第 1 章　行　列　式

在经济学及其他领域中，线性代数是必不可少的基础理论之一，它在研究离散变量之间的线性关系上有着重要的应用，而行列式是研究线性代数的基础工具，也是线性代数中的一个重要概念．本章主要讨论 n 阶行列式的定义、性质及计算方法，进而介绍用行列式求解一类特殊线性方程组的克拉默法则．

经济管理数学基础
线性代数总述

1.1　行列式的定义

1.1.1　n 阶行列式的引出

在初等代数中，曾用消元法求解二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

为消去方程组 (1.1.1) 中的未知数 x_2, 以 a_{22} 与 a_{12} 分别依次乘以式 (1.1.1) 的第一个方程与第二个方程的两端，然后将两个方程相减，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2.$$

类似地，消去 x_1, 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

若 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, 则方程组 (1.1.1) 有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.1.2}$$

在式 (1.1.2) 中，其各自的分母均由方程组 (1.1.1) 中未知数的系数构成，把这 4 个系数按它们在方程组 (1.1.1) 中的位置，排成两行两列 (横排称行，竖排称列) 的数表，即用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1.1.3}$$

表示 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$, 称为 **二阶行列式**. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{1.1.4}$$

其中 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 称为二阶行列式的 **元素**; 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为 **行标**, 表明该元素位于第 i 行, 第二个下标 j 称为 **列标**, 表明该元素位于第 j 列. 在式 (1.1.3) 中从左上角到右下角的对角线称为行列式的 **主对角线**, 从右上角到左下角的对角线称为行列式的 **副对角线**; $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为二阶行列式的 **值**(或展开式). 于是二阶行列式的值便是主对角线上的两元素之积减去副对角线上的两元素之积所得的差.

利用二阶行列式的概念，式 (1.1.2) 中 x_1, x_2 的分子也可以写成二阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22}-a_{12}b_2, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则式 (1.1.2) 可以写成

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

上式为二元一次线性方程组的求解公式. 值得注意的是分母 D 是由方程组 (1.1.1) 的系数所确定的二阶行列式 (称为 **系数行列式**), x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1, b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}, a_{21} 所得的二阶行列式， x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1, b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}, a_{22} 所得的二阶行列式.

例 1.1.1 求解二元一次线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = -3, \\ 2x_1 + x_2 = -2. \end{cases}$$

解 由于

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3-(-4) = 7 \neq 0,$$

所以该方程组有解，且

$$D_1=\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-3-4=-7,\qquad D_2=\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=-6-(-6)=0.$$

因此，方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-7}{7}=-1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{0}{7}=0.$$

类似地，对于三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases} \tag{1.1.5}$$

其系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1.1.6}$$

表示的代数和式为 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$, 称为三阶行列式的 **值**(或称 **三阶行列式的展开式**).

上述定义表明三阶行列式的值可按图 1.1 的“对角线法则”计算. 其遵循的规律为三条实线看作是平行于主对角线的连线, 实线上连结的三个元素的乘积取正号; 三条虚线看作是平行于副对角线的连线, 虚线上连结的三个元素的乘积取负号. 然后取这六项之和即为三阶行列式的值.

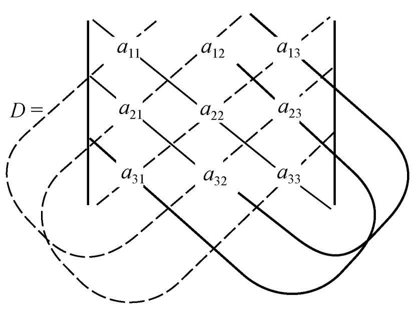

图 1.1

若令

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

可用对角线法则计算出 D_1, D_2, D_3 的值, 当系数行列式 $D \neq 0$ 时, 方程组 (1.1.5) 的求解公式为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}. \tag{1.1.7}$$

例 1.1.2 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 按照对角线法则，得

$$\begin{aligned} D &= 1\times 2\times 1+2\times(-3)\times(-2)+(-4)\times(-1)\times 2- \\ &\quad (-4)\times 2\times(-2)-1\times(-3)\times 2-2\times(-1)\times 1 \\ &= 2+12+8-16+6+2=14. \end{aligned}$$

例 1.1.3 求解方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix}=0.$$

解 方程左端的三阶行列式

$$\begin{aligned} D &= 3x^2+4x+18-9x-2x^2-12 \\ &= x^2-5x+6. \end{aligned}$$

由 $x^2-5x+6=0$ 解得 $x=2$ 或 $x=3$.

