

张永辉 主编

高考数学 培优40讲

函数与导数

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

《高考数学培优40讲》针对高考数学中的重难点内容,分为四个分册:函数与导数;解析几何;三角、向量、数列、不等式与复数;立体几何与概率统计.全套书用高观点的视角、联系变化的眼光分析问题,洞悉问题背后的本质,达到“万理归一,大道至简”的境界.

本书为“函数与导数”分册,重点研究函数性质与思想、函数形态处理策略、导数三大主要问题,丰富的方法和技巧贯穿始终,精彩纷呈.本书适合数学成绩优秀的学生挑战高分甚至满分使用,也适合高中数学教师、高考数学研究者,以及广大数学爱好者参考使用.

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签、封底贴有刮刮卡,无标签和刮刮卡者不得销售.
版权所有,侵权必究.举报:010-62782989,beiqinquan@tup.tsinghua.edu.cn.

图书在版编目(CIP)数据

高考数学培优40讲. 函数与导数/张永辉主编. —北京:清华大学出版社,2022.12
ISBN 978-7-302-62221-5

I. ①高… II. ①张… III. ①中学数学课—高中—升学参考资料 IV. ①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2022)第226429号

责任编辑:汪 操

封面设计:常雪影

责任校对:王淑云

责任印制:沈 露

出版发行:清华大学出版社

网 址:<http://www.tup.com.cn>,<http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦A座 邮 编:100084

社总机:010-83470000 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:三河市龙大印装有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:210mm×285mm 印 张:19 字 数:401千字

版 次:2022年12月第1版 印 次:2022年12月第1次印刷

定 价:69.00元

产品编号:098179-01

《高考数学培优 40 讲》编委会

主 编

张永辉

副主编

张宏卫 余 臣

编 委

彭剑平 章世骏 蒋新峰 高艳山 张喜金 李拴柱

何 龙 董家兴 周逸飞 于明辉 孙光磊 黄垠超

袁 志 颜亚冰 张 潇 李明红 赵晓翠 李艳丽

前言

《高考数学培优 40 讲》是一套诞生于新高考时代,面向数学培优的教辅作品.

自 2017 年教育部实行新课程标准以来,我国高中数学的教学和考试发生了根本性的变化.新课程标准明确提出将“学科素养”作为培养人、选拔人的最重要指标,无论是教学还是考试都贯穿“基础性、综合性、创新性和应用性”四大特征,这意味着未来的数学考题,将从偏重经验归纳,转向加强思维品质考查,加强考查思维的灵活性,发挥数学学科的高考选拔功能.如何在教学中渗透对数学思维的培养?这对广大教师和学生提出了新的要求.

2019 年起新教材在部分省市被陆续使用.由于各地教学规划不同,近几年出现了新教材新高考、老教材老高考、新教材老高考等多种教学现状,这无疑进一步增加了教学备考的复杂度.与此同时,数学高考也从过去的多省市独自命题,逐步转向教育部统一命题.随着山东省、江苏省、浙江省等一大批高考强省陆续加入全国卷的队伍,高考大军竞争异常激烈.

在过去的两年中,我们团队的老师们深入全国 10 多个省份,陆续为接近 100 所重点高中作了 300 多场数学培优讲座.在与广大一线师生的交流中,很多教师最关心的问题就是:“未来高考会怎么考,我们的数学课堂该如何教,高考培优应该讲什么?”由此可见,在新的时代背景下,如何能组织好教学过程,真正的培养出国家需要的人才让学生具备较高的数学素养进而在高考中脱颖而出,成为了最核心的问题.

这套书最大的亮点就是完全出自教学实践.由于我们的课程是面向数学功底较好的学生开展进行,所以在 300 多场讲座中经历了无数次教师和学生之间、学生和学生之间的思想交锋.甚至在一些互动交流过程中,出现了学生和老师分成不同阵营,相互辩论的场面.而每一次的交流辩论都让我们更加接近数学解题的本质,更加明白数学培优课程应该讲什么、怎么讲.所以书中的内容既包含了团队老师的辛勤付出,也包含了很多一线教师和数学尖子生的集体智慧.综上所述,本套图书的内容不是一蹴而就的,它经历了原创研发——教学实践——反思优化,再教学实践——反思优化……这样一个又一个的轮回,在这样螺旋式上升的迭代过程中,内容的质量与实用性都达到了我们前所未有的高度.

本套图书的另一大亮点便是其深邃的思想性,主要体现在以下几个方面:

1. 启迪智慧,知所以然

好的教育永远都不是告知,而是启发引导.在本套讲义的编写过程中充分尊重了这一规律,例如通过分而治之的策略拆分函数实现不等式证明时,我们没有止步于题目本身的解答,而是

设置了一系列的问题进行反思,甚至陪同读者一起走过错路与弯路,在知识的探索与内化过程中,这些都是必经之路,通过抛出一系列的问题,引导学生的思维步步深入,达到知其然也知其所以然的境界.

2. 深入本质,返璞归真

比勤奋更重要的是深度思考的能力,在纷繁复杂的题目背后抽丝剥茧或追本溯源以接近问题的本质,这是数学精神,也是在书中带领并帮助读者习得的一项能力.例如在解析几何的开篇,讲义一针见血地点明了数与形的辩证关系,即以形助数和以数化形,抓住这一本源如同获取一把钥匙.大道至简,衍化至繁,本套图书一直在通往道的层面上前进不息.

3. 引申触类,远见卓识

在学习过程中,有纵向的“深”与横向的“伸”两个维度,本书兼顾这两个维度并加以挖掘和拓展.在许多例题后面设置了探究总结等版块,引申出了更多的定理与推论,它们将带领读者进入一个更广阔的领域.

4. 高数视角,知己知彼

会当凌绝顶,一览众山小.当我们身处高一级的层面,再反观原有的层面时,我们会发现问题的布局或背景等原来看不到的事物.本书中有的内容,例如泰勒展开、极点极线等专题就是在高等数学的视角下来俯视问题,进入命题人的思维,这样真是知己知彼,百战不殆.

《高考数学培优40讲》共含《函数与导数》《解析几何》《三角、向量、数列、不等式与复数》以及《立体几何与概率统计》四本分册.从初稿到出版,我们不断在教学实践中调整、完善,历经了四个版本的迭代,积极采纳各方意见,数易其稿.同时,为了满足部分尖子生的学习需要,我们在内容编写的过程中,有选择的加入了一定比例的清北强基考试题目.这部分题目与高考题目相结合,呈现出更加完整且富于变化的知识体系,对培养数学思维能力和综合能力大有裨益.

在本书的创作过程中,团队的老师们付出了很多,感谢张宏卫、余臣、孙光磊、李艳丽、张潇等各位老师的不懈努力,也感谢清华大学出版社给予的大力支持.

路漫漫其修远兮,吾将上下而求索.

在追求教学创新和培优精进的道路上,注定没有尽头.限于编写水平有限,书中错漏难免.欢迎各位读者帮我们纠正错误,我们也将后续版本中不断修订、调整.

张永辉

2022年8月

目 录

第 1 讲	函数的性质及延拓	1
1.1	对称性及延拓	2
1.2	单调性及延拓	6
1.3	周期性及延拓	10
	训练 1	16
第 2 讲	函数的图像及延拓	18
2.1	函数图像的变换	19
2.2	等高线问题	21
2.3	含参函数零点问题	25
2.4	复合函数零点问题	30
2.5	分段函数零点问题	33
	训练 2	34
第 3 讲	函数构造与函数方程思想	36
	函数构造	37
3.1	转化等量关系	37
3.2	转化不等关系	40
	函数与方程思想	42
3.3	函数思想	42
3.4	方程思想	43
	训练 3	46
第 4 讲	三次函数的图像与性质	47
4.1	三次函数的图像	48
	三次函数的性质	49
4.2	对称性	49
4.3	切线问题	54
4.4	等分面积	56

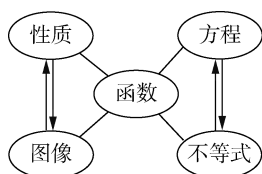
4.5 单调性与最值	58
三次函数的零点问题	60
4.6 极值点与零点	60
4.7 韦达定理与判别式	63
训练 4	65
第 5 讲 含指数、对数函数形式的变形技巧	66
单一含有指数或对数函数不等式的变形技巧	67
5.1 指数找朋友,对数单独走	67
含有 $\ln x, e^x$ 混合形式的不等式的变形技巧	70
5.2 从数与形看变形转化	70
5.3 凹凸反转	72
5.4 设而不求隐零点	78
5.5 切线放缩	82
5.6 指数对数同构	86
训练 5	90
第 6 讲 导数中含有三角函数形式的处理策略	93
6.1 借助导数研究三角函数性质	94
6.2 “三看”原则	95
6.3 含三角函数不等式的证明	100
6.4 三角函数不等式恒成立问题	107
训练 6	111
第 7 讲 函数中含绝对值形式的问题探究	114
7.1 函数中含绝对值形式的最值问题	115
7.2 函数中含绝对值形式的参数取值范围问题	122
训练 7	126
第 8 讲 函数零点问题的研究	128
8.1 插值法	129
分类讨论结合放缩法	132
8.2 含参指数型函数的零点赋值	132
8.3 含参对数型函数的零点赋值	138
8.4 含参三角型函数的零点赋值	143
训练 8	145

第 9 讲	导数中的不等式恒成立问题的解题策略	148
9.1	分离自变量与参变量	149
9.2	不分离自变量与参变量	155
训练 9		173
第 10 讲	极值点偏移问题的深度研究	175
10.1	极值点偏移与拐点偏移	176
10.2	非常规类型极值点偏移问题	183
10.3	极值点偏移问题的加强	188
10.4	切割线的放缩与应用	190
训练 10		193
第 11 讲	导数中双变量问题的处理策略	195
11.1	主元变更法	196
11.2	韦达定理法	199
11.3	同构法	200
11.4	参数法	203
训练 11		221
第 12 讲	泰勒展开在高考压轴题中的应用	224
12.1	求解不等式	225
12.2	估值计算	238
训练 12		240
第 13 讲	导数中常见的放缩与估值	241
13.1	基本不等式放缩	242
13.2	指数、对数、三角函数不等式放缩	244
13.3	几何放缩	248
13.4	估值分析	250
训练 13		255
参考答案		257

第1讲

函数的性质及延拓

 数是贯穿整个中学数学的一根主线,其内容包括两个方面:性质和图像.其中,函数的概念、定义域、值域、解析式、奇偶性、单调性、周期性是函数性质的重要组成部分,也是高考重点考查的知识,函数的图像主要包括基本初等函数的图像及图像变换,函数知识的外延主要结合在方程(零点)、不等式等方面.处理这两类问题的主导思想是转化,其转化的方向为借助函数的图像与性质求解.在转化的路径上,我们研发了函数解题思维“ ∞ ”图(如图所示).



数量关系包括等量关系和不等量关系,它是数学的核心研究对象.从形式上看,函数方程(零点)呈现的是等量关系,函数不等式呈现的是不等量关系.处理数量关系的本质是建立数量关系的模型.函数这部分的重要数学思想是转化思想,将函数、方程、不等式问题转化为函数图像和函数性质求解.从更大范围来讲,学好函数是整个数学学习的基石,在数学的其他分支上都需要用函数的思想方法来处理问题.



1.1 对称性及延拓



研究思路

函数对称性是函数奇偶性的延伸,函数奇偶性是函数对称性的特例.和为定值 $2a$ 的两个自变量通过函数 f 作用产生的函数值恒相等,则 $f(x)$ 为轴对称函数,其图像关于 $x=a$ 对称;若通过函数 f 作用产生的函数值之和恒为定值 $2b$,则为中心对称函数,函数图像关于点 (a,b) 对称,否则不具有对称性.

于是,函数 $y=f(x)$ 的图像关于点 $A(a,b)$ 对称的充要条件是 $f(x)+f(2a-x)=2b$;

函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称的充要条件是 $f(a+x)=f(a-x)$,或 $f(x)=f(2a-x)$.

由此可知,两个自变量之和为定值是函数具有对称性的前提条件,即必要条件,这是判断函数对称性的首要着眼点.

例 1.1 已知函数 $f(x)=1+\frac{2^{x+1}}{2^x+1}+\sin x$ 在区间 $[-k,k]$ ($k>0$) 上的值域为 $[m,n]$,则 $m+n=$ _____.

分析 ▶▶ 考虑函数 $f(x)$ 在区间 $[-k,k]$ 上的值域,该区间是一个对称区间,而奇函数在对称区间上的最值之和为 0,因此转化原函数为“奇+常”模型,利用奇函数的上述性质解题.

解析 ▶▶ $f(-x)+f(x)=1+\frac{2^{-x+1}}{2^{-x}+1}+\sin(-x)+1+\frac{2^{x+1}}{2^x+1}+\sin x=1+\frac{2}{1+2^x}-\sin x+1+\frac{2^{x+1}}{2^x+1}+\sin x=2+\frac{2^{x+1}+2}{1+2^x}=4.$

所以 $f(-x)+f(x)-4=0, f(-x)-2+f(x)-2=0.$

令 $g(x)=f(x)-2$, 则 $g(x)+g(-x)=0, g(-x)=-g(x)$, 所以 $g(x)$ 为奇函数,奇函数在对称区间上的最值之和为 0, 所以 $g(x)$ 在区间 $[-k,k]$ ($k>0$) 上的最值之和为 $m-2+n-2=0$, 即 $m+n=4$.

变式 1 已知 $f(x)=\left(\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}\right)x^2+bx+6$ (a, b 为常数, $a>1$) 且 $f(\lg \log_8 1000)=8$, 则 $f(\lg \lg 2)=$ _____.

解析 ▶▶ $\lg \log_8 1000 = \lg \log_{2^3} 10^3 = \lg \log_2 10 = \lg \frac{1}{\lg 2} = -\lg \lg 2$, 所以 $f(-\lg \lg 2) = f(\lg \log_8 1000) = 8.$

$$\begin{aligned}
 f(-x) + f(x) &= \left(\frac{1}{a^{-x}-1} + \frac{1}{2}\right)x^2 - bx + 6 + \left(\frac{1}{a^x-1} + \frac{1}{2}\right)x^2 + bx + 6 \\
 &= \left(\frac{a^x}{1-a^x} + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{a^x-1} + \frac{1}{2}\right)x^2 + 12 = 12.
 \end{aligned}$$

所以 $f(\lg \lg 2) + f(-\lg \lg 2) = 12$, $f(\lg \lg 2) = 12 - f(-\lg \lg 2) = 12 - 8 = 4$.

变式2 函数 $f(x) = \frac{2^{|3x|} + 9x + \lg(\sqrt{900x^2 + 100} - 30x)}{8^{|x|} + 1}$ 的最大值与最小值之和为 _____.

解析 $\gg f(x) = \frac{2^{|3x|} + 9x + \lg(\sqrt{900x^2 + 100} - 30x)}{8^{|x|} + 1}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{8^{|x|} + 9x + \lg[10 \times (\sqrt{9x^2 + 1} - 3x)]}{8^{|x|} + 1} \\
 &= \frac{8^{|x|} + 1 + 9x + \lg(\sqrt{9x^2 + 1} - 3x)}{8^{|x|} + 1} \\
 &= 1 + \frac{9x + \lg(\sqrt{9x^2 + 1} - 3x)}{8^{|x|} + 1}.
 \end{aligned}$$

令 $g(x) = \frac{9x + \lg(\sqrt{9x^2 + 1} - 3x)}{8^{|x|} + 1}$, 易知 $9x + \lg(\sqrt{9x^2 + 1} - 3x)$ 为奇函数, $8^{|x|} + 1$ 为偶函数, 所以 $g(x)$ 为奇函数, $f(x) - 1$ 为奇函数, 则 $f(x)_{\max} - 1 + f(x)_{\min} - 1 = 0$, $f(x)_{\max} + f(x)_{\min} = 2$.

例 1.2 已知函数 $f(x) (x \in \mathbf{R})$ 满足 $f(-x) = 2 - f(x)$, 若函数 $y = \frac{x+1}{x}$ 与 $y = f(x)$ 图像的交点为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$, 则 $\sum_{i=1}^m (x_i + y_i) = (\quad)$.

A. 0

B. m C. $2m$ D. $4m$

分析 $\gg$ 函数 $f(x) (x \in \mathbf{R})$ 满足 $f(-x) = 2 - f(x)$, 得到 $y = f(x)$ 关于点 $(0, 1)$ 对称, 函数 $y = \frac{x+1}{x}$ 经过化简也可以得到关于点 $(0, 1)$ 对称, 由此可知两个函数的交点关于 $(0, 1)$ 对称,

根据点的对称性, 就可以得到 $\sum_{i=1}^m (x_i + y_i)$ 的值.

解析 $\gg$ 因为函数 $f(x)$ 满足 $f(-x) = 2 - f(x)$, 即函数 $f(x)$ 满足 $f(-x) + f(x) = 2$, 所以 $y = f(x)$ 关于点 $(0, 1)$ 对称.

又函数 $y = \frac{x+1}{x}$ 等价于 $y = 1 + \frac{1}{x}$, 则函数 $y = \frac{x+1}{x}$ 也关于点 $(0, 1)$ 对称, 所以函数 $y = \frac{x+1}{x}$

与 $y = f(x)$ 图像的交点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$ 也关于点 $(0, 1)$ 对称, 故交点 (x_1, y_1) ,

$(x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$ 成对出现, 即 m 为偶数, 且每一对点都关于点 $(0, 1)$ 对称, 故 $\sum_{i=1}^m (x_i + y_i) = (x_1 + x_2 + \dots + x_m) + (y_1 + y_2 + \dots + y_m) = 0 + \frac{m}{2} \cdot 2 = m$. 故选 B.

变式 1 已知函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + \frac{5}{4}$, 则 $\sum_{k=1}^{2023} f\left(\frac{k}{1012}\right)$ 的值为 _____.

解析 $\sum_{k=1}^{2023} f\left(\frac{k}{1012}\right) = f\left(\frac{1}{1012}\right) + f\left(\frac{2}{1012}\right) + \dots + f\left(\frac{2023}{1012}\right)$
 $= f\left(\frac{1}{1012}\right) + f\left(\frac{2}{1012}\right) + \dots + f\left(2 - \frac{2}{1012}\right) + f\left(2 - \frac{1}{1012}\right).$
 $f(x) + f(2-x)$
 $= x^3 - 3x^2 + x + \frac{5}{4} + (2-x)^3 - 3(2-x)^2 + (2-x) + \frac{5}{4}$
 $= x^3 - 3x^2 + x + \frac{5}{2} + C_3^0 2^3 + C_3^1 2^2 (-x) + C_3^2 2 (-x)^2 +$
 $C_3^3 (-x)^3 - 3(x^2 + 4 - 4x) + 2 - x$
 $= x^3 - 3x^2 + x + \frac{5}{2} + 8 - 12x + 6x^2 - x^3 - 3x^2 - 12 + 12x + 2 - x$
 $= \frac{1}{2}.$

所以 $\sum_{k=1}^{2023} f\left(\frac{k}{1012}\right) = \frac{1}{2} \times 2023 \times \frac{1}{2} = \frac{2023}{4}.$

变式 2 函数 $f(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} + \dots + \frac{x+2022}{x+2023}$ 的图像的对称中心为 _____.

解析 $f(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} + \dots + \frac{x+2022}{x+2023}$
 $= 1 - \frac{1}{x+1} + 1 - \frac{1}{x+2} + 1 - \frac{1}{x+3} + \dots + 1 - \frac{1}{x+2023}$
 $= 2023 - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \dots + \frac{1}{x+2023}\right),$
 $f(-2024-x) = 2023 - \left(\frac{1}{-2023-x} + \frac{1}{-2022-x} + \frac{1}{-2021-x} + \dots + \frac{1}{-1-x}\right)$
 $= 2023 + \left(\frac{1}{2023+x} + \frac{1}{2022+x} + \frac{1}{2021+x} + \dots + \frac{1}{1+x}\right)$
 $= 2023 + (2023 - f(x))$
 $= 4046 - f(x),$

则 $f(-2024-x) + f(x) = 4046$, 所以函数 $f(x)$ 的图像的对称中心为 $(-1012, 2023)$.

例 1.3 函数 $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ 的最大值与最小值之积为_____.

分析 ▶ 思路一: 首先对 $f(x)$ 变形处理, 得

$$f(x) \xrightarrow{\text{分离常数}} 1 - \frac{2x}{x^2 + x + 1} \xrightarrow{\text{分子常数化}} 1 - \frac{2}{x + \frac{1}{x} + 1},$$

再通过对勾函数的值域求 $f(x)$ 的值域.

思路二: $f(x)$ 的表达式很有规律, $f(-x)$ 正好是其倒数, 因此可思考 $f(x)$ 取得最大值与最小值时自变量的关系.

解析 ▶ $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} = 1 - \frac{2x}{x^2 + x + 1}.$

当 $x=0$ 时, $f(0)=1$; 当 $x \neq 0$ 时, $f(x) = 1 - \frac{2}{x + \frac{1}{x} + 1}.$

又 $x + \frac{1}{x} + 1 \geq 3$ 或 $x + \frac{1}{x} + 1 \leq -1$, 所以 $\frac{1}{3} \leq f(x) < 1$ 或 $1 < f(x) \leq 3.$

综上可得 $\frac{1}{3} \leq f(x) \leq 3$, 所以 $f(x)_{\max} \cdot f(x)_{\min} = 1.$

评注 ▶▶

$f(-x) \cdot f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} \cdot \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} = 1$, $f(x)$ 取到最大值和最小值的情形, 恰

好其自变量互为相反数, 因此, 由 $f(x) \cdot f(-x) = 1$, 不难知 $f(x)_{\max} \cdot f(x)_{\min} = 1.$

变式 1 $f(x) = \frac{x^2 - 2023x + 2022^2}{x^2 + 2023x + 2022^2}$ 的最大值和最小值之积为_____.

解析 ▶ $f(x) \cdot f(-x) = \frac{x^2 - 2023x + 2022^2}{x^2 + 2023x + 2022^2} \cdot \frac{x^2 + 2023x + 2022^2}{x^2 - 2023x + 2022^2} = 1$, 且 $f(x) = 1 -$

$$\frac{4046x}{x^2 + 2023x + 2022^2}.$$

当 $x=0$ 时, $f(x)=1$; 当 $x \neq 0$ 时, $f(x) = 1 - \frac{4046}{x + 2023 + \frac{2022^2}{x}}.$

当 $x=-2022$ 时, $f(x)$ 取最大值; 当 $x=2022$ 时, $f(x)$ 取最小值.

故 $f(x)_{\max} \cdot f(x)_{\min} = f(-2022) \cdot f(2022) = 1.$

例 1.4 (2017 江苏赛区复赛 2) 若函数 $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + ax + b)$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 均满足 $f(x) = f(4-x)$, 则 $f(x)$ 的最小值为_____.

分析 ▶ 由题意可得 $f(x)$ 的对称轴为 $x=2$, 又知 ± 1 为函数零点, 因此 3 和 5 也是函数

的零点,至此得出函数解析式,为一个最高次数为4的多项式,接下来可利用换元法降次,并用配方法求出最值.

解析 ▶ 由题意可得 $f(x)$ 的对称轴为 $x=2$.

已知函数有两个零点1和-1,由对称性可得3和5也是函数的零点.所以

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)(x+1)(x-3)(x-5) \\ &= [(x+1)(x-5)][(x-1)(x-3)] \\ &= (x^2-4x-5)(x^2-4x+3). \end{aligned}$$

令 $t=x^2-4x$, 则 $t \geq -4$, 所以 $f(t)=(t-5)(t+3)=t^2-2t-15=(t-1)^2-16$.

当 $t=1$ 时,有最小值 $f(t)_{\min}=-16$. 故填-16.

变式 1 函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a \neq 0)$ 的图像关于直线 $x=-\frac{b}{2a}$ 对称. 据此可推测,对任意的

非零实数 a, b, c, m, n, p , 关于 x 的方程 $m[f(x)]^2+nf(x)+p=0$ 的解集都不可能是().

- A. $\{1, 2\}$ B. $\{1, 4\}$ C. $\{1, 2, 3, 4\}$ D. $\{1, 4, 16, 64\}$

分析 ▶ 方程 $m[f(x)]^2+nf(x)+p=0$ 若有四个不同解,则可根据二次函数的图像的对称性知道四个不同的解中,有两个解的和与余下两个解的和相等,可以由此判断.

解析 ▶ 设关于 $f(x)$ 的方程 $m[f(x)]^2+nf(x)+p=0$ 有两个解,即 $f(x)=t_1$ 或 $f(x)=t_2$.

而 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图像关于 $x=-\frac{b}{2a}$ 对称,因此 $f(x)=t_1$ 或 $f(x)=t_2$ 的两个解

也关于 $x=-\frac{b}{2a}$ 对称,所以若有4个不同解,则有两个解的和与余下两个解的和应相等.而

选项 D 中 $\frac{4+16}{2} \neq \frac{1+64}{2}$, 故选 D.

1.2 单调性及延拓



研究密钥

一切不等式的问题都是函数问题,因此在函数中的不等式问题往往转化为函数问题去求解,借助函数的性质,尤其是单调性来转化,从而将函数符号“ f ”去掉.

本类问题需把握两点:一是要把原不等式转化为 $f(\triangle) > f(\square)$ (其中不等号还可以为 $\geq, <, \leq$) 的模型;二是要判断函数 $f(x)$ 的单调性,再根据函数的单调性将抽象函数不等式中的函数符号“ f ”去掉,得到具体的不等式(组)来求解.

例 1.5 已知函数 $f(x)=x^3+3x$, 对任意的 $m \in [-2, 2]$, $f(mx-8)+f(2^x) < 0$ 恒成立, 则正实数 x 的取值范围是_____.

分析

▶ 首先利用 $f(x)$ 的单调性把不等式中的函数符号“ f ”去掉,得到一个含参数 m 的不等式,问题转化为此不等式恒成立,求 x 的取值范围.此时可用更换主元与辅元,求出 x 的取值范围.

解析

▶ 由题意知 $f(x)=x^3+3x$ 为奇函数且在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

由 $f(mx-8)+f(2^x)<0$ 可得 $f(mx-8)<-f(2^x)=f(-2^x)$,所以 $mx-8<-2^x$,即 $mx-8+2^x<0, m\in[-2,2]$.

令 $g(m)=x\cdot m+2^x-8$,则 $\begin{cases} g(-2)=-2x+2^x-8<0 \\ g(2)=2x+2^x-8<0 \end{cases}$,又因为 x 为正实数,故 $g(m)<0$

恒成立等价于 $2x+2^x-8<0$.

令 $h(x)=2x+2^x-8$,则 $h(x)$ 为增函数,且 $h(2)=0$,所以 $2x+2^x-8<0$ 的解集为 $0<x<2$,即 x 的取值范围是 $0<x<2$.

**探究总结****函数不等式常见的三种形式**

函数不等式问题常以如下三种形式出现:一是已知函数性质(单调性、奇偶性),求解函数不等式;二是已知函数解析式,分析函数性质,从而求解函数不等式;三是构造函数解析式,研究函数的性质,求解函数不等式.不管是哪一类形式,其根本方向是通过函数单调性去转化为不等关系,求解不等式.这是核心方向同时也是问题的突破口.

变式 1

已知函数 $f(x)=2023^x+\log_{2023}(\sqrt{x^2+1}+x)-2023^{-x}+2$,则关于 x 的不等式 $f(3x+1)+f(x)>4$ 的解集为().

A. $(-\frac{1}{2023}, +\infty)$ B. $(-\frac{1}{3}, +\infty)$ C. $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ D. $(-\frac{1}{4}, +\infty)$

解析

▶ 令 $g(x)=f(x)-2=2023^x+\log_{2023}(\sqrt{x^2+1}+x)-2023^{-x}$,则

$$\begin{aligned} g(-x) &= 2023^{-x} + \log_{2023}(\sqrt{x^2+1}-x) - 2023^x \\ &= -2023^x + \log_{2023}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) + 2023^{-x} \\ &= -[2023^x + \log_{2023}(\sqrt{x^2+1}+x) - 2023^{-x}] \\ &= -g(x). \end{aligned}$$

所以 $g(x)$ 是奇函数,易知 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

由 $f(3x+1)+f(x)>4$ 可得 $g(3x+1)+g(x)>0$,所以 $3x+1+x>0$,解得 $x>-\frac{1}{4}$.

故选 D.

变式 2

已知函数 $f(x)=f(-x)+2\sin x$,又当 $x\geq 0$ 时, $f'(x)\geq 1$,则关于 x 的不等式 $f(x)\geq f(\frac{\pi}{2}-x)+\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$ 的解集为().

- A. $\left[\frac{\pi}{4}, +\infty\right)$ B. $\left[-\frac{\pi}{4}, +\infty\right)$ C. $\left(-\infty, \frac{\pi}{4}\right]$ D. $\left(-\infty, -\frac{\pi}{4}\right]$

分析 ▶ 突破口在于利用形式上的对称来构造函数,研究函数的性质,并借助函数的单调性转化为不等关系,求解不等式.

解析 ▶ $f(x) \geq f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + \sqrt{2} \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, 即 $f(x) \geq f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + \sin x - \cos x = f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + \sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, 所以 $f(x) - \sin x \geq f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

设 $g(x) = f(x) - \sin x$, 则所求的式子转化为 $g(x) \geq g\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$. 由 $f(x) = f(-x) + 2\sin x$, 可知 $f(x) - \sin x = f(-x) - \sin(-x)$, $g(x) = g(-x)$, 于是判断出 $g(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数.

当 $x \geq 0$ 时, $g'(x) = f'(x) - \cos x \geq f'(x) - 1 \geq 0$, 则 $g(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增. 又 $g(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 所以 $g(x)$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上单调递减.

因为所求的式子转化为 $g(x) \geq g\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, 所以得到 $|x| \geq \left|\frac{\pi}{2}-x\right|$, 解得 $x \geq \frac{\pi}{4}$. 故选 A.

变式 3 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{e^x-1}{e^x+1}$, 若 $f(4-m) - f(m) \geq 8-4m$, 则实数 m 的取值范围为_____.

分析 ▶ 根据条件进行转化, 构造函数 $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2 = -\frac{e^x-1}{e^x+1}$, 研究函数 $g(x)$ 的奇偶性和单调性, 利用函数的性质进行转化求解.

解析 ▶ 因为 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{e^x-1}{e^x+1}$, 设 $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2 = -\frac{e^x-1}{e^x+1}$, 则 $g(-x) = -\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = -\frac{1-e^x}{1+e^x} = \frac{e^x-1}{e^x+1} = -g(x)$, 即 $g(x)$ 是奇函数.

又 $g(x) = -\frac{e^x-1}{e^x+1} = -\frac{e^x+1-2}{e^x+1} = -1 + \frac{2}{e^x+1}$, 则 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为减函数.

因为 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + g(x)$, 所以 $f(4-m) - f(m) \geq 8-4m$, 等价于 $\frac{1}{2}(4-m)^2 + g(4-m) - g(m) - \frac{1}{2} \cdot m^2 \geq 8-4m$, 即 $g(4-m) - g(m) + 8-4m \geq 8-4m$, $g(4-m) - g(m) \geq 0$, $g(4-m) \geq g(m)$.

又 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为减函数, 所以 $4-m \leq m$, 解得 $m \geq 2$.

所以实数 m 的取值范围是 $[2, +\infty)$. 故填 $[2, +\infty)$.

例 1.6 已知 $f(x) = x|x|$, 若对任意的 $x \geq 1$ 有 $f(x+m) + mf(x) < 0$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是().

- A. $(-\infty, -1)$ B. $(-\infty, -1]$ C. $(-\infty, -2)$ D. $(-\infty, -2]$

分析 ▶ $f(x+m)+mf(x)<0 \Rightarrow f(x+m)<-mf(x)$, 研究 $f(x)=x|x|$ 的单调性, 分类讨论得到 m 可能的取值范围后, 设法去掉函数 f 的符号, 得到一个含参不等式, 然后分析使此不等式恒成立的参数的取值范围.

解析 ▶ 由 $f(x)=x|x|=\begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$ 可得 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上单调递增的奇函数.

当 $x \geq 1$ 时, $f(x+m)+mf(x)<0$ 恒成立, 即 $f(x+m)<-mf(x)$ 恒成立.

当 $m=0$ 时, 不等式左边为正数, 右边为 0, 显然不成立; 当 $m>0$ 时, 不等式左边为正数, 右边为负数, 显然不成立; 当 $m<0$ 时, $-m>0$, 所以 $f(x+m)<-mf(x)=f(\sqrt{-m}x)$.

由单调性可得 $x+m<\sqrt{-m}x$, $(1-\sqrt{-m})x+m<0$, 需满足 $\begin{cases} 1-\sqrt{-m} \leq 0 & \text{①} \\ 1-\sqrt{-m}+m < 0 & \text{②} \end{cases}$, 解①式

得 $m \leq -1$, 整理②式得 $1+m < \sqrt{-m}$. 故当 $m \leq -1$ 时也满足②式, 所以不等式组的解集为 $m \leq -1$, 即实数 m 的取值范围是 $(-\infty, -1]$. 故选 B.

变式 1 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x)=x^2$, 若对任意的 $x \in [t, t+2]$, 不等式 $f(x+t) \geq 2f(x)$ 恒成立, 则实数 t 的取值范围是().

A. $[2, +\infty)$

B. $[-\sqrt{2}, -1] \cup [0, \sqrt{2}]$

C. $[\sqrt{2}, +\infty)$

D. $(0, \sqrt{2}]$

解析 ▶ 由题意可得 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 且 $2f(x)=f(\sqrt{2}x)$,

所以 $f(x+t) \geq 2f(x)=f(\sqrt{2}x)$ 在 $[t, t+2]$ 上恒成立.

由 $f(x)$ 的单调性可得 $x+t \geq \sqrt{2}x$, 即 $x \leq (1+\sqrt{2})t$, 所以 $t+2 \leq (1+\sqrt{2})t$, 解得 $t \geq \sqrt{2}$, 则实数 t 的取值范围是 $[\sqrt{2}, +\infty)$. 故选 C.

例 1.7 已知可导函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, $f(0)=2023$, 若对任意的 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x) > f'(x)$, 则不等式 $f(x) < 2023e^x$ 的解集为().

A. $(0, +\infty)$

B. $(\frac{1}{e^2}, +\infty)$

C. $(-\infty, \frac{1}{e^2})$

D. $(-\infty, 0)$

分析 ▶ 要想求 $f(x) < 2023e^x$ 的解集, 则 $f(x) < 2023e^x \Rightarrow \frac{f(x)}{e^x} < 2023$. 构造函数 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, 则 $g(0)=2023$, 这样原不等式转化为 $g(x) < g(0)$, 然后再根据 $g(x)$ 的单调性化简不等式求解.

