\mathrm{T}}\xlongequal[\text{提取}-1]{\text{各行(列)}}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -8 & 2 & 3 \\ -2 & 8 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 6 \\ 4 & -3 & 5 & -6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{提取}-1]{\text{各行(列)}}(-1)^5D,$$

故 $D=0$.

注 若 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

满足 $a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 D 为反对称行列式. 此题是奇数阶反对称行列式，故 $D=0$.

例 1.4　计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&0&-1&2\\0&1&1&0\\-1&0&2&1\\0&1&0&-1\end{vmatrix}.$$

分析　对于元素是数字的行列式，通常运用行列式的性质将其化为三角行列式来计算，或将其某一行(列)化成有较多 0 元素之后，再按该行(列)展开降阶.

解　方法 1

$$D\xlongequal[(-1)r_2+r_4]{r_1+r_3}\begin{vmatrix}1&0&-1&2\\0&1&1&0\\0&0&1&3\\0&0&-1&-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3+r_4}\begin{vmatrix}1&0&-1&2\\0&1&1&0\\0&0&1&3\\0&0&0&2\end{vmatrix}=2.$$

方法 2

$$\begin{aligned}D&\xlongequal{\text{按第 1 列展开}}1\cdot A_{11}+0\cdot A_{21}+(-1)A_{31}+0\cdot A_{41}\\&=(-1)^{1+1}M_{11}-(-1)^{3+1}M_{31}\\&=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&2&1\\1&0&-1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0&-1&2\\1&1&0\\1&0&-1\end{vmatrix}\\&=-1-(-3)=2.\end{aligned}$$

注　也可按第 2 列或第 2 行或第 4 行展开.

方法 3

$$D\xlongequal{r_1+r_3}\begin{vmatrix}1&0&-1&2\\0&1&1&0\\0&0&1&3\\0&1&0&-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第 1 列展开}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=2.$$

例 1.5 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

分析 各行元素之和相等,可将后三列都加到第 1 列上,提取公因子.

解

$$D \xlongequal[\text{第 1 列}]{\text{各列加到}} \begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[-r_1+r_4]{\substack{-r_1+r_2 \\ -r_1+r_3}} x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 0 & 0 & x & -x \\ 0 & x & 0 & -x \\ 0 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第 1 列展开}} x\begin{vmatrix} 0 & x & -x \\ x & 0 & -x \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix}$$

$$=x^4.$$

例 1.6 计算 $n+1$ 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}, \quad \text{其中 } a_i \neq 0, i=1,2,\cdots,n.$$

分析 这是 $|\nwarrow|$ 型行列式,可用主对角线元素化其为上(下)三角形来计算.

解　方法 1

$$D\xlongequal[i=2,3,\cdots,n+1]{c_i\times\frac{1}{a_{i-1}}}\prod_{i=1}^{n}a_i\begin{vmatrix}a_0 & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n}\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n+1]{(-1)c_i+c_1}\prod_{i=1}^{n}a_i\begin{vmatrix}a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n}\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

$$=\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\prod_{i=1}^{n}a_i.$$

方法 2

$$D\xlongequal[i=2,3,\cdots,n+1]{r_i\times\left(-\frac{1}{a_{i-1}}\right)+r_1}\begin{vmatrix}a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}$$

$$=\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\prod_{i=1}^{n}a_i.$$

注　此题的行列式结构特殊，一些行列式的计算都可先化成$|\diagdown|$，再按照此题的方法计算.

例 1.7　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n\end{vmatrix},$$

其中 $x_i\neq a_i,i=1,2,\cdots,n$.

分析　行列式的特点为第 j 列$(j=1,2,\cdots,n)$除元素 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$外都相同，所以后 $n-1$ 行分别减第 1 行化成例 1.6 行列式的结构，再用例 1.6 的

方法求解.

解

$$D_n \xlongequal[\substack{\cdots \\ -r_1+r_n}]{\substack{-r_1+r_2 \\ -r_1+r_3}} \begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1-x_1 & x_2-a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1-x_1 & 0 & x_3-a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1-x_1 & 0 & 0 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^{n}(x_i-a_i) \begin{vmatrix} \dfrac{x_1}{x_1-a_1} & \dfrac{a_2}{x_2-a_2} & \dfrac{a_3}{x_3-a_3} & \cdots & \dfrac{a_n}{x_n-a_n} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^{n}(x_i-a_i) \begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a_i}{x_i-a_i} & \dfrac{a_2}{x_2-a_2} & \dfrac{a_3}{x_3-a_3} & \cdots & \dfrac{a_n}{x_n-a_n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x_i-a_i}\right)\prod_{i=1}^{n}(x_i-a_i).$$

例 1.8 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ a & x & a & \cdots & a & a \\ a & a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix}.$$

分析 行列式中行(列)各元素之和相等,故将第 $2,3,\cdots,n$ 列(行)加到第1列(行),提出公因子 $x+(n-1)a$,然后再用后 $n-1$ 行分别减第1行.

解

$$D \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c_i+c_1} \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & x & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-1)a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$
=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 1 & x & a & \cdots & a \\ 1 & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[\substack{\cdots \\ -r_1+r_n}]{\substack{-r_1+r_2 \\ -r_1+r_3}}[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}
$$

$$
=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.
$$

注　在行列式计算中，若(行)列之和相等，都可考虑此方法.