请读者注意，对角线法则仅适用于二阶与三阶的行列式. 为研究四阶及更高阶的行列式，先介绍 n 阶行列式.

对于 n 元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n &= b_2, \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n &= b_n, \end{cases} \tag{1.1.8}$$

也可类似二、三元的线性方程组引出的二、三阶行列式而引出 n 阶行列式. 式 (1.1.8) 的系数行列式记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.1.9}$$

若令

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \cdots, \quad D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix},$$

那么, 我们若称方程组 (1.1.8) 的系数行列式 (1.1.9) 为 ***n* 阶行列式**, 则自然会提出以下几个问题：(1) $D=?$ (2) 若 $D\neq 0$, 方程组 (1.1.8) 是否有唯一解？ (3) 若方程组 (1.1.8) 有唯一解，其求解公式是否是 $x_j=\dfrac{D_j}{D}$ $(j=1,2,\cdots,n)$? 关于这些问题，我们将在本章结束之前，给读者一个明确的回答.

为解决 n 阶行列式的计算问题, 我们先来介绍全排列和逆序数的有关知识, 然后给出 n 阶行列式的定义.

1.1.2 全排列及其逆序数

由 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 按照任何一种次序排成的有序数组 $j_1j_2\cdots j_n$ 称为一个 n **级排列**, 例如 $123, 132, 213, 231, 312, 321$ 都是不同的 3 级排列.

显然不重复的 n 级排列共有 $n!$ 个.

若规定由小到大为自然数间的标准顺序，则在一个排列中，当两个元素的顺序与标准顺序不同时，就称产生了一个 **逆序**. 一个 n 级排列所有逆序的总和称为该排列的 **逆序数**. n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$.

由逆序数的定义可知，标准排列 $1\ 2\ \cdots\ n$ 的逆序数为 0, 对于一般的 n 级排列，逆序数可用如下的方法计算：

对于 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$, 自 j_1 开始直到 j_{n-1} 逐个计算每个元素的右边比它小的元素的个数 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}$, 则该排列的逆序数为

$$\tau(j_1j_2\cdots j_n)=k_1+k_2+\cdots+k_{n-1}.$$

例如 5 级排列 53421, 其逆序数为

$$\tau(53421)=4+2+2+1=9.$$

若交换排列 53421 第二、四两个位置上的数码，得排列 52431, 则该排列的逆序数为

$$\tau(52431)=4+1+2+1=8.$$

我们称逆序数为奇数的排列为 **奇排列**, 逆序数为偶数的排列为 **偶排列**.

将一个排列的任意两个元素的位置对调，而其余的元素不动，这种构成一个新排列的变换称为 **对换**.

定理 1.1.1 *一次对换必改变排列的奇偶性.*

证明 先证二相邻元素对换的情形.

设 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_{s-1}klj_{s+2}\cdots j_n$, 经过对换变为 $j_1j_2\cdots j_{s-1}lkj_{s+2}\cdots j_n$. 显然，除了 k,l 这两个元素外，其余各元素间的逆序数不会改变. 至于 k,l 这两个元素，当 $k<l$ 时，经过对换则增加 1 个逆序；当 $k>l$ 时，经过对换则减少了一个逆序. 不论是增加 1 还是减少 1, 原排列的逆序数的奇偶性都改变了.

再证一般情形.

