



第3章 控制系统的时域分析法

CHAPTER 3

学习目标

- (1) 了解时域分析法的特点；掌握典型输入信号的特点和时域性能指标的含义。
- (2) 掌握一阶、二阶系统的数学模型、阶跃响应的特点及动态性能指标的计算；理解闭环主导极点、偶极子的概念，会估算高阶系统动态性能指标。
- (3) 理解稳定性的概念及稳定条件；能熟练运用稳定判据判定系统的稳定性并进行有关参数分析计算。
- (4) 理解稳态误差的概念，明确终值定理的应用条件；掌握系统的型别和静态误差系数的概念；掌握计算稳态误差的方法，理解减小或消除稳态误差的措施。

本章重点

- (1) 典型输入信号及时域性能指标定义。
- (2) 一阶、二阶系统和高阶系统的动态性能分析。
- (3) 控制系统稳定性分析及稳定判据的应用。
- (4) 控制系统稳态误差的计算及减小或消除稳态误差的措施。

控制系统的数学模型建立之后，可以采用各种不同的方法对系统的性能进行分析研究。经典控制理论中，常用的分析方法有时域分析法、根轨迹法和频域分析法。其中时域分析法是对一个特定的输入信号，通过拉普拉斯变换法求出系统的输出响应，根据系统响应直接在时域中对系统进行分析的方法。此方法具有直观、准确、物理概念清晰，能提供系统时间响应的全部信息等特点，是后面学习根轨迹法和频域分析法的基础。

3.1 时域分析基础

一个控制系统的时间响应不仅取决于系统本身的结构和参数，而且还与系统的初始状态以及输入信号有关。为了求解系统的时间响应，必须了解输入信号（即外作用）的解析表达式。然而，控制系统的实际输入信号往往是未知的，为了便于对系统进行分析，常需要一些输入函数作为测试信号。选取的测试信号应具有下列特点：

- (1) 能反映系统工作时的实际情况；
- (2) 易于在实验室中获得；
- (3) 数学表达形式简单，以便分析和处理。

3.1.1 典型输入信号

在控制工程中,通常选用的典型输入信号有阶跃信号、斜坡信号、加速度信号、脉冲信号和正弦信号。

1. 阶跃信号

阶跃信号表示信号的瞬间突变过程,如图 3-1-1 所示,其数学表达式为

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ A, & t \geq 0 \end{cases} \quad (3-1-1)$$

式(3-1-1)中, A 为一常量,当 $A=1$ 时,称为单位阶跃信号,记为 $1(t)$ 。在实际系统中电源的接通、开关的转换、指令的转变、负荷的突变等,均可视为阶跃信号。

阶跃信号的拉普拉斯变换为

$$L[A \cdot 1(t)] = \frac{A}{s}$$

2. 斜坡信号

斜坡信号表示由零值开始随时间 t 线性增长的信号,如图 3-1-2 所示,其数学表达式为

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ At, & t \geq 0 \end{cases}$$

斜坡信号的微分即为阶跃信号,表示斜坡信号的速度变化。当 $A=1$ 时,称为单位斜坡信号。某些随动系统中位置作等速移动的指令信号、数控机床加工斜面时的进给指令等可视为斜坡信号。

斜坡信号的拉普拉斯变换为

$$L[At] = \frac{A}{s^2}$$

3. 加速度信号

加速度信号如图 3-1-3 所示,其数学表达式为

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}At^2, & t \geq 0 \end{cases}$$

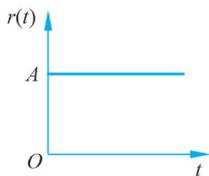


图 3-1-1 阶跃信号

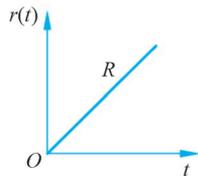


图 3-1-2 斜坡信号

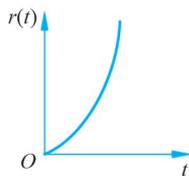


图 3-1-3 加速度信号

加速度信号的一次微分为斜坡信号,二次微分为阶跃信号。当 $A=1$ 时,称为单位加速度信号。

加速度信号的拉普拉斯变换为

$$L\left[\frac{1}{2}At^2\right] = \frac{A}{s^3}$$

4. 脉冲信号

脉冲信号可视为一个持续时间极短的信号,如图 3-1-4 所示,其数学表达式为

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \text{ 或 } t > h \\ \frac{A}{h}, & 0 \leq t \leq h \end{cases}$$

其中 h 为脉冲宽度, A 等于脉冲面积。若对脉冲宽度 h 取趋于零的极限,则有

$$\begin{cases} r(t) = 0, & t \neq 0 \\ r(t) \rightarrow \infty, & t \rightarrow 0 \end{cases}$$

及

$$\int_{-\infty}^{+\infty} r(t) dt = A$$

当 $A=1(h \rightarrow 0)$ 时,称此脉冲信号为理想单位脉冲信号,记为 $\delta(t)$ 。理想单位脉冲信号的拉普拉斯变换为

$$L[\delta(t)] = 1$$

理想单位脉冲信号在现实中是不存在的,只有数学上的意义,但却是一种重要的输入信号。时间很短的脉冲电压信号、冲击力、天线上的阵风扰动、阵风、大气湍流等都可视为脉冲信号。

5. 正弦信号

正弦信号也是常用的典型输入信号之一。正弦信号如图 3-1-5 所示,其数学表达式为

$$r(t) = A \sin \omega t$$

其中 A 为正弦信号的振幅(幅值), ω 为正弦信号的角频率。

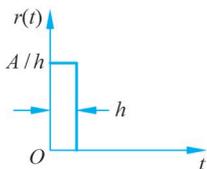


图 3-1-4 脉冲信号

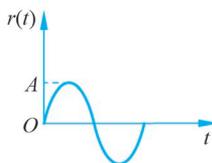


图 3-1-5 正弦信号

正弦信号的拉普拉斯变换为

$$L[A \sin \omega t] = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

海浪对舰艇的扰动力、伺服振动台的输入指令、电源的波动及机械振动的噪声等,均可视为正弦信号。

3.1.2 动态过程与稳态过程

在典型输入信号作用下,任何一个控制系统的时间响应都由动态过程和稳态过程两部分组成。

1. 动态过程

动态过程又称为过渡过程、暂态过程或瞬态过程,是指系统在典型输入信号作用下,输出量从初始状态到接近最终状态的响应过程。由于系统结构和参数选择不同,动态过程一

般表现为衰减、发散或等幅振荡形式。显然,一个可以实际运行的控制系统,其动态过程必须是衰减的,换句话说,系统必须是稳定的。动态过程除提供系统稳定性的信息外,还可以提供响应速度及阻尼情况等信息,这些信息用动态性能描述。