解析 ▶ 令 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, 所以 $g'(x) = \frac{f'(x)-f(x)}{e^x} < 0$, $g(x)$ 单调递减, $g(0) =$

$$\frac{f(0)}{e^0} = 2023.$$

因此, $f(x) < 2023e^x \Rightarrow \frac{f(x)}{e^x} < 2023 \Rightarrow g(x) < g(0) \Rightarrow x > 0$. 故选 A.

变式 1 已知可导函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 若对任意的 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x) - f'(x) >$

1. 且 $f(x) - 2022$ 为奇函数, 则不等式 $f(x) - 2021e^x > 1$ 的解集为().

- A. $(-\infty, 0)$ B. $(0, +\infty)$ C. $(-\infty, e)$ D. $(e, +\infty)$

分析 ▶ 根据题意构造 $F(x) = \frac{f(x)-1}{e^x}$, 结合已知条件, 讨论其单调性, 再将不等式

$f(x) - 2021e^x > 1$ 转化为 $F(x) > F(0)$, 即可利用单调性求解.

解析 ▶ 根据题意, 构造 $F(x) = \frac{f(x)-1}{e^x}$, 则 $F'(x) = \frac{f'(x)-f(x)+1}{e^x} < 0$, 故 $F(x)$ 在

$\mathbf{R}$ 上单调递减.

又 $f(x) - 2022$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 可得 $f(0) - 2022 = 0$, 即 $f(0) = 2022$, 则 $F(0) = 2021$.

不等式 $f(x) - 2021e^x > 1$ 等价于 $F(x) > 2021 = F(0)$, 又因为 $F(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的单调减函数, 故解得 $x < 0$. 故选 A.

变式 2 函数 $f(x)$ 是定义在 $[0, +\infty)$ 上的函数, $f(0) = 0$, 且在 $(0, +\infty)$ 上可导, $f'(x)$ 为其导函数, 若 $xf'(x) + f(x) = e^x(x-2)$ 且 $f(3) = 0$, 则不等式 $f(x) < 0$ 的解集为().

- A. $(0, 2)$ B. $(0, 3)$ C. $(2, 3)$ D. $(3, +\infty)$

分析 ▶ 构造函数 $g(x) = xf(x)$, 利用导函数的单调性, 转化为简单的不等式求解.

解析 ▶ 由题意得函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可导, $f'(x)$ 为其导函数, 令 $g(x) = xf(x)$, 则 $g'(x) = x \cdot f'(x) + f(x) = e^x(x-2)$.

可知当 $x \in (0, 2)$ 时, $g(x)$ 是单调减函数; 当 $x \in (2, +\infty)$ 时, 函数 $g(x)$ 是单调增函数.

又 $f(3) = 0, f(0) = 0$, 则 $g(3) = 3f(3) = 0$, 且 $g(0) = 0$.

于是不等式 $f(x) < 0$ 的解集就是 $xf(x) < 0$ 的解集, 所以不等式的解集为 $\{x | 0 < x < 3\}$.

故选 B.

1.3 周期性及延拓



研究密钥

判断函数的周期性一般有两种方法: 定义法与图像法.

用定义法推导函数周期的方法, 需根据递推公式求函数周期, 往往需要根据条件多次递

推,直至得到 $f(x+T)=f(x)$.

本方法还有几个常见的结论:对于 $f(x)$ 定义域内任一自变量 x ,有:

(1) 若 $f(x+a)=-f(x)$, 则 $T=2|a|$;

(2) 若 $f(x+a)=\frac{1}{f(x)}$, 则 $T=2|a|$;

(3) 若 $f(x+a)=-\frac{1}{f(x)}$, 则 $T=2|a|$.

用图像法确定函数的周期性,一般是双对称出周期.函数的对称性与周期性的关系结论如下.

(1) 若函数 $y=f(x)$ 有两条对称轴 $x=a, x=b(a<b)$, 则函数 $f(x)$ 是周期函数, 且 $T=2|b-a|$;

(2) 若函数 $y=f(x)$ 的图像有两个对称中心 $(a,c), (b,c)(a<b)$, 则函数 $f(x)$ 是周期函数, 且 $T=2|b-a|$;

(3) 若函数 $y=f(x)$ 有一条对称轴 $x=a$ 和一个对称中心 $(b,0)(a<b)$, 则函数 $f(x)$ 是周期函数, 且 $T=4|b-a|$.

对于此结论,可类比 $y=\sin x$ 的周期性与对称性的关系记忆.

例 1.8 (2017 年全国高中数学联赛 A 卷一试 1) 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数, 对任意的 x 有 $f(x+3)f(x-4)=-1$, 又当 $0 \leq x < 7$ 时, $f(x)=\log_2(9-x)$, 则 $f(-100)=$ _____.

分析 对于一些有关“大数”的计算或求值,一般会借助函数的周期性将“大数”转化到给定的区间上来.因此本题思路的入口在于根据给定的等式研究 $f(x)$ 的最小正周期,把 -100 转化对应到 $[0,7]$ 这个区间上求值.

解析 由 $f(x+3)f(x-4)=-1$ 可得 $f(x+7)f(x)=-1$, 所以 $f(x+7)=\frac{-1}{f(x)}$,
 $f(x+14)=\frac{-1}{f(x+7)}=f(x)$, 即函数 $f(x)$ 是周期函数, $T=14$.

于是 $f(-100)=f(-100+14 \times 7)=f(-2)=\frac{-1}{f(5)}$, 又因为 $f(5)=\log_2(9-5)=2$, 所以
 $f(-100)=-\frac{1}{2}$.

变式 1 (2015 浙江赛区预赛 9) 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)+f(1-x)=0, f(x+2)-f(2-x)=0$, 且 $f(\frac{2}{3})=1$, 则 $f(\frac{1000}{3})=$ _____.

解析 由 $f(x+1)+f(1-x)=0$ 可得 $f(x)+f(2-x)=0$, 即 $f(2-x)=-f(x)$.

又因为 $f(x+2)-f(2-x)=0$, 所以 $f(x+2)+f(x)=0$, 即 $f(x+2)=-f(x)$, 则

$f(x+4) = -f(x+2) = f(x)$, 故函数 $f(x)$ 是周期函数, $T=4$.

$$\text{所以 } f\left(\frac{1000}{3}\right) = f\left(83 \times 4 + \frac{4}{3}\right) = f\left(\frac{4}{3}\right) = f\left(2 - \frac{2}{3}\right) = -f\left(\frac{2}{3}\right) = -1.$$

变式 2 (2018 新课标全国 II 卷理 12) 已知 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 的奇函数, 满足 $f(1-x) = f(1+x)$. 若 $f(1) = 2$, 则 $f(1) + f(2) + \cdots + f(50) = (\quad)$.

A. -50

B. 0

C. 2

D. 50

解析 ▶ 因为 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f(-x) = -f(x)$, 由 $f(1-x) = f(1+x)$ 可得 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称, 即 $f(-x) = f(x+2)$, 所以 $f(x+2) = -f(x)$, $f(x+4) = -f(x+2) = f(x)$, 则函数 $f(x)$ 是周期函数, $T=4$.

由题意可得 $f(0) = 0$, $f(-1) = -f(1) = -2$, 所以 $f(1) = 2$, $f(2) = -f(0) = 0$, $f(3) = f(-1) = -2$, $f(4) = f(0) = 0$, $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 0$, 则 $f(1) + f(2) + \cdots + f(50) = 0 + f(1) + f(2) = 2$. 故选 C.

变式 3 (2022 新课标全国乙卷理 12) 已知函数 $f(x)$, $g(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$, 且 $f(x) + g(2-x) = 5$, $g(x) - f(x-4) = 7$, 若 $y = g(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称, $g(2) = 4$, 则

$$\sum_{k=1}^{22} f(k) = (\quad).$$

A. -21

B. -22

C. -23

D. -24

解析 ▶ 函数 $y = g(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称, 则 $g(2+x) = g(2-x)$, 因此 $f(x) + g(2-x) = f(x) + g(x+2) = 5$.

又 $g(x) - f(x-4) = 7$, 即 $g(x+2) - f(x-2) = 7$, 故 $f(x) + f(x-2) = -2$, 所以 $f(x+2) + f(x) = -2$, 则 $f(x+2) = f(x-2)$, 即 $f(x+4) = f(x)$, 得 $f(x)$ 的周期 $T=4$.

令 $x=0$, $f(0) + g(2) = 5$, 得 $f(0) = 1$, $f(2) = -3$, $f(4) = f(0) = 1$; 令 $x=1$, $f(1) + g(1) = 5$; 令 $x=1$, $g(1) - f(-3) = 7 = g(1) - f(1)$, 解得 $f(1) = -1$, $g(1) = 6 = g(3)$; 令 $x=3$, $g(3) - f(-1) = 7$, 所以 $f(-1) = -1 = f(3)$, 故 $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = -1 - 3 - 1 + 1 = -4$, 所以

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{22} f(k) &= 5(f(1) + f(2) + f(3) + f(4)) + f(21) + f(22) = -20 + f(1) + f(2) \\ &= -20 - 4 = -24. \end{aligned}$$

故选 D.

变式 4 (2022 新高考全国 II 卷 8) 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ 且 $f(x+y) + f(x-y) = f(x)f(y)$, $f(1) = 1$, 则 $\sum_{k=1}^{22} f(k) = (\quad)$.

A. -3

B. -2

C. 0

D. 1

解析 ▶ 令 $y=1$, 得 $f(x+1) + f(x-1) = f(x)f(1) = f(x)$, 因此 $f(x+2) + f(x) =$

$f(x+1)$, 所以 $f(x+2)+f(x-1)=0$, 即 $f(x+3)+f(x)=0$, $f(x+6)=-f(x+3)=f(x)$, 故函数 $f(x)$ 的周期 $T=6$.

令 $x=1, y=0$, 得 $2f(1)=f(1)f(0)$, 所以 $f(0)=2$, 又 $f(x+1)=f(x)-f(x-1)$, 且 $f(0)=2, f(1)=1, f(2)=f(1)-f(0)=-1, f(3)=f(2)-f(1)=-2, f(4)=f(3)-f(2)=-1, f(5)=f(4)-f(3)=1, f(6)=f(5)-f(4)=2$, 所以 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=1-1-2-1+1+2=0$. 因此

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{22} f(k) &= 3(f(1)+f(2)+\cdots+f(6))+f(19)+f(20)+f(21)+f(22) \\ &= f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=-3.\end{aligned}$$

故选 A.

例 1.9 (2021 新课标全国甲卷理 12) 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(x+1)$ 为奇函数, $f(x+2)$ 为偶函数, 当 $x \in [1, 2]$ 时, $f(x)=ax^2+b$. 若 $f(0)+f(3)=6$, 则 $f\left(\frac{9}{2}\right)=$ ().

A. $-\frac{9}{4}$

B. $-\frac{3}{2}$

C. $\frac{7}{4}$

D. $\frac{5}{2}$

分析 ▶ 由 $f(x+1)$ 为奇函数, $f(x+2)$ 为偶函数可推知 $f(x)$ 的周期, 利用周期将 $f(0)$, $f(3)$ 的值转化至区间 $[1, 2]$ 上的值, 得到 $f(x)$ 的表达式, 再求 $f\left(\frac{9}{2}\right)$.

解析 ▶ 因为 $f(x+1)$ 为奇函数, 所以 $f(-x+1)=-f(x+1)$, $f(x)$ 关于 $(1, 0)$ 中心对称, 则 $f(1)=0$.

因为 $f(x+2)$ 为偶函数, 所以 $f(-x+2)=f(x+2)$, 即 $f(x)$ 关于 $x=2$ 成轴对称.

由 $f(-x+1)=-f(x+1)$ 得 $f(-x+2)=-f(x)$, 所以 $f(x+2)=-f(x)$, $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$, 即 4 为 $f(x)$ 的一个周期, $f\left(\frac{9}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{3}{2}\right)$. 又因为 $f(0)=-f(2)$, $f(3)=f(1)=0$, 所以 $f(0)+f(3)=6$, 即 $f(1)-f(2)=6$, 得出 $f(2)=-6$. 所以

$$\begin{cases} f(1)=a+b=0 \\ f(2)=4a+b=-6 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a=-2 \\ b=2 \end{cases}.$$

所以, 当 $x \in [1, 2]$ 时, $f(x)=-2x^2+2$, 则 $f\left(\frac{9}{2}\right)=-f\left(\frac{3}{2}\right)=-\left(-2 \times \frac{9}{4}+2\right)=\frac{5}{2}$. 故选 D.

变式 1 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足

① $f(2-x)+f(x)=0$;

② $f(x-2)-f(-x)=0$;

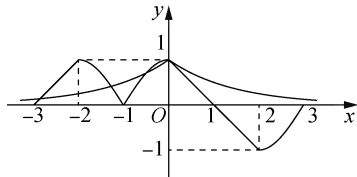
③ 在 $[-1, 1]$ 上表达式为 $f(x)=\begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2}, & x \in [-1, 0] \\ 1-x, & x \in (0, 1] \end{cases}$,

则函数 $f(x)$ 与函数 $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ 的图像在区间 $[-3, 3]$ 上的交点个数为_____.

分析 ▶ 先根据①②可知函数的对称中心和对称轴,再分别画出 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的部分图像,由图像观察交点的个数.

解析 ▶ 根据题意,① $f(2-x) + f(x) = 0$,可得函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(1, 0)$ 对称.

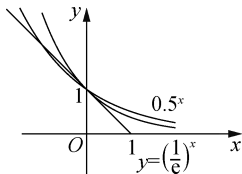
② $f(x-2) - f(-x) = 0$,得函数 $f(x)$ 的图像关于 $x = -1$ 对称,则函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $[-3, 3]$ 上的图像如图所示,由图可知 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像在 $[-3, 3]$ 上有 4 个交点.



评注

本题的关键是当 $x \in (0, 1]$ 时, $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图像没有公共点.

$\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{e}\right)^x \geq -x + 1, x > 0$, 无零点. 如图所示.



研究反思

利用函数周期性求值

运用周期性求函数值的问题,一般在形式上具有“大数”函数值(如 $f(2023)$)的求解问题.通过周期转化到“小数”或已知的区间上来求值.根据周期性求值的特点可延拓到类周期函数问题,因为二者的解题方向思路是一致的.

我们知道,如果函数 $f(x)$ 满足 $f(x+T) = f(x)$,则函数 $f(x)$ 是周期函数,那么我们再多想一步,如果等式两边系数不相等,在周期区间段进行了放缩,这时虽不是周期函数,但是许多方法是相通的.请接下来思考下面的问题.

例 1.10 (2019 新课标全国 II 卷理 12) 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 满足 $f(x+1) = 2f(x)$, 且当 $x \in (0, 1]$ 时, $f(x) = x(x-1)$. 若对任意 $x \in (-\infty, m]$, 都有 $f(x) \geq -\frac{8}{9}$, 则 m 的取值范围是().

- A. $\left(-\infty, \frac{9}{4}\right]$ B. $\left(-\infty, \frac{7}{3}\right]$ C. $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$ D. $\left(-\infty, \frac{8}{3}\right]$

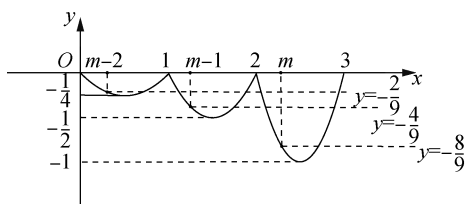
分析 ▶ 根据条件判断,此函数为一个类周期函数,画出函数图像.类周期函数的特征是

间隔相同的点的纵坐标为等比数列,因此判断 $f(x) = -\frac{8}{9}$ 的解位于哪一区间,利用数形结合求

出 m 的临界值.

解析 由题意可得函数 $f(x)$ 的图像如图所示:

根据图像可得 $f(x) = -\frac{8}{9}$ 的解位于区间 $[2, 3]$ 内, 经类周期变换可以转化到区间 $[0, 1]$ 内, 令 $f(x) = x(x-1) = -\frac{2}{9}$, 即 $x^2 - x + \frac{2}{9} = 0$, 解得 $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}$, 则 $m-2 = \frac{1}{3}$, 即 $m = \frac{7}{3}$.



根据图像可得 m 的取值范围是 $(-\infty, \frac{7}{3}]$. 故选 B.

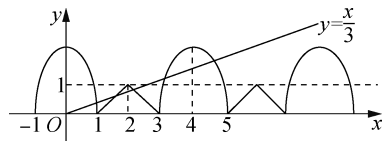
变式 1 已知 $T=4$ 的周期函数 $f(x) = \begin{cases} m\sqrt{1-x^2}, & -1 < x \leq 1 \\ 1-|x-2|, & 1 < x \leq 3 \end{cases}$, 其中 $m > 0$. 若方程

$3f(x) = x$ 恰有 5 个实数解, 则 m 的取值范围是().

- A. $(\frac{\sqrt{15}}{3}, \frac{8}{3})$ B. $(\frac{\sqrt{15}}{3}, \sqrt{7})$ C. $(\frac{4}{3}, \frac{8}{3})$ D. $(\frac{4}{3}, \sqrt{7})$

解析 因为当 $x \in (-1, 1]$ 时, 将函数化为方程 $x^2 + \frac{y^2}{m^2} = 1 (y \geq 0)$, 实质上为一个半椭圆, 同时在坐标系中作出当 $x \in (1, 3]$ 的图像, 再根据周期性作出函数其他部分的图像, 其图像如图所示.

由图易知直线 $y = \frac{x}{3}$ 与第二个椭圆 $(x-4)^2 + \frac{y^2}{m^2} = 1 (y \geq 0)$ 相交, 而与第三个半椭圆 $(x-8)^2 + \frac{y^2}{m^2} = 1 (y \geq 0)$ 无公共点时, 方程恰有 5 个实数解.



将 $y = \frac{x}{3}$ 代入 $(x-4)^2 + \frac{y^2}{m^2} = 1 (y \geq 0)$, 得 $(9m^2 + 1)x^2 - 72m^2x + 135m^2 = 0$, 令 $t = 9m^2 (t > 0)$, 则有 $(t+1)x^2 - 8tx + 15t = 0$.

由 $\Delta = (8t)^2 - 4 \times 15t(t+1) > 0$ 得 $t > 15$, 由 $9m^2 > 15$, 且 $m > 0$ 得 $m > \frac{\sqrt{15}}{3}$.

同样由 $y = \frac{x}{3}$ 与第三个半椭圆 $(x-8)^2 + \frac{y^2}{m^2} = 1 (y \geq 0)$ 无交点, 联立得 $(1+9m^2)x^2 - 144m^2x + 63 \times 9m^2 = 0$.

由 $\Delta < 0$ 得 $(144m^2)^2 - 4 \times 63 \times 9m^2(1+9m^2) < 0$, 解得 $m < \sqrt{7}$.

综上所述 $m \in (\frac{\sqrt{15}}{3}, \sqrt{7})$. 故选 B.

变式 2

定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = 2f(x)$, 当 $x \in [0, 2)$ 时, $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \in [0, 1) \\ -\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-\frac{3}{2}|}, & x \in [1, 2) \end{cases}$, 若当 $x \in [-4, -2)$ 时, 不等式 $f(x) \geq \frac{m^2}{4} - m + \frac{1}{2}$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是().

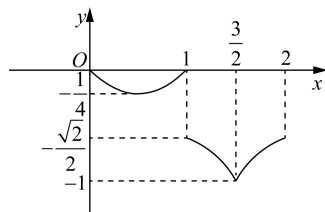
- A. $[2, 3]$ B. $[1, 3]$ C. $[1, 4]$ D. $[2, 4]$

解析 ▶ 由题意可得函数 $f(x)$ 在 $[0, 2)$ 上的图像如图所示.

当 $x \in [-4, -2)$ 时, $f(x) \geq \frac{m^2}{4} - m + \frac{1}{2}$ 恒成立, 即 $f(x)_{\min} \geq \frac{m^2}{4} - m + \frac{1}{2}$, 由图像可得函数在 $[0, 2)$ 上的最小值为 -1 .

根据 $f(x+2) = 2f(x)$ 可得, 函数在 $[-4, -2)$ 上的最小值为 $-\frac{1}{4}$, 所以 $-\frac{1}{4} \geq \frac{m^2}{4} - m + \frac{1}{2}$, 即 $m^2 - 4m + 3 \leq 0$, 解得 $1 \leq m \leq 3$. 故

选 B.



训练 1

1. 已知函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且 $f(x)$ 的图像关于点 $(1, 0)$ 对称, 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = 2 - 2^x$, 则 $f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(2022)$ 的值为().

- A. -2 B. -1 C. 0 D. 1

2. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 对于任意的 $x_1 < x_2$, 有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > -1$, 且 $f(1) = 1$, 则不

等式 $f(\log_2 |3^x - 1|) < 2 - \log_2 |3^x - 1|$ 的解集是().

- A. $(-\infty, 0)$ B. $(-\infty, 1)$
C. $(-1, 0) \cup (0, 3)$ D. $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$

3. 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & x \leq 0 \\ -x^2 - 2x + 3, & x > 0 \end{cases}$, 不等式 $f(x+a) > f(2a-x)$ 在 $[a, a+1]$ 上恒成立, 则实

数 a 的取值范围为().

- A. $(-\infty, -2)$ B. $(-2, 0)$ C. $(0, 2)$ D. $(2, +\infty)$

4. 已知实数 a, b 满足 $a = e^{5-a}$, $2 + \ln b = e^{3-\ln b}$, 则 $ab =$ ().

- A. 3 B. 7 C. e^3 D. e^7

5. 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上连续的偶函数, 且当 $x > 0$ 时 $f(x)$ 是单调函数, 则满足 $f\left(\frac{x+3}{x+4}\right) = f(x)$ 的所

有 x 之和为().

- A. -3 B. 3 C. -8 D. 8

6. (多选题) 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(1) = \frac{1}{4}$, $4f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$, $x, y \in \mathbf{R}$, 则下列说法正确的是().

- A. $f(x)$ 是周期函数, 且 $T=3$ B. $f(x)$ 是周期函数, 且 $T=6$
C. $f(0) = \frac{1}{2}$ D. $f(2020) = -\frac{1}{4}$

7. 若 $f(x)$ 图像上存在两点 A, B 关于原点对称, 则点对 $[A, B]$ 称为函数 $f(x)$ 的“友情点对”(点对 $[A, B]$ 与 $[B, A]$ 视为同一个“友情点对”) 若 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{e^x}, & x \geq 0 \\ ax^2, & x < 0 \end{cases}$ 恰有两个“友情点对”, 则实

数 a 的取值范围是_____.

8. 已知 $f(x) = |x-1| + |x| + |x+1|$, 且 $f(a^2 - 3a + 2) = f(a-1)$, 则满足条件的所有 a 之和为_____.

9. 已知函数 $f(x) = \frac{\sqrt{3}x+1}{\sqrt{3}-x}$, 定义 $f_1(x) = f(x)$, 且 $f_{k+1}(x) = f(f_k(x))$, 则 $f_{2023}(2023) =$ ().

- A. 2023 B. $\frac{2023+\sqrt{3}}{2023-\sqrt{3}}$ C. $\frac{1+2023\sqrt{3}}{2023+\sqrt{3}}$ D. $\frac{1+2023\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2023}$

10. 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}$, 则 $f\left(\frac{2023}{2}\right) =$ _____.

第2讲

函数的图像及延拓

 数的零点、方程的根、图像的交点,这三者各有各的特点又可以互相转化,函数图像以其直观的优点使得问题更加清晰,特别是遇到从代数的角度去看比较抽象、复杂的式子时,比如复合函数和分段函数,从形的角度看就非常直观明了.

利用函数图像解决问题的基础是作出函数的图像.函数的图像要求掌握基本初等函数的图像及图像变换,函数知识的外延主要结合在方程(零点)、不等式等方面.处理这两类问题的主导思想是转化,其转化的方向为借助函数的图像求解.



2.1 函数图像的变换



利用函数图像解决问题的基础是作函数图像,这往往成为同学们求解问题的拦路虎,作函数图像有两种常见的方法:

(1)描点法.当函数表达式(或变形后的表达式)是熟悉的基本函数时,就可以根据这些函数的特征直接作出图像.

(2)图像变换法.描点法是用有限点来逼近函数图像,因而对于较复杂的函数图像不易作准确.对于高中生,除了会用描点法作图外,还应掌握用变换法作图.常见函数图像的变换有四种:平移变换、翻折变换、对称变换、伸缩变换.

同学们经常遇到这样的问题,在存在多种变换的作图时,不知道应先进行哪一种变换.如作函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图像时,要用到左右平移、横向伸缩、纵向伸缩三种变换,究竟应先进行哪种变换?按不同变换顺序作出的图像是否一样?这是变换作图中的关键问题.

正确方法应按下面步骤进行:(1)找出母函数;(2)分解函数,按分解顺序作图.

例 2.1 利用图像变换,分别画出下列函数的图像.

(1) $y=2^{-x-3}+1$; (2) $y=|\lg|x-1||$.

分析 (1)基本图像是 $y=2^x$,由 $y=2^x$ 到 $y=2^{-x-3}+1$ 有两种变换途径.

途径一: $y=2^x \Rightarrow y=2^{x-3} \Rightarrow y=2^{-x-3} \Rightarrow y=2^{-x-3}+1$;

途径二: $y=2^x \Rightarrow y=2^{-x} \Rightarrow y=2^{-x-3} \Rightarrow y=2^{-x-3}+1$,按照分解的顺序依次作图.

(2)基本图像是 $y=\lg x$, $y=\lg x \Rightarrow y=\lg|x| \Rightarrow y=\lg|x-1| \Rightarrow y=|\lg|x-1||$,按照分解的顺序依次作图.

解析 (1)途径一: $y=2^x \Rightarrow y=2^{x-3} \Rightarrow y=2^{-x-3} \Rightarrow y=2^{-x-3}+1$,其中①平移变换(向右平移3个单位);②对称变换(关于y轴对称);③平移变换(向上平移1个单位).

途径二: $y=2^x \Rightarrow y=2^{-x} \Rightarrow y=2^{-x-3} \Rightarrow y=2^{-x-3}+1$,其中①对称变换(关于y轴对称);②平移变换(向左平移3个单位);③平移变换(向上平移1个单位).

无论用哪种途径,得到的最终的函数图像如图1所示:

(2)设 $f(x)=\lg x$ $\xrightarrow{\text{将 } f(x)=\lg x \text{ 的图像向左翻折}} f_1(x)=f(|x|)=\lg|x|$
 $\xrightarrow{\text{将 } f_1(x)=\lg|x| \text{ 的图像向右平移1个单位}} f_2(x)=f_1(x-1)=\lg|x-1|$

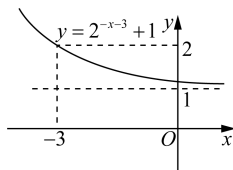


图 1

将 $f_2(x) = \lg|x-1|$ 的图像向上翻折

$\rightarrow y = |f_2(x)| = |\lg|x-1||$, 如图 2 所示:

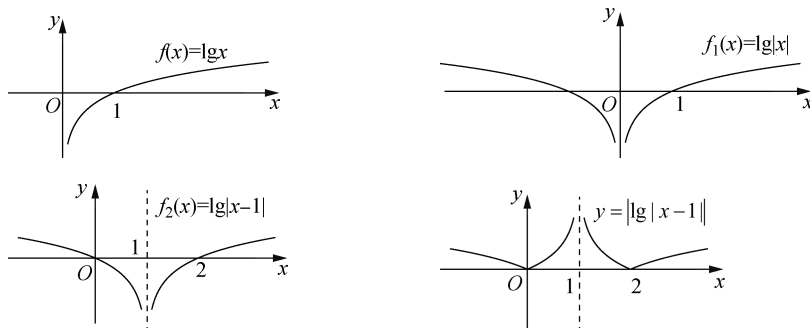


图 2

评注

由上面作图的过程可以看出用图像变换法作函数图像应注意以下三点: ①找出母函数; ②正确分解函数(每分解一次, 应使图像产生一次基本变换); ③严格按照函数分解顺序作图, 一个函数有多少种分解方法, 就有多少种作图方法.

第(1)问中两种变换途径中细节稍微不同, 也是学生常犯错误之一, 学生常认为从 “ $y = 2^{-x} \Rightarrow y = 2^{-x-3}$ ” 是向右平移 3 个单位. 辨别正误的办法是: 函数 $y = f(x)$ 的图像如何变换, 关键取决于解析式中 x (或 y) 发生了什么变化. 第②步中 $-x-3 = -(x+3)$ 是将 x 变换为 $x+3$, 所以是向左平移 3 个单位.



研究反思

图像变换的顺序对最终结果有影响吗?

在基础函数上进行变换时, 常见变换有平移、伸缩、翻折、旋转, 无论怎样分解函数进行图像变换, 最终结果是不受变换顺序影响的. 原因很简单, 因为一个函数的图像是确定的, 只要严格按照规则, 变换先后顺序不影响最后的结果.

变换时要抓住这个规律: 变换时都是以 x 自变量为中心变换, 例如要由 x 变换为 $3x+2$, 第一种方法是 x 先 $+2$, 即左移, 再由 x 变换为 $3x$, 因为是以 x 为中心; 第二种方法是先变换 $3x$, 再左移, 这里注意这时候 x 和 3 相连, 以 x 为中心则是 $3\left(x+\frac{2}{3}\right)$, 左移 $\frac{2}{3}$ 个单位. 总结一下就是所有的平移是相对于 x 的系数是 “1”, 若 x 的系数不是 “1”, 必须先化为 “1”.

变式 1 作出下列函数的图像.

(1) $y = |x^2 + 2|x| - 3|$;

(2) $y = \lg \frac{2x+3}{10}$.

解析

▶▶ (1) 作出函数 $y = x^2 + 2x - 3$ 的图像, 如图(a)所示; 保留 $x \geq 0$ 的部分, 再作其关

于 y 轴对称的图像,两部分图像即函数 $y=x^2+2|x|-3$ 的图像,如图(b)所示;然后保留 x 轴上方的部分,将 x 轴下方的图像翻折到 x 轴上方,即得到 $y=|x^2+2|x|-3|$ 的图像,如图(c)所示.

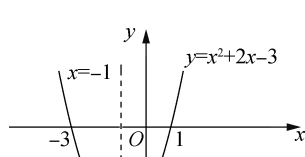
(2) $y=\lg \frac{2x+3}{10}=\lg(2x+3)-1$,基本图像是 $y=\lg x$,有以下两种变换途径:

途径一: $y=\lg x$ (母函数) $\xrightarrow{\text{①}}$ $y=\lg(x+3)$

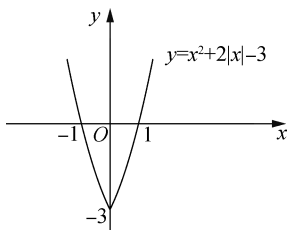
$\xrightarrow{\text{②}}$ $y=\lg(2x+3) \xrightarrow{\text{③}}$ $y=\lg(2x+3)-1$.

途径二: $y=\lg x \xrightarrow{\text{①}}$ $y=\lg(2x) \xrightarrow{\text{②}}$ $y=\lg(2x+3) \xrightarrow{\text{③}}$ $y=\lg(2x+3)-1$.

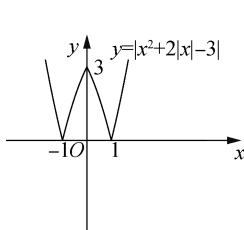
无论用哪种途径,得到的最终的函数图像如图(d)所示.



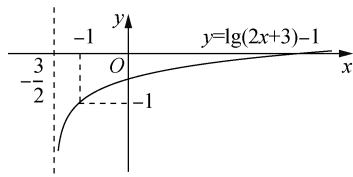
图(a)



图(b)



图(c)



图(d)

评注

注意函数 $y=2^{|x-1|}$ 与 $y=2^{|x|}-1$ 的图像在画法上的区别:

$y=2^{|x-1|} \leftarrow y=2^{|x|} \leftarrow y=2^x$; $y=2^{|x|-1} \leftarrow y=2^{x-1} \leftarrow y=2^x$.

2.2 等高线问题



研究密钥

函数零点问题常可以转化为拉一条水平直线与函数的交点问题,通过数形结合,由图像确定该交点横坐标的范围,把所给的式子转化为关于某一交点横坐标的函数,求此函数的值域.求解这类问题的主导思想就是转化与数形结合.

例 2.2 已知函数 $f(x)=|\lg x|$,若 $0 < a < b$ 且 $f(a)=f(b)$,则 $a+2b$ 的范围是().

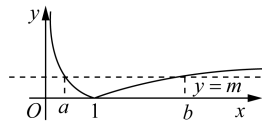
A. $(2\sqrt{2}, +\infty)$ B. $[2\sqrt{2}, +\infty)$ C. $(3, +\infty)$ D. $[3, +\infty)$

分析 首先作出 $f(x)$ 的图像,因为 $f(a)=f(b)$,所以 $0 < a < 1 < b$,所以 $f(a)=|\lg a|=-\lg a$, $f(b)=|\lg b|=\lg b$,根据 $f(a)=f(b)$ 可得关于 a, b 的等式,要求的是 $a+2b$,把 b 用 a 表示,实现消元的目的,利用对勾函数的单调性求值域.

解析 首先作出 $f(x)$ 的图像,如图所示.

因为 $f(a)=f(b)$, 所以 $0<a<1<b$, 即 $f(a)=|\lg a|=-\lg a, f(b)=|\lg b|=\lg b$, 所以 $-\lg a=\lg b, ab=1$, 则 $a+2b=a+\frac{2}{a}$ 为对勾函数.

因为 $0<a<1$, 由对勾函数 $y=x+\frac{2}{x}$ 的单调性, 可知 $a+2b=a+\frac{2}{a}$ 在 $(0,1)$ 上单调递减, 故 $a+\frac{2}{a}>1+2=3$. 故选 C.



变式 1 设函数 $f(x)=\begin{cases} 2^x-1, & x\geq 0 \\ x+1, & x<0 \end{cases}$, 若函数 $a=f(x)$ 有两个实根 $x_1, x_2 (x_1<x_2)$, 则

x_1+x_2 的取值范围是().

A. $[-1, 1]$

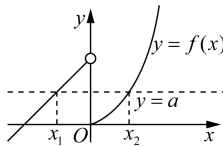
B. $[-1, 1)$

C. $(-1, 0]$

D. $(-1, 0)$

解析 ▶ 画出函数 $y=f(x)$ 的图像, 如图所示.