设 n 级排列 $j_1\cdots j_pki_1\cdots i_slj_q\cdots j_n$, 经过对换变为 $j_1\cdots j_pli_1\cdots i_skj_q\cdots j_n$. 不难看出，这种对换可以经过一系列相邻元素的对换来实现，即先将元素 l 经过 $s+1$ 次相邻元素的对换变为

$$j_1\cdots j_plki_1\cdots i_sj_q\cdots j_n,$$

然后再将元素 k 经过 s 次相邻元素的对换变为

$$j_1\cdots j_pli_1\cdots i_skj_q\cdots j_n.$$

总共经过 $2s+1$ 次相邻元素的对换. 每对换一次都改变排列的奇偶性，而 $2s+1$ 是奇数，因此最终实现 k 与 l 的对换改变了排列的奇偶性. □

例 1.1.4 *已知 3□452□ 为一个 6 级排列，将数字 1 和 6 填入 □ 内，使其成为奇排列.*

解 我们可以将数字 1 和 6 随意填入两个 □ 内，然后求此排列的逆序数. 如果逆序数是奇数，该排列即为所求；如果逆序数为偶数，由定理 1.1.1, 将数字 1 和 6 的位置对调，便得所求排列.

现将数字 1 填入第 1 个 □ 内，将数字 6 填入第 2 个 □ 内，得排列 314526, 则

$$\tau(314526)=2+0+1+1+0=4.$$

即排列 314526 为偶排列，由定理 1.1.1, 将数字 1 和 6 的位置对调，便得奇排列 364521.

有了全排列和逆序数的知识之后，我们就可以定义 n 阶行列式了.

1.1.3 n 阶行列式的定义

我们先来研究三阶行列式的情形. 按照“对角线法则”，三阶行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \tag{1.1.10}$$

容易看出：

(1) 式 (1.1.10) 右边的每一项都恰是三阶行列式中三个元素的乘积，这三个元素位于不同的行、不同的列. 因此式 (1.1.10) 右端的任一项除正、负号外均可写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$, 每个元素的第一个下标 (行标) 按次序排成标准排列 123, 而第二个下标 (列标) 排成 $j_1j_2j_3$, 它是 $1,2,3$ 三个数组成的全排列中的某个三级排列，这样的排列共有 6 种，对应的式 (1.1.10) 右端共含 6 项.

(2) 当每一项的行标排列均为标准排列时，每一项的符号因子与其列标排列有关，带正号的三项列标排列是： $123, 231, 312$, 均为偶排列. 带负号的三项列标排列是： $132, 213, 312$, 均为奇排列. 因此，各项所带的正负号可以表示为 $(-1)^{\tau}$, 其中 τ 为列标排列的逆序数.

总之，三阶行列式可以表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对 $1,2,3$ 三个数的所有三级排列 $j_1j_2j_3$ 取和.

依此，可以把行列式的定义推广到一般情形.

定义 1.1.1 设有 n^2 个数，排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

表中不同行不同列的 n 个数的乘积共有 $n!$ 项，且每项冠以符号 $(-1)^{\tau}$, 其代数和

称为 **n 阶行列式**, 记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}. \tag{1.1.11}$$

其中 $\sum$ 对 $1,2,\cdots,n$ 的所有 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和, $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 为排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数, 数 a_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 称为行列式的第 i 行、第 j 列的元素. 式 (1.1.11) 的右端是 $n!$ 项的和, 式中的任意乘积项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 称为 n 阶行列式的一个 **均匀分布项**, 简称 **均布项**. 它恰是行列式中位于不同行且不同列的 n 个元素的乘积. $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$ 称为均布项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的 **符号因子**, 其正负取决于该均布项列标排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的奇偶性. n 阶行列式可简记作 $\det(a_{ij})$.

把此定义用于二、三阶行列式，与用对角线法则计算的二、三阶行列式结果是一致的. 但对于高于三阶行列式，按照“对角线法则”得到的均布项个数比式 (1.1.11) 中的均布项个数少，因此“对角线法则”仅适用于二阶和三阶行列式，对于三阶以上的行列式不再适用. 当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a|=a$, 注意不要与绝对值记号相混淆.