2. 稳态过程

稳态过程又称稳态响应,是指系统在典型输入信号作用下,当时间 t 趋于无穷大时,系统的输出状态。表征系统输出量最终复现输入量的程度,提供系统有关稳态精度的信息,用稳态性能描述。

3.1.3 时域性能指标

稳定是系统能够正常工作的首要条件。只有当动态过程收敛时,研究系统的动态性能才有意义。

1. 动态性能指标

一般认为,阶跃输入对系统而言是较为严峻的工作状态。如果系统在阶跃信号作用下的动态性能满足要求,那么系统在其他形式的信号作用下,其动态性能也是令人满意的。故通常以阶跃响应来衡量系统的动态性能。对于图 3-1-6 所示的单位阶跃响应曲线,其动态性能指标定义如下。

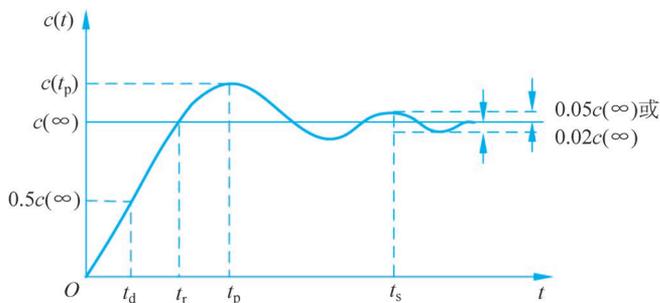


图 3-1-6 单位阶跃响应曲线

- (1) 延迟时间 t_d : 指响应曲线第一次到达稳态值的 50% 所需要的时间。
- (2) 上升时间 t_r : 指响应曲线由稳态值的 10% 上升到稳态值的 90% 所需要的时间。对有振荡的系统, 定义为从零开始第一次上升到稳态值所需要的时间。
- (3) 峰值时间 t_p : 指响应曲线超过稳态值达到第一个峰值(即最大峰值)所需要的时间。
- (4) 调节时间 t_s : 指响应曲线到达并保持在稳态值 $\pm 5\%$ 或 $\pm 2\%$ 误差带内所需要的最短时间。
- (5) 超调量 $\sigma\%$: 指在响应过程中, 超出稳态值的最大偏离量与稳态值 $c(\infty)$ 的百分比, 即

$$\sigma\% = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\%$$

上述各种性能指标中, t_d 、 t_r 和 t_p 反映了动态过程的快速性; $\sigma\%$ 反映了动态过程的平稳性; 而 t_s 则是同时反映系统快速性和阻尼程度的综合性指标。

2. 稳态性能指标

稳态误差 e_{ss} 是描述系统稳态性能的指标, 是指当时间 t 趋于无穷大时, 系统输出响应



视频讲解

的期望值与实际值之差,即

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} [r(t) - c(t)]$$

稳态误差 e_{ss} 反映了控制系统复现或跟踪输入信号的能力,是系统控制精度或抗扰能力的一种度量。



视频讲解

3.2 一阶系统的动态性能分析

由一阶微分方程描述的系统称为一阶系统。一些控制元件及简单的系统,如 RC 网络、发电机励磁控制系统、室温调节系统、水位控制系统等,都可视为一阶系统。有些高阶系统的特性,常可用一阶系统的特性来近似表征。

3.2.1 一阶系统的数学模型

一阶系统的微分方程为

$$T \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t) \quad (3-2-1)$$

式(3-2-1)中, $r(t)$ 和 $c(t)$ 分别为系统的输入信号和输出信号; T 为时间常数,具有时间“秒”的量纲。

在零初始条件下对式(3-2-1)两边取拉普拉斯变换,可得传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$

相应一阶系统的结构图如图 3-2-1 所示。

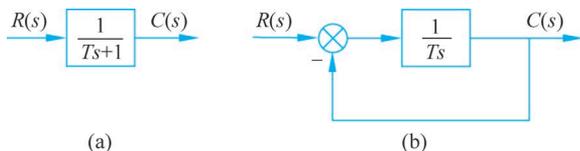


图 3-2-1 一阶系统的结构图

3.2.2 一阶系统的时间响应

下面分析一阶系统在典型输入信号作用下的时间响应,设系统的初始条件为零。

1. 一阶系统的单位阶跃响应

设输入信号为单位阶跃函数 $r(t) = 1(t)$,其拉普拉斯变换为 $R(s) = \frac{1}{s}$,则系统输出的拉普拉斯变换式为

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{1}{Ts + 1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}} \quad (3-2-2)$$

对式(3-2-2)两边取拉普拉斯反变换,可得一阶系统的单位阶跃响应为

$$c(t) = L^{-1}[C(s)] = 1 - e^{-\frac{t}{T}}, \quad t \geq 0 \quad (3-2-3)$$

由式(3-2-3)可见,响应由稳态分量 1 和瞬态分量 $e^{-\frac{t}{T}}$ 两部分组成。当时间 $t \rightarrow \infty$ 时,瞬态分

量衰减为零,稳态输出为 1。显然,单位阶跃响应曲线是一条由零开始,按指数规律上升并最终趋于 1 的曲线,如图 3-2-2 所示。

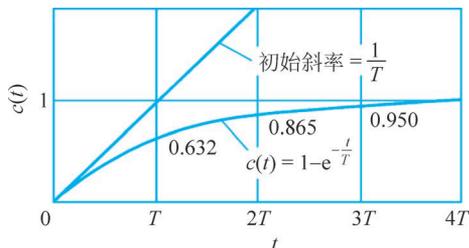


图 3-2-2 一阶系统的单位阶跃响应曲线

一阶系统单位阶跃响应具有以下两个重要特征。

(1) 时间常数 T 是表征系统响应特性的唯一参数,它与输出值的对应关系如表 3-2-1 所示。根据这一特点,可用实验方法测定一阶系统的时间常数,或判定所测系统是否属于一阶系统。

表 3-2-1 时间常数 T 与输出值的对应关系

t	0	T	$2T$	$3T$	$4T$...	∞
$c(t)$	0	0.632	0.865	0.950	0.982	...	1

(2) 响应曲线的斜率初始值等于 $1/T$,即

$$\left. \frac{dc(t)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \right|_{t=0} = \frac{1}{T} \quad (3-2-4)$$