由题意可得 $f(x_1)=f(x_2)$, 即 $x_1+1=2^{x_2}-1$, 可得 $x_1=2^{x_2}-2, x_1+x_2=2^{x_2}+x_2-2$.



由图可知 $x_1 \in [-1, 0)$, 即 $-1 \leq 2^{x_2}-2 < 0$, 可得 $1 \leq 2^{x_2} < 2$, 则 $x_2 \in [0, 1)$, 令 $g(x)=2^x+x-2, x \in [0, 1)$, 函数 $g(x)$ 是单调递增函数, 可得 $g(x)_{\min}=g(0)=-1, g(1)=1$, 则 $g(x) \in [-1, 1)$. 故选 B.

变式 2 (2018 黑龙江赛区预赛 12) 已知函数 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{3}{2}, & x\leq 1 \\ \ln x, & x>1 \end{cases}$ ($\ln x$ 是以 e 为底的自然对数, $e=2.71828\cdots$), 若存在实数 $m, n (m<n)$, 满足 $f(m)=f(n)$, 则 $n-m$ 的取值范围是().

A. $(0, e^2+3)$

B. $(4, e^2-1]$

C. $[5-2\ln 2, e^2-1]$

D. $[5-2\ln 2, 4]$

解析 ▶ 由题意可得函数 $f(x)$ 的图像如图所示.

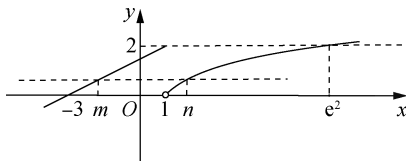
根据图像可得, $-3<m\leq 1, 1<n\leq e^2, \frac{1}{2}m+\frac{3}{2}=\ln n$,

$m=2\ln n-3$, 所以 $n-m=n-2\ln n+3$.

令 $g(n)=n-2\ln n+3$, 则 $g'(n)=1-\frac{2}{n}=\frac{n-2}{n}$.

当 $1<n<2$ 时, $g'(x)<0, g(x)$ 单调递减; 当 $2<n<e^2$ 时, $g'(x)>0, g(x)$ 单调递增, 所以 $g(x)_{\min}=g(2)=5-2\ln 2$.

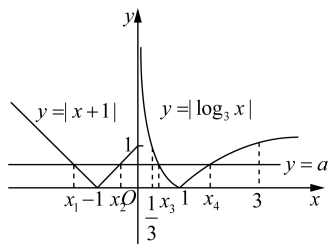
又 $g(1)=4, g(e^2)=e^2-1>4$, 所以 $g(x)_{\max}=e^2-1$. 故选 C.



解析 ▶ 作出函数 $f(x) = \begin{cases} |x+1|, & x \leq 0 \\ |\log_3 x|, & x > 0 \end{cases}$ 的图像如图所示.

因为方程 $f(x) = a$ 有四个不同的解 x_1, x_2, x_3, x_4 且 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$.

根据图像可知, 当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = |x+1|$, 则横坐标为 x_1 与 x_2 两点的中点横坐标为 $x = -1$, 即 $x_1 + x_2 = -2$; 当 $x > 0$ 时, 由于 $y = |\log_3 x|$ 在 $(0, 1)$ 上是减函数, 在 $(1, +\infty)$ 上是增函数, 又因为 $x_3 < x_4$, $|\log_3 x_3| = |\log_3 x_4|$, 则 $\frac{1}{3} \leq x_3 < 1 < x_4$, 有 $-\log_3 x_3 = \log_3 x_4$, 即 $x_3 x_4 = 1$.



所以 $x_3(x_1 + x_2) + \frac{1}{x_3^2 x_4} = -2x_3 + \frac{1}{x_3}, \frac{1}{3} \leq x_3 < 1$.

令函数 $h(t) = -2t + \frac{1}{t}$, 由反比例函数和一次函数的性质得函数 $h(t)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减,

故 $h(t) > h(1) = -2 + 1 = -1, h(t) \leq h(\frac{1}{3}) = -\frac{2}{3} + 3 = \frac{7}{3}$, 所以 $-2x_3 + \frac{1}{x_3} \in (-1, \frac{7}{3}]$. 故选 D.

例 2.4 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq 0 \\ x - \ln x, & x > 0 \end{cases}$, 若存在 $x_1 \leq 0, x_2 > 0$, 使得 $f(x_1) = f(x_2)$,

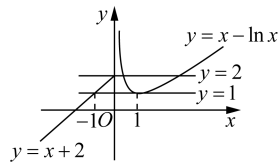
则 $x_1 f(x_2)$ 的取值范围为 _____.

分析 ▶ 通过求导运算得到当 $x > 0$ 时 $f(x)$ 的图像, 从而得到 $f(x)$ 整体的图像; 由 $f(x_1) = f(x_2)$ 得到 x_1 与 x_2 的关系, 从而将问题转化为求解 $f^2(x_2) - 2f(x_2)$ 的值域; 利用二次函数来求解出值域.

解析 ▶ 当 $x > 0$ 时, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$.

当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, 即 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减; 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x)_{\min} = f(1) = 1 - \ln 1 = 1$, 可知函数图像如图所示.

因为 $f(x_1) = f(x_2), x_1 \leq 0, x_2 > 0$, 可知 $x_1 + 2 = x_2 - \ln x_2$, 即 $x_1 = x_2 - \ln x_2 - 2$, 所以 $x_1 f(x_2) = (x_2 - \ln x_2 - 2)(x_2 - \ln x_2) = [f(x_2) - 2] \cdot f(x_2) = f^2(x_2) - 2f(x_2)$.



由图像可知 $f(x_2) \in [1, 2]$, 则 $[x_1 f(x_2)]_{\min} = 1^2 - 2 \times 1 = -1$; $[x_1 f(x_2)]_{\max} = 2^2 - 2 \times 2 = 0$. 所以 $x_1 f(x_2) \in [-1, 0]$. 故填 $[-1, 0]$.

变式 1 函数 $f(x) = \begin{cases} |x-2|, & x \geq 0 \\ 2^{x+1}, & x < 0 \end{cases}$, 若 $x_1 < x_2 < x_3$, 且 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$, 则

$\frac{x_2 f(x_1)}{x_2 + x_3}$ 的取值范围是 ().

A. $[0, \frac{1}{4})$

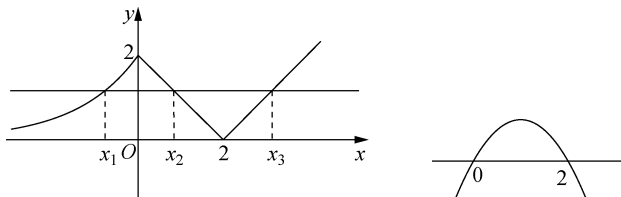
B. $(0, \frac{1}{4}]$

C. $(0, \frac{1}{2})$

D. $(0, \frac{1}{2}]$

解析

▶ 函数 $f(x)$ 的图像如图所示, 易知 $x_2 + x_3 = 4$, $x_2 \in (0, 2)$, 所以 $y = \frac{x_2 f(x_1)}{x_2 + x_3} = \frac{x_2 f(x_2)}{4} = \frac{1}{4} x_2 (2 - x_2)$.



当 $x=1$ 时, $y_{\max} = \frac{1}{4}$. 故 $y \in (0, \frac{1}{4}]$. 故选 B.

2.3 含参函数零点问题

**研究思路**

函数的零点、方程的根、函数图像的交点三类问题之间可以相互转化: 函数的零点 $\Leftrightarrow$ 方程的根 $\Leftrightarrow$ 函数图像的交点, 运用方程可进行等式的变形进而构造函数转化为两个函数图像的交点问题, 或分离参数, 将原函数零点问题转化为一个函数与一条水平直线的交点问题, 通过上下平移水平直线有不同的交点个数求出参数的取值范围. 转化时要选择合适的函数, 以便于作图、便于求出参数的取值范围为原则. 这类问题的主导思想仍是转化与数形结合的思想.

例 2.5 (2015 天津卷理 8) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2 - |x|, & x \leq 2, \\ (x-2)^2, & x > 2, \end{cases}$ 函数 $g(x) = b - f(2-x)$,

其中 $b \in \mathbf{R}$, 若函数 $y = f(x) - g(x)$ 恰有 4 个零点, 则 b 的取值范围是().

- A. $(\frac{7}{4}, +\infty)$ B. $(-\infty, \frac{7}{4})$ C. $(0, \frac{7}{4})$ D. $(\frac{7}{4}, 2)$

分析

▶ 将问题转化为 $F(x) = f(x) + f(2-x)$ 与 $y=b$ 有 4 个交点, 求 b 的取值范围问题. 作出 $F(x)$ 的图像. 由于 $F(x)$ 的对称轴为 $x=1$, 所以看 b 取何值时与 $F(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的图像有 2 个交点.

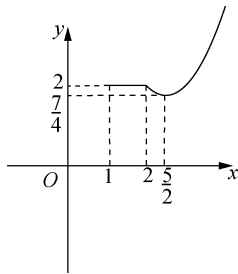
解析

▶ $y = f(x) - g(x) = f(x) - b + f(2-x)$.

令 $f(x) - b + f(2-x) = 0$, 则 $b = f(x) + f(2-x)$, 令 $F(x) = f(x) + f(2-x)$, 函数 $F(x)$ 的图像关于 $x=1$ 对称.

$$F(x) = \begin{cases} 2 - |x| + 2 - |x-2|, & 1 \leq x \leq 2 \\ (x-2)^2 + 2 - |x-2|, & x > 2 \end{cases}, \text{ 即 } F(x) = \begin{cases} 2 - x + 2 - (2-x) = 2, & 1 \leq x \leq 2 \\ (x-2)^2 + 2 - (x-2) = x^2 - 5x + 8, & x > 2 \end{cases}.$$

作出 $F(x)$ 的部分图像如图所示, 要使得函数 $y=f(x)-g(x)$ 恰有 4 个零点, 则 $b=F(x)$ 在 $x \geq 1$ 时有两个交点, 由图像可得 $\frac{7}{4} < b < 2$. 故选 D.



变式 1 若关于 x 的方程 $x|x-a|=a$ 有三个不同的实数根, 则 a 的取值范围为().

A. $(0, 4)$

B. $(-4, 0)$

C. $(-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$

D. $(-4, 0) \cup (0, 4)$

解析 ▶ 令 $f(x) = x|x-a| = \begin{cases} x^2 - ax, & x \geq a \\ ax - x^2, & x < a \end{cases}$, 方程 $x|x-a|=a$ 有三个不同的实数根

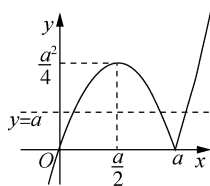
可转化为直线 $y=a$ 与函数 $f(x)$ 的图像有三个交点.

(1) 当 $a > 0$ 时, 画出 $f(x)$ 的图像, 如图(a)所示, 当 $0 < a < \frac{a^2}{4}$, 即 $a > 4$ 时, 直线 $y=a$ 与 $f(x)$ 有三个交点;

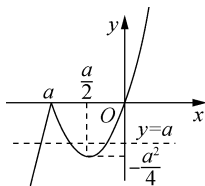
(2) 当 $a < 0$ 时, 画出 $f(x)$ 的图像, 如图(b)所示, 当 $-\frac{a^2}{4} < a < 0$, 即 $a < -4$ 时, 直线 $y=a$ 与 $f(x)$ 有三个交点;

(3) 当 $a=0$ 时, 原方程为 $x|x|=0$, 只有一个根 $x=0$, 不符合题意.

综上所述, a 的取值范围为 $a > 4$ 或 $a < -4$. 故选 C.



图(a)



图(b)

例 2.6 已知函数 $f(x) = \begin{cases} xe^x, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$, 若 $g(x) = f(x) - ax$ 有四个不同的零点, 则 a 的取值范围为().

A. $(0, \frac{1}{e})$

B. $[\frac{1}{e}, 1)$

C. $[1, e)$

D. $[e, +\infty)$

分析 ▶ 应用导数研究 $x \leq 0$ 和 $x > 0$ 时 $g(x)$ 的单调性, 要使 $g(x)=0$ 有四个不同的解, 即当两个区间均存在两个零点时, 求 a 的范围.

解析 ▶ 由题意知, $g(x) = f(x) - ax$ 有四个不同的零点, 所以 $g(x) =$

$\begin{cases} xe^x - ax, & x \leq 0 \\ \ln x - ax, & x > 0 \end{cases}$, 则 $g(x)=0$ 有四个不同的解.

当 $x \leq 0$ 时, $g(x) = x(e^x - a) = 0$, 其零点情况如下:

(1) 当 $a \leq 0$ 或 $a = 1$ 时, $x = 0$;

(2) 当 $0 < a < 1$ 或 $a > 1$ 时, $x = 0$ 或 $x = \ln a$.

当 $x > 0$ 时, $g'(x) = \frac{1}{x} - a$, 则有如下情况:

(1) 当 $a \leq 0$ 时, $g'(x) > 0$, 即 $g(x)$ 单调递增, 不可能出现两个零点, 不合题意;

(2) 当 $a > 0$ 时, 在 $0 < x < \frac{1}{a}$ 上 $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增, 在 $x > \frac{1}{a}$ 上 $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调

递减, 而 $x \rightarrow 0^+$ 有 $g(x) \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$ 有 $g(x) \rightarrow -\infty$, 所以只需 $g\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a - 1 > 0$, 得当

$a < \frac{1}{e}$ 时, $g(x)$ 必有两个零点.

综上所述, 有 $0 < a < \frac{1}{e}$ 时, $g(x)$ 在 $x \leq 0$ 和 $x > 0$ 上各有两个零点, 即共有 4 个不同的零点.

故选 A.

变式 1 已知关于 x 的方程 $a\left(\frac{1}{4}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2 = 0$ 在区间 $[-1, 0]$ 上有实数根, 则实数 a 取值范围为().

A. $\left[0, \frac{1}{8}\right]$

B. $[-1, 0) \cup \left(0, \frac{1}{8}\right]$

C. $\left[-1, \frac{1}{8}\right]$

D. $[-1, 0]$

解析 ▶ 令 $t = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, 则 $t \in [1, 2]$. 原方程等价于 $at^2 - t + 2 = 0$ 在 $[1, 2]$ 上有实数根, 分离参数 $a = g(t) = \frac{t-2}{t^2} = \frac{-2}{t^2} + \frac{1}{t} = -2\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{8}$, $\frac{1}{t} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, 可见 $g(t)$ 单调, 当 $\frac{1}{t} = \frac{1}{2}$ 时, $g(t)_{\max} = 0$; 当 $\frac{1}{t} = 1$ 时, $g(t)_{\min} = -1$, 即函数 $g(t)$ 的值域为 $[-1, 0]$, 所以当 $a \in [-1, 0]$ 时, 原方程有解. 故选 D.

例 2.7 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = f(x) - |kx^2 - 2x|$ ($k \in \mathbf{R}$) 恰有 4 个零点, 则 k 的取值范围是().

A. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$

B. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, 2\sqrt{2})$

C. $(-\infty, 0) \cup (0, 2\sqrt{2})$

D. $(-\infty, 0) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$

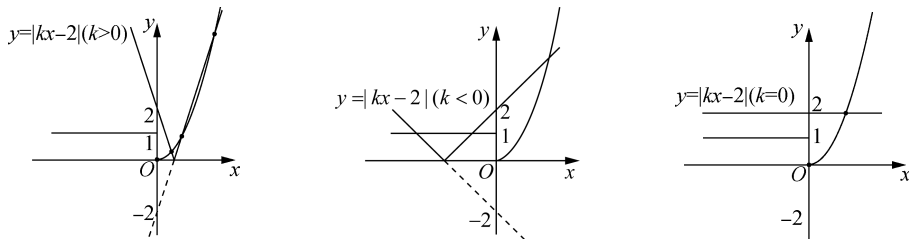
分析 ▶ 问题转化为求 $f(x)$ 的图像与 $|kx^2 - 2x|$ 的图像有 4 个交点时 k 的取值范围. 当 $x \neq 0$ 时转化为 $y_1 = |kx - 2|$ 与 $y_2 = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$ 有 3 个交点. 以下分 $k > 0$, $k < 0$, $k = 0$ 几种情况下看图像交点个数为 3 时, 求 k 的取值范围.

解析 ▶ 函数 $g(x)$ 恰有 4 个零点, 即 $f(x)$ 的图像和 $|kx^2 - 2x|$ 的图像有 4 个交点.

$$\text{令 } g(x)=0, \text{ 得 } f(x)=|kx^2-2x|, \text{ 即 } |kx^2-2x|=\begin{cases} x^3, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}.$$

当 $x=0$ 时, 满足方程, 即无论 k 取何值, $g(x)$ 在 $x=0$ 处都有一个零点;

当 $x\neq 0$ 时, 方程可以转化为 $|kx-2|=\begin{cases} x^2, & x>0 \\ 1, & x<0 \end{cases}$, 图像如图所示.



① 当 $k>0$ 时, 要使得 $y_1=|kx-2|$ 的图像和 $y_2=\begin{cases} x^2, & x>0 \\ 1, & x<0 \end{cases}$ 的图像有 3 个交点, 只需要满足

$$\begin{cases} y=kx-2 \\ y=x^2 \end{cases} \text{ 有两个根, 即 } x^2-kx+2=0 \text{ 有两个根, 所以 } \Delta=k^2-8>0, \text{ 解得 } k>2\sqrt{2}.$$

② 当 $k<0$ 时, $|kx-2|$ 的图像和 y_2 的图像始终有 3 个交点, 所以 $k<0$ 时都符合题意.

③ 当 $k=0$ 时, $g(x)$ 只有两个零点 $x=0$ 和 $x=\sqrt{2}$, 不符合题意.

综上所述, k 的取值范围是 $(-\infty, 0) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$. 故选 D.

例 2.8 已知函数 $f(x)=\begin{cases} \frac{|x|}{x+4}, & -4<x<2 \\ \sqrt{\frac{x^3}{6-x}}, & 2\leq x<6 \end{cases}$, 若方程 $f(x)-ax^2=0$ 有 5 个不等实根, 则实数 a 的取值范围是().

A. $(0, \frac{\sqrt{2}}{4})$

B. $[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$

C. $[\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{4}]$

D. $(\frac{\sqrt{2}}{4}, +\infty) \cup \{\frac{1}{3}\}$

分析 ▶ $f(x)$ 与 $y=ax^2$ 有 5 个交点, 由于 $y=ax^2$ 的图像在变化, 不好确定 a 的范围, 因此等式两边除以 x^2 , 分离出参数得到 $a=g(x)$, 再通过上下平移水平直线, 根据交点个数得 a 的取值范围.

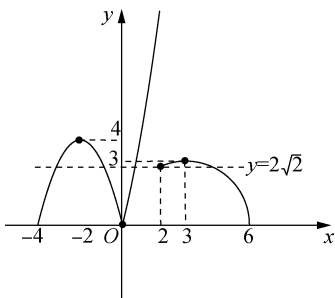
解析 ▶ 当 $x=0$ 时, $f(x)-ax^2=0$ 恒成立, 即无论 a 取何值, $f(x)-ax^2=0$ 在 $x=0$ 处

始终有一个根. 当 $x\neq 0$ 时, 由 $f(x)-ax^2=0$ 可得 $a=\frac{f(x)}{x^2}=\begin{cases} \frac{|x|}{x^2(x+4)}, & -4<x<2 \\ \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x^3}{6-x}}, & 2\leq x<6 \end{cases},$

$$\text{即 } a = \begin{cases} \frac{1}{-x(x+4)}, & -4 < x < 0 \\ \frac{1}{x(x+4)}, & 0 < x < 2 \\ \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{x^3}{6-x}}, & 2 \leq x < 6 \end{cases}, \text{ 所以 } \frac{1}{a} = \begin{cases} -x(x+4), & -4 < x < 0 \\ x(x+4), & 0 < x < 2 \\ \sqrt{x(6-x)}, & 2 \leq x < 6 \end{cases}.$$

要使得方程 $f(x) - ax^2 = 0$ 有 5 个不等实根, 只需要满足 $y = \frac{1}{a}$ 的图像与 $y =$

$$\begin{cases} -x(x+4), & -4 < x < 0 \\ x(x+4), & 0 < x < 2 \\ \sqrt{x(6-x)}, & 2 \leq x < 6 \end{cases} \text{ 的图像有 4 个交点, 如图所示.}$$



由图像可得, $0 < \frac{1}{a} < 2\sqrt{2}$ 或 $\frac{1}{a} = 3$, 解得 $a > \frac{\sqrt{2}}{4}$ 或 $a = \frac{1}{3}$. 故选 D.

变式 1 若关于 x 的方程 $\frac{|x|}{x+2} = kx^2$ 有 4 个不同的实数解, 则实数 k 的范围为 ().

- A. $(0, 1)$ B. $(\frac{1}{2}, 1)$ C. $(\frac{1}{2}, +\infty)$ D. $(1, +\infty)$

解析 ▶ 显然 $x=0$ 是原方程的一个解, 且 $k \neq 0$.

当 $x \neq 0$ 时, 分离参数 $\frac{1}{k} = |x|(x+2)$, 其中 $x \neq 0$ 且 $x \neq -2$.

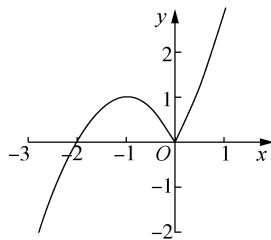
由此可知方程 $\frac{1}{k} = |x|(x+2)$ 在 $x \neq 0$ 且 $x \neq -2$ 的情形下有 3 个实数根.

令 $g(x) = |x|(x+2) = \begin{cases} x(x+2), & x > 0 \\ -x(x+2), & x < 0 \text{ 且 } x \neq -2 \end{cases}$, 作出函数

$g(x)$ 的图像如图所示.

当 $0 < \frac{1}{k} < 1$, 即 $k > 1$ 时, 水平直线 $y = \frac{1}{k}$ 与 $y = g(x)$ 的图像恰有 3 个

交点, 即 k 的取值范围为 $k > 1$. 故选 D.



2.4 复合函数零点问题

研究密钥

对于这一类问题可以分两个步骤解决:(1)先把复合函数的内层函数设为 t , 使得关于内层函数的方程转化为关于 t 的方程, 根据方程的根的个数确定 t 的取值范围或者 t 的值;(2)将问题转化为函数 $f(x)$ 的图像与直线 $y=t$ 有几个交点的问题. 有时候满足交点个数的情况不止一种, 需要注意考虑问题要全面.

例 2.9 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{|x-1|} - 1, & x \geq 0 \\ x^2 + 2x + 1, & x < 0 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f^2(x) - (m+1)f(x) + 2m^2 = 0$ 有七个不同的实根, 则 m 的值是().

A. 0 或 $\frac{1}{2}$

B. 0

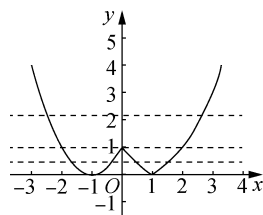
C. $\frac{1}{2}$

D. 不存在

分析 ▶ 作出 $f(x)$ 的图像, 令 $t=f(x)$, 根据方程确定至多存在两个 t 的值, 使得 $y=t$ 与 $t=f(x)$ 有 7 个交点, 求出 t 的值或取值范围, 进而转化为求方程 $t^2 - (m+1)t + 2m^2 = 0$ 在 t 的值或取值范围有解, 利用一元二次方程根的分布, 即可求解.

解析 ▶ 作出函数 $f(x)$ 的图像, 如图所示.

令 $t=f(x)$, 方程 $f^2(x) - (m+1)f(x) + 2m^2 = 0$, 即 $t^2 - (m+1)t + 2m^2 = 0$. 当 $t < 0$ 时, 方程 $t=f(x)$ 没有实数解; 当 $t=0$ 或 $t > 1$ 时, 方程 $t=f(x)$ 有 2 个实数解; 当 $0 < t < 1$, 方程有 4 个实数解; 当 $t=1$ 时, 方程有 3 个解.



要使方程 $f^2(x) - (m+1)f(x) + 2m^2 = 0$ 有七个不同的实根, 则方程 $t^2 - (m+1)t + 2m^2 = 0$ 有一根为 1, 另一根大于 0 且小于 1, 当 $t=1$ 时, 有 $2m^2 - m = 0$, 所以 $m=0$ 或 $m=\frac{1}{2}$.

当 $m=0$ 时, $t^2 - t = 0$, $t=0$ 或 $t=1$, 不满足题意; 当 $m=\frac{1}{2}$ 时, $t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{1}{2} = 0$, $t=1$ 或 $t=\frac{1}{2}$, 满足题意.

所以 $m=\frac{1}{2}$. 故选 C.

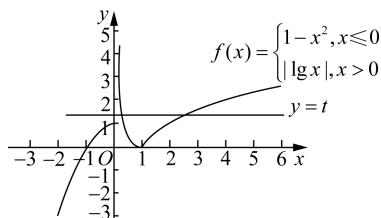
变式 1 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & x \leq 0 \\ |\lg x|, & x > 0 \end{cases}$, 若方程 $[f(x)]^2 - 4mf(x) + m^2 + 2 = 0$ 有 4 个不相等的实数根, 则实数 m 的取值范围为_____.

分析 ▶ 令 $t=f(x)$, 则方程 $[f(x)]^2 - 4mf(x) + m^2 + 2 = 0$ 转化为 $t^2 - 4mt + m^2 + 2 = 0$, 作出函数 $f(x)$ 的图像, 由题意得原问题等价于 $t^2 - 4mt + m^2 + 2 = 0$ 有两个大于 1 的不等实数根, 根据一元二次方程根的分布列出不等式组求解即可得到答案.

解析 ▶ 作出函数 $f(x)$ 的图像, 如图所示.

令 $t=f(x)$, 则方程 $[f(x)]^2 - 4mf(x) + m^2 + 2 = 0$ 转化为 $t^2 - 4mt + m^2 + 2 = 0$.

由题意得, 方程 $[f(x)]^2 - 4mf(x) + m^2 + 2 = 0$ 有 4 个不相等的实数根, 而一元二次方程最多有两个实数根, 即 $t^2 - 4mt + m^2 +$



$2 = 0$ 有两个大于 1 的不等实数根. 令 $h(t) = t^2 - 4mt + m^2 + 2$, 则 $\begin{cases} \Delta = (-4m)^2 - 4(m^2 + 2) > 0 \\ -\frac{4m}{2} > 1 \\ h(1) = 1^2 - 4m + m^2 + 2 > 0 \end{cases}$,

解得 $m > 3$ 或 $\frac{\sqrt{6}}{3} < m < 1$, 则实数 m 的取值范围为 $m > 3$ 或 $\frac{\sqrt{6}}{3} < m < 1$.

变式 2 已知函数 $f(x) = \frac{x}{e^x}$, 若关于 x 的方程 $[f(x)]^2 + mf(x) + m - 1 = 0$ 恰有 3 个不同的实数解, 则实数 m 的取值范围是().

A. $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

B. $(1 - \frac{1}{e}, +\infty)$

C. $(1 - \frac{1}{e}, 1)$

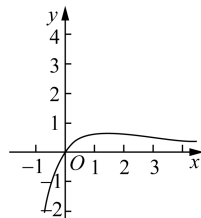
D. $(1, e)$

分析 ▶ 先画出函数 $f(x)$ 的图像, 令 $f(x) = t$, 由题意中的恰有 3 个不同的实数解, 确定方程 $t^2 + mt + m - 1 = 0$ 的根的取值情况, 继而求出 m 的范围.

解析 ▶ 因为 $f(x) = \frac{x}{e^x}$, 则 $f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{(e^x)^2} = \frac{1-x}{e^x}$.

当 $x \in (-\infty, 1)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 且 $f(x)_{\max} = f(1) = \frac{1}{e}$, $f(x)$ 的图像如图所示. 令 $f(x) = t$, 则有 $t^2 + mt + m - 1 = 0$, 即 $(t+m-1)(t+1) = 0$, 解得 $t_1 = 1-m$, $t_2 = -1$.

因为直线 $y=t_2$ 与函数图像有一个交点, 所以直线 $y=t_1$ 与函数图像有两个交点, 即 $0 < 1-m < \frac{1}{e}$, 即 $1 - \frac{1}{e} < m < 1$. 故选 C.



变式 3 设函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0 \\ \log_2 x, & x > 0 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = f(f(x)) - a$ 有三个零点, 则实数

a 的范围为_____.

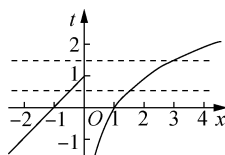
分析 ▶▶ 令 $t = f(x)$, 则原方程的解变为方程组 $f(t) = a$ 的解, 作出函数 $y = f(x)$, 采用数形结合法求解.

解析 ▶▶ 函数 $g(x)$ 的零点即为方程 $g(x) = 0$ 的解, 令 $t = f(x)$, 则原方程的解变为方程组 $f(t) = a$ 的解, 作出函数 $y = f(x)$ 的图像, 如图所示.

由图像可知, 当 $t > 1$ 时, 有唯一的 x 与之对应; 当 $t \leq 1$ 时, 有两个不同的 x 与之对应.

由方程组 $f(t) = a$ 有三个不同的 x 知, 需要有两个不同的 t , 且一个 $t > 1$, 一个 $t \leq 1$, 结合图像可知, 当 $a \in (0, 1]$ 时, 满足一个 $t \in (-1, 0]$, 一个 $t \in (1, 2]$, 符合要求.

综上所述, 实数 a 的取值范围为 $(0, 1]$.



例 2.10 若函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 有极值点 x_1, x_2 , 且 $f(x_1) = x_1$, 则关于 x 的方程 $3(f(x))^2 + 2af(x) + b = 0$ 的不同实根个数是().

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

分析 ▶▶ 由题意求导结合极值点的性质可得原方程等价于 $f(x) = x_1$ 或 $f(x) = x_2$, 按照 $x_1 < x_2, x_1 > x_2$ 分类, 作出函数图像, 数形结合即可得解.

解析 ▶▶ 由题意 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$, x_1, x_2 为函数 $f(x)$ 的极值点, 所以 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b = 0$ 有两个解 x_1, x_2 , 即 $f(x) = x_1$ 或 $f(x) = x_2$.

当 $x_1 < x_2$ 时, 则 x_1 为函数 $f(x)$ 的极大值点, 且 $f(x_1) = x_1$, x_2 为函数 $f(x)$ 的极小值点, 画出函数图像, 如图 1 所示. 此时 $f(x) = x_1$ 有两个不同实根, $f(x) = x_2$ 有一个实根, $3(f(x))^2 + 2af(x) + b = 0$ 有三个不同实根.

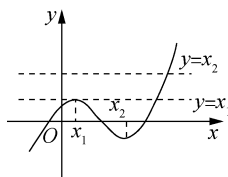


图 1

当 $x_1 > x_2$ 时, 则 x_1 为函数 $f(x)$ 的极小值点, 且 $f(x_1) = x_1$, x_2 为函数 $f(x)$ 的极大值点, 画出函数图像, 如图 2 所示. 此时 $f(x) = x_1$ 有两个不同实根, $f(x) = x_2$ 有一个实根, $3(f(x))^2 + 2af(x) + b = 0$ 有三个不同实根.

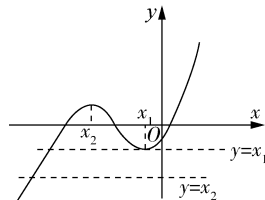


图 2

综上所述, $3(f(x))^2 + 2af(x) + b = 0$ 有三个不同实根. 故选 A.

2.5 分段函数零点问题



对于这类问题,可以将零点分给不同的定义域区间,在每个区间内求解满足根的个数时参数的取值范围.需要注意的是有时候零点的分法不止一种,需要考虑全面.在分零点之前先判断每个区间上的函数最多最少有几个零点,可以为零点的分法提供方向.

例 2.11 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x + a, & x < 1 \\ 4(x+a)(x+2a), & x \geq 1 \end{cases}$, 若 $f(x)$ 恰有 2 个零点, 则实数 a 的

取值范围是().

A. $\left[-2, -\frac{1}{2}\right]$

B. $(-\infty, -2] \cup \left(-1, -\frac{1}{2}\right]$

C. $(-\infty, -1)$

D. $[-2, +\infty)$

分析 ▶ 当 $x < 1$ 时, $f(x)$ 单调递增, $f(x)$ 至多有一个零点; 当 $x \geq 1$ 时, $f(x)$ 至多有两个零点 $x = -a$ 和 $x = -2a$. 若 $f(x)$ 在 $x < 1$ 上没有零点, 则 $x = -a$ 和 $x = -2a$ 都大于 0; 若 $f(x)$ 在 $x < 1$ 上有一个零点, 则 $x = -a$ 和 $x = -2a$, 一个在 $x = 1$ 的左侧, 一个在 $x = 1$ 的右侧. 分情况讨论 a 的取值范围.

解析 ▶ 当 $x < 1$ 时, $f(x)$ 单调递增, $f(x) < 2 + a$; 当 $x \geq 1$ 时, 令 $f(x) = 0$ 得 $x = -a$ 或 $x = -2a$.

(1) 若 $2 + a \leq 0$, 即 $a \leq -2$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上无零点, 此时 $-2a > -a \geq 2$, 所以 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上有两个零点, 符合题意.

(2) 若 $2 + a > 0$, 即 $a > -2$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上有 1 个零点, 所以 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上只有 1 个零点.

① 若 $-2 < a < 0$, 则 $-2a > -a$, 所以 $-a < 1 \leq -2a$, 解得 $-1 < a \leq -\frac{1}{2}$;

② 若 $a = 0$, 则 $-a = -2a = 0 \notin [1, +\infty)$, 所以 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上无零点, 不符合题意;

③ 若 $a > 0$, 则 $0 > -a > -2a$, 所以 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上无零点, 不符合题意.

综上所述, a 的取值范围是 $(-\infty, -2] \cup \left(-1, -\frac{1}{2}\right]$. 故选 B.

变式 1 已知 $f(x) = m(x-2m)(x+m+3)$, $g(x) = 2^x - 2$. 若同时满足条件:

① $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) < 0$ 或 $g(x) < 0$;

② $\exists x \in (-\infty, -4), f(x)g(x) < 0$,

则 m 的取值范围是_____.