例 1.9　计算 n 阶行列式

$$
D_n=\begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-m & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3-m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}.
$$

分析　此行列式各行元素之和相同，所以将后 $n-1$ 列加到第 1 列，提取公因式 $\sum_{i=1}^{n}x_i-m$.

解

$$
D_n=\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n}x_i-m & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \sum_{i=1}^{n}x_i-m & x_2-m & x_3 & \cdots & x_n \\ \sum_{i=1}^{n}x_i-m & x_2 & x_3-m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n}x_i-m & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}
$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-m\right)\begin{vmatrix}1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ 1 & x_2-m & x_3 & \cdots & x_n\\ 1 & x_2 & x_3-m & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-m\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{\cdots\\ -r_1+r_n}]{\substack{-r_1+r_2\\ -r_1+r_3}}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-m\right)\begin{vmatrix}1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ 0 & -m & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & -m & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -m\end{vmatrix}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-m\right)(-m)^{n-1}.$$

例 1.10 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n\end{vmatrix}.$$

分析 此行列式先按第 n 行(列)展开,再利用计算公式,或用分块行列式进行计算,简记为

$$D=\begin{vmatrix}D_1 & 0\\ 0 & D_2\end{vmatrix}=|D_1||D_2|,$$

其中 D_1 是行列式左上方$(n-1)^2$ 个元素 a_{ij} 排成 $n-1$ 行 $n-1$ 列;$D_2=n$.

解 方法 1

$$D\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第}\,n\,\text{行}}(-1)^{n+n}\cdot n\begin{vmatrix} & & & & 1\\ & & & 2 & \\ & & 3 & & \\ & \iddots & & & \\ n-1 & & & & \end{vmatrix}$$

$$=n(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(n-1)!$$

$$=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!.$$

方法 2　用分块行列式得

$$D=n\begin{vmatrix} & & & & 1 \\ & & & 2 & \\ & & 3 & & \\ & \iddots & & & \\ n-1 & & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!.$$

例 1.11　计算 $2n$ 阶行列式

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} n & & & & & & & n+1 \\ & n-1 & & & & & n & \\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ & & & 1 & 2 & & & \\ & & & 3 & 4 & & & \\ & & \iddots & & & \ddots & & \\ & n+1 & & & & & n+2 & \\ n+2 & & & & & & & n+3 \end{vmatrix},$$

其中未写出的元素为 0.

解　方法 1

把 D_{2n} 中的第 $2n$ 行依次与第 $2n-1$ 行、…、第 2 行对调，共作了 $2n-2$ 次相邻对换，再把第 $2n$ 列与第 $2n-1$ 列、…、第 2 列对调，化成分块行列式，得

$$D_{2n}=(-1)^{2n-2}\cdot(-1)^{2n-2}\begin{vmatrix} n & n+1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ n+2 & n+3 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & n-1 & & & & n \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \iddots & \\ & & & & 1 \quad 2 & & \\ & & & & 3 \quad 4 & & \\ & & & \iddots & & \ddots & \\ 0 & 0 & n+1 & & & & n+2 \end{vmatrix}$$

$$=D_{2(n-1)}\begin{vmatrix} n & n+1 \\ n+2 & n+3 \end{vmatrix}=(-2)D_{2}(n-1).$$

以此为递推公式，得

$$D_{2n}=(-2)D_{2(n-1)}=\cdots=(-2)^{n-1}D_2=(-2)^n.$$

方法 2

$$D_{2n} \xlongequal[\text{展开}]{\text{按第 1 列}} n\begin{vmatrix} n-1 & & & & & n & 0 \\ & \ddots & & & \iddots & & \\ & & 1 & 2 & & & \\ & & 3 & 4 & & & \\ & \iddots & & & \ddots & & \\ n+1 & & & & & n+2 & \\ 0 & & & & & & n+3 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{2n+1}(n+2)\begin{vmatrix} 0 & & & & & & n+1 \\ n-1 & & & & & n & \\ & \ddots & & & \iddots & & \\ & & 1 & 2 & & & \\ & & 3 & 4 & & & \\ & \iddots & & & \ddots & & \\ n+1 & & & & & n+2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= n(n+3)D_{2(n-1)} - (n+1)(n+2)D_{2(n-1)},$$

故有

$$\begin{aligned} D_{2n} &= -2D_{2(n-1)} = (-2)^2 D_{2(n-2)} = \cdots \\ &= (-2)^{n-1}D_2 = (-2)^{n-1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-2)^n. \end{aligned}$$

注 此题方法称为递推法,即寻找递推公式降阶.

例 1.12 计算 $n+1$ 阶行列式

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ ax & a & -1 & \cdots & 0 \\ ax^2 & ax & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ax^n & ax^{n-1} & ax^{n-2} & \cdots & a \end{vmatrix}, \quad a \neq 0.$$

解 方法 1 从第 1 列开始到第 $n-1$ 列,依次用后一列乘$(-x)$加到前一列上,得

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a+x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a+x & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a+x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & a \end{vmatrix} = a(a+x)^n.$$