式(3-2-4)表明,一阶系统的单位阶跃响应如果以初始速度等速上升至稳态值 1 时,所需要的时间恰好为 T 。这一特点为用实验方法求解系统的时间常数 T 提供了依据。

根据动态性能指标定义,可知一阶系统的阶跃响应没有超调量 $\sigma\%$ 和峰值时间 t_p ,其主要动态性能指标为调节时间 t_s ,由于 $t=3T$ 时,输出响应可达稳态值的 95%, $t=4T$ 时,输出响应可达稳态值的 98%,故一般取

$$t_s = 3T \quad (\text{取 } \Delta = 5\% \text{ 误差带})$$

$$t_s = 4T \quad (\text{取 } \Delta = 2\% \text{ 误差带})$$

显然,时间常数 T 越小,调节时间 t_s 越短,响应过程的快速性也越好。

例 3-1 已知原系统传递函数为

$$G(s) = \frac{10}{0.5s + 1}$$

现采用如图 3-2-3 所示的负反馈方式,欲将反馈系统的调节时间减小为原来的十分之一,并且保证原放大倍数不变,确定参数 K_H 和 K_0 的取值。

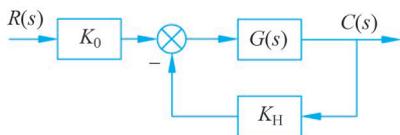


图 3-2-3 反馈系统的结构图

解: 依题意可知原系统的时间常数为 $T = 0.5s$,放大倍数为 $K = 10$ 。要求采用负反馈后系统的时间常数为 $T' = 0.5 \times 0.1 = 0.05$,放大倍数为 $K' = 10$ 。由结构图可知,反馈系统的传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{K_0 G(s)}{1 + K_H G(s)} = \frac{10K_0}{0.5s + 1 + 10K_H} = \frac{\frac{10K_0}{1 + 10K_H}}{\frac{0.5}{1 + 10K_H}s + 1} = \frac{K'}{T's + 1}$$

应有

$$\begin{cases} K' = \frac{10K_0}{1 + 10K_H} = 10 \\ T' = \frac{0.5}{1 + 10K_H} = 0.05 \end{cases}$$

解得 $K_H = 0.9, K_0 = 10$ 。

2. 一阶系统的单位脉冲响应

设输入信号为理想单位脉冲函数 $r(t) = \delta(t)$, 其拉普拉斯变换为 $R(s) = 1$, 则系统输出量的拉普拉斯变换式为

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{1}{Ts + 1} = \frac{\frac{1}{T}}{s + \frac{1}{T}} \quad (3-2-5)$$

对式(3-2-5)两边求拉普拉斯反变换, 可得一阶系统的单位脉冲响应为

$$c(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}, \quad t \geq 0$$

相应的响应曲线如图 3-2-4 所示。由图可见, 一阶系统的单位脉冲响应为一单调衰减的指数曲线, 其斜率初始值为

$$\left. \frac{dc(t)}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{1}{T^2} e^{-\frac{t}{T}} \Big|_{t=0} = -\frac{1}{T^2}$$

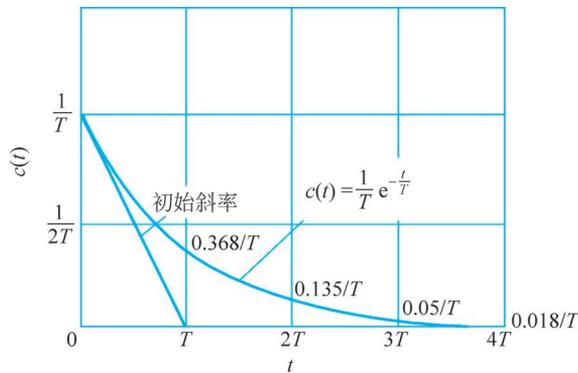


图 3-2-4 一阶系统的单位脉冲响应曲线

3. 一阶系统的单位斜坡响应

设输入信号为单位斜坡函数 $r(t) = t$, 即 $R(s) = \frac{1}{s^2}$ 时, 系统输出量的拉普拉斯变换式为

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{1}{Ts + 1} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T}{s + \frac{1}{T}} \quad (3-2-6)$$

对式(3-2-6)两边取拉普拉斯反变换,可得一阶系统的单位斜坡响应为

$$c(t) = (t - T) + Te^{-\frac{t}{T}}, \quad t \geq 0 \quad (3-2-7)$$

由式(3-2-7)可见,响应由稳态分量 $(t - T)$ 和瞬态分量 $Te^{-\frac{t}{T}}$ 两部分组成。当 $t \rightarrow \infty$ 时,瞬态分量衰减为零,而稳态分量是一个与输入斜坡函数斜率相同但时间滞后 T 的斜坡函数。单位斜坡响应曲线如图3-2-5所示。由图可见,一阶系统在跟踪单位斜坡输入信号时,在位置上存在稳态误差,其值正好等于时间常数 T 。

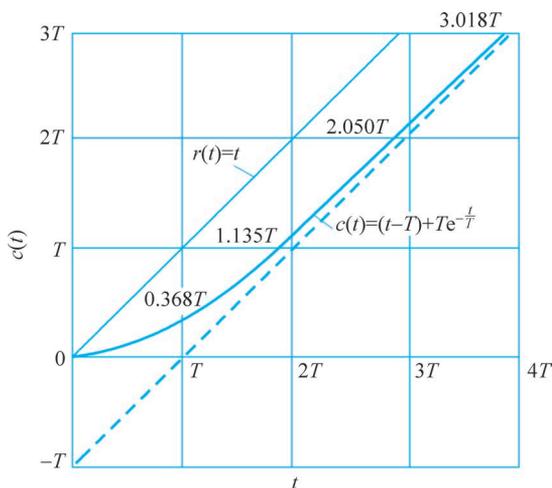


图 3-2-5 一阶系统的单位斜坡响应曲线

4. 一阶系统的单位加速度响应

设输入信号为单位加速度函数 $r(t) = \frac{1}{2}t^2$,即 $R(s) = \frac{1}{s^3}$ 时,系统输出量的拉普拉斯变换式为

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{1}{Ts + 1} \cdot \frac{1}{s^3} = \frac{1}{s^3} - \frac{T}{s^2} + \frac{T^2}{s} - \frac{T^2}{s + \frac{1}{T}} \quad (3-2-8)$$