分析 ▶ 因为 $g(x) = 2^x - 2$, 当 $x < 1$ 时, $g(x) < 0$, 所以 $f(x) = m(x - 2m)(x + m + 3) < 0$ 在 $x \geq 1$ 时恒成立, 根据二次函数的性质求出 m 的范围. 又当 $x \in (-\infty, -4)$ 时, $f(x)g(x) < 0$, 此时 $g(x) = 2^x - 2 < 0$ 恒成立, 所以 $f(x) = m(x - 2m)(x + m + 3) > 0$ 在 $(-\infty, -4)$ 上有成立的可能, 结合二次函数的性质求出 m 的范围.

解析 ▶ ① 因为 $g(x) = 2^x - 2$, 当 $x < 1$ 时, $g(x) < 0$, 又 $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) < 0$ 或 $g(x) < 0$, 所以 $f(x) = m(x - 2m)(x + m + 3) < 0$ 在 $x \geq 1$ 时恒成立, 所以由二次函数的性质开口只能向下,

且二次函数与 x 轴交点都在 $(1, 0)$ 点的左边, 即 $\begin{cases} m < 0 \\ -m - 3 < 1 \\ 2m < 1 \end{cases}$, 解得 $-4 < m < 0$.

② 因为 $x \in (-\infty, -4)$ 时, $f(x)g(x) < 0$, 此时 $g(x) = 2^x - 2 < 0$ 恒成立, 所以 $f(x) = m(x - 2m)(x + m + 3) > 0$ 在 $x \in (-\infty, -4)$ 有成立的可能, 则只要 -4 比 x_1, x_2 中的较小的根大即可.

当 $-1 < m < 0$ 时, $-m - 3 < 2m$, 但是 $-m - 3 < -4$ 不成立; 当 $m = -1$ 时, $-m - 3 = 2m = -2 > -4$, 不成立; 当 $-4 < m < -1$ 时, $2m < -m - 3$, $2m < -4$ 成立, 即 $m < -2$ 成立.

综上所述, 当①②成立时, $-4 < m < -2$, 故答案为 $(-4, -2)$.

训练 2

1. 定义函数 $F(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \leq g(x) \\ g(x), & f(x) > g(x) \end{cases}$, 若函数 $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $g(x) = x^2 - ax + b$, 且对

任意的 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $F(x) = F(4 - x)$ 成立, 函数 $y = F(x)$ 的图像与 $y = m$ 自左向右有 4 个交点 A, B, C, D , 则 $|BC| \cdot m$ 的范围为().

- A. $(0, \frac{8}{27}]$ B. $(0, \frac{2}{3})$ C. $(0, 1)$ D. $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$

2. 函数 $f(x) = \begin{cases} |x - 1|, & x \geq 0 \\ 3^x, & x < 0 \end{cases}$, 若 $x_1 < x_2 < x_3$, 且 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$, 则 $\frac{x_2 f(x_1)}{x_2 + x_3}$ 的取值范围为().

- A. $(0, \frac{1}{8}]$ B. $(0, \frac{1}{4})$ C. $[0, \frac{1}{8})$ D. $(0, \frac{1}{4}]$

3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} + 1, & x \in [-2, 0] \\ 2f(x - 2), & x \in (0, +\infty) \end{cases}$, 若函数 $g(x) = f(x) - x - 2m + 1$ 在区间

$[-2, 4]$ 内有3个零点, 则实数 m 的取值范围是().

- A. $\left\{m \mid -\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}\right\}$ B. $\left\{m \mid -1 < m \leq \frac{1}{2}\right\}$
 C. $\left\{m \mid -1 < m < \frac{1}{2} \text{ 或 } m=1\right\}$ D. $\left\{m \mid -\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2} \text{ 或 } m=1\right\}$

4. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \in [-3, 1) \\ -|x^2 - 1| + \frac{3}{2}, & x \in [1, 3] \end{cases}$, 函数 $g(x) = m$, 若 $f(x) = g(x), x \in [-3, 3]$ 恰

有两个零点, 则 m 的取值范围为_____.

5. 已知 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & x \geq 0 \\ |x - 1| - 1, & x < 0 \end{cases}$, 关于 x 的不等式 $[f(x)]^2 + af(x) - b^2 < 0$ 有且只有一个整数解, 则实数 a 的最大值是_____.

第3讲

函数构造与函数方程思想

没有基础,莫谈方法;建构基础,决胜思想.以一定的观点去破解问题,支撑这种定性思维的观点就是数学思想,通常把数学思想概括为如下几种:函数与方程思想、数形结合思想、分类与整合思想、化归与转化思想、特殊与一般思想、有限与无限思想、整体把握与极端性、归纳与类比等.

函数思想可以说是数学思想之首.函数思想用运动和变化的观点、集合与对应的方法去分析、研究数学问题中的数量关系,建立函数关系或者构造函数,运用函数的图像和性质去分析问题、转化问题、解决问题,因此函数思想直接支撑数形结合思想.

方程(零点)同样是分析数学问题中的数量关系,是函数知识的主要外延之一,因为函数方程(零点)呈现出变量间的等量关系,而处理数量关系的本质是函数.因此需借助函数及其图像和性质来研究方程.函数与方程是通过转化达到互通的:对于函数 $y=f(x)$,当 $y=0$ 时,就转化为方程 $f(x)=0$ 了.同样也可以把函数 $y=f(x)$ 看作是二元方程 $y-f(x)=0$,函数与方程的这种相互转化关系非常重要.

转化思想是函数问题的重要思想,它将问题转化为函数图像和函数性质求解,其应用主要表现在两个方面:一是借助有关初等函数的性质,解有关求值、解(证)不等式、解方程以及讨论有关参数的取值范围等问题;二是在问题研究中通过建立函数关系式或者构造中间函数,把所研究的问题转化为讨论函数的有关性质,以达到化难为易、化繁为简的目的.

在实现问题的转化中,构造函数是重要和常用的手段之一,它使问题变得可操作、可研究.构造函数有时整体构造,有时源于式子的结构,具有一定的技巧,需多观察多积累.





函数构造

3.1 转化等量关系

研究密钥

解复杂方程的问题,可尝试往函数的方向上转化.此转化有代数的结构分析和元的处理两大难点方向.构造函数源于结构,因此观察方程的结构或适当变形,利用结构的对称性来构造辅助函数.从元的角度看,处理的方法是降元,将一元视为主元,一元视为参数,构造函数将二元问题化为一元问题.通过研究函数的性质(奇偶性和单调性等)来建立等量关系,达到求解函数方程的目的.

例 3.1 设 $x, y \in \mathbf{R}$, 且满足 $\begin{cases} (x-1)^3 + 2023(x-1) = -1 \\ (y-1)^3 + 2023(y-1) = 1 \end{cases}$, 则 $x+y =$ _____.

分析 ▶▶ 对比观察两个方程的结构,两个方程左边是具有相似结构的代数式,右边值为相反数,可以构造函数 $f(t) = t^3 + 2023t$, 通过研究函数的性质,根据单调性、对称性得到两个自变量之间的关系.

解析 ▶▶ 由题意可得 $(x-1)^3 + 2023(x-1) = -[(y-1)^3 + 2023(y-1)]$. 令 $f(t) = t^3 + 2023t$, 易知 $f(t)$ 为 $\mathbf{R}$ 上单调递增的奇函数, $f(x-1) = -f(y-1)$, 所以 $x-1+y-1=0$, $x+y=2$. 故填 2.

变式 1 若实数 x, y 满足方程组 $\begin{cases} (x-1)^{2023} + (x-1)^{2021} + 2022x = 4044 \\ (y-1)^{2023} + (y-1)^{2021} + 2022y = 0 \end{cases}$, 则 $x+y =$ _____.

解析 ▶▶ 由 $\begin{cases} (x-1)^{2023} + (x-1)^{2021} + 2022x = 4044 \\ (y-1)^{2023} + (y-1)^{2021} + 2022y = 0 \end{cases}$ 可得

$$\begin{cases} (x-1)^{2023} + (x-1)^{2021} + 2022(x-1) = 2022 \\ (y-1)^{2023} + (y-1)^{2021} + 2022(y-1) = -2022 \end{cases},$$

即 $(x-1)^{2023} + (x-1)^{2021} + 2022(x-1) = -[(y-1)^{2023} + (y-1)^{2021} + 2022(y-1)]$.

令 $f(t) = t^{2023} + t^{2021} + 2022t$, 易知 $f(t)$ 为 $\mathbf{R}$ 上单调递增的奇函数, 因为 $f(x-1) = -f(y-1)$, 所以 $x-1+y-1=0$, $x+y=2$. 故填 2.

例 3.2 (2020 新课标全国 I 卷理 12) 若 $2^a + \log_2 a = 4^b + 2\log_4 b$, 则 ().

A. $a > 2b$

B. $a < 2b$

C. $a > b^2$

D. $a < b^2$

分析 ▶ 观察等式两边的结构,它们结构类似,因此可以尝试构造函数 $f(x) = 2^x + \log_2 x$. 为此将等式右边变形为以 2 为底的指数式与对数式的和的形式,经过放缩得到函数不等式,根据函数单调性去掉函数符号 f ,解得自变量之间的关系.

解析 ▶ 令 $f(x) = 2^x + \log_2 x$, 易知 $f(x)$ 是一个增函数, $2^a + \log_2 a = f(a)$, $4^b + 2\log_4 b = 2^{2b} + \log_2 b^2 = 2^{2b} + \log_2 b < 2^{2b} + \log_2 2b = f(2b)$, 所以 $f(a) < f(2b)$, 得 $a < 2b$. 故选 B.

变式 1 已知 $a, b \in (0, 2)$, 且满足 $a^2 - b^2 - 4 = \frac{4}{2^b} - 2^a - 4b$, 则 $a + b$ 的值为 _____.

分析 ▶ 这个等式中的 a, b 混杂在一起, 关系不清, 因此首先分离 a, b , 并向相似结构的方向转化, 从中构造函数, 通过研究函数的单调性、对称性, 由函数值得到自变量之间的关系.

解析 ▶ 由 $a^2 - b^2 - 4 = \frac{4}{2^b} - 2^a - 4b$ 移项可得 $a^2 + 2^a = b^2 + 4 + \frac{4}{2^b} - 4b = (2-b)^2 + 2^{2-b}$. 令 $f(x) = x^2 + 2^x$, $x \in (0, 2)$, 易知 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递增, $f(a) = f(2-b)$, 所以 $a = 2-b$, 即 $a + b = 2$. 故填 2.



解后反思

函数构造的两大方向——代数的结构分析和元的处理

1. 结构分析

观察代数式的结构是否相同, 有时通过适当变形, 形成结构上的相似, 这时便可利用结构的对称性来构造辅助函数.

【思考题 1】 求函数 $f(x) = (3x-1)(\sqrt{9x^2-6x+5}+1) + (2x-3)(\sqrt{4x^2-12x+13}+1)$ 的图像与 x 轴的交点坐标.

【分析与解】 $f(x) = (3x-1)(\sqrt{(3x-1)^2+4}+1) + (2x-3)(\sqrt{(2x-3)^2+4}+1)$, 观察结构可构造函数 $g(x) = x(\sqrt{x^2+4}+1)$, 易知 $g(x)$ 为奇函数且在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

依题意, $f(x) = 0$ 等价于 $g(3x-1) + g(2x-3) = 0$, 则 $3x-1+2x-3=0$, 得 $x = \frac{4}{5}$, 所以 $y = f(x)$ 的图像与 x 轴的交点坐标为 $(\frac{4}{5}, 0)$.

2. 元的处理

对于二元函数的问题, 处理的方法是降元, 将一元视为主元, 一元视为参数来构造函数, 这样将二元问题化为一元问题.

【思考题 2】 已知 $a > b > 0$, 求 $a^2 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{a(a-b)}$ 的最小值.

[分析与解]从元的角度看,这是关于 a, b 的二元问题,处理的方法是降元,将二元问题化为一元问题.视 b 为主元, a 为参数. $f(x)=a^2+\frac{1}{ax}+\frac{1}{a(a-x)}, 0<x<a$.

$$f'(x)=-\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{x^2}+\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{(a-x)^2}=\frac{1}{a} \cdot \frac{x^2-(a-x)^2}{(a-x)^2 x^2}=\frac{2x-a}{x^2(a-x)^2}.$$

令 $f'(x)=0$ 得 $x=\frac{a}{2}$,函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{a}{2})$ 上单调递减,在 $(\frac{a}{2}, +\infty)$ 上单调递增,则

$$f(x)_{\min}=f\left(\frac{a}{2}\right)=a^2+\frac{4}{a^2} \geq 2\sqrt{a^2 \cdot \frac{4}{a^2}}=4 \text{ (当且仅当 } a^2=\frac{4}{a^2}, \text{ 即 } a=\sqrt{2} \text{ 时,取“=”)}.$$

综上所述,当 $a=\sqrt{2}, b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $a^2+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}$ 取得最小值为4.

3. 综合看结构分析和元的处理

以上构造函数的两个角度不是对立的,有的题目可以通过不同的角度来构造函数.

[思考题3]已知 a, b 为正数,若不等式 $ae^b+\ln a > \ln(a+b)+a$ 恒成立,则 a 的取值范围是().

- A. $(0, \frac{1}{e}]$ B. $[\frac{1}{e}, +\infty)$ C. $[1, +\infty)$ D. $[1, e)$

[分析与解]解法一:(从元的角度思考,将二元问题变为一元问题)

令 $f(b)=ae^b+\ln a-\ln(a+b)-a, f'(b)=ae^b-\frac{1}{a+b}, f''(b)=ae^b+\frac{1}{(a+b)^2} > 0$,则 $f'(b)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,则 $f'(b) > f'(0)=a-\frac{1}{a}$.

①若 $a-\frac{1}{a} \geq 0$,即当 $a \geq 1$ 时, $f'(0) \geq 0$,则 $f(b)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,则 $f(b) > f(0)=a+\ln a-\ln a-a=0$,不等式恒成立,则 $a \geq 1$ 满足题意.

②若 $a-\frac{1}{a} < 0$,即当 $0 < a < 1$ 时, $f'(0) < 0$,则 $\exists b_1 > 0$,使得 $f(b)$ 在 $(0, b_1)$ 单调递减,又 $f(0)=0$,则 $f(b) < 0$ 在 $(0, b_1)$ 上恒成立,不满足题意,舍去.

综上所述, a 的取值范围是 $[1, +\infty)$. 故选C.

解法二:(从结构角度,对称处理): $ae^b+\ln a > \ln(a+b)+a$,即 $ae^b+b+\ln a > a+b+\ln(a+b)$,亦即 $e^{b+\ln a}+b+\ln a > e^{\ln(a+b)}+\ln(a+b)$.

构造函数 $f(x)=x+e^x$,易知 $y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,由 $f(b+\ln a) > f(\ln(a+b))$ 得 $b+\ln a > \ln(a+b) \Leftrightarrow b > \ln\left(1+\frac{b}{a}\right)$,又 $\ln\left(1+\frac{b}{a}\right) < \frac{b}{a}$,则 $\frac{b}{a} \leq b$,得 $a \geq 1$,所以 a 的取值范围为 $[1, +\infty)$. 故选C.

3.2 转化不等关系

研究密钥

构造函数研究不等式要抓住所解不等式的结构特征,适当构造函数.一般对称不等式都可构造出函数来进一步研究.函数构造好了,后面解题过程才会顺畅.先把原不等式转化为 $f(A)>f(B)$ 的形式;接下来再判断函数 $f(x)$ 的单调性,根据函数的单调性将抽象函数不等式中的函数符号“ f ”去掉,得到具体的不等式来解.

例 3.3 不等式 $1+2^x<3^x$ 的解集为_____.

分析 ▶ 这个不等式中若 3^x 改为 4^x ,则换元转化为一元二次不等式易解.但现在是 3^x ,此路不通,想到通过构造函数、解函数不等式获解.现将不等式变形为 $3^x-2^x>1$,若构造函数 $f(x)=3^x-2^x$,则 $1=f(1)$,原不等式转化为 $f(x)>f(1)$,但 $f(x)$ 单调性不易确定,因此将原不等式变形,构造函数 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x+\left(\frac{2}{3}\right)^x$,解函数不等式得解.

解析 ▶ 由 $1+2^x<3^x$ 可得 $\left(\frac{1}{3}\right)^x+\left(\frac{2}{3}\right)^x<1$.令 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x+\left(\frac{2}{3}\right)^x$,易知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x+\left(\frac{2}{3}\right)^x<1=f(1)$,所以 $x>1$.

变式 1 设 $a, b \in \mathbf{R}$,且 $3^a+11^a=16^a, 6^b+8^b=13^b$,试比较 a 与 b 的大小关系.

解析 ▶ 构造辅助函数解函数不等式.由 $3^a+11^a=16^a$,得 $\left(\frac{3}{16}\right)^a+\left(\frac{11}{16}\right)^a=1>\frac{3}{16}+\frac{11}{16}$.

令 $f(x)=\left(\frac{3}{16}\right)^x+\left(\frac{11}{16}\right)^x$,得 $f(a)>f(1)$.易知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,所以 $a<1$.

由 $6^b+8^b=13^b$ 得 $\left(\frac{6}{13}\right)^b+\left(\frac{8}{13}\right)^b=1<\frac{6}{13}+\frac{8}{13}$.令 $g(x)=\left(\frac{6}{13}\right)^x+\left(\frac{8}{13}\right)^x$,得 $g(b)<g(1)$,易知 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,所以 $b>1$.

综上所述, $a<1<b$,即 $a<b$.

变式 2 设 $a, b \in \mathbf{R}$,且 $3^a+11^b=16^a, 6^a+8^b=13^b$,证明: $a<b$.

解析 ▶ 假设 $a \geq b$,则 $3^a+11^a \geq 3^a+11^b=16^a$,所以 $\left(\frac{3}{16}\right)^a+\left(\frac{11}{16}\right)^a \geq 1>\frac{3}{16}+\frac{11}{16}$.同理可得 $6^b+8^b \leq 6^a+8^b=13^b, \left(\frac{6}{13}\right)^b+\left(\frac{8}{13}\right)^b \leq 1<\frac{6}{13}+\frac{8}{13}$.

令 $f(x)=\left(\frac{3}{16}\right)^x+\left(\frac{11}{16}\right)^x$,易知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, $f(a)>f(1)$,所以 $a<1$.

令 $g(x) = \left(\frac{6}{13}\right)^x + \left(\frac{8}{13}\right)^x$, 易知 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, $g(b) < g(1)$, 所以 $b > 1$.

于是假设不成立, 所以 $a < b$.

例 3.4 设 x_0 是方程 $x^{2023} - x - 1 = 0$ 的正实根, y_0 是方程 $y^{4046} - y = 3x_0$ 的正实根.

(1) 试比较 x_0 和 y_0 的大小;

(2) 试求 $|x_0 - y_0|$ 小数点后面的第二位数.

分析 ▶ (1) 构造函数 $f(x) = x^{4046} - x$, 将 x_0 和 y_0 的大小转化为比较 $f(x_0)$ 和 $f(y_0)$ 的大小; (2) 因为无法求出 $|x_0 - y_0|$ 具体的值, 所以考虑求出它的范围, 该范围精确到小数点后三位, 因此设法将 $|x_0 - y_0|$ 进行放缩.

解析 ▶ (1) 构造函数 $f(x) = x^{4046} - x (x > 1)$, 易知 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

又 x_0 是方程 $x^{2023} - x - 1 = 0$ 的正实根, 可得 $x_0^{2023} - 1 = x_0 > 0$, 所以 $x_0 > 1$.

由 $y_0^{4046} - y_0 = 3x_0 > 1$ 可得 $y_0 > 1$, 所以比较 x_0 和 y_0 的大小, 只需要比较 $f(x_0)$ 和 $f(y_0)$ 的大小, 即 $f(x_0) - f(y_0) = (x_0^{4046} - x_0) - (y_0^{4046} - y_0) = (x_0 + 1)^2 - x_0 - 3x_0 = (x_0 - 1)^2 > 0$, 所以 $f(x_0) > f(y_0)$, 由单调性可得 $x_0 > y_0$.

(2) 易知 $x_0, y_0 \in (1, 2)$, 设 $x_0 = 1 + t (t > 0)$.

由 $x_0^{2023} = x_0 + 1$ 可得 $(1+t)^{2023} = (1+t) + 1 = t + 2 > 1 + 2023t$, 即 $2022t < 1$, 解得 $t < \frac{1}{2022}$.

$|x_0 - y_0| < |x_0 - 1| = t < \frac{1}{2022} < 0.0005$, 因此 $|x_0 - y_0|$ 小数点后面的第二位数为 0.

变式 1 若 $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 e^y$, $x > 0$, 求证: $0 < y < x$.

解析 ▶ 要比较 x 与 y 的大小关系, 可构造函数来比较.

由 $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 e^y (x > 0)$ 得 $e^y = \frac{e^x - x - 1}{\frac{1}{2}x^2} = \frac{2(e^x - x - 1)}{x^2}$.

要证明 $0 < y < x$, 只需证明 $1 < e^y < e^x$, 即 $1 < \frac{2(e^x - x - 1)}{x^2} < e^x$, 只需证明 $e^x > \frac{x^2}{2} + x + 1 (x > 0)$ ①

和 $e^x - x - 1 < \frac{1}{2}x^2 e^x (x > 0)$ ②.

先证明不等式①: $e^x > \frac{x^2}{2} + x + 1 (x > 0)$.

构造辅助函数 $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1, x > 0, f(0) = 0, f'(x) = e^x - x - 1, x > 0$, 由经典不

等式知 $f'(x) > 0$, 因此 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $f(x) > f(0) = 0$, 所以 $e^x > \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

再证不等式②: $e^x - x - 1 - \frac{1}{2}x^2 e^x < 0 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right)e^x - x - 1 < 0 (x > 0)$.

构造辅助函数 $g(x) = \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right)e^x - x - 1, x > 0, g(0) = 0, g'(x) = -xe^x + \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right)e^x - 1 = \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - x\right)e^x - 1, g'(0) = 0, g''(x) = \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - x - x - 1\right)e^x = -\left(\frac{1}{2}x^2 + 2x\right)e^x < 0$, 因此 $g'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

而 $g'(0) = 0$, 则 $g'(x) < 0 (x > 0)$ 因此 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

又 $g(0) = 0$, 所以 $g(x) < 0 (x > 0)$, 即 $e^x - x - 1 < \frac{1}{2}x^2 e^x$. 证毕.



函数与方程思想

3.3 函数思想



研究思路

函数思想是解决数学问题的一种思维策略,即以函数观点,也就是用变量之间对应的观点去破解问题.在函数思想中,构造函数是其重要体现.首先抓住变化过程中那些保持不变的规律和性质,通过类比、联想、转化等方式,合理地构造函数,然后结合函数的概念和性质,去分析问题、转化问题并解决问题.

例 3.5 已知 $a > 0$, 则 x_0 满足关于 x 的方程 $ax = b$ 的充要条件是().

- A. $\exists x \in \mathbf{R}, \frac{1}{2}ax^2 - bx \geq \frac{1}{2}ax_0^2 - bx_0$ B. $\exists x \in \mathbf{R}, \frac{1}{2}ax^2 - bx \leq \frac{1}{2}ax_0^2 - bx_0$
C. $\forall x \in \mathbf{R}, \frac{1}{2}ax^2 - bx \geq \frac{1}{2}ax_0^2 - bx_0$ D. $\forall x \in \mathbf{R}, \frac{1}{2}ax^2 - bx \leq \frac{1}{2}ax_0^2 - bx_0$

分析 根据选项可构造一个函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - bx, x_0$ 是函数 $f(x)$ 的最小值点,以此判断.

解析 设函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - bx$, 则 $f'(x) = ax - b$, 由已知可得 $f'(x_0) = ax_0 - b = 0$, 又因为 $a > 0$, 所以 x_0 是极小值点, 同时也是最小值点(或由二次函数的性质得出 x_0 是最小值点), 即 $\forall x \in \mathbf{R}, \frac{1}{2}ax^2 - bx \geq \frac{1}{2}ax_0^2 - bx_0$. 反之亦成立.

因此, x_0 满足关于 x 的方程 $ax = b$ 的充要条件是 $\frac{1}{2}ax^2 - bx \geq \frac{1}{2}ax_0^2 - bx_0$. 故选 C.

变式 1 (2018 浙江卷 10) 已知 a_1, a_2, a_3, a_4 成等比数列, 且 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \ln(a_1 +$

$a_2 + a_3$), 若 $a_1 > 1$, 则().

- A. $a_1 < a_3, a_2 < a_4$ B. $a_1 > a_3, a_2 < a_4$ C. $a_1 < a_3, a_2 > a_4$ D. $a_1 > a_3, a_2 > a_4$

解析 ▶▶ 根据 $\ln x \leq x - 1$ 可得, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \ln(a_1 + a_2 + a_3) \leq a_1 + a_2 + a_3 - 1$, 所以

$a_4 \leq -1, q^3 = \frac{a_4}{a_1} < 0$, 即 $q < 0$.

若 $q \leq -1$, 则 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_1(1 + q + q^2 + q^3) = a_1(1 + q)(1 + q^2) \leq 0, \ln(a_1 + a_2 + a_3) = \ln a_1(1 + q + q^2) \geq \ln a_1 > 0$, 不符合题意, 所以 q 的取值范围是 $-1 < q < 0$, 即 $0 < q^2 < 1$.

因此 $a_3 = a_1 q^2, a_1, a_3$ 均为正数, $a_1 > a_3; a_4 = a_2 q^2, a_2, a_4$ 均为负数, $a_2 < a_4$. 故选 B.

评注 ▶▶

■ 本题运用了代数运算的方法求解, 是否可以运用数形结合的思想来求解? 读者可
■ 另辟蹊径思考一番.

3.4 方程思想



研究思路

方程思想是从分析问题的数量关系入手, 将问题中的已知量和未知量之间的数量关系通过适当设元建立起方程(组), 或是利用已知条件或公式、定理中的已知结论构造方程(组), 然后通过解方程(组)使问题得到解决的思维方式. 这种思想在代数和几何中有着广泛的应用.

零点使得函数思想与方程思想互相作用. 通过方程思想建立方程后, 方程中的工具便可加以应用, 其中判别式是方程、函数和不等式相联系的重要工具, 通过构造一元二次方程或一次不等式, 运用 $\Delta \geq 0$ 或 $\Delta \leq 0$ 来求参数范围或参数间的联系是一种重要的解题策略.

例 3.6 已知 $\frac{\sqrt{5}b-c}{5a} = 1 (a, b, c \in \mathbf{R})$, 则有().

- A. $b^2 > 4ac$ B. $b^2 \geq 4ac$ C. $b^2 < 4ac$ D. $b^2 \leq 4ac$

分析 ▶▶ 题目的选项是根的判别式的形式, 所以考虑构造以 a, b, c 为系数的方程, 判断此方程的根的情况. 另外本题也可尝试走不等式的思路, 利用均值不等式来解.

解析 ▶▶ **解法一(不等式法):** 由 $\frac{\sqrt{5}b-c}{5a} = 1$ 可得 $\sqrt{5}b = 5a + c$, 所以 $5b^2 = 25a^2 + 10ac + c^2 \geq 10ac + 2\sqrt{25a^2 \cdot c^2} = 10ac + 10ac = 20ac$, 即 $b^2 \geq 4ac$. 故选 B.

解法二(方程法): 根据题意可得 $5a - \sqrt{5}b + c = 0$, 即 $a \cdot \sqrt{5}^2 - b \cdot \sqrt{5} + c = 0$, 所以 $\sqrt{5}$ 是方程 $ax^2 - bx + c = 0$ 的一个实根, $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, 即 $b^2 \geq 4ac$. 故选 B.

变式 1 设 a, b, c 为实数, 若 $(a+c)(a+b+c) < 0$, 证明: $(b-c)^2 > 4a(a+b+c)$.

解析 ▶ 所证不等式 $\Leftrightarrow (b-c)^2 - 4a(a+b+c) > 0$, 联想到一元二次方程的根的判别式

$\Delta = b^2 - 4ac$, 因此可以构造二次函数 $f(x) = ax^2 + (b-c)x + (a+b+c)$, 只要证得方程 $f(x) = 0$ 有两根或 $f(x)$ 与 x 轴相交即可.

当 $a = 0$ 时, 由已知条件可得 $b \neq c$ (若 $b = c$, 则 $c(b+c) < 0 \Leftrightarrow 2b^2 < 0$, 不成立), 此时满足 $(b-c)^2 > 4a(a+b+c)$.

当 $a \neq 0$ 时, 设 $f(x) = ax^2 + (b-c)x + (a+b+c)$, 因为 $f(0) = a+b+c$, $f(-1) = 2(a+c)$, 由已知得 $(a+c)(a+b+c) < 0$, 所以 $f(0) \cdot f(-1) < 0$, 则二次函数 $f(x)$ 的图像与 x 轴相交, 故 $\Delta = (b-c)^2 - 4a(a+b+c) > 0$, 即 $(b-c)^2 > 4a(a+b+c)$.

变式 2 已知 α, β, γ 为任意三角形的三个内角, 求证: $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy\cos\alpha + 2yz\cos\beta + 2zx\cos\gamma$.

解析 ▶ 设 $f(x) = x^2 + y^2 + z^2 - (2xy\cos\alpha + 2yz\cos\beta + 2zx\cos\gamma)$

$$= x^2 - 2(y\cos\alpha + z\cos\gamma)x + y^2 + z^2 - 2yz\cos\beta,$$

此二次函数的判别式为

$$\begin{aligned}\Delta &= 4(y\cos\alpha + z\cos\gamma)^2 - 4(y^2 + z^2 - 2yz\cos\beta) \\ &= 4(y^2\cos^2\alpha + z^2\cos^2\gamma + 2yz\cos\alpha\cos\gamma) - 4(y^2 + z^2 + 2yz\cos(\alpha + \gamma)) \\ &= 4(y^2(1 - \sin^2\alpha) + z^2(1 - \sin^2\gamma) + 2yz\cos\alpha\cos\gamma) - 4(y^2 + z^2 + 2yz(\cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma)) \\ &= 4(-y^2\sin^2\alpha - z^2\sin^2\gamma + 2yz\sin\alpha\sin\gamma) \\ &= -4(y\sin\alpha - z\sin\gamma)^2 \leq 0,\end{aligned}$$

所以 $f(x) \geq 0$, 即 $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy\cos\alpha + 2yz\cos\beta + 2zx\cos\gamma$.

评注

判别式是方程、函数和不等式相联系的重要工具, 是等式和不等式相互转化的重要桥梁, 运用判别式法证明不等式有两种途径: (1) 构造一元二次方程, 然后利用 $\Delta \geq 0$ 来证明不等式; (2) 构造恒大于 (或小于) 零的一元二次函数, 然后利用 $\Delta \leq 0$ 来证明不等式.

例 3.7 已知函数 $y = \frac{ax^2 + bx + 6}{x^2 + 2}$ 的最小值是 2, 最大值是 6, 求实数 a, b 的值.

分析 ▶ 利用判别式求值域的方法得到关于 y 的不等式, 而由已知得 $2 \leq y \leq 6$, 此时再次运用方程思想, 由根与系数的关系列方程组求 a, b 的值.

解析 ▶ 将原函数去分母, 并整理得 $(a-y)x^2 + bx + (6-2y) = 0$, 显然 $y = a$ 不满足题意, 于是 $\Delta = b^2 - 4(a-y)(6-2y) \geq 0$, 所以 $y^2 - (a+3)y + 3a - \frac{b^2}{8} \leq 0$.

由题设知 y 的最小值为 2, 最大值为 6, 由韦达定理得
$$\begin{cases} a+3=8 \\ 3a-\frac{b^2}{8}=12 \end{cases}, \text{解得 } a=5, b=\pm 2\sqrt{6}.$$

例 3.8 三个不同的实数 x, y, z 满足 $x^3-3x^2=y^3-3y^2=z^3-3z^2$, 则 $x+y+z=(\quad)$.

A. -1 B. 0 C. 1 D. 3

分析 ▶▶ 等式 $x^3-3x^2=y^3-3y^2=z^3-3z^2$ 在结构上是对称的, 可提炼出函数 $f(t)=t^3-3t^2-c$, 那么 x, y, z 就是 $t^3-3t^2-c=0$ 的三个根, 由一元三次方程根与系数的关系得解.

解析 ▶▶ **解法一(根据一元三次方程根与系数的关系):** 设 $x^3-3x^2=y^3-3y^2=z^3-3z^2=c(c \in \mathbf{R})$, 由题意可得, x, y, z 是函数 $f(t)=t^3-3t^2-c$ 的三个根, 所以 $f(t)=t^3-3t^2-c=(t-x)(t-y)(t-z)$, 根据一元三次方程根与系数的关系可得 $x+y+z=-\frac{-3}{1}=3$. 故选 D.

解法二(根据三次函数的对称中心): 设 $x^3-3x^2=y^3-3y^2=z^3-3z^2=c(c \in \mathbf{R})$, 由题意可得, x, y, z 是函数 $f(t)=t^3-3t^2-c$ 的三个根, $f(t)=t^3-3t^2-c$ 的对称中心的横坐标为 $-\frac{b}{3a}=-\frac{-3}{3}=1$.

不妨设 $x < y < z$, 则 $y=1, x+z=2$, 所以 $x+y+z=3$. 故选 D.

变式 1 已知 $(\lg \frac{c}{a})^2 - 4(\lg \frac{a}{b})(\lg \frac{b}{c}) = 0$, 求证: a, b, c 成等比数列.

解析 ▶▶ 由已知构造一元二次方程 $(\lg \frac{a}{b})t^2 + (\lg \frac{c}{a})t + \lg \frac{b}{c} = 0$ ①, 由 $\Delta=0$, 可知方程①有相等实根, 且不难发现实根 $t_1=t_2=1$.

由韦达定理得 $t_1 t_2 = \frac{\lg \frac{b}{c}}{\lg \frac{a}{b}} = 1$, 计算得 $\frac{b}{c} = \frac{a}{b}$, 即 $b^2=ac$, 所以 a, b, c 成等比数列.

例 3.9 方程组 $\begin{cases} x^{x-y}=y^{x+y} \\ y\sqrt{x}=1 \end{cases} (x, y > 0)$ 有 $(\quad)$ 组解.

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

分析 ▶▶ 对 $y\sqrt{x}=1$ 和 $x^{x-y}=y^{x+y}$ 两边取对数, 尝试得到 x 与 y 的关系式, 代入 $y\sqrt{x}=1$ 求解.