由于数的乘法满足交换律，所以行列式均布项中 n 个元素的顺序可以任意交换. 当两个元素的位置互换时，它们的行标数及列标数在行标排列及列标排列中也同时互换位置. 由定理 1.1.1 知均布项的行标排列与列标排列的逆序数同时改变奇偶性，于是均布项行标和列标排列的逆序数之和的奇偶性仍然不变. 如果将列标排列调换为标准排列 $12\cdots n$ (它的逆序数为 0), 而行标排列随之变为 $i_1i_2\cdots i_n$, 故行列式值也可定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1i_2\cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)} a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}.$$

1.1.4 几种特殊的行列式

根据 n 阶行列式的定义，我们来计算几个简单而又重要的行列式.

例 1.1.5 证明

$$D_1 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n;$$

$$D_2=\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

证明 第一式是显然的，下面只证第二式．首先， D_2 中除 $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$ 之外的任一均布项均为 0, 于是

$$D_2=(-1)^t\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,$$

其中 t 为排列 $n(n-1)\cdots 2\ 1$ 的逆序数．而

$$t=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}.$$

故

$$D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$ □

上例中的 D_1 称为 **主对角行列式**, D_2 称为 **次对角行列式**.

例 1.1.6 证明下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证明 由于当 $j>i$ 时， $a_{ij}=0$, 故 D 中可能不为 0 的元素 a_{ij_i} 的下标应有 $j_i\leqslant i$, 即 $j_1\leqslant 1, j_2\leqslant 2,\cdots,j_n\leqslant n$.

在所有的排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中，能满足上述关系的排列只有标准排列 $1\ 2\cdots n$. 所以 D 中可能不为 0 的均布项只有一项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. 此项的符号 $(-1)^{\tau(12\cdots n)}=(-1)^0$ 为正，所以

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$ □

例 1.1.7 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1m} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}, \qquad D_2=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明 $D=D_1D_2$.

证明 记 $D=\det(d_{ij})$, 其中

$$\begin{aligned} d_{ij}&=a_{ij}, && i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,m; \\ d_{m+i,m+j}&=b_{ij}, && i=1,2,\cdots,n;\ \ j=1,2,\cdots,n; \\ d_{m+i,j}&=c_{ij}, && i=1,2,\cdots,m;\ \ j=1,2,\cdots,m. \end{aligned}$$

在行列式

$$D=\begin{vmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{m1} & \cdots & d_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ d_{m+1,1} & \cdots & d_{m+1,m} & d_{m+1,m+1} & \cdots & d_{m+1,m+n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{m+n,1} & \cdots & d_{m+n,m} & d_{m+n,m+1} & \cdots & d_{m+n,m+n} \end{vmatrix}$$

中任取一个均布项

$$d_{1r_1}\cdots d_{mr_m}d_{m+1,r_{m+1}}\cdots d_{m+n,r_{m+n}}.$$

由于当 $i\leqslant m,\ j>m$ 时， $d_{ij}=0$, 因此 $r_1,\cdots,r_m$ 只有在 $1,\cdots,m$ 中选取时，该均布项才可能不为 0, 而当 $r_1,\cdots,r_m$ 在 $1,\cdots,m$ 中选取时， $r_{m+1},\cdots,r_{m+n}$ 只能在 $m+1,\cdots,m+n$ 中选取．于是 D 中可能不为零的均布项可以记为

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{mp_m}b_{1q_1}\cdots b_{nq_n},$$

这里 $p_i=r_i,\ q_i=r_{m+i}-m$, 设 l 为排列 $p_1\cdots p_m(m+q_1)\cdots(m+q_n)$ 的逆序数. 以 t,s 分别表示排列 $p_1p_2\cdots p_m$ 及 $q_1q_2\cdots q_n$ 的逆序数，应有 $l=t+s$. 于是

$$\begin{aligned} D&=\sum_{p_1p_2\cdots p_m}\sum_{q_1q_2\cdots q_n}(-1)^l a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{mp_m}b_{1q_1}b_{2q_2}\cdots b_{nq_n} \\ &=\sum_{p_1p_2\cdots p_m}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{mp_m}\sum_{q_1q_2\cdots q_n}(-1)^s b_{1q_1}b_{2q_2}\cdots b_{nq_n} \\ &=D_1D_2. \end{aligned}$$

□