对式(3-2-8)两边取拉普拉斯反变换,可得一阶系统的单位加速度响应为

$$c(t) = \frac{1}{2}t^2 - Tt + T^2(1 - e^{-\frac{t}{T}}), \quad t \geq 0$$

3.2.3 一阶系统的重要特性

根据上文的分析,可将一阶系统在典型输入信号作用下的输出响应归纳如表3-2-2所示。

表 3-2-2 一阶系统对典型输入信号的输出响应

输入信号	输出响应
$\delta(t)$	$\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}$
$1(t)$	$1 - e^{-\frac{t}{T}}$

续表

输入信号	输出响应
t	$(t-T) + Te^{-\frac{t}{T}}$
$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{2}t^2 - Tt + T^2(1 - e^{-\frac{t}{T}})$

由表 3-2-2 得到如下结论:

(1) 一阶系统只有时间常数 T 这一特征参数。在一定的输入信号作用下, 时间响应 $c(t)$ 由时间常数 T 唯一确定。

(2) 比较一阶系统对脉冲、阶跃、斜坡和加速度输入信号的响应, 可以发现有如下关系

$$r_{\text{脉冲}} = \frac{d}{dt} r_{\text{阶跃}} = \frac{d^2}{dt^2} r_{\text{斜坡}} = \frac{d^3}{dt^3} r_{\text{加速度}} \quad (3-2-9)$$

$$c_{\text{脉冲}} = \frac{d}{dt} c_{\text{阶跃}} = \frac{d^2}{dt^2} c_{\text{斜坡}} = \frac{d^3}{dt^3} c_{\text{加速度}} \quad (3-2-10)$$

式(3-2-9)和式(3-2-10)表明, 系统对输入信号微分(或积分)的响应, 就等于系统对该输入信号响应的微分(或积分), 该结论适用于任何线性定常连续系统。因此, 研究线性定常连续系统的响应时, 不必对每种输入信号的响应都进行计算或求解, 只要求解出其中一种响应, 便可通过上述关系求出其他响应。因此, 在下文对二阶和高阶系统的讨论中, 主要研究系统的阶跃响应。

3.2.4 MATLAB 实现

在 MATLAB 中, 提供了求解各种连续系统时间响应的函数, 其调用格式如下:

```
y = step(num, den, t) % 当不带输出变量 y 时, step 命令可直接绘制阶跃响应曲线. 其中 num 和 % den 分别为系统传递函数的分子和分母多项式的系数按降幂排列构成的系数行向量. t 为选定的 % 仿真时间向量, 一般可由 t = 0:step:end 等步长地产生, 可缺省
y = impulse(num, den, t) % 当不带输出变量 y 时, impulse 命令可直接绘制脉冲响应曲线. t 用于设 % 定仿真时间, 可缺省
y = lsim(num, den, u, t, x0) % 当不带输出变量 y 时, lsim 命令可直接绘制任意输入响应曲线. 其中 u % 表示输入, t 用于设定仿真时间, 可缺省, x0 用于设定初始状态, 缺省时为 0
```

例 3-2 已知一阶系统传递函数为 $G(s) = \frac{1}{s+1}$, 用 MATLAB 绘制系统在单位阶跃、单位脉冲、单位斜坡和单位加速度输入时的输出响应曲线。

解: MATLAB 程序如下。

```
clc;clear
num = [1];
den = [1 1];
sys = tf(num, den);
t = 0:0.01:5;
subplot(2,2,1);step(sys,t);grid
xlabel('t');ylabel('c(t)');title('step response');
subplot(2,2,2);impz(sys,t);grid
xlabel('t');ylabel('c(t)');title('impulse response');
subplot(2,2,3);lsim(sys,t,t,0);grid
xlabel('t');ylabel('c(t)');title('ramp response');
```

```
subplot(2,2,4);lsim(sys,1/2.*t.^2,t,0);grid
xlabel('t');ylabel('c(t)');title('acceleration response');
```

运行结果如图 3-2-6 所示。

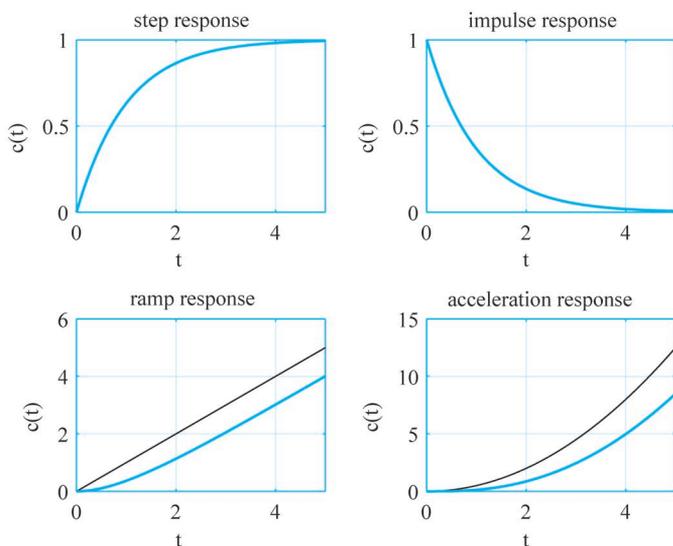


图 3-2-6 一阶系统输出响应曲线

3.3 二阶系统的动态性能分析



视频讲解

由二阶微分方程描述的系统,称为二阶系统。控制工程中二阶系统应用非常广泛,如 RLC 无源网络、弹簧-质量块-阻尼器机械位移系统、忽略电枢电感的电动机等都是典型的二阶系统。许多高阶系统在一定的条件下,常可以近似成二阶系统。因此,深入研究二阶系统的性能,具有重要的实际意义。

3.3.1 二阶系统的数学模型

二阶系统的微分方程为

$$T^2 \frac{d^2 c(t)}{dt^2} + 2\zeta T \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t) \quad (3-3-1)$$

式(3-3-1)中, $r(t)$ 和 $c(t)$ 分别为二阶系统的输入量和输出量; T 为时间常数,单位为s; ζ 为阻尼比(或相对阻尼系数),无量纲。

在零初始条件下,对式(3-3-1)两边取拉普拉斯变换,可得二阶系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1} \quad (3-3-2)$$