解析 ▶▶ 对方程组中的两个方程两边取对数得
$$\begin{cases} (x-y)\ln x = (x+y)\ln y \\ \ln y + \frac{1}{2}\ln x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x-y)\ln x = (x+y)\ln y \\ \ln y = -\frac{1}{2}\ln x \end{cases}, \text{由 } \frac{\ln y}{\ln x} = -\frac{1}{2} = \frac{x-y}{x+y} \text{ 可得 } -2x+2y=x+y, \text{ 即 } y=3x, \text{ 则 } y\sqrt{x} =$$

$1 \Leftrightarrow 3x\sqrt{x}=1$, 得 $9x^3=1$, 即 $x^3=\frac{1}{9}$, 解得 $x=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}, y=3\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$, 即有一组解. 故选 A.

训练 3

1. 设 $a>0, b>0$, e 是自然对数的底数, 则().

A. 若 $e^a+2a=e^b+3b$, 则 $a>b$

B. 若 $e^a+2a=e^b+3b$, 则 $a<b$

C. 若 $e^a-2a=e^b-3b$, 则 $a>b$

D. 若 $e^a-2a=e^b-3b$, 则 $a<b$

2. (2022 新课标全国甲卷文 12) 已知 $9^m=10, a=10^m-11, b=8^m-9$, 则().

A. $a>0>b$

B. $a>b>0$

C. $b>a>0$

D. $b>0>a$

3. 设 $x, y \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, 若 $\begin{cases} x^3 + \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + 2a = 0 \\ 4y^3 + \sin y \cos y - a = 0 \end{cases}$, 则 $\cos(x+2y) =$ _____.

4. 已知实数 $a>b>c$, 且 $a+b+c=1, ab+c=c^2$, 则实数 c 的取值范围是 _____.

5. 已知实数 x_1, x_2 满足 $x_1 e^{x_1} = e^3, x_2 (\ln x_2 - 2) = e^5$, 则 $x_1 x_2 =$ _____.

6. 已知 $P(x, y)$ 是单位圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 上的动点, 并且满足 $|x+2y-a| + |6-x-2y+a|$ 是常数, 则 a 的取值范围是 _____.

7. 已知 a, b, c 是三角形的三边长, $a^k + b^k = c^k$, 求证: $k < 0$ 或 $k > 1$.

第4讲

三次函数的图像与性质

 数与导数一直是高考中的热点与难点,其中三次函数是一类重要的函数,我们知道二次函数是重要的且具有广泛应用的基本初等函数,学生对此已有较为全面、系统、深刻的认识,并在某些方面具备了把握规律的能力.由于三次函数的导数是二次函数,使得我们可以利用二次函数较为深入地研究三次函数的图像与性质,以及三次方程的解的个数的问题,这使得三次函数成为高考数学的一大亮点.

三次函数规律性强,内容相对独立,且有一些独有的结论和技巧.如果能得当运用三次函数的有关结论,可以大大简化解题过程.

本讲研究了三次函数的图像与性质,以及三次方程的根的判别式与韦达定理等问题,愿我们借助这些题目能够更好地、更深刻地认识三次函数.



4.1 三次函数的图像



研究结论

三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$ 的大致图像如“N”型,其中 Δ 为导函数的判别式.

	$a>0$		$a<0$	
	$\Delta>0$	$\Delta\leq 0$	$\Delta>0$	$\Delta\leq 0$
图像				
单调区间	在 $(-\infty, x_1)$, $(x_2, +\infty)$ 上是增函数; 在 (x_1, x_2) 上是减函数	在 $\mathbf{R}$ 上是增函数	在 (x_1, x_2) 上是增函数; 在 $(-\infty, x_1)$, $(x_2, +\infty)$ 上是减函数	在 $\mathbf{R}$ 上是减函数
极值	$f(x)$ 极大值 $= f(x_1)$, $f(x)$ 极小值 $= f(x_2)$	无极值	$f(x)$ 极小值 $= f(x_1)$, $f(x)$ 极大值 $= f(x_2)$	无极值

例 4.1 (2021 新课标全国乙卷理 10) 设 $a\neq 0$, 若 $x=a$ 为函数 $f(x)=a(x-a)^2(x-b)$ 的极大值点, 则().

A. $a<b$

B. $a>b$

C. $ab<a^2$

D. $ab>a^2$

分析 当 $a=b$ 时, $f(x)=a(x-a)^3$ 无极值点; 当 $a\neq b$ 时, 分 $a<0$ 和 $a>0$ 两种情况, 结合三次函数的性质可得答案.

解析 若 $a=b$, 则 $f(x)=a(x-a)^3$ 为单调函数, 无极值点, 不符合题意, 故 $a\neq b$.

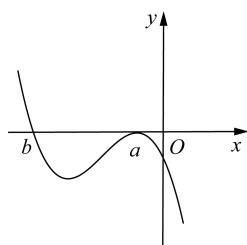
所以 $f(x)$ 有 $x=a$ 和 $x=b$ 两个不同零点, 且在 $x=a$ 左右附近是不变号, 在 $x=b$ 左右附近是变号的.

依题意, $x=a$ 为函数 $f(x)=a(x-a)^2(x-b)$ 的极大值点, 所以在 $x=a$ 左右附近都是小于零的.

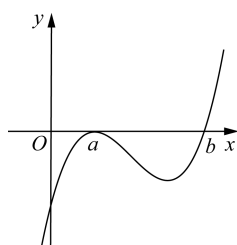
当 $a<0$ 时, 有 $x>b$, $f(x)\leq 0$, 画出 $f(x)$ 的图像如图(a)所示. 由图可知 $b<a$, $a<0$, 故 $ab>a^2$.

当 $a>0$ 时, 有 $x>b$, $f(x)>0$, 画出 $f(x)$ 的图像如图(b)所示. 由图可知 $b>a$, $a>0$, 故 $ab>a^2$.

综上所述, $ab>a^2$ 成立. 故选 D.



图(a)



图(b)

变式 1 (2020 浙江卷 9) 已知 $a, b \in \mathbf{R}$ 且 $ab \neq 0$, 若 $(x-a)(x-b)(x-2a-b) \geq 0$ 在 $x \geq 0$ 上恒成立, 则().

A. $a < 0$ B. $a > 0$ C. $b < 0$ D. $b > 0$

分析 ▶ 分 $a > 0$ 与 $a < 0$ 两种情况讨论, 结合三次函数的性质分析即可得到答案.

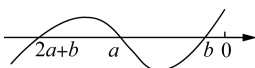
解析 ▶ 设 $f(x) = (x-a)(x-b)[x-(2a+b)]$, $ab \neq 0$.

① 当 $a, b, 2a+b$ 互不相等, 若对于 $\forall x \geq 0$, 都有 $f(x) \geq 0$, 则 $a < 0, b < 0$. 如图(a)所示.

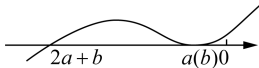
② 当 $a, b, 2a+b$ 中有相等的情形, 则只能是 $a=b$ 或 $a=2a+b$. 当 $a=b$ 时, 如图(b)所示, 则 $a < 0, b < 0$.

当 $a=2a+b$ 时, 即 $a+b=0$, 如图(c)所示, 显然不满足题意, 故舍去.

当 $a=2a+b$ 时, 即 $a+b=0$, 如图(d)所示, 则 $b < 0$ 即可.



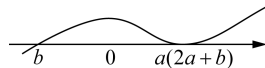
图(a)



图(b)



图(c)



图(d)

综上所述, 满足题设条件的 $b < 0$. 故选 C.

评注

运用数形结合思想, 抓住三次函数图像的特征, 合理分类讨论, 判断 a, b 的范围, 得到共同性质.



三次函数的性质

4.2 对称性



研究思路

1. 三次函数是中心对称函数

仔细观察图像, 我们不难发现三次函数是中心对称曲线, 这一点可以得到进一步的验证:

解法一: 设 $f(m-x)+f(m+x)=2n$, 得

$$[a(m-x)^3+b(m-x)^2+c(m-x)+d]+[a(m+x)^3+b(m+x)^2+c(m+x)+d]=2n,$$

整理得 $(6ma+2b)x^2+(2am^3+2bm^2+2mc+2d)=2n$.

根据多项式恒等对应系数相等, 可得 $m=-\frac{b}{3a}$ 且 $n=am^3+bm^2+mc+d$, 从而三次函数是中心对称曲线, 且由 $n=f(m)$ 知其对称中心 $(m, f(m))$ 仍然在曲线上.

故对称中心为 $\left(-\frac{b}{3a}, f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$.

解法二: 设三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a \neq 0)$ 的对称中心是 (m, n) , 按照向量 $\mathbf{a}=(-m, -n)$ 将函数图像平移, 则函数 $g(x)=f(x+m)-n$ 为奇函数, 所以 $g(-x)+g(x)=f(-x+m)-n+f(x+m)-n=f(-x+m)+f(x+m)-2n=0$.

代入化简得 $(3ma+b)x^2+am^3+bm^2+cm+d-n=0$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立. 故 $3ma+b=0$, 解得 $m=-\frac{b}{3a}$, $n=am^3+bm^2+cm+d=f(m)=f\left(-\frac{b}{3a}\right)$, 所以对称中心为 $\left(-\frac{b}{3a}, f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$.

这里的 $m=-\frac{b}{3a}$ 是否具有特殊的意义?

对函数 $f(x)$ 进行两次求导, $f''(x)=6ax+2b$, 再令其等于 0, 可得到 $x=-\frac{b}{3a}$, 恰好是对称中心的横坐标, 这可不是巧合, 因为满足 $f''(m)=0$ 的 m 正是函数拐点的横坐标, 这一性质刚好与图像吻合.

引申: 函数 $f(x)$ 与其导函数 $f'(x)$ 的对称性关系:

① $y=f(x)$ 是可导函数, 且其图像关于点 (m, n) 对称, 则 $y=f'(x)$ 图像关于直线 $x=m$ 对称.

证明: 由 $y=f(x)$ 图像关于点 (m, n) 对称, 得 $f(x)+f(2m-x)=2n$.

$$\begin{aligned} \text{因为 } f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}, \text{ 所以 } f'(2m-x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2m-x+\Delta x)-f(2m-x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[2n-f(x-\Delta x)]-[2n-f(x)]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x} = f'(x). \end{aligned}$$

所以 $f'(2m-x)=f'(x)$, 即 $y=f'(x)$ 图像关于直线 $x=m$ 对称.

② $y=f(x)$ 是可导函数, 且其图像关于直线 $x=m$ 对称, 则 $y=f'(x)$ 图像关于点 $(m, 0)$ 对称.

证明: 由 $y=f(x)$ 图像关于直线 $x=m$ 对称, 得 $f(x)=f(2m-x)$.

$$\begin{aligned} \text{因为 } f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}, \text{ 所以 } f'(2m-x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2m-x+\Delta x)-f(2m-x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x} = -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = -f'(x). \end{aligned}$$

所以 $f'(2m-x)+f'(x)=0$, 即 $y=f'(x)$ 图像关于点 $(m,0)$ 对称.

2. 三次函数极值点与对称中心的关系

若三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 有极值, 则它的对称中心是两个极值点的中心.

证明: 设 $f'(x)=3ax^2+2bx+c=0$ 的两根为 x_1, x_2 , 则 $x_1+x_2=-\frac{2b}{3a}, x_1x_2=\frac{c}{3a}$.

设 $f(x)$ 的两个极值点为 $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$, 则

$$\begin{aligned} f(x_1)+f(x_2) &= (ax_1^3+bx_1^2+cx_1+d)+(ax_2^3+bx_2^2+cx_2+d) \\ &= a(x_1^3+x_2^3)+b(x_1^2+x_2^2)+c(x_1+x_2)+2d \\ &= a(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]+b[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]+c(x_1+x_2)+2d \\ &= a\left(-\frac{2b}{3a}\right)\left(\frac{4b^2}{9a^2}-\frac{c}{a}\right)+b\left(\frac{4b^2}{9a^2}-\frac{2c}{3a}\right)-\frac{2bc}{3a}+2d=\frac{4b^3}{27a^2}-\frac{2bc}{3a}+2d. \end{aligned}$$

$$2f\left(-\frac{b}{3a}\right)=2\left[a\left(-\frac{b}{3a}\right)^3+b\left(-\frac{b}{3a}\right)^2+c\left(-\frac{b}{3a}\right)+d\right]=\frac{4b^3}{27a^2}-\frac{2bc}{3a}+2d, \text{ 所以 } f(x_1)+f(x_2)=2f\left(-\frac{b}{3a}\right).$$

AB 的中点 $P\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right)=\left(-\frac{b}{3a}, f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$ 即为对称中心.

例 4.2 已知函数 $f(x)=2x^3-3x^2+9x-\frac{7}{2}$, 则 $f\left(\frac{1}{2022}\right)+f\left(\frac{2}{2022}\right)+f\left(\frac{3}{2022}\right)+\cdots+f\left(\frac{2021}{2022}\right)=$ ().

A. 2021

B. $\frac{2021}{2}$

C. 2022

D. $\frac{4021}{2}$

分析 $\gg f(x)=2x^3-3x^2+9x-\frac{7}{2}$ 为三次函数, 找到对称中心, 利用对称性解决即可.

解析 $\gg$ 由 $f(x)=2x^3-3x^2+9x-\frac{7}{2}$, 可得 $f'(x)=6x^2-6x+9, f''(x)=12x-6$. 令 $f''(x)=12x-6=0$, 得 $x=\frac{1}{2}$, 又 $f\left(\frac{1}{2}\right)=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3-3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+9\times\frac{1}{2}-\frac{7}{2}=\frac{1}{2}$, 所以对称中心为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $f\left(\frac{1}{2022}\right)+f\left(\frac{2021}{2022}\right)=1, f\left(\frac{2}{2022}\right)+f\left(\frac{2020}{2022}\right)=1, \cdots, f\left(\frac{1010}{2022}\right)+f\left(\frac{1012}{2022}\right)=1, f\left(\frac{1011}{2022}\right)=\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2022}\right)+f\left(\frac{2}{2022}\right)+f\left(\frac{3}{2022}\right)+\cdots+f\left(\frac{2021}{2022}\right)=1010\times 1+\frac{1}{2}=\frac{2021}{2}$. 故选 B.

变式 1 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2-9x+b$ 图像关于 $(1,0)$ 对称, 且满足 $-1\leq s < t \leq m$ 的任意实数 s, t 有 $f(s) > f(t)$, 则实数 m 的最大值为 _____.

解析 $\gg f'(x)=3x^2+2ax-9, f''(x)=6x+2a$.

因为函数 $f(x)=x^3+ax^2-9x+b$ 的图像关于点 $(1,0)$ 对称,所以 $f''(1)=6+2a=0$ 且 $f(1)=1+a-9+b=0$,解得 $a=-3, b=11$,所以 $f(x)=x^3-3x^2-9x+11$.

又因为对满足 $-1 \leq s < t \leq m$ 的任意实数 s, t 有 $f(s) > f(t)$,所以 $f(x)$ 在 $[-1, m]$ 上单调递减,令 $f'(x)=3x^2-6x-9 \leq 0$,解得 $-1 \leq x \leq 3$,所以实数 m 的最大值为 3.

变式 2 函数 $f(x)=x^3-bx^2+c$,若 $f(1-x)+f(1+x)=2$,则下列不等关系成立的是().

A. $f(\ln 2)+f(\ln 4) < 2$

B. $f(-2)+f(5) < 2$

C. $f(\ln 2)+f(\ln 3) < 2$

D. $f(-1)+f(2) > 2$

解析 $\gg f'(x)=3x^2-2bx, f''(x)=6x-2b$.

由 $f(1-x)+f(1+x)=2$ 可知三次函数 $f(x)$ 的对称中心为 $(1,1)$,所以 $f(1)=1^3-b \cdot 1^2+c=1, f''(1)=6-2b=0$,解得 $b=3, c=3$,故 $f(x)=x^3-3x^2+3, f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$,故 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减,在 $(-\infty,0)$ 和 $(2,+\infty)$ 上单调递增.

由 $f(1-x)+f(1+x)=2$ 得 $f(x)+f(2-x)=2$,又 $1 < \ln 3 < 2 - \ln 2 = \ln \frac{e^2}{2} < \ln 4 < 2$,于是可得 $2 = f(\ln 2) + f(2 - \ln 2) = f(\ln 2) + f\left(\ln \frac{e^2}{2}\right) > f(\ln 2) + f(\ln 4), 2 = f(\ln 2) + f(2 - \ln 2) = f(\ln 2) + f\left(\ln \frac{e^2}{2}\right) < f(\ln 2) + f(\ln 3)$,故 A 正确,C 不正确.

又 $2 = f(-2) + f(4) < f(-2) + f(5), 2 = f(-1) + f(3) > f(-1) + f(2)$,故 B, D 都不正确.

综上所述,故选 A.

变式 3 已知 $a \in \mathbf{R}$,函数 $f(x)=x^3+3(a-1)x+1$.

(1)求证: $f(x)$ 的图像关于点 $(0,1)$ 对称;

(2)当 $x \in [0,2]$ 时,求 $|f(x-1)|$ 的最大值.

解析 $\gg$ (1)要证明 $f(x)$ 的图像关于点 $(0,1)$ 对称,等价于证明 $f(x)+f(-x)=2$.

由 $f(x)=x^3+3(a-1)x+1, f(-x)=-x^3-3(a-1)x+1, f(x)+f(-x)=2$,因此函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(0,1)$ 对称.

(2)设 $g(x)=f(x-1)=(x-1)^3+3(a-1)(x-1)+1, x \in [0,2]$.

令 $t=x-1 \in [-1,1]$,得 $g(t)=t^3+3(a-1)t+1, t \in [-1,1], g'(t)=3t^2+3(a-1)=3(t^2+a-1), t \in [-1,1]$.

①当 $a \geq 1$ 时, $g'(t) \geq 0$,此时 $g(t)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递增,所以 $|g(t)|_{\max} = \max\{|g(-1)|, |g(1)|\}$,又 $|g(-1)| = |-3(a-1)| = 3(a-1), |g(1)| = 3a-1$,且 $3a-1 > 3(a-1)$,所以,此时 $|g(t)|_{\max} = 3a-1$.

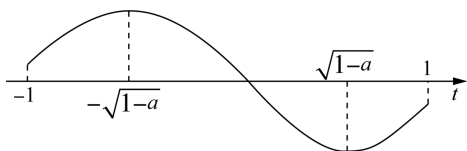
②当 $a \leq 0$ 时, $g'(t) \leq 0$, 此时 $g(t)$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递减, 所以 $|g(t)|_{\max} = \max\{|g(-1)|, |g(1)|\} = \max\{3-3a, 1-3a\} = 3-3a$.

③当 $0 < a < 1$ 时, 令 $g'(t) = 0$, 得 $t_1 = -\sqrt{1-a}$, $t_2 = \sqrt{1-a}$, 因此 $g(t)$ 在 $(-1, -\sqrt{1-a})$, $(\sqrt{1-a}, 1)$ 上单调递增, 在 $(-\sqrt{1-a}, \sqrt{1-a})$ 上单调递减.

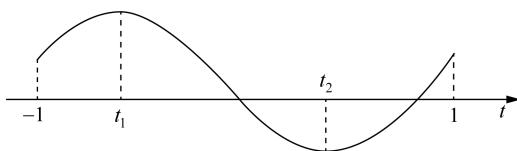
且 $g(-1) = 3(1-a) > 0$, $g(1) = 3a-1$, $g(t_1) = g(-\sqrt{1-a}) > g(-1) > 0$, $g(t_2) = g(\sqrt{1-a}) = -2(1-a)\sqrt{1-a} + 1$. 如图(a)所示.

(i) 若 $g(1) = 3a-1 \leq 0$, 即 $0 < a \leq \frac{1}{3}$, 此时 $|g(t_1)| = 2(1-a)\sqrt{1-a} + 1$, $|g(t_2)| = 2(1-a)\sqrt{1-a} - 1$, 显然 $|g(t_1)| = g(t_1) > |g(t_2)|$, 此时, $|g(t)|_{\max} = |g(t_1)| = 2(1-a) \cdot \sqrt{1-a} + 1$.

(ii) 若 $g(1) = 3a-1 > 0$, 即 $\frac{1}{3} < a < 1$, 此时 $|g(t)|_{\max} = \max\{|g(t_1)|, |g(t_2)|, |g(1)|\} = \max\{2(1-a)\sqrt{1-a} + 1, |-2(1-a)\sqrt{1-a} + 1|, 3a-1\}$. 如图(b)所示.



图(a)



图(b)

又 $g(t_1) - |g(t_2)| = 2(1-a)\sqrt{1-a} + 1 - |1 - 2(1-a)\sqrt{1-a}| > 0$, 所以只需比较 $g(t_1)$ 和 $|g(1)|$ 的大小关系.

令 $h(a) = g(-\sqrt{1-a}) - g(1) = 2(1-a)\sqrt{1-a} - 3a + 2$, $\frac{1}{3} < a < 1$, $h'(a) = -2\sqrt{1-a} + 2(1-a) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-a}} - 3 = -3\sqrt{1-a} - 3 < 0$, 函数 $h(a)$ 在 $(\frac{1}{3}, 1)$ 上单调递减, 且 $h(\frac{1}{3}) > 0$, $h(1) = -1 < 0$, $h(\frac{3}{4}) = 2 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + 2 - \frac{9}{4} = 0$, 因此当 $\frac{1}{3} < a < \frac{3}{4}$ 时, $h(a) > 0$, 即 $g(-\sqrt{1-a}) > g(1)$, 此时 $|g(t)|_{\max} = g(-\sqrt{1-a}) = 2(1-a)\sqrt{1-a} + 1$; 当 $\frac{3}{4} \leq a < 1$ 时, $h(a) \leq 0$, 即 $g(-\sqrt{1-a}) \leq g(1)$, 此时 $|g(t)|_{\max} = g(1) = 3a-1$.

$$\text{综上所述, } |f(x-1)|_{\max} = |g(t)|_{\max} = \begin{cases} 3-3a, & a \leq 0 \\ 2(1-a)\sqrt{1-a} + 1, & 0 < a < \frac{3}{4} \\ 3a-1, & a \geq \frac{3}{4} \end{cases}.$$

评注

本题说难也难,种类多,过程长,计算量大;但本题说简单也简单,思路很容易想到,计算处理也没有太大的难度,唯一的难点是判断 $2(1-a)\sqrt{1-a}-3a+2$ 的正负. 但就算想不到分子有理化的技巧,老老实实利用平方,比较 $2(1-a)\sqrt{1-a}$ 的平方和 $3a-2$ 的平方的大小,也不算繁杂. 通过这道题,我们可以对分类讨论的方法朴实和功能强大有一个清醒的认识.

设连续函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值为 m , 最大值为 n , 即 $m \leq f(x) \leq n$, 则 $|f(x)|_{\max} = \max\{|m|, |n|\}$, 本例给 $f(x)$ 整体加绝对值, 实质是研究 $f(x)$ 的单调性及函数的最大与最小值问题.

4.3 切线问题



研究密钥

1. 过三次曲线的对称中心且与该三次曲线相切的直线有且仅有一条, 而过三次曲线上除对称中心外的任一点与该三次曲线相切的直线有两条.

由于三次曲线都是中心对称曲线, 因此, 将其对称中心移至坐标原点, 便可将三次函数的解析式简化为 $f(x) = ax^3 + bx$.

若 $M(x_1, y_1)$ 是三次曲线 $f(x) = ax^3 + bx$ 上的任一点, 设过 M 的切线与曲线 $y = f(x)$ 相切于 (x_0, y_0) , 则切线方程为 $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. 因点 M 在此切线上, 故 $y_1 - y_0 = f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0)$, 又 $y_0 = ax_0^3 + bx_0, y_1 = ax_1^3 + bx_1$, 所以 $ax_1^3 + bx_1 - (ax_0^3 + bx_0) = (3ax_0^2 + b) \cdot (x_1 - x_0)$, 整理得 $(x_0 - x_1)^2(2x_0 + x_1) = 0$, 解得 $x_0 = x_1$ 或 $x_0 = -\frac{x_1}{2}$.

综上所述, 当点 M 是对称中心即 $x_1 = 0$ 时, 过点 M 作曲线的切线切点是唯一的, 且为 M , 故只有一条切线; 当点 M 不是对称中心即 $x_1 \neq 0$ 时, 过点 M 作曲线的切线可产生两个不同的切点, 故必有两条切线, 其中一条就是以 M 为切点 (亦即曲线在点 M 处) 的切线.

由此可见, 不仅切线与曲线的公共点可以多于一个, 而且过曲线上点的切线也不一定唯一.

2. 求以曲线上的点 $(x_0, f(x_0))$ 为切点的切线方程的求解步骤: ① 求出函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$; ② 求切线的斜率 $f'(x_0)$; ③ 写出切线方程 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, 并化简.

3. 问题延伸: 过三次函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的图像外一点 $P(x_0, y_0)$ 可以作几条切线?

设 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a > 0)$ 在对称中心 $N\left(-\frac{b}{3a}, f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$ 处的切线为 l , 曲线 Γ 及 l 把坐标平面分成 I、II、III、IV 四个区域, 如图 1 ($a < 0$)、图 2 ($a > 0$) 所示.

- (1) 当定点 P 在对称中心 N 或在 I 和 III 区域时, 过点 P 的切线有且仅有一条;
 (2) 当定点 P 在曲线上或在切线 l 上且不在对称中心 N 时, 过点 P 的切线有两条;
 (3) 当定点 P 在 II 和 IV 区域时, 过点 P 的切线有三条.

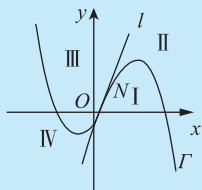


图 1

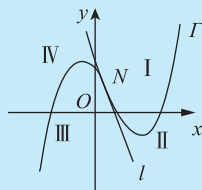


图 2

例 4.3 (2014 北京卷文 20) 已知函数 $f(x) = 2x^3 - 3x$.

- (1) 求 $f(x)$ 在区间 $[-2, 1]$ 上的最大值;
 (2) 若过点 $P(1, t)$ 存在 3 条直线与曲线 $y = f(x)$ 相切, 求 t 的取值范围;
 (3) 问过点 $A(-1, 2), B(2, 10), C(0, 2)$ 分别存在几条直线与曲线 $y = f(x)$ 相切? (只需写出结论)

分析 ▶▶ (1) 根据函数的单调性求最值; (2) 求出过点 $P(1, t)$ 的切线方程, 转化为方程有 3 个零点的问题; (3) 借助单调性和极值的正负判断零点的个数, 或根据曲线与切线分成的 4 个区域来判断.

解析 ▶▶ (1) 由 $f(x) = 2x^3 - 3x$ 得 $f'(x) = 6x^2 - 3$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

因为 $f(-2) = -10, f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}, f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2}, f(1) = -1$, 所以 $f(x)$ 在区间 $[-2, 1]$

上的最大值为 $f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}$.

(2) 设过点 $P(1, t)$ 的直线与曲线 $y = f(x)$ 相切于点 (x_0, y_0) , 则 $y_0 = 2x_0^3 - 3x_0$, 且切线斜率为 $k = 6x_0^2 - 3$, 所以切线方程为 $y - y_0 = (6x_0^2 - 3)(x - x_0)$, 因此 $t - y_0 = (6x_0^2 - 3)(1 - x_0)$, 整理得 $4x_0^3 - 6x_0^2 + t + 3 = 0$.

设 $g(x) = 4x^3 - 6x^2 + t + 3$, 则“过点 $P(1, t)$ 存在 3 条直线与曲线 $y = f(x)$ 相切”等价于“ $g(x)$ 有 3 个不同零点”, $g'(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x - 1)$, $g(x)$ 与 $g'(x)$ 的情况如下:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	↗	$t+3$	↘	$t+1$	↗

所以, $t+3$ 是 $g(x)$ 的极大值, $t+1$ 是 $g(x)$ 的极小值.

当 $g(0) = t+3 \leq 0$, 即 $t \leq -3$ 时, 此时 $g(x)$ 在区间 $(-\infty, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 上分别至多有 1 个

零点,所以 $g(x)$ 至多有 2 个零点;当 $g(1)=t+1 \geq 0$, 即 $t \geq -1$ 时,此时 $g(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上分别至多有 1 个零点,所以 $g(x)$ 至多有 2 个零点.

当 $g(0) > 0$ 且 $g(1) < 0$, 即 $-3 < t < -1$ 时,因为 $g(-1)=t-7 < 0$, $g(2)=t+11 > 0$, 所以 $g(x)$ 分别在区间 $[-1, 0)$, $[0, 1)$ 和 $[1, 2)$ 上恰有 1 个零点,由于 $g(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调,所以 $g(x)$ 分别在区间 $(-\infty, 0)$ 和 $[1, +\infty)$ 上恰有 1 个零点.

综上所述,当过点 $P(1, t)$ 存在 3 条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切时, t 的取值范围是 $(-3, -1)$.

(3) 过点 $A(-1, 2)$ 存在 3 条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切;

过点 $B(2, 10)$ 存在 2 条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切;

过点 $C(0, 2)$ 存在 1 条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切.

4.4 等分面积



研究思路

由于三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a \neq 0)$ 总可以通过配方或平移变为 $f(x)=px^3+qx$ 的形式,不妨设 $p > 0$, $f'(x)=3px^2+q=0$, 令 $\Delta=-12pq > 0$, 即 $q < 0$, 则 $x_1 = -\sqrt{-\frac{q}{3p}}$, $x_2 = \sqrt{-\frac{q}{3p}}$. 如图所示.

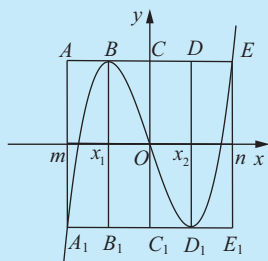
令 $f(x_1)=f(n)$, $f(x_2)=f(m)$, $x_1 \neq n$, $x_2 \neq m$.

$f(m)=f(x_2)$, 即 $pm^3+qm=px_2^3+qx_2$, $p(m^3-x_2^3)+q(m-x_2)=0$, 则 $p(m-x_2)(m^2+mx_2+x_2^2)+q(m-x_2)=0$, 即 $(m-x_2)[p(m^2+mx_2+x_2^2)+q]=0$.

因为 $m \neq x_2$, 所以 $p(m^2+mx_2+x_2^2)+q=0$, $p(m^2+mx_2+x_2^2)-3px_2^2=0$, 则 $m^2+mx_2+x_2^2-3x_2^2=0$, 即 $m^2+mx_2-2x_2^2=0$, 有 $(m+2x_2)(m-x_2)=0$.

而 $m \neq x_2$, 故 $m=-2x_2$. 同理 $n=-2x_1$.

又 $x_1=-x_2$, 则 $m=2x_1$, $n=2x_2$, $|x_1-m|=|x_1|=|x_2|=|n-x_2|$. 故 $S_{\text{矩形}ABB_1A_1}=S_{\text{矩形}BCC_1B_1}=S_{\text{矩形}CDD_1C_1}=S_{\text{矩形}DEE_1D_1}$.



例 4.4 已知函数 $f(x)=x^3+ax+b$, $a, b \in \mathbf{R}$. $x_1, x_2 \in (m, n)$ 且满足 $f(x_1)=f(n)$, $f(x_2)=f(m)$, 对任意的 $x \in [m, n]$ 恒有 $f(m) \leq f(x) \leq f(n)$, 则当 a, b 取不同的值时, ().

- A. $n+2x_1$ 与 $m-2x_2$ 均为定值
B. $n-2x_1$ 与 $m+2x_2$ 均为定值
C. $n-2x_1$ 与 $m-2x_2$ 均为定值
D. $n+2x_1$ 与 $m+2x_2$ 均为定值

分析 根据 $f(x)=x^3+ax+b$ 的单调性可得对任意的 $x \in [m, n]$, $f(x)_{\min}=f(m)$,

$f(x)_{\max}=f(n)$, $x_1=-\sqrt{-\frac{a}{3}}$ 为函数 $f(x)$ 的极大值点, $x_2=\sqrt{-\frac{a}{3}}$ 为函数 $f(x)$ 的极小值点, 由 $f(x_1)=f(n)$, 将 x_1 和 n 代入函数, 化简可得 $n+2x_1$ 为定值, 同理可得 $m+2x_2$ 为定值.

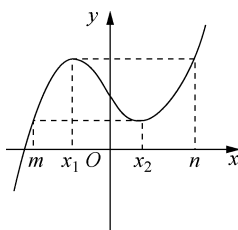
解析 ▶ 当 $a \geq 0$ 时, $f'(x)=3x^2+a \geq 0$, 此时, 函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数.

当 $x_1, x_2 \in (m, n)$ 时, $f(x_1) < f(n)$, $f(x_2) > f(m)$, 不合乎题意, 所以, $a < 0$. 由 $f'(x)=0$ 可得 $x = \pm \sqrt{-\frac{a}{3}}$.

当 $x < -\sqrt{-\frac{a}{3}}$ 或 $x > \sqrt{-\frac{a}{3}}$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $-\sqrt{-\frac{a}{3}} < x < \sqrt{-\frac{a}{3}}$ 时, $f'(x) < 0$.

所以, 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -\sqrt{-\frac{a}{3}})$, $(\sqrt{-\frac{a}{3}}, +\infty)$, 单调递减区间为 $(-\sqrt{-\frac{a}{3}}, \sqrt{-\frac{a}{3}})$.

如图所示, 对任意的 $x \in [m, n]$, 恒有 $f(m) \leq f(x) \leq f(n)$, $f(x)_{\min} = f(m)$, $f(x)_{\max} = f(n)$. 又当 $x_1, x_2 \in (m, n)$ 且满足 $f(x_1) = f(n)$, $f(x_2) = f(m)$, 所以, x_1 为函数 $f(x)$ 的极大值点, x_2 为函数 $f(x)$ 的极小值点, 则 $x_1 = -\sqrt{-\frac{a}{3}}$, $x_2 = \sqrt{-\frac{a}{3}}$.



由 $f(x_1)=f(n)$ 可知 $x_1^3+ax_1+b=n^3+an+b$, 故 $(x_1^3-n^3)+a(x_1-n)=0$, 即 $(x_1-n) \cdot (x_1^2+nx_1+n^2+a)=0$, 又 $x_1 \neq n$, 故 $x_1^2+nx_1+n^2+a=0$.

因为 $x_1 = -\sqrt{-\frac{a}{3}}$, 可知 $a = -3x_1^2$, 所以 $n^2+nx_1-2x_1^2=0$, 即 $(n-x_1)(n+2x_1)=0$, 得 $n+2x_1=0$. 同理 $m+2x_2=0$. 故选 D.

变式 1 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + tx + t$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若函数 $f(x)$ 有三个不同的零点 x_1, x_2, x_3 , 求 t 的取值范围, 并证明:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 < 4\sqrt{-t}.$$

解析 ▶ (1) 由题意得 $f'(x) = x^2 + t$.