引入参数 $\omega_n = 1/T$,称作二阶系统的自然频率(或无阻尼振荡频率),单位为rad/s,则式(3-3-2)可写为

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3-3-3)$$

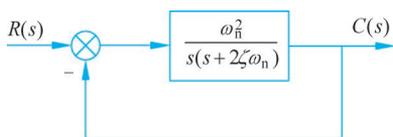


图 3-3-1 二阶系统标准形式的结构图

式(3-3-3)为二阶系统闭环传递函数的标准形式,相应结构图如图 3-3-1 所示。显然,二阶系统的时间响应取决于 ζ 和 ω_n 这两个特征参数。

二阶系统的闭环特征方程为

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

闭环特征根为

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (3-3-4)$$

由式(3-3-4)可见,闭环特征根的性质与阻尼比 ζ 有关。当 ζ 为不同值时,所对应的单位阶跃响应有不同的形式。

3.3.2 二阶系统的单位阶跃响应

1. 无阻尼($\zeta=0$)二阶系统的单位阶跃响应

当 $\zeta=0$ 时,系统处于无阻尼状态。由式(3-3-4)可得闭环特征根为一对共轭纯虚根

$$s_{1,2} = \pm j\omega_n$$

设输入信号为单位阶跃函数,则系统输出量的拉普拉斯变换式为

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega_n^2}$$

两边取拉普拉斯反变换,求得单位阶跃响应为

$$c(t) = 1 - \cos\omega_n t, \quad t \geq 0 \quad (3-3-5)$$

式(3-3-5)表明,无阻尼($\zeta=0$)二阶系统的单位阶跃响应为等幅振荡形式,振荡角频率为 ω_n 。

2. 欠阻尼($0 < \zeta < 1$)二阶系统的单位阶跃响应

当 $0 < \zeta < 1$ 时,系统处于欠阻尼状态。由式(3-3-4)可得闭环特征根为一对共轭复根

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

设输入信号为单位阶跃函数,则输出量的拉普拉斯变换式为

$$\begin{aligned} C(s) &= \Phi(s)R(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2})^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2})^2} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} \cdot \frac{\omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \end{aligned} \quad (3-3-6)$$

其中 $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ 为阻尼振荡频率。式(3-3-6)两边取拉普拉斯反变换,可得单位阶跃响应为

$$\begin{aligned} c(t) &= 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin\omega_d t \right) \\ &= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} (\sqrt{1 - \zeta^2} \cos\omega_d t + \zeta \sin\omega_d t) \end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \beta), \quad t \geq 0 \quad (3-3-7)$$

式(3-3-7)中, $\beta = \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = \arccos \zeta$ 称为阻尼角。阻尼角 β 与阻尼比 ζ 及闭环特征根之间对应关系如图 3-3-2 所示。

由式(3-3-7)可见, 欠阻尼 ($0 < \zeta < 1$) 二阶系统的单位阶跃响应由稳态分量和瞬态分量两部分组成。稳态分量为 1, 瞬态分量是一个随时间 t 增长而衰减的正弦振荡过程, 其衰减速度取决于 $\zeta\omega_n$ 值的大小, 振荡频率为阻尼振荡频率 ω_d 。当 $t \rightarrow \infty$ 时, 瞬态分量衰减为零, 稳态输出为 1。

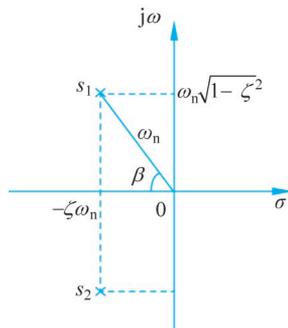


图 3-3-2 β 与 ζ 及闭环特征根的对应关系 ($0 < \zeta < 1$)

3. 临界阻尼 ($\zeta=1$) 二阶系统的单位阶跃响应

当 $\zeta=1$ 时, 系统处于临界阻尼状态。由式(3-3-4)可得闭环特征根为一对相等的负实根

$$s_{1,2} = -\omega_n$$

设输入信号为单位阶跃函数, 则输出量的拉普拉斯变换式为

$$\begin{aligned} C(s) &= \Phi(s)R(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{\omega_n}{(s + \omega_n)^2} - \frac{1}{s + \omega_n} \end{aligned}$$

两边取拉普拉斯反变换, 可得单位阶跃响应为

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (\omega_n t + 1), \quad t \geq 0 \quad (3-3-8)$$

由式(3-3-8)可见, 临界阻尼 ($\zeta=1$) 二阶系统的单位阶跃响应是稳态值为 1 的无振荡单调上升过程。

4. 过阻尼 ($\zeta > 1$) 二阶系统的单位阶跃响应

当 $\zeta > 1$ 时, 系统处于过阻尼状态。由式(3-3-4)可得闭环特征根为两个不相等的负实数根, 即

$$\begin{aligned} s_1 &= -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \\ s_2 &= -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \end{aligned}$$

为便于计算, 令

$$\begin{aligned} s_1 &= -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} = -\frac{1}{T_1} \\ s_2 &= -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} = -\frac{1}{T_2} \end{aligned}$$

称 T_1 、 T_2 为过阻尼二阶系统的时间常数, 且有 $T_1 > T_2$ 。

设输入信号为单位阶跃函数, 则输出量的拉普拉斯变换式为

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{\omega_n^2}{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)} \cdot \frac{1}{s}$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{1}{\frac{T_2}{T_1} - 1} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{T_1}} + \frac{1}{\frac{T_1}{T_2} - 1} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{T_2}}$$

两边取拉普拉斯反变换,可得单位阶跃响应为

$$c(t) = 1 + \frac{e^{-\frac{t}{T_1}}}{\frac{T_2}{T_1} - 1} + \frac{e^{-\frac{t}{T_2}}}{\frac{T_1}{T_2} - 1}, \quad t \geq 0 \quad (3-3-9)$$

式(3-3-9)表明,过阻尼($\zeta > 1$)二阶系统的单位阶跃响应包含两个单调衰减的指数项,响应是非振荡的。

图 3-3-3 为二阶系统在不同阻尼比时的单位阶跃响应曲线。由图可见, ζ 越小,系统响应振荡越激烈。当 $\zeta \geq 1$ 时, $c(t)$ 变成单调上升的非振荡过程。

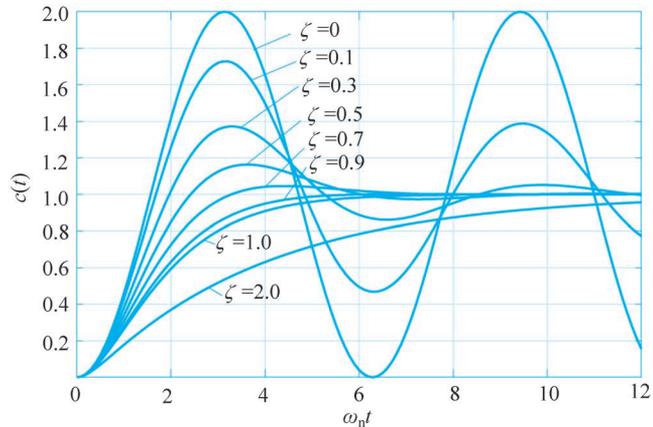


图 3-3-3 二阶系统的单位阶跃响应曲线

表 3-3-1 归纳了二阶系统在不同阻尼比时的闭环特征根的分布及单位阶跃响应的对应关系。

表 3-3-1 二阶系统特征根的分布及单位阶跃响应

阻尼比	特征根	特征根分布	单位阶跃响应
$\zeta = 0$ (无阻尼)	$s_{1,2} = \pm j\omega_n$		

续表

阻尼比	特征根	特征根分布	单位阶跃响应
$0 < \zeta < 1$ (欠阻尼)	$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$		
$\zeta = 1$ (临界阻尼)	$s_{1,2} = -\omega_n$		
$\zeta > 1$ (过阻尼)	$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$		

3.3.3 二阶系统的动态性能指标

1. 欠阻尼二阶系统的动态性能指标

欠阻尼二阶系统的单位阶跃响应为从 0 到 1 的振荡衰减过程,其动态性能指标如下。

1) 上升时间 t_r

根据上升时间的定义,令 $c(t_r) = 1$,由式(3-3-7)得

$$c(t_r) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t_r}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t_r + \beta) = 1$$

即

$$\frac{e^{-\zeta\omega_n t_r}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t_r + \beta) = 0$$

由于 $\frac{e^{-\zeta\omega_n t_r}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \neq 0$, 只能 $\sin(\omega_d t_r + \beta) = 0$, 由此得

$$\omega_d t_r + \beta = \pi$$

因此上升时间为



视频讲解

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = \frac{\pi - \beta}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (3-3-10)$$

由式(3-3-10)可见,当阻尼比 ζ 一定时,阻尼角 β 不变,上升时间 t_r 与 ω_n 成反比;而当无阻尼振荡频率 ω_n 一定时,阻尼比越小,上升时间越短。

2) 峰值时间 t_p

峰值时间是指响应曲线第一次达到峰值所对应的时间。将式(3-3-7)对 t 求导,并令其为零,可得

$$\zeta \omega_n e^{-\zeta \omega_n t_p} \sin(\omega_d t_p + \beta) - \omega_d e^{-\zeta \omega_n t_p} \cos(\omega_d t_p + \beta) = 0$$

整理得

$$\tan(\omega_d t_p + \beta) = \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} = \tan \beta$$

当 $\omega_d t_p = 0, \pi, 2\pi, \dots$ 时, $\tan(\omega_d t_p + \beta) = \tan \beta$ 。根据峰值时间定义,应取 $\omega_d t_p = \pi$, 即有

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (3-3-11)$$

3) 超调量 $\sigma\%$

将式(3-3-11)代入式(3-3-7)可得输出量的最大值为

$$c(t_p) = 1 - \frac{e^{-\pi \zeta / \sqrt{1 - \zeta^2}}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\pi + \beta)$$

根据超调量定义有

$$\sigma\% = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\% = \left[-\frac{e^{-\pi \zeta / \sqrt{1 - \zeta^2}}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\pi + \beta) \right] \times 100\%$$

由于

$$\sin(\pi + \beta) = -\sin \beta = -\sqrt{1 - \zeta^2}$$

因此超调量为

$$\sigma\% = e^{-\pi \zeta / \sqrt{1 - \zeta^2}} \times 100\% \quad (3-3-12)$$

式(3-3-12)表明,超调量 $\sigma\%$ 仅是阻尼比 ζ 的函数,与无阻尼振荡频率 ω_n 无关。 $\sigma\%$ 与 ζ 的关系如图 3-3-4 所示,由图可见,阻尼比 ζ 越大,超调量 $\sigma\%$ 越小,反之亦然。一般地,当 ζ 取 0.4~0.8 时,相应超调量范围为 1.5%~25%。

4) 调节时间 t_s

调节时间 t_s 是指输出量 $c(t)$ 与稳态值 $c(\infty)$ 之间的偏差达到允许范围且不再超出的最短时间,即

$$|c(t) - c(\infty)| \leq c(\infty) \times \Delta \quad (3-3-13)$$

式(3-3-13)中 Δ 一般取 5% 或 2%。

欠阻尼二阶系统的单位阶跃响应的包络线为 $1 \pm \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$, 响应曲线总是在上、下包络线之间,如图 3-3-5 所示。为简便起见,往往采用 $c(t)$ 的包络线近似代替 $c(t)$, 并考虑到

$c(\infty) = 1$, 则式(3-3-13)可写为

$$\left| 1 \pm \frac{e^{-\zeta\omega_n t_s}}{\sqrt{1-\zeta^2}} - 1 \right| \leq \Delta$$

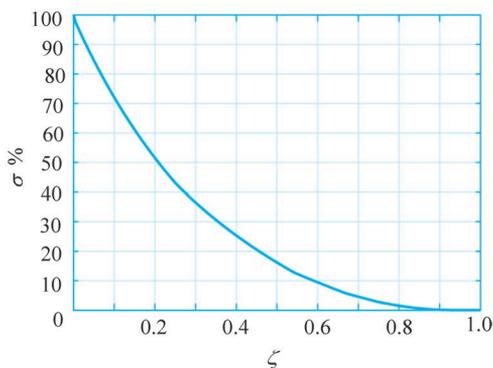


图 3-3-4 $\sigma\%$ 和 ζ 的关系

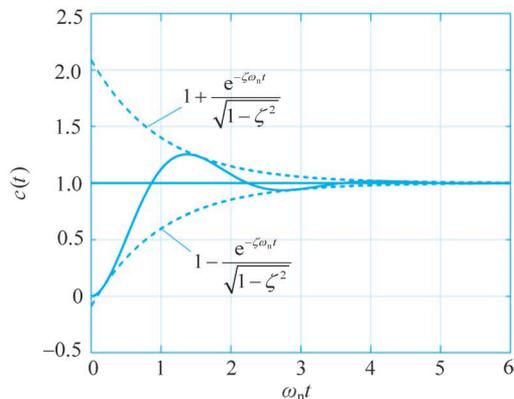


图 3-3-5 调节时间的近似计算

即

$$\frac{e^{-\zeta\omega_n t_s}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \leq \Delta$$