① 当 $t \geq 0$ 时, $f'(x) \geq 0$, 则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 无单调递减区间;

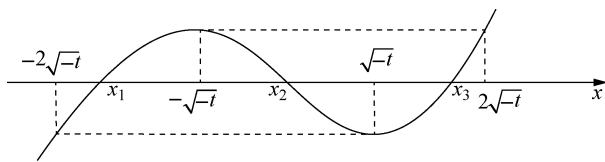
② 当 $t < 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\sqrt{-t}, \sqrt{-t})$ 上单调递减, 在 $(-\infty, -\sqrt{-t})$, $(\sqrt{-t}, +\infty)$ 上单调递增.

(2) 如下图所示, 由 (1) 知函数 $f(x)$ 有三个零点, 因此 $t < 0$.

因为 $f(x)$ 在 $(-\sqrt{-t}, \sqrt{-t})$ 上单调递减, 在 $(-\infty, -\sqrt{-t})$, $(\sqrt{-t}, +\infty)$ 上单调递

增,且 $f(x)$ 有三个不同的零点 x_1, x_2, x_3 , 所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(-\sqrt{-t}) = t - \frac{2}{3}t\sqrt{-t}$,

令 $t - \frac{2}{3}t\sqrt{-t} > 0$ 得 $t < -\frac{9}{4}$. 故 t 的取值范围为 $(-\infty, -\frac{9}{4})$.



依题意知 $-2\sqrt{-t} < x_1 < -\sqrt{-t} < x_2 < \sqrt{-t} < x_3 < 2\sqrt{-t}$, 且 $f(x)$ 在 $(-\sqrt{-t}, \sqrt{-t})$ 上单调递减, $f(x_2) = 0, f(0) = t < 0$, 则 $f(0) < f(x_2)$, 所以 $x_2 < 0$.

那么 $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = x_1 + x_2 + x_3 + x_2 + 2x_3 < 0 + x_2 + 2x_3 < 2x_3 < 4\sqrt{-t}$.

4.5 单调性与最值



研究思路

三次函数的导数为二次函数, 根据二次函数的正负判断三次函数的单调性, 根据二次函数的零点可得三次函数的极值点, 比较区间端点值和极值可得最值.

例 4.5 (2019 新课标全国 III 卷文 20) 已知函数 $f(x) = 2x^3 - ax^2 + 2$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $0 < a < 3$ 时, 记 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值为 M , 最小值为 m , 求 $M - m$ 的取值范围.

分析

► (1) 利用导函数判断 $f(x)$ 的单调性, 导函数的零点为 $x = 0$ 或 $x = \frac{a}{3}$, 对 a 分类讨论两个零点的大小, 可得 $f(x)$ 的单调性; (2) 由 (1) 可得 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 的最小值为 $f(\frac{a}{3}) = -\frac{a^3}{27} + 2$, 最大值为 $f(0) = 2$ 或 $f(1) = 4 - a$. 对 a 分类讨论两个最大值的大小, 可得最大值与最小值的差.

解析

► (1) $f'(x) = 6x^2 - 2ax = 2x(3x - a)$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 0$ 或 $x = \frac{a}{3}$.

若 $a > 0$, 则当 $x \in (-\infty, 0) \cup (\frac{a}{3}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (0, \frac{a}{3})$ 时, $f'(x) < 0$.

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0), (\frac{a}{3}, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(0, \frac{a}{3})$ 上单调递减.

若 $a = 0$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增.

若 $a < 0$, 则当 $x \in (-\infty, \frac{a}{3}) \cup (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (\frac{a}{3}, 0)$ 时, $f'(x) < 0$.

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, \frac{a}{3})$, $(0, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(\frac{a}{3}, 0)$ 上单调递减.

(2) 当 $0 < a < 3$ 时, 由(1)知, $f(x)$ 在 $(0, \frac{a}{3})$ 上单调递减, 在 $(\frac{a}{3}, 1)$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 的最小值为 $f(\frac{a}{3}) = -\frac{a^3}{27} + 2$, 最大值为 $f(0) = 2$ 或 $f(1) = 4 - a$.

$$\text{于是 } m = -\frac{a^3}{27} + 2, M = \begin{cases} 4 - a, & 0 < a < 2 \\ 2, & 2 \leq a < 3 \end{cases}, \text{ 所以 } M - m = \begin{cases} 2 - a + \frac{a^3}{27}, & 0 < a < 2 \\ \frac{a^3}{27}, & 2 \leq a < 3 \end{cases}.$$

当 $0 < a < 2$ 时, 可知 $2 - a + \frac{a^3}{27}$ 单调递减, 所以 $M - m$ 的取值范围是 $(\frac{8}{27}, 2)$; 当 $2 \leq a < 3$ 时, $\frac{a^3}{27}$ 单调递增, 所以 $M - m$ 的取值范围是 $[\frac{8}{27}, 1)$.

综上所述, $M - m$ 的取值范围是 $[\frac{8}{27}, 2)$.

例 4.6 若函数 $f(x) = x^2|x - a|$ 在区间 $[0, 2]$ 上单调递增, 则实数 a 的取值范围是_____.

分析 ▶ 函数 $f(x)$ 的一个极值点是 $x = 0$, 对 a 分类讨论 $f(x) = x^2|x - a|$ 的单调递增区间.

解析 ▶ $f(x) = x^2|x - a| = \begin{cases} x^2(x - a), & x \geq a \\ -x^2(x - a), & x < a \end{cases}$.

① 当 $a > 0$ 时, 如图 1 所示, 由 $f'(x) = -3x^2 + 2ax = 0$ 得 $x = 0$ 或 $x = \frac{2a}{3}$, 欲使函数 $f(x) = x^2|x - a|$ 在区间 $[0, 2]$ 上单调递增, 只需 $x = \frac{2a}{3} \geq 2$, 即 $a \geq 3$.

② 当 $a < 0$ 时, 如图 2 所示, $f(x) = x^2|x - a|$ 在区间 $[0, 2]$ 上单调递增, 满足题意.

③ 当 $a = 0$, $f(x) = x^3$ 区间 $[0, 2]$ 上单调递增显然成立.

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$.

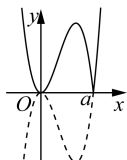


图 1

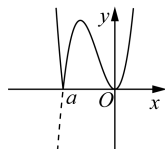


图 2

变式 1 已知 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = x^2|x - a|$, 求函数 $y = f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上的最小值.

解析 ▶ 设此最小值为 m .

(1) 当 $a \leq 1$, 函数 $y = f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上, $f(x) = x^3 - ax^2$, 因为 $f'(x) = 3x^2 - 2ax =$

$3x\left(x-\frac{2}{3}a\right)>0, x\in(1,2)$, 所以 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增, 因此 $m=f(1)=1-a$.

(2) 当 $1<a\leq 2$ 时, 函数 $y=f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上, $f(x)=x^2|x-a|\geq 0$, 又因为 $f(a)=0$, 得 $m=f(a)=0$.

(3) 当 $a>2$ 时, 在区间 $[1,2]$ 上, $f(x)=ax^2-x^3, f'(x)=2ax-3x^2=3x\left(\frac{2a}{3}-x\right)$, $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{2}{3}a\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{2}{3}a, a\right)$ 上单调递减.

① 若 $\frac{2}{3}a\geq 2$, 即 $a\geq 3$, $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上单调递增, 故 $m=f(1)=a-1$.

② 若 $1<\frac{2}{3}a<2$, 即 $2<a<3$, $f(x)$ 在 $\left[1, \frac{2}{3}a\right]$ 上单调递增, 在 $\left[\frac{2}{3}a, 2\right]$ 上单调递减, $m=\min\{f(1), f(2)\}$. 又 $f(1)=a-1, f(2)=4(a-2)=4a-8$.

令 $a-1\leq 4a-8$ 得 $a\geq \frac{7}{3}$, 即当 $\frac{7}{3}\leq a<3$ 时, $m=f(1)=a-1$; 令 $a-1>4a-8$ 得 $a<\frac{7}{3}$, 即当 $2<a<\frac{7}{3}$ 时, $m=f(2)=4a-8$.

综上所述, 当 $a\leq 1$ 时, 最小值为 $1-a$; 当 $1<a\leq 2$ 时, 最小值为 0 ; 当 $2<a<\frac{7}{3}$ 时, 最小值为 $4a-8$; 当 $a\geq \frac{7}{3}$ 时, 最小值为 $a-1$.



三次函数的零点问题

4.6 极值点与零点



研究密钥

三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$, 导函数 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

导函数判别式 $\Delta=4b^2-12ac=4(b^2-3ac)$.

① 若 $b^2-3ac<0$, 则三次函数 $f(x)$ 没有极值点, 则 $f(x)$ 有 1 个零点.

② 若 $b^2-3ac>0$, 则三次函数 $f(x)$ 有 2 个极值点 x_1, x_2 , 则

当 $f(x_1)f(x_2)>0$ 时, $f(x)$ 有 1 个零点;

当 $f(x_1)f(x_2)=0$ 时, $f(x)$ 有 2 个零点;

当 $f(x_1)f(x_2)<0$ 时, $f(x)$ 有 3 个零点.

例 4.7 已知函数 $f(x) = x^3 - kx + k^2$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 有三个零点, 求 k 的取值范围.

分析 ▶ (1) $f'(x) = 3x^2 - k$, 对 k 分类讨论; (2) $f(x)$ 有三个零点, 则 $f(x)_{\text{极大}} > 0$, $f(x)_{\text{极小}} < 0$.

解析 ▶ (1) 由题意得, $f'(x) = 3x^2 - k$.

① 当 $k \leq 0$ 时, $f'(x) \geq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 此时 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

② 当 $k > 0$ 时, 令 $f'(x) = 3x^2 - k = 0$, 得 $x = \pm \sqrt{\frac{k}{3}} = \pm \frac{\sqrt{3k}}{3}$.

当 $x \in (-\infty, -\frac{\sqrt{3k}}{3})$, $x \in (\frac{\sqrt{3k}}{3}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (-\frac{\sqrt{3k}}{3}, \frac{\sqrt{3k}}{3})$ 时, $f'(x) < 0$.

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\frac{\sqrt{3k}}{3})$ 和 $(\frac{\sqrt{3k}}{3}, +\infty)$ 上是增函数, 在 $(-\frac{\sqrt{3k}}{3}, \frac{\sqrt{3k}}{3})$ 上是减函数.

(2) **解法一**: 由(1)可知 $k > 0$, 且 $f(x)_{\text{极大}} = f(-\frac{\sqrt{3k}}{3}) = (-\frac{\sqrt{3k}}{3})^3 - k(-\frac{\sqrt{3k}}{3}) + k^2 = \frac{2k\sqrt{k}}{3\sqrt{3}} + k^2 > 0$ 恒成立, 即 $f(x)_{\text{极小}} = f(\frac{\sqrt{3k}}{3}) = (\frac{\sqrt{3k}}{3})^3 - k(\frac{\sqrt{3k}}{3}) + k^2 = k\sqrt{k}(\sqrt{k} - \frac{2}{3\sqrt{3}})$.

由 $f(x)_{\text{极小}} < 0$ 得 $\sqrt{k} - \frac{2}{3\sqrt{3}} < 0$, 即 $k < \frac{4}{27}$, 故当 $0 < k < \frac{4}{27}$ 时, $f(x)$ 有三个零点.

解法二: $p = -k, q = k^2$.

$f(x)$ 有三个零点, 由卡尔达诺公式知 $\Delta < 0$, 即 $(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3 = \frac{k^4}{4} - \frac{k^3}{27} < 0$, 化简可得

$k^3(27k - 4) < 0$, 解得 $k \in (0, \frac{4}{27})$.

变式 1 (2014 新课标全国 II 卷文 21) 已知函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax + 2$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, 2)$ 处的切线与 x 轴交点的横坐标为 -2 .

(1) 求 a 的值;

(2) 证明: 当 $k < 1$ 时, 曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = kx - 2$ 只有一个交点.

解析 ▶ (1) $f'(x) = 3x^2 - 6x + a$, $f'(0) = a$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, 2)$ 处的切线方程为 $y = ax + 2$. 由题设得 $-\frac{2}{a} = -2$, 所以 $a = 1$.

(2) **解法一**: 由(1)知 $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$.

设 $g(x) = f(x) - kx + 2 = x^3 - 3x^2 + (1-k)x + 4$.

由题设知 $1-k > 0$, 当 $x \leq 0$ 时, $g'(x) = 3x^2 - 6x + 1 - k > 0$, $g(x)$ 单调递增, $g(-1) = k -$

$1 < 0, g(0) = 4$, 所以 $g(x) = 0$ 在 $(-\infty, 0]$ 上有唯一实根.

当 $x > 0$ 时, 令 $h(x) = x^3 - 3x^2 + 4$, 则 $g(x) = h(x) + (1-k)x > h(x)$.

$h'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$, $h(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $g(x) > h(x) \geq h(2) = 0$. 所以 $g(x) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上没有实根.

综上所述, $g(x) = 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上有唯一实根, 即曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = kx - 2$ 只有一个交点.

解法二: 由题意得 $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$, 记 $g(x) = x^3 - 3x^2 + (1-k)x + 4$, 现证明当 $k < 1$ 时, $g(x) = 0$ 有唯一解.

令 $t = x - 1, g(t) = t^3 - (2+k)t + 3 - k = 0$.

由三次方程 $x^3 + px + q = 0$ 的判别式 $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ 得:

① 当 $\Delta < 0$ 时, 方程有三个不等实数根, 不符合题意;

② 当 $\Delta = 0$ 时, 即 $k = 1$, 方程 $t^3 - 3t + 2 = (t-1)^2(t+2) = 0$ 有两根, 不符合题意;

③ 当 $\Delta > 0$ 时, 得 $-4k^3 + 3k^2 - 210k + 211 > 0$, 解得 $k < 1$, 此时方程有唯一实数根.

评注

本题主要考查导数的几何意义及导数的应用, 考查了分类讨论、函数与方程、等价转化等思想方法. 把曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = kx - 2$ 只有一个交点的问题转化为研究函数 $g(x) = x^3 - 3x^2 + (1-k)x + 4$ 在 $\mathbf{R}$ 上有唯一实根问题是解决问题的关键.

变式 2 (2018 新课标全国 II 卷文 21) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - a(x^2 + x + 1)$.

(1) 若 $a = 3$, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 证明: $f(x)$ 只有一个零点.

解析 (1) 当 $a = 3$ 时, $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 - 3x - 3, f'(x) = x^2 - 6x - 3$.

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = 3 - 2\sqrt{3}$ 或 $x = 3 + 2\sqrt{3}$.

当 $x \in (-\infty, 3 - 2\sqrt{3}) \cup (3 + 2\sqrt{3}, +\infty)$ 时 $f'(x) > 0$; 当 $x \in (3 - 2\sqrt{3}, 3 + 2\sqrt{3})$ 时, $f'(x) < 0$.

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, 3 - 2\sqrt{3}), (3 + 2\sqrt{3}, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(3 - 2\sqrt{3}, 3 + 2\sqrt{3})$ 上单调递减.

(2) 由于 $x^2 + x + 1 > 0$, 所以 $f(x) = 0$ 等价于 $\frac{x^3}{x^2 + x + 1} - 3a = 0$.

设 $g(x) = \frac{x^3}{x^2 + x + 1} - 3a$, 则 $g'(x) = \frac{x^2(x^2 + 2x + 3)}{(x^2 + x + 1)^2} \geq 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调

递增. 故 $g(x)$ 至多有一个零点, 从而 $f(x)$ 至多有一个零点.

$$g(x_0) = \frac{x_0^3}{x_0^2 + x_0 + 1} - 3a > \frac{x_0^3 - 1}{x_0^2 + x_0 + 1} - 3a = x_0 - 1 - 3a = 0, \text{得 } x_0 = 3a + 1;$$

$$g(x_1) = \frac{x_1^3}{x_1^2 + x_1 + 1} - 3a < \frac{\left(x_1 + \frac{1}{2}\right)^3}{\left(x_1 + \frac{1}{2}\right)^2} - 3a = x_1 + \frac{1}{2} - 3a = 0, \text{得 } x_1 = 3a - \frac{1}{2}.$$

所以 $g(3a+1) > 0, g\left(3a - \frac{1}{2}\right) < 0$.

由零点存在定理知, $\exists \xi \in \left(3a - \frac{1}{2}, 3a + 1\right)$, 使得 $g(\xi) = 0$, 故 $f(x)$ 有一个零点.

综上所述, $f(x)$ 只有一个零点.

评注

(1) 用导数求函数单调区间的步骤如下: ① 确定函数 $f(x)$ 的定义域; ② 求导数 $f'(x)$; ③ 由 $f'(x) > 0$ (或 $f'(x) < 0$) 解出相应的 x 的取值范围. 当 $f'(x) > 0$ 时, $f(x)$ 在相应区间上是增函数; 当 $f'(x) < 0$ 时, $f(x)$ 在相应区间上是减函数.

(2) 本题第二问重在考查零点存在性问题, 解题的关键在于将问题转化为求证函数 $g(x)$ 有唯一零点. 可先证明其单调, 再结合零点存在性定理进行论证.

4.7 韦达定理与判别式



研究密钥

1. 三次方程的韦达定理

设 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 的三个根分别为 x_1, x_2, x_3 , 则 $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = ax^3 - a(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + a(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - ax_1x_2x_3$.

比较系数可得 $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a}, x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$.

2. 三次方程的判别式

任意三次方程 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 (a \neq 0)$, 都可以变形为 $x^3 + px + q = 0 (p, q \text{ 均为实数})$ 的形式, 利用三次方程求根公式(卡尔达诺公式), 可得一个实数解的形式为 $x =$

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

其中, $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ 称为三次方程的判别式. 卡尔达诺公式只是给出了三次方程的一个具有性质 $x=u+v$ 的解, 并非全部解, 因此在解方程中应用不多, 但是其判别式具有一般意义.

当 $\Delta > 0$ 时, 方程有一个实根和两个复数根;

当 $\Delta = 0$ 时, 方程有三个实数根. 其中, $p=q=0$ 时, 有一个三重根为 0; $\left(\frac{q}{2}\right)^2 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3 \neq 0$ 时, 三个根中有两个相等;

当 $\Delta < 0$ 时, 方程有三个不等实根.

关于判别式与根的个数的关系, 也可以用导数证明.

例 4.8 已知 $a^3 = 3(b^2 + c^2) - 25$, $b^3 = 3(c^2 + a^2) - 25$, $c^3 = 3(a^2 + b^2) - 25$, 求 abc 的值.

分析 由题意可设 a, b, c 为 $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ 的根, 根据三次方程的韦达定理得到 a, b, c 与 p, q, r 之间的代换关系, 代入三个已知条件可得 a, b, c 是方程 $x^3 + 3x^2 - 3(p^2 - 2q) + 25 = 0$ 的根, 比较系数可得 abc 的值.

解析 设以 a, b, c 为根的三次方程为 $x^3 - px^2 + qx - r = 0$.

由韦达定理可知 $a+b+c=p$, $ab+bc+ca=q$, $abc=r$.

又 $a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = p^2 - 2q$, 故 $b^2+c^2 = p^2 - 2q - a^2$.

所以 $a^3 = 3(b^2 + c^2) - 25 = 3(p^2 - 2q - a^2) - 25$, 即 $a^3 + 3a^2 - 3(p^2 - 2q) + 25 = 0$, 故 $x=a$ 是方程 $x^3 + 3x^2 - 3(p^2 - 2q) + 25 = 0$ 的根, 同理 b, c 也是方程 $x^3 + 3x^2 - 3(p^2 - 2q) + 25 = 0$ 的根.

所以 $x^3 - px^2 + qx - r = x^3 + 3x^2 - 3(p^2 - 2q) + 25$, 比较系数可得 $p = -3, q = 0, r = 2$, 即 $abc = 2$.

变式 1 实数 a, b, c 满足 $a+b+c=2$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$, 求证: a, b, c 必有一个数为 2.

解析 由 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab+bc+ca}{abc} = \frac{1}{2}$, 可得 $2(ab+bc+ca) = abc$.

令 $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$, 即 $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{1}{2}abcx - abc = x^2(x-2) + \frac{1}{2}abc(x-2) = (x-2)(x^2 + \frac{1}{2}abc)$,

故 $x=2$ 是 $f(x)$ 的一个零点, 即 a, b, c 必有一个数为 2.

第5讲

含指数、对数函数形式的变形技巧

遍览全国高考导数大题,含有指数函数和对数函数等形式的超越函数是命题热点,但是这类问题学生往往不知从何下手.如果求导,不仅导函数复杂,而且很多时候还不能解决问题.其实,这类问题的一般思路是利用条件,对其进行变形,构造新函数,通过对新函数的研究解决问题.对学生而言,讲能听懂,但如何对这类超越函数、方程或不等式进行合理变形,再构造新函数,将问题进行转化与简化却不是很清楚.其实这是有规律可循的,可利用结构和形式的特点进行变形与转化.经研究,含指数、对数函数形式的超越函数、方程、不等式的处理方法,有两个层次:一是若单独含有指数或对数,运用好“指数找朋友,对数单独走”的变形原理;二是若指对混合形式,从数和形的角度有四种方法:形的角度是切线放缩、数的角度有分离指对,凹凸反转和指对同构.不分离指对时,虚设隐零点.这是解这类题目的思维与灵魂所在.

本讲以高考题为主,探讨含有指数函数和对数函数类型的超越函数的五大变形技巧,并对此类问题作展现和剖析,对解题方法作研究和总结.同时,我们也衷心希望读者在阅读学习过程中,以文中内容为引,能对数学的研究有初步的了解,今后能自主探索数学的无穷奥秘.





单一含有指数或对数函数不等式的变形技巧

5.1 指数找朋友,对数单独走



研究策略

1. 在证明或处理含对数函数的不等式时,通常要将对数型的函数“独立分离”出来,这样再对新函数求导时,就不含对数了,只需一次就可以求出它的极值点,从而避免了多次求导.这种相当于让对数函数“孤军奋战”的变形过程,我们形象地称之为“对数单独走”.

例如,由 $f(x)\ln x + g(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x + \frac{g(x)}{f(x)} > 0$ (这里设 $f(x) > 0$), 则 $\left[\ln x + \frac{g(x)}{f(x)}\right]' = \frac{1}{x} + \left[\frac{g(x)}{f(x)}\right]'$ 不含超越函数,求解过程简单.

2. 在证明或处理含指数函数的不等式时,通常要将指数型的函数“结合”起来,即让指数型的函数乘以或除以一个多项式函数,这样再对新函数求导时,只需一次就可以求出它的极值点,从而避免了多次求导.这样相当于让指数函数寻找“合作伙伴”的变形过程,我们形象地称之为“指数找朋友”.

例如,由 $e^x + f(x) > 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{f(x)}{e^x} > 0$, 则 $\left[1 + \frac{f(x)}{e^x}\right]' = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}$ 是一个多项式函数,变形后可很大程度地简化运算.

例 5.1 已知函数 $f(x) = e^x - 1 - x - ax^2$, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 0$ 恒成立,则实数 a 的取值范围为_____.

分析 ▶ 思路一:函数求导,根据导函数为0得到分类讨论的节点,然后分别讨论;思路二:按照“指数找朋友”的策略对不等式变形处理,研究转化后函数的单调性与极值.

解析 ▶ **解法一(分类讨论):** 由 $f'(x) = e^x - 1 - 2ax$, 又 $e^x \geq x + 1$, 所以 $f'(x) = e^x - 1 - 2ax \geq x - 2ax = (1 - 2a)x$, 因此当 $1 - 2a \geq 0$, 即 $a \leq \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) \geq 0 (x \geq 0)$, 而 $f(0) = 0$, 于是当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 0$, 满足题意.

又 $e^x \geq x + 1$, 可得 $e^{-x} \geq 1 - x$, 所以当 $a > \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) = e^x - 1 - 2ax \leq e^x - e^x \cdot e^{-x} + 2a(e^{-x} - 1) = (1 - e^{-x})(e^x - 2a)$.

因为 $x \geq 0$, 所以 $1 - e^{-x} \geq 0$, 故当 $x \in (0, \ln 2a)$ 时, $f'(x) < 0$, 而 $f(0) = 0$, 于是当 $x \in (0, \ln 2a)$ 时, $f(x) < 0$, 不合题意.

综上所述,实数 a 的取值范围为 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$.

解法二(指数找朋友): 因为 $e^x \geq x+1$, 所以当 $a \leq 0$ 时, $e^x \geq ax^2 + x + 1$ 恒成立, 故只需讨论 $a > 0$ 的情形.

令 $F(x) = e^{-x}(1+x+ax^2) - 1$, 问题等价于 $F(x) \leq 0$, 由 $F'(x) = e^{-x}[-ax^2 + (2a-1)x] = 0$ 得 $x_1 = 0, x_2 = \frac{2a-1}{a}$.

(1) 当 $0 < a \leq \frac{1}{2}$ 时, $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, $F(x) \leq F(0) = 0$ 恒成立.

(2) 当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 因为 $F(x)$ 在 $[0, x_2]$ 上单调递增, $F(x_2) \geq F(0) = 0$, 此时 $F(x) \leq 0$ 不恒成立, 不合题意.

综上所述,实数 a 的取值范围为 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$.

变式 1 已知函数 $f(x) = e^x + ax^2 - x$, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq \frac{1}{2}x^3 + 1$, 求 a 的取值范围.

分析 遇到 $f(x)e^x + g(x)$ 的形式变形为 $e^x \cdot h(x)$, 其求导后的结果是 $[e^x \cdot h(x)]' = e^x \cdot [h(x) + h'(x)]$, 其导数方程是多项式形式, 所以它的根与指数函数无关, 有利于更快捷地解决问题.

解析 $f(x) \geq \frac{1}{2}x^3 + 1$ 等价于 $\left(\frac{1}{2}x^3 - ax^2 + x + 1\right)e^{-x} \leq 1$.

设函数 $g(x) = \left(\frac{1}{2}x^3 - ax^2 + x + 1\right)e^{-x} (x \geq 0)$, 则

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{1}{2}x^3 - ax^2 + x + 1 - \frac{3}{2}x^2 + 2ax - 1\right)e^{-x} \\ &= -\frac{1}{2}x[x^2 - (2a+3)x + 4a+2]e^{-x} \\ &= -\frac{1}{2}x(x-2a-1)(x-2)e^{-x}. \end{aligned}$$

(1) 若 $2a+1 \leq 0$, 即 $a \leq -\frac{1}{2}$, 当 $x \in (0, 2)$ 时, $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递增, 而 $g(0) = 1$, 故当 $x \in (0, 2)$ 时, $g(x) > 1$, 不合题意.

(2) 若 $0 < 2a+1 < 2$, 即 $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$, 则当 $x \in (0, 2a+1) \cup (2, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$.

当 $x \in (2a+1, 2)$ 时, $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, 2a+1), (2, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(2a+1,$

2)上单调递增. 又 $g(0)=1$, 所以 $g(x)\leq 1$ 当且仅当 $g(2)=(7-4a)e^{-2}\leq 1$, 即 $a\geq \frac{7-e^2}{4}$ 时成立, 即当 $\frac{7-e^2}{4}\leq a<\frac{1}{2}$ 时, $g(x)\leq 1$.

(3) 若 $2a+1\geq 2$, 即 $a\geq \frac{1}{2}$, 则 $g(x)\leq \left(\frac{1}{2}x^3+x+1\right)e^{-x}$.

由于 $0\in\left[\frac{7-e^2}{4}, \frac{1}{2}\right)$, 故由(2)可得 $\left(\frac{1}{2}x^3+x+1\right)e^{-x}\leq 1$, 故当 $a\geq \frac{1}{2}$ 时, $g(x)\leq 1$.

综上所述, a 的取值范围是 $\left[\frac{7-e^2}{4}, +\infty\right)$.

评注

解决形如 $f(x)e^x+g(x)$ 常见结论 $e^x\geq x+1$ (有时甚至 $e^x\geq \frac{1}{2}x^2+x+1$), 从形的角度看, 它揭示了曲线与其切线的位置关系, 从数的角度看, 它提供了一种将指数型结构转化为多项式型结构的方法, 从而顺利突破难点.

例 5.2 若不等式 $x\ln x\geq a(x-1)$ 对所有 $x\geq 1$ 都成立, 求实数 a 的取值范围.

分析

根据“对数单独走”的原则, 不等式等价于 $\ln x - \frac{a(x-1)}{x} \geq 0$, 以下再通过分析函数 $f(x) = \ln x - \frac{a(x-1)}{x}$ 的单调性与极值, 求 a 的取值范围.

解析

原问题等价于 $\ln x - \frac{a(x-1)}{x} \geq 0$ 对所有 $x\geq 1$ 都成立, 令 $f(x) = \ln x - \frac{a(x-1)}{x}$, $x\geq 1$, 则 $f'(x) = \frac{x-a}{x^2}$.

(1) 当 $a\leq 1$ 时, $f'(x) = \frac{x-a}{x^2} \geq 0$ 恒成立, 即 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 因而 $f(x) \geq f(1)=0$ 恒成立.

(2) 当 $a>1$ 时, 令 $f'(x)=0$, 则 $x=a$, $f(x)$ 在 $(1, a)$ 上单调递减, 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增, $f(x)_{\min}=f(a)=\ln a - a + 1 < 0$, 不合题意.

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 1]$.

评注

上述解法优势在于将 $\ln x$ 的系数化“1”后, 就可以有效避免求导后再出现对数函数, 避免了隐性零点的出现, 这是解决对数型函数的精华所在.

变式 1

已知 $f(x)=x\ln x$, 若 $f(x)\geq ax^2+\frac{2}{a}$ ($a\neq 0$) 在 $x\in(0, +\infty)$ 上恒成立, 求 a 的最

小值.

分析 ▶ 若令函数 $g(x) = x \ln x - ax^2 - \frac{2}{a}$, 首先注意到 $g(1) \geq 0$, 可知 $a < 0$, 即便如此, 由 $g'(x) = \ln x + 1 - 2ax$, 可见必须还要对导函数 $g'(x)$ 求导才行. 再令 $h(x) = g'(x)$, 那么 $h'(x) = \frac{1}{x} - 2a > 0$, 而 $g'(x)$ 的零点依然难求, 非常烦琐, 所以可以考虑先将不等式进行变形, 把 $\ln x$ 独立出来, 再构造函数研究.

解析 ▶ 由题意得 $f(x) = x \ln x \geq ax^2 + \frac{2}{a} \Leftrightarrow \ln x \geq ax + \frac{2}{ax}$, 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立.

令函数 $g(x) = \ln x - ax - \frac{2}{ax}$, 则须求 $g(x) \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立时 a 的取值范围.

由于 $g(1) = -a - \frac{2}{a}$, 当 $a > 0$ 时, $g(1) < 0$, 不符合题意, 故只需考虑 $a < 0$ 的情况.

因为 $g'(x) = \frac{1}{x} - a + \frac{2}{ax^2} = \frac{-a(x - \frac{2}{a})(x + \frac{1}{a})}{x^2}$, 且 $a < 0$, 故当 $x \in (0, -\frac{1}{a})$ 时, $g'(x) < 0$,

$g(x)$ 单调递减; 当 $x \in (-\frac{1}{a}, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增.

所以 $g(x)_{\min} = g(-\frac{1}{a}) = \ln(-\frac{1}{a}) + 3 \geq 0$, 解得 $-e^3 \leq a < 0$, 故 a 的最小值为 $-e^3$.



含有 $\ln x, e^x$ 混合形式的不等式的变形技巧

5.2 从数与形看变形转化



研究思路

1. 从数的观点看: 分而治之与合而歼之

含指、对数混合形式的不等式证明之所以难, 其根本原因在于指数与对数是水火不容的, 其导函数的零点一般不可求, 因此常分离 e^x 和 $\ln x$ 以便于求导, 但分离还不足以解决所有问题, 常需要与幂函数配对, 将 e^x 与含有幂函数的代数式配对为 $f(x)$, 将 $\ln x$ 与含有幂函数的代数式配对为 $g(x)$, 将 e^x 与 $\ln x$ 分离在两边, 也使两部分 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的函数极值容易求解, 从而证明更强的结论 $f(x)_{\min} \geq g(x)_{\max}$, 则有 $F(x) = f(x) - g(x) \geq 0$. 也可以不分离 e^x 和 $\ln x$, 令整体为函数 $f(x)$, 其导函数的零点一般不可求, 我们称此种情况为“零点不可求——隐零点”问题, 隐零点虽然不能求出, 但是有价值. 令导函数值为 0, 利用这一等式, 将隐零点代回到原函数中后, 往往可以进行整体代换, 将不便操作的指数或对数函数, 转化为我们熟悉并容易把握的幂函数.

2. 从形的观点看:切线放缩

指对混合型的不等式恒成立问题最基本的方法当属参变量分离,把问题转化为求指对混合型函数的最值问题,多数情况下会遇到隐零点问题,求解过程麻烦,若能抓住函数的特点恰当变形,用相应的切线不等式放缩求出函数的最值,就能很巧妙地回避隐零点代换的麻烦.

例 5.3 证明: $e^x - \ln x > 2$.

分析 ▶ 思路一(分而治之):含指数、对数函数形式的不等式证明常分离指、对函数,分离 e^x 和 $\ln x$ 后 $e^x > \ln x + 2$,两边分别再与幂函数配对,使其函数极值点可求,证明左边函数的最小值大于等于右边函数的最大值即可.

思路二(合而歼之):不分离 e^x 和 $\ln x$,由于对 $e^x - \ln x$ 求导后 $e^x - \frac{1}{x} = 0$ 是超越方程,求不出具体的解,通过虚设零点可以将 e^x 和 $\ln x$ 转化成 $\frac{1}{x_0}$ 和 $-x_0$,再使用基本不等式即可证明.

另外,本题也可以使用切线不等式放缩来证明.

解析 ▶ 从数与形的数学观来分析和求解.

解法一(数的观点:分而治之):分离 e^x 和 $\ln x$,即 $e^x > \ln x + 2, e^x - x > \ln x - x + 2$.

令 $f_1(x) = e^x - x, f_2(x) = \ln x - x + 2, f_1'(x) = e^x - 1 > 0$,函数 $f_1(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,则 $f_1(x) > f_1(0) = 1$.

$f_2'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$,函数 $f_2(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增,在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, $f_2(x)_{\max} = f_2(1) = 1$,因此 $f_1(x) > f_2(x)$,即 $e^x > \ln x + 2$.