两边取自然对数得

$$t_s \geq -\frac{1}{\zeta\omega_n} \ln(\Delta\sqrt{1-\zeta^2}) \quad (3-3-14)$$

式(3-3-14)分别取 $\Delta = 5\%$ 或 2% , 并考虑到较小的阻尼比 ζ 时, $\sqrt{1-\zeta^2} \approx 1$, 则

$$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n} \quad (\text{取 } \Delta = 5\% \text{ 误差带}) \quad (3-3-15)$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad (\text{取 } \Delta = 2\% \text{ 误差带}) \quad (3-3-16)$$

式(3-3-15)和式(3-3-16)表明, 调节时间与闭环极点的实部数值成反比, 即闭环极点距虚轴的距离越远, 系统的调节时间越短。

值得注意的是, 采用包络线代替实际响应估算调节时间, 所得结果略偏保守。图 3-3-6 给出了当 $T = 1/\omega_n$ 时, 调节时间 t_s 与阻尼比 ζ 之间的关系曲线。可以看出, 对于 5% 误差带, 当 $\zeta = 0.707$ 时, 调节时间最短, 即快速性最好, 同时超调量约为 4.3% , 平稳性也较好, 故称 $\zeta = 0.707$ 为最佳阻尼比。

上文介绍的 t_r 、 t_p 、 t_s 和 $\sigma\%$ 与二阶系统特征参数 ζ 和 ω_n 之间的关系是分析二阶系统动态性能的基础。若已知 ζ 和 ω_n 的值, 则可以计算出各个性能指标。另一方面, 也可以根据对系统动态性能的要求, 由性能指标确定二阶系统的特征参数 ζ 和 ω_n 。

例 3-3 已知二阶系统的结构图如图 3-3-7 所示。当输入信号为单位阶跃函数时, 计算系统响应的上升时间、峰值时间、调节时间和超调量。

解: 如图 3-3-7 所示, 系统的闭环传递函数为

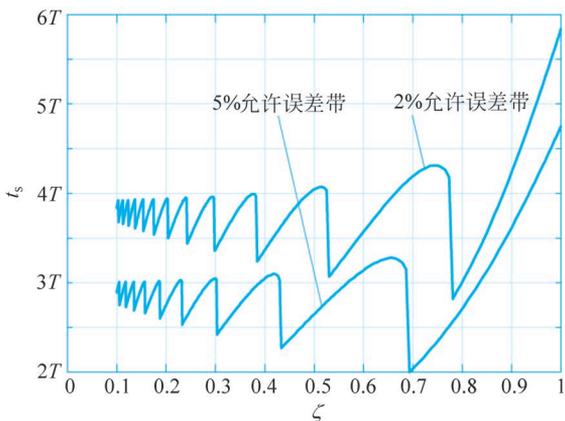


图 3-3-6 t_s 与 ζ 的关系曲线 ($0 < \zeta < 1$)

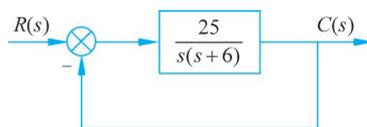


图 3-3-7 二阶系统的结构图

$$\Phi(s) = \frac{25}{s(s+6)} \bigg/ \left(1 + \frac{25}{s(s+6)} \right) = \frac{25}{s^2 + 6s + 25}$$

将其与二阶系统标准式 $\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ 相比较, 可得

$$\omega_n = \sqrt{25} = 5 \text{ rad/s}, \quad \zeta = \frac{6}{2\omega_n} = 0.6$$

因此

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = \frac{\pi - \arccos \zeta}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{\pi - 0.927}{4} = 0.55 \text{ s}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{\pi}{4} = 0.79 \text{ s}$$

$$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n} = \frac{3}{0.6 \times 5} = 1 \text{ s} (\Delta = 5\%)$$

$$\sigma\% = e^{-\pi\zeta / \sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% = e^{-0.6\pi / \sqrt{1-0.6^2}} \times 100\% = 9.48\%$$

例 3-4 已知某二阶系统的结构图和单位阶跃响应曲线分别如图 3-3-8(a) 和图 3-3-8(b) 所示, 试确定系统参数 K 、 T 和 α 。

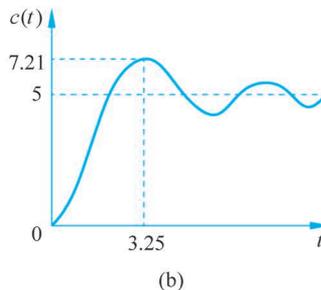
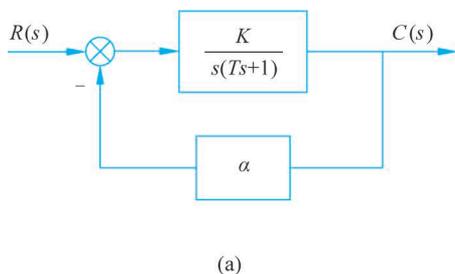


图 3-3-8 某二阶系统的结构图及单位阶跃响应曲线

解：如图 3-3-8 所示，系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Ts^2 + s + \alpha K} = \frac{\frac{K}{T}}{s^2 + \frac{s}{T} + \frac{\alpha K}{T}}$$

由拉普拉斯变换终值定理可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{K}{s(Ts^2 + s + \alpha K)} = \frac{1}{\alpha} = 5$$

求得 $\alpha = 0.2$ 。

由

$$\sigma \% = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% = \frac{7.21-5}{5} = 44.2\%$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = 3.25$$

解得 $\zeta = 0.252, \omega_n = 1 \text{ rad/s}$ 。与二阶系统传递函数标准式比较，得

$$2\zeta\omega_n = \frac{1}{T}, \quad \omega_n^2 = \frac{\alpha K}{T}$$

因此有 $T = 1.98, K = 9.9$ 。

2. 过阻尼二阶系统的动态性能指标

当 $\zeta > 1$ 时，过阻尼二阶系统的单位阶跃响应是从 0 到 1 的单调上升过程，超调量 $\sigma\%$ 为 0，用调节时间 t_s 即可描述系统的动态性能。然而，由式(3-3-9)确定 t_s 的表达式比较困难。一般可由式(3-3-9)取相对变量 t_s/T_1 及 T_1/T_2 ，经计算机解算后制成曲线或表格以供查用。图 3-3-9 是取 5% 误差带的调节时间特性曲线，根据已知的 T_1 及 T_2 值在图 3-3-9 上可以查出相应的 t_s 。