也可在不等式 $e^x > \ln x + 2$ 两边同除以 x ,即 $\frac{e^x}{x} > \frac{\ln x + 2}{x}$.

令 $g_1(x) = \frac{e^x}{x}, g_2(x) = \frac{\ln x + 2}{x}$,则 $g_1'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$, $g_1(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递

减,在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,于是 $g_1(x)_{\min} = g_1(1) = e$. $g_2'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (\ln x + 2)}{x^2} = \frac{-\ln x - 1}{x^2}$,

令 $g_2'(x) = 0$ 得 $x = \frac{1}{e}$,所以函数 $g_2(x)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上单调递增,在 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 上单调递减,则

$g_2(x)_{\max} = g_2(\frac{1}{e}) = e$. 故 $g_1(x) > g_2(x)$,即 $\frac{e^x}{x} > \frac{\ln x + 2}{x}$,因此 $e^x > \ln x + 2$.

解法二(数的观点:合而歼之.虚设零点,设而不求,整体代换):

令 $g(x) = e^x - \ln x$,则 $g'(x) = e^x - \frac{1}{x}$,显然 $g'(x)$ 单调递增,且易知 $g'(x)$ 有且仅有一个零

点 x_0 . 则 $e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$,两边取对数,得 $x_0 = -\ln x_0, x_0 \neq 1$.

由单调性可知 $g'(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上小于 0, 在 $(x_0, +\infty)$ 上大于 0, 所以 $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增, $g(x)_{\min} = g(x_0) = e^{x_0} - \ln x_0 = \frac{1}{x_0} + x_0$.

因为 $x_0 \neq 1$ 且 $x_0 > 0$, 所以 $\frac{1}{x_0} + x_0 > 2$, 即证 $e^x - \ln x > 2$.

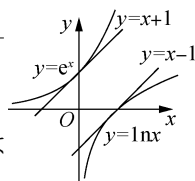
解法三(形的观点:切线放缩): 由经典不等式 $e^x \geq x+1, \ln x \leq x-1$ 可得 $e^x - \ln x \geq x+1 - (x-1) = 2$, 且等号不同时取得, 所以 $e^x - \ln x > 2$.

评注

解法三的几何直观是切线分割. 如图所示.

在证明本题时, 因为 $e^x > x+1, \ln x \leq x-1, e^x - \ln x \geq (x+1) - (x-1) = 2$ (等号不能取得), 则 $e^x - \ln x > 2$.

无论是从代数角度还是从几何角度, 本质是反映数学问题的不同方面.



5.3 凹凸反转



研究密钥

含指、对数混合形式的不等式, 其对应函数的导数零点不可求时, 我们可以将不等式拆分, 转化为证明 $f(x) \geq g(x)$, 然后通过证明更强的结论 $f(x)_{\min} \geq g(x)_{\max}$ 来证明原不等式.

这是分而治之的解题策略, 从结论的形态上来说叫做凹凸反转, 拆分的两个函数的凹凸性刚好相反. 在给定区间上, 凹函数能找到最小值, 凸函数能找到最大值, 且这个最小值大于最大值.

注: 在不同的教材中, 凹凸函数的定义不统一. 在本书中, 凹函数指形态下凹的函数, 凸函数指形态上凸的函数.

实现凹凸反转的关键就是如何分离, 分离的原则一般是考虑指对分离, 即指数函数和多项式函数的组合与对数函数和多项式函数的组合分开. 另外我们最好熟练掌握一些常见的指对和多项式组合函数的图像, 便于我们分拆函数.

例 5.4 已知函数 $f(x) = \frac{x+1}{e^x}(1-x-x\ln x)$, 证明: $f(x) < 1 + e^{-2}$.

分析

函数中既有 e^x , 又有 $\ln x$, 而且还是分式的形式, 给求导带来极大的困难, 为此考虑分离函数, 将 e^x 与 $\ln x$ 分离在不等式两边, 即 $1-x-x\ln x < \frac{e^x}{x+1}(1+e^{-2})$, 只需证明 $(1-x-$

$$x \ln x)_{\max} < \left[\frac{e^x}{x+1} (1+e^{-2}) \right]_{\min}.$$

解析 ▶ 由于 $\frac{x+1}{e^x} (1-x-x \ln x) < 1+e^{-2} \Leftrightarrow 1-x-x \ln x < \frac{e^x}{x+1} (1+e^{-2})$, 因此猜想证

$$\text{明 } (1-x-x \ln x)_{\max} < \left[\frac{e^x}{x+1} (1+e^{-2}) \right]_{\min}, x > 0.$$

令 $g(x) = 1-x-x \ln x$, 则 $g'(x) = -2-\ln x$, 可知 $g'(x)$ 在 $(0, e^{-2})$ 上大于 0, 在 $(e^{-2}, +\infty)$ 上小于 0, 所以 $g(x)$ 在 $(0, e^{-2})$ 上单调递增, 在 $(e^{-2}, +\infty)$ 上单调递减, 即 $g(x)_{\max} = g(e^{-2}) = 1+e^{-2}$.

令 $t(x) = \frac{e^x}{x+1} (1+e^{-2})$, 则 $t'(x) = \frac{e^x x}{(x+1)^2} (1+e^{-2}) > 0$, 所以 $t(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $t(x)_{\min} = t(0) = 1+e^{-2}$, 且因为 $x > 0$, 所以 $t(x) > 1+e^{-2}$.

综上所述, $1-x-x \ln x \leq 1+e^{-2} < \frac{e^x}{x+1} (1+e^{-2})$, 所以 $f(x) < 1+e^{-2}$.

评注

本题函数形式复杂, 既有指数函数, 又有对数函数, 此时我们可以采用分离函数的方法, 将原本不便求导、隐零点无法利用的函数, 分拆为两个易求导, 且可以求出极值的形式, 从而破解这道高考压轴题.

变式 1 已知函数 $f(x) = \frac{\frac{1}{2}x^2 + x + 1}{e^x} (1-x-x \ln x)$, 证明: $f(x) < 1+e^{-2}$.

解析 ▶ (1) 当 $1-x-x \ln x \leq 0$ 时, 有 $f(x) < 1+e^{-2}$.

(2) 当 $1-x-x \ln x > 0$ 时, 注意到当 $x > 0$ 时, $e^x > 1+x+\frac{x^2}{2}$ (由麦克劳林公式易得), 所以 $f(x) < 1-x-x \ln x$, 故只需证 $1-x-x \ln x \leq 1+e^{-2}$, 由上面例题知 $(1-x-x \ln x)_{\max} = 1+e^{-2}$, 所以 $f(x) < 1+e^{-2}$.

综上所述, $f(x) < 1+e^{-2}$.

例 5.5 已知函数 $f(x) = e^x \ln x + \frac{2e^{x-1}}{x}$. 证明: $f(x) > 1$.

分析 ▶ 函数中既有 e^x , 又有 $\ln x$, 而且有分式的形式, 求导以后结构非常复杂, 为此考虑将 e^x 与 $\ln x$ 分离, 将原不等式进行变形.

$e^x \ln x + \frac{2e^{x-1}}{x} > 1 \Leftrightarrow \ln x > e^{-x} - \frac{2}{ex}$, 两边的函数都没有极值点, 继续进行变形, 两边同时乘

以 x , 即 $x \ln x > xe^{-x} - \frac{2}{e}$, 只需证明 $(x \ln x)_{\min} > \left(xe^{-x} - \frac{2}{e} \right)_{\max}$.

解析 ▶ **解法一(凹凸反转):** $e^x \ln x + \frac{2e^{x-1}}{x} > 1 \Leftrightarrow \ln x > e^{-x} - \frac{2}{ex} \Leftrightarrow x \ln x > xe^{-x} - \frac{2}{e}$.

猜想 $(x \ln x)_{\min} > \left(xe^{-x} - \frac{2}{e}\right)_{\max}, x > 0$.

证明:令 $g(x) = x \ln x$, 则 $g'(x) = 1 + \ln x$, 可知 $g'(x)$ 在 $(0, e^{-1})$ 上小于 0, 在 $(e^{-1}, +\infty)$ 上大于 0,

所以 $g(x)$ 在 $(0, e^{-1})$ 上单调递减, 在 $(e^{-1}, +\infty)$ 上单调递增, 则有 $g(x)_{\min} = g(e^{-1}) = -e^{-1}$.

令 $t(x) = xe^{-x} - \frac{2}{e}$, 则 $t'(x) = e^{-x}(1-x)$, 可知 $t'(x)$ 在 $(0, 1)$ 上大于 0, 在 $(1, +\infty)$ 上小于 0, 所以 $t(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 则有 $t(x)_{\max} = t(1) = -e^{-1}$.

所以 $g(x) \geq g(x)_{\min} = -e^{-1} = t(x)_{\max} \geq t(x)$, 等号不同时取得, $x \ln x > xe^{-x} - \frac{2}{e}$, 即证 $f(x) > 1$.

解法二(不等式放缩): 由 $\ln x \leq x-1$ 得 $\ln \frac{x}{e} \leq \frac{x}{e} - 1$, 即 $\ln x - 1 \leq \frac{x}{e} - 1$, 亦即 $\ln x \leq \frac{x}{e}$.

因此 $\ln \frac{1}{x} \leq \frac{1}{ex}$, $-\ln x \leq \frac{1}{ex}$, 即 $\ln x \geq -\frac{1}{ex}$, 所以 $e^x \ln x > -\frac{e^{x-1}}{x}$, 则 $e^x \ln x + \frac{2e^{x-1}}{x} > \frac{e^{x-1}}{x} > 1$.

评注

遇到难题, 不要自乱阵脚, 往往越是复杂的题目, 其解题思路越是清楚. 本题函数形式复杂多样, 直接求导研究极值走不通. 为此, 我们自然想到分离函数法.

变式 1 已知函数 $f(x) = ex^2 - x \ln x$, 求证: 当 $x > 0$ 时, $f(x) < xe^x + \frac{1}{e}$.

解析 ▶ 因为 $x > 0$, 则需证 $ex - \ln x < e^x + \frac{1}{ex}$, 即证 $\ln x + \frac{1}{ex} > -e^x + ex$.

设 $h(x) = \ln x + \frac{1}{ex}$, 则 $h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{ex^2} = \frac{ex-1}{ex^2} (x > 0)$.

由 $h'(x) < 0$ 得 $0 < x < \frac{1}{e}$, 由 $h'(x) > 0$ 得 $x > \frac{1}{e}$, 则 $h(x)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $h(x)_{\min} = h(\frac{1}{e}) = 0$, 从而 $h(x) \geq 0$, 即 $\ln x + \frac{1}{ex} \geq 0$.

设 $\varphi(x) = -e^x + ex$, 则 $\varphi'(x) = -e^x + e$.

由 $\varphi'(x) > 0$ 得 $0 < x < 1$, 由 $\varphi'(x) < 0$ 得 $x > 1$, 则 $\varphi(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $\varphi(x)_{\max} = \varphi(1) = 0$, 从而 $\varphi(x) \leq 0$, 即 $ex - e^x \leq 0$.

因为 $h(x)$ 和 $\varphi(x)$ 不同时为零, 所以 $\ln x + \frac{1}{ex} > ex - e^x$, 故原不等式成立.

例 5.6 (1) 已知函数 $f(x) = 2e^{x-2} - x \ln x$, 证明: $f(x) > 0$.

(2) 已知函数 $f(x) = 4e^{x-3} - x \ln x$, 证明: $f(x) > 0$.

分析 ▶ 拆分为两个函数使其凹凸性相反, 且凹函数能找到最小值, 凸函数能找到最大值. 若是无法实现凹凸反转, 还得变形, 以产生凹凸性相反.

解析 ▶ (1) 要证明 $2e^{x-2} > x \ln x$, 在不等式两端同除以 x^2 , $\frac{2e^{x-2}}{x^2} > \frac{\ln x}{x}$.

令 $h(x) = \frac{2e^{x-2}}{x^2}$, 则 $h'(x) = 2 \cdot \frac{e^{x-2} \cdot x^2 - e^{x-2} \cdot 2x}{x^4} = \frac{2e^{x-2}(x-2)}{x^3}$, $h(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递

减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增, $h(x)_{\min} = h(2) = \frac{1}{2}$.

令 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则 $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0$, 得 $x = e$, $g(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递

减, $g(x)_{\max} = g(e) = \frac{1}{e}$, 显然 $h(x)_{\min} > g(x)_{\max}$, 因此 $\frac{2e^{x-2}}{x^2} > \frac{\ln x}{x}$, 即 $2e^{x-2} - x \ln x > 0$.

若本题在不等式 $2e^{x-2} > x \ln x$ 的两端同除以 x^3 是否可以证明呢? 试一试.

(2) $f(x) > 0 \Leftrightarrow 4e^{x-3} - x \ln x > 0 \Leftrightarrow 4e^{x-3} > x \ln x \Leftrightarrow \frac{4e^{x-3}}{x^2} > \frac{\ln x}{x}$.

令 $g(x) = \frac{4e^{x-3}}{x^2}$, 则 $g'(x) = \frac{4e^{x-3}(x-2)}{x^3}$, $x > 0$.

可知 $g'(x)$ 在 $(0, 2)$ 上小于 0, 在 $(2, +\infty)$ 上大于 0, 所以 $g(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增, 所以有 $g(x)_{\min} = g(2) = e^{-1}$.

令 $t(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则 $t'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. 可知 $t'(x)$ 在 $(0, e)$ 上大于 0, 在 $(e, +\infty)$ 上小于 0.

所以 $t(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减, $t(x)_{\max} = t(e) = e^{-1}$.

综上所述, 有 $g(x) \geq e^{-1} \geq t(x)$, 又等号不同时取得, 则 $g(x) > t(x)$, 所以 $f(x) > 0$.



解后反思

拆分函数实现凹凸反转的再思

本题中分离函数后, 左右两侧的 $4e^{x-3}$ 和 $x \ln x$ 不便比较, 为此左右两侧同时除以 x^2 , 这是一个常用的技巧, 改变了函数的凹凸性, 使之出现极值. 但我们不仅要知其然, 更要知其所以然, 为什么除以 x^2 , 可不可以除以 x^3, x^4 ? 为什么是同时除以, 可不可以作加法、减法、乘法? 能不能不变形, 直接用隐零点的方法做? 这些错路或弯路, 是参考答案中所没有的, 但只有亲自走过这些错路弯路, 才能研究明白细微之处, 才能理解分离函数的本质, 比较得出分离函数法和隐零点法的适用情形, 才能在解题时心中有数, 胸有成竹.

为此,笔者提出如下几个问题:

问题 1:为什么要分离函数?最正常最本质的解法,难道不是研究 $f'(x)$,得出极值点,求出 $f(x)_{\min}$,证明 $f(x)_{\min} > 0$ 吗?

问题 2:分离函数后,为什么想到左右同时除以 x^2 ,为什么不是左右同时加上一个数,或者减去一个数?为什么是除以 x^2 ,而不是除以 x^3 ,不是除以 x^4 ?

问题 3:我们将此题进行一般化处理,将 $4e^{-3}$ 视为 $a(a > 0)$,就有 $ae^x - x \ln x > 0$. 那么 a 的范围能不能再强化,有没有比 $4e^{-3}$ 更小的 a ,也满足 $ae^x - x \ln x > 0$ 恒成立?

问题 4:问题的最终形式,如果 $f(x) = me^{ax} - x^b \ln x (m > 0)$,这里 a, b 是给定的正实数,且 $f(x) > 0$,我们能不能研究一下 m 的取值范围?

下面依次来回答这些问题.

对于问题 1,我们不妨先按照最正常,最本质的解法,来做一遍.

$$f(x) = 4e^{x-3} - x \ln x, \text{ 则 } f'(x) = 4e^{x-3} - 1 - \ln x.$$

这里出现了两个大障碍:

(1) $f'(x)$ 有两个零点(读者自证),意味着 $f(x)$ 有两个极值点;

(2) $f'(x)$ 的零点为隐零点,设为 x_0 ,有 $4e^{x_0-3} - 1 - \ln x_0 = 0$,则 $f(x_0) = 4e^{x_0-3} - x_0 \ln x_0 = 1 + \ln x_0 - x_0 \ln x_0$,下面无法处理.

(其实这也启示了我们,隐零点的设而不求法,只能在其满足的等式较为简单时有用,一旦等式稍为复杂,例如这里, $4e^{x_0-3} - 1 - \ln x_0 = 0$,就很难利用了.)

所以问题 1 解决了,我们暂时无法证明 $f(x)_{\min} > 0$.

对于问题 2,我们先看分离后的形式, $4e^{x-3} > x \ln x$,首先明确一点,我们之所以分离函数,是希望证明一个更强的结论: $(4e^{x-3})_{\min} > (x \ln x)_{\max}$.

但现在, $(x \ln x)_{\max}$ 是不存在的,所以需要变形,那么为什么想到除以 x^2 ,而不是除以别的数,也不是加上别的数,减去别的数?

事实上,这是由于高等数学中阶的概念, $x \ln x$ 的阶大于 x 但小于 x^{1+r} ,这里 r 为任意一个给定的正实数,简而言之,就是当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{x \ln x}{x} \rightarrow +\infty$, $\frac{x \ln x}{x^{1+r}} \rightarrow 0$.

所以,这就解释了为什么想到除以 x^2 ,因为这样 $\frac{x \ln x}{x^2}$ 就不再像 $x \ln x$ 可以任意大,而会出现极大值,同时说明,除以一切 x^{1+r} 是可以做的,但得出的结果,其精度不一样.

在处理形如 $x^a e^x > \ln x + k$ 的不等式,两边往往可以同时除以 x^b ,其原理如下:

设常数 $k \in \mathbf{R}, n > 0$,那么函数 $f(x) = \frac{\ln x + k}{x^n}$ 有唯一的极大值点(同时也是最大值点).

$$\text{由 } f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^n - (\ln x + k) \cdot nx^{n-1}}{(x^n)^2} = \frac{1 - n(\ln x + k)}{x^{n+1}}, \text{ 令 } f'(x) = 0 \text{ 得 } x = e^{\frac{1}{n}-k}, \text{ 显然这}$$

个极大值点随着 n 的增大而减小.

设常数 $m > 0$, 那么函数 $g(x) = \frac{e^x}{x^m} (x > 0)$ 有唯一的极小值点 (同时也是最小值点). 由 $g'(x) = \frac{e^x \cdot x^m - e^x \cdot mx^{m-1}}{(x^m)^2} = \frac{e^x(x-m)}{x^{m+1}}$, 令 $g'(x) = 0$, 得 $x = m$. 显然这个极小值点随着 m 的增大而增大, 选取的 m 应该让两个极值点尽量靠近.

现在再看问题 3, 我们便可以理解, 要使 a 更小, 关键就在于 $ae^x > x \ln x$ 的两端除以 x^{1+r} 的幂次的选择, 对此, 我们可以进行研究 $ae^x > x \ln x \Leftrightarrow \frac{ae^x}{x^{1+r}} > \frac{x \ln x}{x^{1+r}} \Leftrightarrow \frac{ae^x}{x^{1+r}} > \frac{\ln x}{x^r}$, r 为正实数,

$\left(\frac{ae^x}{x^{1+r}}\right)' = \frac{ae^x x^{1+r} - (1+r)x^r a e^x}{x^{2+2r}} = \frac{ae^x x^r (x-r-1)}{x^{2+2r}}$, 易知当 $x = r+1$ 时, $\frac{ae^x}{x^{1+r}}$ 取得最小值为 $\frac{ae^{r+1}}{(1+r)^{1+r}}$.

由 $\left(\frac{\ln x}{x^r}\right)' = \frac{x^{r-1} - rx^{r-1} \ln x}{x^{2r}} = \frac{x^{r-1}(1-r \ln x)}{x^{2r}}$, 易知 $x = e^{\frac{1}{r}}$ 时, $\frac{\ln x}{x^r}$ 取得最大值 $\frac{1}{re}$. 所以只需 $\frac{ae^{r+1}}{(1+r)^{1+r}} > \frac{1}{re} \Leftrightarrow a > \frac{(1+r)^{1+r}}{re^{r+2}}$.

所以, 任意 $r > 0$, 只要 $a > \frac{(1+r)^{1+r}}{re^{r+2}}$, 就有 $ae^x > x \ln x$. 特别地, 取 $r=1$, 只要 $a > 4e^{-3}$, 就有 $ae^x > x \ln x$, 且等号显然取不到, 所以 $a \geq 4e^{-3}$ 即可, 这就是我们的结论.

研究 $\frac{(1+r)^{1+r}}{re^{r+2}}$, 换元, 令 $x = r+1$, 则 $x > 1$.

$$\text{令 } g(x) = \frac{x^x}{(x-1)e^{x+1}}, g'(x) = \frac{x^x(1+\ln x)(x-1)e^{x+1} - x^x x e^{x+1}}{(x-1)^2 e^{2x+2}} = e^{x+1} x^x \frac{(1+\ln x)(x-1) - x}{(x-1)^2 e^{2x+2}}.$$

(注: x^x 的导数为 $x^x(1+\ln x)$, 方法为令 $t(x) = x^x$, 左右取对数, $\ln t(x) = x \ln x$, 两边求导, 由复合函数求导法则, 得 $t'(x) \frac{1}{t(x)} = 1 + \ln x$, 所以 $t'(x) = x^x(1+\ln x)$.)

易知 $(1+\ln x)(x-1) - x$ 单调递增, 有唯一零点 $x_0 \approx 2.3$ 且 $g(x)_{\min} = g(x_0)$.

综上, 用分离函数的方法, 能得出 a 的最好下界, 为 $g(x)_{\min} = g(x_0) \approx g(2.3)$.

由于已经有了问题 3 的经验, 问题 4 也就不难了, 简要分析如下:

$$me^{ax} - x^b \ln x > 0 \Leftrightarrow \frac{me^{ax}}{x^{b+r}} > \frac{x^b \ln x}{x^{b+r}} \Leftrightarrow \frac{me^{ax}}{x^{b+r}} > \frac{\ln x}{x^r}, r \text{ 为正实数. 由上题结论, 可知 } x = e^{\frac{1}{r}} \text{ 时,}$$

$$\frac{\ln x}{x^r} \text{ 取得最大值 } \frac{1}{re}. \text{ 又 } \left(\frac{me^{ax}}{x^{b+r}}\right)' = \frac{ame^{ax} x^{b+r} - (b+r)x^{b+r-1} me^{ax}}{x^{2b+2r}} = \frac{me^{ax} x^{b+r-1} (ax-b-r)}{x^{2b+2r}},$$

可知当 $x = \frac{b+r}{a}$ 时, $\frac{me^{ax}}{x^{b+r}}$ 取得最小值 $\frac{me^{b+r}}{\left(\frac{b+r}{a}\right)^{b+r}} = \frac{m(ae)^{b+r}}{(b+r)^{b+r}}$.

所以只需 $\frac{m(ae)^{b+r}}{(b+r)^{b+r}} \geq \frac{1}{re} \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{re} \left(\frac{b+r}{ae}\right)^{b+r}$.

于题得出结论: 给定正实数 a, b , 对任意的 $r > 0$, 只要 $m \geq \frac{1}{re} \left(\frac{b+r}{ae}\right)^{b+r}$ 就有 $me^{ax} > x^b \ln x$.

希望同学们从上面的内容中能有所启发, 了解数学研究的起点与过程, 并在今后的数学学习中, 可以开展自己的研究, 去发掘数学的无穷奥秘.

5.4 设而不求隐零点



研究思路

含指数、对数混合形式的不等式证明之所以难, 其根本原因在于指数与对数是“水火不容”的, 其导函数的零点一般不可求, 我们称此种情况为“零点不可求——隐零点”问题, 隐零点虽然不能求出, 但是有价值, 令导函数值为 0, 利用这一等式, 将隐零点代回到原函数中后, 我们往往可以进行整体代换, 将不便操作的指数或对数函数, 转化为我们熟悉并容易把握的幂函数. 用隐零点转化上要注意三点:

1. 隐零点对应的方程

这个方程的目的是作为中间桥梁去转化求最值, 一般有三种形式: ① 幂函数、指数混合; ② 幂函数、对数混合; ③ 指数、对数混合. 前两者直接利用隐零点的方程将指、对幂上转, 但对于第 3 种形式, 不能直接将指数、对数向幂函数的方向上转化, 如何实现指数、对数形式向幂函数形式转化, 第 3 种形式需要进行同构降阶, 如隐零点对应方程为

$x_0^2 e^{x_0} + \ln x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 e^{x_0} + \frac{1}{x_0} \ln x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 e^{x_0} = \frac{1}{x_0} \ln \frac{1}{x_0} = \ln \frac{1}{x_0} e^{\ln \frac{1}{x_0}}$, 构造函数 $f(x) = x e^x$, 则 $f(x_0) = f\left(\ln \frac{1}{x_0}\right)$, 再通过单调性降阶为 $x_0 = \ln \frac{1}{x_0} = -\ln x_0$, 此时可简洁地将 $\ln x_0$ 和 e^{x_0} 向幂函数形式转化, 如 $\ln x_0 = -x_0, e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$.

还有一类情况也需要注意操作的方法: 若隐零点对应的方程是含参数的情形, 要运用处理代数问题的一般方法: 消参. 消参是将二元(含隐零点 x_0 和参数的形式)问题转化为只含有隐零点的形式.

2. 隐零点所在的区间

隐零点虽不能直接解出, 但对隐零点区间的估计是证明不等式的关键, 常需要根据所证

明的目标对隐零点的区间作合理的限定.

3. 转化路径:指、对幂上转

指、对幂上转,即将指数和对数形式向幂函数转化,转化的本质在于将指、对复杂形式转化为熟悉且易于求导的幂函数形式.

例 5.7 已知函数 $f(x) = xe^x - x - \ln x - 1$, 证明: $f(x) \geq 0$.

分析 ▶ 不分离 e^x 和 $\ln x$, 由于对 $f(x) = xe^x - x - \ln x - 1$ 求导后 $e^x - \frac{1}{x} = 0$ 是超越方程,

求不出具体的解, 根据单调性判断 $e^x - \frac{1}{x} = 0$ 有唯一零点, 通过虚设零点, 得到隐零点对应的方程来实现简化函数的目的, 得到要证明的结论.

解析 ▶ $f'(x) = e^x + xe^x - 1 - \frac{1}{x} = (x+1)\left(e^x - \frac{1}{x}\right)$, 注意到函数定义域为 $(0, +\infty)$.

所以 $x+1 > 0$, 令 $g(x) = e^x - \frac{1}{x}$, 显然 $g(x)$ 单调递增.

而 $g\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} - 2 < 0$, $g(1) = e - 1 > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 上有一个零点 x_0 , 结合单调性,

可知 $g(x)$ 仅有这一个零点, 则 $g(x_0) = 0$, 即 $e^{x_0} - \frac{1}{x_0} = 0 \Leftrightarrow x_0 = -\ln x_0$, 且可知 $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上小于 0, 在 $(x_0, +\infty)$ 上大于 0, 所以 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增.

又 $f(x)_{\min} = f(x_0) = x_0 e^{x_0} - x_0 - \ln x_0 - 1 = 1 - x_0 + x_0 - 1 = 0$, 故 $f(x) \geq 0$.

评注 ▶

本题中零点满足 $e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$, 两边取对数, 即 $x_0 = -\ln x_0$, 尽管我们不能解出 x_0 的值, 但我们可以虚设隐零点 x_0 , 利用其满足的上述两个等式, 遵循指数、对数函数向幂函数转化的原则, 就可以巧妙化简原函数, 得到要证的结论.

变式 1 (2017 新课标全国 II 卷理 21) 已知函数 $f(x) = ax^2 - ax - x \ln x$, 且 $f(x) \geq 0$.

(1) 求 a 的值;

(2) 证明: $f(x)$ 存在唯一的极大值点 x_0 , 且 $e^{-2} < f(x_0) < 2^{-2}$.

解析 ▶ (1) 解法一(分类讨论): 因为 $f(x) = x(ax - a - \ln x) \geq 0, x > 0$, 所以 $ax - a - \ln x \geq 0$. 令 $g(x) = ax - a - \ln x$, 则 $g(1) = 0, g'(x) = a - \frac{1}{x} = \frac{ax - 1}{x}$.

当 $a \leq 0$ 时, $g'(x) < 0, g(x)$ 单调递减, 但 $g(1) = 0$, 当 $x > 1$ 时, $g(x) < 0$, 不满足题意.

当 $a > 0$ 时, 令 $g'(x) = 0$, 得 $x = \frac{1}{a}$. 当 $0 < x < \frac{1}{a}$ 时, $g'(x) < 0$, 此时 $g(x)$ 单调递减; 当 $x > \frac{1}{a}$

时, $g'(x) > 0$, 此时 $g(x)$ 单调递增.

若 $0 < a < 1$, 则 $g(x)$ 在 $(1, \frac{1}{a})$ 上单调递减, $g(\frac{1}{a}) < g(1) = 0$, 不满足题意;

若 $a > 1$, 则 $g(x)$ 在 $(\frac{1}{a}, 1)$ 上单调递增, $g(\frac{1}{a}) < g(1) = 0$, 不满足题意;

若 $a = 1$, 则 $g(x)_{\min} = g(\frac{1}{a}) = g(1) = 0$, 则 $g(x) \geq 0$.

综上所述, $a = 1$.

解法二(极值点定义): 由 $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(1)$, 则 $f'(1) = 0$, 又 $f'(x) = 2ax - a - 1 - \ln x$, $f'(1) = a - 1 = 0$, 得 $a = 1$.

再证: 当 $a = 1$ 时, $f(x) = x^2 - x - x \ln x \geq 0$, 即 $x - 1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq x - 1$, 易证. 所以 $a = 1$.

(2) $f(x) = x^2 - x - x \ln x$, $f'(x) = 2x - 2 - \ln x$, $x > 0$.

令 $h(x) = 2x - 2 - \ln x$, 则 $h'(x) = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x - 1}{x}$, $x > 0$. 令 $h'(x) = 0$, 得 $x = \frac{1}{2}$.

当 $0 < x < \frac{1}{2}$ 时, $h'(x) < 0$, 此时 $h(x)$ 单调递减; 当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $h'(x) > 0$, 此时 $h(x)$ 单调递增,

所以 $h(x)_{\min} = h(\frac{1}{2}) = 1 - 2 + \ln 2 < 0$.

因为 $h(e^{-2}) = 2e^{-2} > 0$, $h(2) = 2 - \ln 2 > 0$, 且 $e^{-2} \in (0, \frac{1}{2})$, $2 \in (\frac{1}{2}, +\infty)$, 所以在 $(0, \frac{1}{2})$ 和 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上, $h(x)$ 即 $f'(x)$ 各有一个零点.

设 $f'(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 和 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上的零点分别为 x_0, x_2 , 因为 $f'(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调递减, 所

以当 $0 < x < x_0$ 时, $f'(x) > 0$, 此时 $f(x)$ 单调递增; 当 $x_0 < x < \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) < 0$, 此时 $f(x)$ 单调递减, 因此 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点.

因为 $f'(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增, 所以当 $\frac{1}{2} < x < x_2$ 时, $f'(x) < 0$, 此时 $f(x)$ 单调递减,

当 $x > x_2$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 因此 x_2 是 $f(x)$ 的极小值点.

所以 $f(x)$ 有唯一的极大值点 x_0 .

由前面的证明可知, $x_0 \in (e^{-2}, \frac{1}{2})$, 则 $f(x_0) > f(e^{-2}) = e^{-4} + e^{-2} > e^{-2}$.

因为 $f'(x_0) = 2x_0 - 2 - \ln x_0 = 0$, 所以 $\ln x_0 = 2x_0 - 2$, 又 $f(x_0) = x_0^2 - x_0 - x_0(2x_0 - 2) = x_0 - x_0^2$, $0 < x_0 < \frac{1}{2}$, 所以 $f(x_0) < \frac{1}{4}$.

因此 $e^{-2} < f(x_0) < \frac{1}{4}$. 即 $e^{-2} < f(x_0) < 2^{-2}$.

变式2 已知函数 $f(x) = xe^x - ae^{2x}$ ($a \in \mathbf{R}$) 恰有两个极值点 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$).

(1) 求实数 a 的取值范围;

(2) 求证: $f(x_2) > -\frac{1}{2}$.

解析 ▶ (1) $f'(x) = e^x(x+1-2ae^x)$, 要使得 $f(x)$ 恰有两个极值点, 则方程 $x+1-2ae^x=0$ 有 2 个不相等的实根, 令 $g(x) = x+1-2ae^x$, $g'(x) = 1-2ae^x$.

(i) 当 $a \leq 0$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 不合题意.

(ii) 当 $a > 0$ 时, 令 $g'(x) = 0$, 解得 $x = \ln \frac{1}{2a}$, 且当 $x < \ln \frac{1}{2a}$ 时, $g(x)$ 单调递增; 当 $x > \ln \frac{1}{2a}$ 时, $g(x)$ 单调递减.

若 $g(x)$ 有 2 个不同实根, 则 $g\left(\ln \frac{1}{2a}\right) > 0 \Leftrightarrow \ln \frac{1}{2a} + 1 - 1 > 0$, 即 $0 < a < \frac{1}{2}$.

且当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, $\ln \frac{1}{2a} > 0$, $g(-1) = -2ae^{-1} < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(-1, -\ln 2a)$ 上有一个零点.

当 $x > -\ln(2a)$ 时, $e^x = (e^{\frac{x}{2}})^2 > \left(\frac{x}{2} + 1\right)^2 > \frac{(x+1)^2}{4}$, 则 $g(x) = x+1-2ae^x < (x+1) - \frac{a(x+1)^2}{2} = (x+1) \left[1 - \frac{a(x+1)}{2}\right]$.

令 $a(\xi+1) = 2$, 得 $\xi = \frac{2}{a} - 1$. 以下证明 $\frac{2}{a} - 1$ 在 $(-\ln 2a, +\infty)$ 上, 即证 $\frac{2}{a} - 1 + \ln 2a > 0$. 令 $h(a) = \frac{2}{a} - 1 + \ln(2a)$, $0 < a < \frac{1}{2}$, $h'(a) = -\frac{2}{a^2} + \frac{1}{a} = \frac{a-2}{a^2} < 0$, $h(a)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调递减, 因此 $h(a) > h\left(\frac{1}{2}\right) > 0$, 则 $\frac{2}{a} - 1 > \ln \frac{1}{2a}$. 所以 $g(x)$ 在 $(-\ln 2a, +\infty)$ 上有一个零点.

综上所述, 若 $f(x)$ 有两个极值点, 则 a 的取值范围是 $(0, \frac{1}{2})$.

(2) 由(1)知 $f(x)$ 有极值点 x_1, x_2 , $x_1 < \ln \frac{1}{2a} < x_2$, 且 x_1, x_2 满足 $x+1-2ae^x=0$, 则 $x_2+1-2ae^{x_2}=0$, 即 $2ae^{x_2}=x_2+1$, 所以 $f(x_2) = x_2e^{x_2} - ae^{2x_2} = e^{x_2}(x_2 - ae^{x_2}) = \frac{e^{x_2}}{2}(x_2-1)$, 其中 $x_2 > \ln \frac{1}{2a} > 0$, 即令 $m(x) = \frac{e^x}{2}(x-1)$ ($x > \ln \frac{1}{2a} > 0$).

又 $m'(x) = \frac{1}{2}e^x(x-1) + \frac{e^x}{2} = \frac{xe^x}{2} > 0$, $m(x)$ 在 $(\ln \frac{1}{2a}, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $m(x) > m\left(\ln \frac{1}{2a}\right) = \frac{1}{4a}\left(\ln \frac{1}{2a} - 1\right) = -\frac{1+\ln 2a}{4a}$, $0 < a < \frac{1}{2}$.

$$\text{令 } n(a) = -\frac{1+\ln 2a}{4a}, 0 < a < \frac{1}{2}, n'(a) = -\frac{\frac{1}{a} \cdot 4a - [1+\ln(2a)] \cdot 4}{16a^2} = -\frac{4-4-4\ln(2a)}{16a^2} =$$

$$\frac{\ln(2a)}{4a^2} < 0, \text{ 所以 } n(a) \text{ 在 } \left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ 上单调递减, } n(a) > n\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}, \text{ 即 } m(x) > n(a) > -\frac{1}{2}, \text{ 即}$$

$$f(x_2) > -\frac{1}{2}.$$

5.5 切线放缩

切线放缩就是根据凹凸性,把函数恰当变形,用相应的切线不等式放缩求出函数的最值或证明不等式,常用的切线放缩及其衍生放缩公式为 $e^x \geq x+1, e^x \geq ex, \ln x \leq x-1 (x>0), \ln x \leq \frac{x}{e} (x>0)$.

1. 利用切线放缩求函数最值



研究密钥

含指对混合形式的不等式通过等价变形、取对数等方法变化形式,然后利用两个重要的切线不等式($e^x \geq x+1$ 和 $\ln x \leq x-1$)进行放缩,不等式取等号时即为相应函数的最值.

其中,常见的同构变形有 $xe^x = e^{x+\ln x}, \frac{e^x}{x} = e^{x-\ln x}, x^2 e^x = e^{x+2\ln x}, \frac{x}{e^x} = e^{\ln x - x}, x + \ln x = \ln xe^x, x - \ln x = \ln \frac{e^x}{x}$.

例 5.8 运用切线放缩,求函数最值.

(1) 函数 $f(x) = e^x - \frac{\ln x + 1}{x}$ 的最小值是_____;

(2) 函数 $f(x) = \frac{x^2 e^x - 2 \ln x}{x+1}$ 的最小值是_____;

(3) 已知函数 $f(x) = xe^x - \ln x - x - 2, g(x) = \frac{e^{x-2}}{x} + \ln x - x$ 的最小值分别为 a, b , 判断 a, b 之间的大小关系.

分析

► 观察函数形式,发现函数解析式或通分后出现常见的变形形式,如 $xe^x, x^2 e^x, \frac{e^x}{x}$ 等,先将其指数化,然后将指数函数放缩为它的切线,不等式取等号时即为所求函数的最值.

解析 $\gg (1) f(x) = e^x - \frac{\ln x + 1}{x} = \frac{xe^x - \ln x - 1}{x} = \frac{e^{x+\ln x} - \ln x - 1}{x} \geq \frac{x + \ln x + 1 - \ln x - 1}{x} = 1$ (当

且仅当 $x + \ln x = 0$ 时取“=”), 故 $f(x)$ 的最小值为 1.

$$(2) f(x) = \frac{x^2 e^x - 2 \ln x}{x+1} = \frac{e^{x+2 \ln x} - 2 \ln x}{x+1} \geq \frac{x+2 \ln x+1-2 \ln x}{x+1} = 1 \text{ (当且仅当 } x+2 \ln x=0 \text{ 时取}$$

“=”), 故 $f(x)$ 的最小值为 1.

$$(3) f(x) = xe^x - \ln x - x - 2 = e^{x+\ln x} - (x + \ln x) - 2 \geq x + \ln x + 1 - (x + \ln x) - 2 = -1 \text{ (当且仅当 } x + \ln x = 0 \text{ 时取“=”), 故 } f(x) \text{ 的最小值为 } -1.$$

$$g(x) = \frac{e^{x-2}}{x} + \ln x - x = e^{x-2-\ln x} - (x - \ln x) \geq x - \ln x - 1 - (x - \ln x) = -1 \text{ (当且仅当 } x - \ln x = 2 \text{ 时取“=”), 故 } g(x) \text{ 的最小值为 } -1.$$

因此, $a = b = -1$.

2. 切线放缩解不等式恒成立问题



研究密钥

利用切线放缩解不等式恒成立时参数的取值范围问题, 多将指数、对数、无理根式等统一到一阶幂函数的形式, 即转化为曲线与直线的位置关系, 难点是寻找切线放缩的位置, 移动曲线或切线找到那个重合处的分界点(临界点), 通常于端点处进行放缩, 使得问题得以简化.

例 5.9 运用切线放缩, 求解下列不等式恒成立问题.

(1) 已知函数 $f(x) = x^b e^x - a \ln x - x - 1 (x > 1)$, 其中 $b > 0$, 若 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 则实数 a 与 b 的大小关系是 _____;

(2) 若对任意的 $x \in (0, +\infty)$, $e^{2x} - a - \frac{\ln x}{x} \geq \frac{1}{x}$ 恒成立, 则 a 的取值范围为 _____;

(3) 已知 $x^3 e^{2x} - 1 \geq mx + 3 \ln x$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围为 _____.

分析

$\gg$ 对于指、对混合型的不等式恒成立问题, 通常参变量分离, 把问题转化为求指、对混合型函数的最值问题, 运用切线放缩 ($e^x \geq x+1$, $e^x \geq ex$, $\ln x \leq x-1$), 将对数函数或指数函数放缩成易于处理的幂函数的形式, 便于研究函数的最值.

解析 $\gg (1) f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^b e^x \geq a \ln x + x + 1 \Leftrightarrow e^{x+b \ln x} - x - 1 \geq a \ln x \Leftrightarrow a \leq \frac{e^{x+b \ln x} - x - 1}{\ln x}$, 其

中 $x > 1$.

$$\text{因为 } \frac{e^{x+b \ln x} - x - 1}{\ln x} \geq \frac{x + b \ln x + 1 - x - 1}{\ln x} = b, \text{ 当且仅当 } x + b \ln x = 0 \text{ 时等号成立, 所以 } a \leq b.$$

$$(2) \text{依题意, } e^{2x} - a - \frac{\ln x}{x} \geq \frac{1}{x} \text{ 对任意的 } x \in (0, +\infty) \text{ 恒成立, 则 } a \leq e^{2x} - \frac{\ln x + 1}{x} = \frac{xe^{2x} - \ln x - 1}{x} = \frac{e^{2x+\ln x} - \ln x - 1}{x}.$$

$$\text{又 } e^{2x+\ln x} \geq 2x + \ln x + 1 \text{ (当且仅当 } 2x + \ln x = 0 \text{ 时取“=”)}, \text{ 因此 } \frac{e^{2x+\ln x} - \ln x - 1}{x} \geq \frac{2x + \ln x + 1 - \ln x - 1}{x} = 2, \text{ 所以 } a \leq 2, \text{ 因此实数 } a \text{ 的取值范围是 } (-\infty, 2].$$

$$(3) \text{分离自变量和参变量. } m \leq \frac{x^3 e^{2x} - 3\ln x - 1}{x} = \frac{e^{2x+3\ln x} - (3\ln x + 1)}{x}, \text{ 又 } e^{2x+3\ln x} \geq 2x + 3\ln x + 1 \text{ (当且仅当 } 2x + 3\ln x = 0 \text{ 时取“=”)}, \text{ 则 } \frac{e^{2x+3\ln x} - 3\ln x - 1}{x} \geq \frac{2x + 3\ln x + 1 - 3\ln x - 1}{x} = 2.$$

因此 m 的取值范围是 $(-\infty, 2]$.

3. 切线放缩证明不等式



研究思路

切线法证明不等式是从“形”的角度入手思考问题,将所证的不等式转化为相应曲线与直线、曲线与曲线的位置关系问题,利用切线实现分而治之的策略.

①曲直模型:利用切线型不等式进行放缩,证明函数 $f(x)$ 的图像总在切线 $y=ax+b$ 的上方或下方.

②曲曲模型:利用公切线隔离法,证明两个函数图像分别在它们切线的上方或下方,适用于凹函数与凸函数且它们的凹凸性相反的问题(拆成两个函数).

当两函数有斜率相同的切线,这是切线放缩的本质. 引入一个中间量,分别证明两个不等式成立,然后利用不等式的传递性就可以了. 这个方法的难点在于合理拆分函数,寻找它们斜率相等的切线隔板.

例 5.10 设函数 $f(x) = e^{mx} - \ln x - 2$, 证明: 当 $x > 0, m > e^{-\frac{1}{2}}$ 时, $f(x) > -\frac{1}{2}$.

分析 ▶ 本题思路较多,可根据参数的范围进行放缩消掉参数,然后利用指数函数或对数函数放缩为其切线来证明;也可利用一些常用不等式的结论来证明,或通过设隐零点的方法得证.

解析 ▶ 证法一(指数切线放缩):

$$f(x) = e^{mx} - \ln x - 2 \geq emx - \ln x - 2 > e^{\frac{1}{2}}x - \ln x - 2 = e^{\frac{1}{2}+\ln x} - \ln x - 2 \geq \frac{1}{2} + \ln x + 1 - \ln x - 2 = -\frac{1}{2}, \text{ 所以 } f(x) > -\frac{1}{2}.$$

证法二(对数切线放缩): $f(x) = e^{mx} - \ln x - 2 \geqslant emx - \ln x - 2 > e^{\frac{1}{2}}x - \ln x - 2$.

又 $\ln x \leqslant x - 1$, 则 $\ln \sqrt{e}x \leqslant \sqrt{e}x - 1$, 即 $\frac{1}{2} + \ln x \leqslant \sqrt{e}x - 1$, 亦即 $\ln x \leqslant \sqrt{e}x - \frac{3}{2}$.

所以 $f(x) > e^{\frac{1}{2}}x - \ln x - 2 \geqslant e^{\frac{1}{2}}x - \sqrt{e}x + \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$.

证法三(常用不等式的放缩): 利用例 5.3 所证明的不等式, 即 $e^x - \ln x > 2$.

所以 $e^{mx} - \ln x - 2 > \ln(mx) + 2 - \ln x - 2 = \ln m > -\frac{1}{2}$.

证法四(合而歼之, 隐零点): $f'(x) = me^{mx} - \frac{1}{x} = \frac{mxe^{mx} - 1}{x}$.

令 $f'(x_0) = 0$ 得 $mx_0 e^{mx_0} = 1$, 且 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增, 因此 $f(x)_{\min} = f(x_0) = e^{mx_0} - \ln x_0 - 2$.

又 $e^{mx_0} = \frac{1}{mx_0}$, $\ln(mx_0) + mx_0 = 0$, 即 $\ln x_0 + \ln m + mx_0 = 0$, 所以 $f(x_0) = \frac{1}{mx_0} + \ln m +$

$mx_0 - 2 \geqslant 2\sqrt{mx_0 \cdot \frac{1}{mx_0}} - 2 + \ln m = \ln m > -\frac{1}{2}$.

变式 1 已知函数 $f(x) = e^{2x-1} \left(e \ln 2x + \frac{1}{x} \right)$, 证明: $f(x) > 1$.

分析 函数 $f(x)$ 中有 e^{2x-1} , 如果求导, 只会更加复杂; 函数中既有指数函数, 又有对数函数, 可以考虑使用经典不等式向幂函数的方向放缩, 根据结论中不等号的方向可以考虑经典不等式中的 $\ln x \geqslant -\frac{1}{ex}$, 代入化简即可证明.

解析 由 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$. 由经典不等式 $\ln x \geqslant -\frac{1}{ex}$ 和 $e^{x-1} \geqslant x$ 可得 $\ln 2x \geqslant -\frac{1}{2ex}$, $e^{2x-1} \geqslant 2x$, 所以有 $f(x) = e^{2x-1} \left(e \ln 2x + \frac{1}{x} \right) = e^{2x} \ln 2x + \frac{e^{2x-1}}{x} \geqslant e^{2x} \frac{1}{-2ex} + \frac{e^{2x-1}}{x} = \frac{e^{2x-1}}{2x} \geqslant 1$, 等号不同时取得, 即证 $f(x) > 1$.

评注

高考命题人为了掩盖经典不等式的痕迹, 往往会作一系列的变形, 比如本题中, 用 $2x$ 来替换 x , 从而隐藏真实的结构, 来考查同学们的解题能力. 那么越是遇到此类形式复杂的问题, 其实思路越是清晰, 只要把相关的经典不等式及引申, 一一尝试, 很快就能发现哪条是正确的道路. 比如本题, 我们需要的是 $\ln 2x \geqslant ?$, 也就是得将 $\ln 2x$ 缩小, 那么只有 $\ln x \geqslant 1 - \frac{1}{x}$ 和 $\ln x \geqslant -\frac{1}{ex}$ 这两种, 分别尝试, 发现后者为我们所需, 难题就迎刃而解了.

5.6 指数对数同构



用同构法解题,除了要有同构法的思想意识外,对观察能力及代数式变形能力的要求也是比较高的,正所谓,同构解题,观察第一! 以下是同构函数的常见模型.

1. “指”“对”跨阶想同构,同左同右取对数

同构基本模式:

(1) 积型: $ae^a \leqslant b \ln b$ $\xrightarrow{\text{三种同构方式}}$

$$\begin{cases} \text{同右: } e^a \ln e^a \leqslant b \ln b \cdots \cdots \rightarrow f(x) = x \ln x, \text{不等式等价于 } f(e^a) \leqslant f(b) \\ \text{同左: } ae^a \leqslant (\ln b) e^{\ln b} \cdots \cdots \rightarrow f(x) = xe^x, \text{不等式等价于 } f(a) \leqslant f(\ln b) \\ \text{取对数: } a + \ln a \leqslant \ln b + \ln(\ln b) \cdots \cdots \rightarrow f(x) = x + \ln x, \text{不等式等价于 } f(a) \leqslant f(\ln b) \end{cases}.$$

如: $2x^3 \ln x \geqslant me^{\frac{m}{x}} \Leftrightarrow x^2 \ln x^2 \geqslant \frac{m}{x} e^{\frac{m}{x}}$, 后面的转化同(1).

说明:在对“积型”进行同构时,取对数是最快捷的,同构出的函数,其单调性一看便知.

(2) 商型: $\frac{e^a}{a} < \frac{b}{\ln b}$ $\xrightarrow{\text{三种同构方式}}$

$$\begin{cases} \text{同左: } \frac{e^a}{a} < \frac{e^{\ln b}}{\ln b} \cdots \cdots \rightarrow f(x) = \frac{e^x}{x}, \text{不等式等价于 } f(a) < f(\ln b) \\ \text{同右: } \frac{e^a}{\ln e^a} < \frac{b}{\ln b} \cdots \cdots \rightarrow f(x) = \frac{x}{\ln x}, \text{不等式等价于 } f(e^a) < f(b) \\ \text{取对数: } a - \ln a < \ln b - \ln(\ln b) \cdots \cdots \rightarrow f(x) = x - \ln x, \text{不等式等价于 } f(a) < f(\ln b) \end{cases}.$$

(3) 和差型: $e^a \pm a < b \pm \ln b$ $\xrightarrow{\text{两种同构方式}}$

$$\begin{cases} \text{同左: } e^a \pm a < e^{\ln b} \pm \ln b \cdots \cdots \rightarrow f(x) = e^x \pm x, \text{不等式等价于 } f(a) < f(\ln b). \\ \text{同右: } e^a \pm \ln e^a < b \pm \ln b \cdots \cdots \rightarrow f(x) = x \pm \ln x, \text{不等式等价于 } f(e^a) < f(b). \end{cases}$$

如: $e^{ax} + ax > \ln(x+1) + x + 1 \Leftrightarrow e^{ax} + ax > e^{\ln(x+1)} + \ln(x+1) \Leftrightarrow ax > \ln(x+1)$.

2. “无中生有”去同构,凑好形式是关键,凑常数或凑参数,如有必要凑变量

(1) $ae^{ax} > \ln x$ $\xrightarrow{\text{同乘 } x(\text{无中生有})} axe^{ax} > x \ln x$, 转化为 $e^{ax} \ln e^{ax} > x \ln x$, 构造 $f(x) = x \ln x$, 或转化为 $axe^{ax} > \ln x \cdot e^{\ln x}$, 构造 $g(x) = xe^x$.

$$(2) e^x > a \ln(ax - a) - a \Leftrightarrow \frac{1}{a} e^x > \ln(x - 1) - 1 \Leftrightarrow e^{x - \ln a} - \ln a > \ln(x - 1) - 1$$

$\xrightarrow{\text{同加 } x(\text{无中生有})} e^{x - \ln a} + x - \ln a > \ln(x - 1) + x - 1 = e^{\ln(x-1)} + \ln(x-1)$, 构造 $f(x) = e^x + x$,

转化为 $x - \ln a > \ln(x-1)$.

$$(3) a^x > \log_a x \Leftrightarrow e^{x \ln a} > \frac{\ln x}{\ln a} \Leftrightarrow (x \ln a) e^{x \ln a} > x \ln x (a > 1). \text{ 后面的转化同 } 2(1).$$

说明: 由于 $a^x > \log_a x$ 两边互为反函数, 所以还可以这样转化: $a^x > \log_a x \Rightarrow a^x > x \Rightarrow \ln a > \frac{\ln x}{x}$. 对于某些不等式, 两边互为反函数是比较隐蔽的, 若能发现, 则难者亦易矣.

如: $\frac{1}{a} e^x + 1 > \ln a (x-1)$, 左右两边互为反函数, 所以只需 $\frac{1}{a} e^x + 1 > x$, 即 $\frac{1}{a} > \frac{x-1}{e^x}$, 所以若原不等式恒成立, 可得 $\frac{1}{a} > \frac{1}{e^2}$.

3. 同构放缩需有方, “切放”同构一起上

(1) 放缩也是一种能力, 利用切线放缩, 往往需要局部同构. 切线放缩是对同构思想方法的一个灵活运用. 另外需注意, 利用切线放缩如同用均值不等式, 只要取等号的条件成立即可.

(2) 掌握常见放缩 (注意取等号的条件, 以及常见变形)

$$\textcircled{1} e^x \geq x+1 \Rightarrow e^{x-1} \geq x \Rightarrow e^x \geq ex \Rightarrow e^x \geq \frac{e^2}{4} x^2, e^x \geq 1+x+\frac{x^2}{2} (x \geq 0), e^x \leq \frac{2+x}{2-x} (0 \leq x < 2), e^x \geq ax+1 (x \geq 0, a \leq 1).$$

$$(\text{变形: } xe^x = e^{x+\ln x} \geq x+\ln x+1, \frac{e^x}{x} = e^{x-\ln x} \geq x-\ln x+1, \frac{x}{e^x} = e^{\ln x-x} \geq \ln x-x+1,$$

$$x^2 e^x = e^{x+2\ln x} \geq x+2\ln x+1, x^2 e^x = e^{x+2\ln x} \geq e(x+2\ln x).)$$

$$\textcircled{2} \ln x \leq x-1 \Rightarrow \ln ex \leq x \Rightarrow \ln x \leq \frac{x}{e}, \ln x \leq x-1 \Rightarrow \ln x \leq e^x-2,$$

$$\ln x \geq 1-\frac{1}{x} \Rightarrow x \ln x \geq x-1, \ln x \leq \frac{1}{2} \left(x-\frac{1}{x}\right) (x \geq 1), \ln x \geq \frac{2(x-1)}{x+1} (x \geq 1),$$

$$\ln x \leq a(x-1) (x \geq 1, a \geq 1). (\text{变形: } x+\ln x = \ln x e^x, x-\ln x = \ln \frac{e^x}{x}).)$$

$$\text{说明: } xe^x = e^{x+\ln x}, \frac{e^x}{x} = e^{x-\ln x}, \frac{x}{e^x} = e^{\ln x-x}, x+\ln x = \ln x e^x, x-\ln x = \ln \frac{e^x}{x} \text{ 等, 这些变形对解}$$

决指对混合不等式问题, 如恒成立求参数取值范围, 或证明不等式, 都带来极大的便利. 当然, 在具体使用中, 往往要结合切线放缩或换元法. 可以说掌握了这些变形常见切线型不等式, 就大大降低了这类问题的难度. (会推广到关于 x 与 a^x 或 $\log_a x$ 的各种组合的变形.)

同构变形在不等式恒成立问题中应用很广, 恒成立问题有很大一部分题目是命题者利用函数单调性构造出来的, 那么我们只要找到函数, 无疑就是找到了题目的命门. 在寻找函数时, 进行分组整理是一种常见的变形. 如果整理 (即同构) 后不等式两边具有结构的一致性, 则可构造函数, 然后利用此函数的单调性解题.

例 5.11 若对任意 $x > 0$, 恒有 $a(e^{ax} + 1) \geq 2\left(x + \frac{1}{x}\right)\ln x$, 则实数 a 的最小值为_____.

分析 ▶ 观察不等式形式, 需“无中生有”两边同乘以 x , 将不等式变形为积型同构模型 $ax(e^{ax} + 1) \geq (x^2 + 1)\ln x^2$, 右边不变, 变形 $ax = \ln e^{ax}$, 这样不等式两边结构一致, 从中构造出函数, 根据单调性简化不等式.

解析 ▶ $a(e^{ax} + 1) \geq 2\left(x + \frac{1}{x}\right)\ln x \Leftrightarrow ax(e^{ax} + 1) \geq (x^2 + 1)\ln x^2 \Leftrightarrow (e^{ax} + 1)\ln e^{ax} \geq (x^2 + 1)\ln x^2$. (积型同构)

令 $f(x) = (x+1)\ln x$, 则 $f'(x) = \ln x + \frac{x+1}{x}$, $f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$, 易知 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f'(x) \geq f'(1) = 2 > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $(e^{ax} + 1)\ln e^{ax} \geq (x^2 + 1)\ln x^2 \Leftrightarrow f(e^{ax}) \geq f(x^2) \Leftrightarrow e^{ax} \geq x^2 \Leftrightarrow ax \geq 2\ln x \Leftrightarrow a \geq \frac{2\ln x}{x}$.

令 $g(x) = \frac{2\ln x}{x}$, 由导数法易得 $\left(\frac{2\ln x}{x}\right)_{\max} = \frac{2\ln e}{e} = \frac{2}{e}$, 所以 $a \geq \frac{2}{e}$.

故实数 a 的最小值为 $\frac{2}{e}$.

变式 1 若 $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ 时, 关于 x 的不等式 $ax^3 e^{ax} + 2\ln x \leq 0$ 恒成立, 则 a 的最大值是_____.

解析 ▶ 由 $ax^3 e^{ax} + 2\ln x \leq 0$, 得 $axe^{ax} + \frac{2}{x^2}\ln x \leq 0 \Leftrightarrow axe^{ax} \leq -\frac{2}{x^2}\ln x = \frac{1}{x^2}\ln \frac{1}{x^2} = \ln \frac{1}{x^2} e^{\ln \frac{1}{x^2}}$, $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$.

上述不等式对于 $a \leq 0$ 显然成立.

当 $a > 0$ 时, 构造函数 $f(x) = xe^x$, $x > 0$, $f'(x) = (x+1)e^x > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 $f(ax) \leq f\left(\ln \frac{1}{x^2}\right)$, 得 $ax \leq \ln \frac{1}{x^2} = -2\ln x$. 因此 $a \leq \frac{-2\ln x}{x}$, $0 < x < \frac{1}{e}$.

令 $g(x) = \frac{-2\ln x}{x}$, $g'(x) = -2 \cdot \frac{1-\ln x}{x^2} = \frac{2(\ln x - 1)}{x^2}$.

当 $0 < x < e$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减; 当 $x > e$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增.

又 $0 < x < \frac{1}{e}$, 则 $g(x)_{\min} > g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{-2\ln \frac{1}{e}}{\frac{1}{e}} = 2e$, 因此 $a \leq 2e$, 故 a 的最大值是 $2e$.

变式 2 对任意 $x > 0$, 不等式 $2ae^{2x} - \ln x + \ln a \geq 0$ 恒成立, 则实数 a 的最小值为_____.

分析 ▶ 将指对分列两侧, 不等式变形为积型同构模型 $2xe^{2x} \geq \frac{x}{a} \ln \frac{x}{a}$, 两边取对数, 得

$2x + \ln 2x \geq \ln \frac{x}{a} + \ln \left(\ln \frac{x}{a} \right) (x > a)$, 从中构造出函数, 根据其单调性简化不等式.

解析 $\Rightarrow 2ae^{2x} - \ln x + \ln a \geq 0 \Leftrightarrow 2ae^{2x} \geq \ln \frac{x}{a} \Leftrightarrow 2xe^{2x} \geq \frac{x}{a} \ln \frac{x}{a} (x > 0)$ (积型同构)

$$\Leftrightarrow 2x + \ln 2x \geq \ln \frac{x}{a} + \ln \left(\ln \frac{x}{a} \right) (x > a).$$

设 $f(x) = x + \ln x$, 由于 $f(x)$ 为增函数, 所以由 $f(2x) \geq f\left(\ln \frac{x}{a}\right)$, 得 $2x \geq \ln \frac{x}{a}$, 即 $a \geq \frac{x}{e^{2x}}$ 恒

成立. 令 $g(x) = \frac{x}{e^{2x}}$, 则 $g'(x) = \frac{1-2x}{e^{2x}}$, 易得 $g(x)_{\max} = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2e}$, 所以 $a \geq \frac{1}{2e}$, 即实数 a 的最小值为 $\frac{1}{2e}$.

例 5.12 已知函数 $f(x) = x(e^x - a) - 2\ln x + 2\ln 2 - 2 (a \in \mathbf{R})$.

(1) 当 $a=2$ 时, 若 $f(x)$ 的一条切线垂直于 y 轴, 证明: 该切线为 x 轴;

(2) 若 $f(x) \geq 0$, 求 a 的取值范围.

分析 $\Rightarrow$ (1) 证明该切线为 x 轴即证切线方程为 $y=0$, 为此用设而不求也就是隐零点的方法得出一个关于该切点横坐标 x_0 的方程, 代入切线方程化简即可; (2) 把不等式变形整理, 根据恒成立得出 a 的取值范围, 再进一步证明其补集不满足; 另外本问也可以将参变量分离, 转化为最值问题来解.

解析 $\Rightarrow$ (1) 当 $a=2$ 时, $f(x) = x(e^x - 2) - 2\ln x + 2\ln 2 - 2$, 则

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x - 2 + xe^x - \frac{2}{x} = e^x(x+1) - 2\left(\frac{1}{x} + 1\right) = e^x(x+1) - \frac{2(x+1)}{x} \\ &= (x+1)\left(e^x - \frac{2}{x}\right) (x > 0). \end{aligned}$$

令 $f'(x_0) = 0$ 得 $e^{x_0} = \frac{2}{x_0}$, 即 $x_0 e^{x_0} = 2$, 亦即 $x_0 + \ln x_0 = \ln 2$.

曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, 即 $y - [x_0(e^{x_0} - 2) - 2\ln x_0 + 2\ln 2 - 2] = 0$, 亦即 $y = x_0(e^{x_0} - 2) - 2\ln x_0 + 2\ln 2 - 2$, 故 $y = x_0\left(\frac{2}{x_0} - 2\right) - 2(\ln 2 - x_0) + 2\ln 2 - 2 = 2 - 2x_0 - 2\ln 2 + 2x_0 + 2\ln 2 - 2 = 0$, 则该切线为 x 轴.

(2) 解法一 (同构, 经典不等式放缩): 若 $f(x) \geq 0$, 得 $x(e^x - a) - 2\ln x + 2\ln 2 - 2 \geq 0$, 得 $\frac{1}{2}x(e^x - a) - \ln x + \ln 2 - 1 \geq 0$, 即 $\frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{2}ax - \ln x + \ln 2 - 1 \geq 0$, $\frac{1}{2}e^{\ln x + x} - \frac{1}{2}ax - \ln x + \ln 2 - 1 \geq 0$, $e^{\ln x + x - \ln 2} - x - \ln x + \ln 2 - \frac{1}{2}ax + x - 1 \geq 0$, 即 $e^{\ln x + x - \ln 2} - (x + \ln x - \ln 2) - 1 \geq \left(\frac{a}{2} - 1\right)x$.

由 $e^x \geq x+1$ (当且仅当 $x=0$ 时取“=”), 则 $e^{\ln x+x-\ln 2} \geq \ln x+x-\ln 2+1$ (当且仅当 $\ln x+x-\ln 2=0$ 时取“=”), 故当 $\frac{a}{2}-1 \leq 0$ 即 $a \leq 2$ 时, $f(x) \geq 0$ 恒成立.

下面证明当 $a > 2$ 时, $f(x) \geq 0$ 不恒成立, 取 x_0 , 使 $\ln x_0 + x_0 - \ln 2 = 0$.

此时 $f(x_0) = e^{\ln x_0 + x_0 - \ln 2} - (x_0 + \ln x_0 - \ln 2) - 1 - \left(\frac{a}{2} - 1\right)x_0 = \left(1 - \frac{a}{2}\right)x_0 < 0$, 与题意不符.

综上所述, a 的取值范围为 $(-\infty, 2]$.

解法二(分离参数): 由 $\forall x \geq 0, f(x) \geq 0$ 得 $a \leq \frac{xe^x - 2\ln x + 2\ln 2 - 2}{x} = e^x - \frac{2\ln x + 2 - 2\ln 2}{x}$.

构造 $g(x) = e^x - \frac{2\ln x + 2 - 2\ln 2}{x}$, 则

$$g'(x) = e^x - \frac{\frac{2}{x} \cdot x - (2\ln x + 2 - 2\ln 2)}{x^2} = e^x - \frac{2 - 2\ln x - 2 + 2\ln 2}{x^2} = e^x - \frac{2\ln \frac{2}{x}}{x^2} = \frac{x^2 e^x - 2\ln \frac{2}{x}}{x^2}.$$

令 $g'(x_0) = 0$, 得 $x_0^2 e^{x_0} = 2\ln \frac{2}{x_0} (x_0 > 0)$, 即 $x_0 e^{x_0} = \frac{2}{x_0} \ln \frac{2}{x_0} = e^{\ln \frac{2}{x_0}} \cdot \ln \frac{2}{x_0}$. (同构)

令 $u(x) = xe^x (x > 0)$, $u'(x) = e^x(x+1) > 0$, $u(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又 $u(x_0) = u\left(\ln \frac{2}{x_0}\right)$, 则 $x_0 = \ln \frac{2}{x_0}$, 故 $e^{x_0} = \frac{2}{x_0}$, 即 $x_0 e^{x_0} = 2$.

因为 $g'(x) = e^x - \frac{2}{x^2} \ln \frac{2}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $g'(x_0) = 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增.

$$g(x)_{\min} = g(x_0) = e^{x_0} - \frac{2\ln x_0 + 2 - 2\ln 2}{x_0}, \text{ 代入 } e^{x_0} = \frac{2}{x_0} \text{ 和 } \ln \frac{2}{x_0} = x_0, \text{ 则 } g(x_0) = \frac{2}{x_0} - \frac{2}{x_0} - \frac{2\ln x_0 - 2\ln 2}{x_0} = \frac{2\ln 2 - 2\ln x_0}{x_0} = \frac{2\ln \frac{2}{x_0}}{x_0} = \frac{2x_0}{x_0} = 2.$$

故 $g(x)_{\min} = g(x_0) = 2$, 故 $a \leq 2$, 即 a 的取值范围为 $(-\infty, 2]$.

训练 5

1. 已知函数 $f(x) = xe^{ax-1} - \ln x - ax, a \in \left(-\infty, -\frac{1}{e^2}\right]$, 函数 $f(x)$ 的最小值为 M , 则实数 M 的最小值是().

A. -1

B. $-\frac{1}{e}$

C. 0

D. $-\frac{1}{e^2}$

2. 已知 $x \in (0, +\infty)$, 不等式 $ax + e^{ax} \geq \ln x + x$ 恒成立, 则实数 a 的最小值为().
- A. $\frac{1}{e}$ B. $\frac{2}{e}$ C. 0 D. 1
3. 已知 x_0 是方程 $x^3 e^{x-4} + 2\ln x - 4 = 0$ 的一个根, 则 $e^{\frac{4-x_0}{2}} + 2\ln x_0$ 的值是().
- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6
4. 已知 $e^x > x^2 - 2ax + 1$ 对任意的 $x > 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是_____.
5. 已知当 $x \geq 1$ 时, $x^2 \ln x - x + 1 \geq m(x-1)^2$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是_____.
6. 设函数 $f(x) = \frac{1 + \ln(x+1)}{x}, x > 0$, 若 k 为正整数, $f(x) \geq \frac{k}{x+1}$ 恒成立, 求 k 的最大值.
7. 已知函数 $f(x) = ax - \ln(x+1)$.
- (1) 当 $a=1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最小值;
- (2) 求证: $\frac{e^x}{x^2} - x \geq 1 - 2\ln x$.
8. 证明: $xe^x - 2e\ln x \geq e(x^2 - 2x + 2)$.
9. 证明: 当 $x > 1$ 时, $e^x > x^2 - (2-e)\ln(x+1) + 1$.

10. 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, 证明: 不等式 $x \ln x + \ln x - (x-1)(e^{x-1} + 1) \leq 0$ 成立.

11. 已知函数 $f(x) = xe^x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的图像在 $(0, f(0))$ 处的切线 l 的方程;

(2) 判断直线 l 与函数 $g(x) = \frac{\ln x + 1}{xe^x}$ 图像的交点个数, 并说明理由.

12. 已知函数 $f(x) = e^x - \ln(x+m) + m$.

(1) 设 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 求 m 的值;

(2) 在(1)的条件下, $f(x) - k \geq 0$ 在定义域内恒成立, 求 k 的取值范围;

(3) 当 $m \leq 2$ 时, 证明: $f(x) > m$.