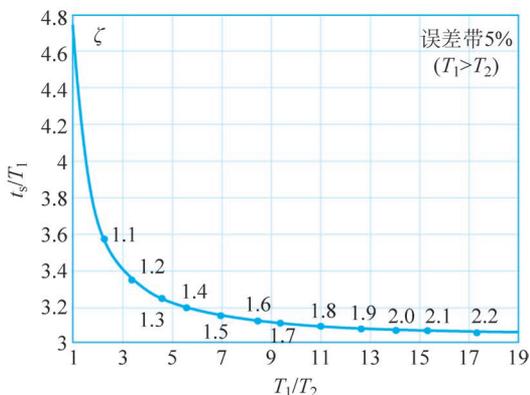


图 3-3-9 过阻尼二阶系统的调节时间特性曲线

由图 3-3-9 可以看出，当 $T_1 = T_2$ 即 $\zeta = 1$ 的临界情况，调节时间为 $t_s = 4.75T_1$ ；当 $T_1 > 4T_2$ 即过阻尼二阶系统第二个闭环极点的数值比第一个闭环极点的数值大 4 倍以上时，系统可等效为具有 $-1/T_1$ 闭环极点的一阶系统，此时取调节时间为 $t_s \approx 3T_1$ ，相对误差不超过 10%。

在控制工程中,通常都希望控制系统具有适度的阻尼、较快的响应速度和较短的调节时间。因此二阶控制系统的设计,一般取 $\zeta=0.4\sim 0.8$,使系统处于欠阻尼状态。对于一些不允许出现超调(如液位控制系统,超调会导致液体溢出)或大惯性(如加热装置)的控制系统,则可取 $\zeta>1$,使系统处于过阻尼状态。

3.3.4 二阶系统性能的改善

通过上文二阶系统各项动态性能指标的计算式可以看出,各指标之间是有矛盾的。如上升时间和超调量,即响应速度和阻尼程度不能同时达到满意的结果。因此为了兼顾响应的快速性和平稳性以及系统的动态和稳态性能要求,必须研究其他控制方式,以改善二阶系统的性能。比例-微分控制和测速反馈是常用的两种改善二阶系统性能的方法。

1. 比例-微分控制

比例-微分控制的二阶系统结构图如图 3-3-10 所示。图中 $E(s)$ 为误差信号, T_d 为微分时间常数。

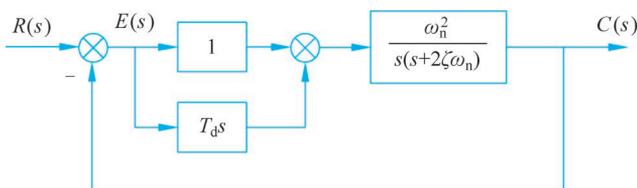


图 3-3-10 比例-微分控制系统

系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{\omega_n^2 (T_d s + 1)}{s(s + 2\zeta\omega_n)} = \frac{\omega_n}{2\zeta} \cdot \frac{(T_d s + 1)}{s(s/2\zeta\omega_n + 1)}$$

相应开环增益为

$$K = \frac{\omega_n}{2\zeta}$$

闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2 (T_d s + 1)}{s^2 + (2\zeta\omega_n + \omega_n^2 T_d)s + \omega_n^2} \quad (3-3-17)$$

参照式(3-3-3)有

$$2\zeta_d \omega_n = 2\zeta\omega_n + \omega_n^2 T_d$$

等效阻尼比 ζ_d 为

$$\zeta_d = \zeta + \frac{1}{2}\omega_n T_d \quad (3-3-18)$$

由以上分析可知,引入比例-微分控制后,系统的无阻尼振荡频率 ω_n 不变,等效阻尼比加大($\zeta_d > \zeta$),从而使系统的调节时间缩短,超调量减小,改善了系统的动态性能。

另外,由式(3-3-17)可以看出,引入比例-微分控制后,系统闭环传递函数出现了附加闭环零点 $s = -1/T_d$ 。闭环零点的存在,将会使系统响应速度加快,削弱阻尼的作用,因此选择微分时间常数 T_d 时,要折中考虑闭环零点对系统响应速度和阻尼程度的影响。

2. 测速反馈控制

测速反馈控制的二阶系统结构如图 3-3-11 所示,图中 $E(s)$ 为误差信号, K_f 为输出量的速度反馈系数。

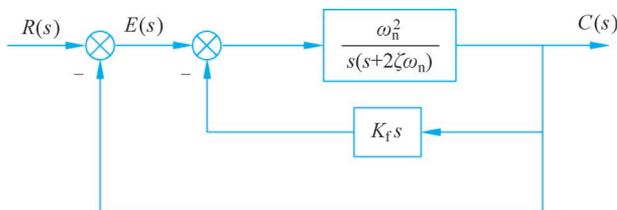


图 3-3-11 测速反馈控制系统

由图 3-3-11 可得系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n) + \omega_n^2 K_f s} = \frac{\omega_n}{2\zeta + \omega_n K_f} \cdot \frac{1}{s[s/(2\zeta\omega_n + \omega_n^2 K_f) + 1]}$$

相应的开环增益为

$$K = \frac{\omega_n}{2\zeta + \omega_n K_f}$$

闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + (2\zeta\omega_n + \omega_n^2 K_f)s + \omega_n^2}$$

参照式(3-3-3)有

$$2\zeta_d \omega_n = 2\zeta\omega_n + \omega_n^2 K_f$$

等效阻尼比 ζ_d 为

$$\zeta_d = \zeta + \frac{1}{2}\omega_n K_f \quad (3-3-19)$$

由以上分析可知,引入测速反馈控制后,同样使系统的无阻尼振荡频率 ω_n 不变、等效阻尼比增大($\zeta_d > \zeta$),从而达到了改善系统动态性能的目的。由于测速反馈没有附加闭环零点的影响,因此与比例-微分控制对系统动态性能的改善程度是不同的。此外测速反馈的加入,会使系统开环增益降低(见 3.6 节),使得系统在跟踪斜坡输入时的稳态误差有所增加。因此在设计测速反馈控制系统时,一般可适当增大原系统的开环增益,以补偿测速反馈控制引起的开环增益损失。

3. 两种控制方案的比较

综上所述,比例-微分控制与测速反馈控制都可以改善二阶系统的动态性能,但二者改善系统性能的机理及应用场合是不同的,现简述如下。

(1) 比例-微分环节位于系统的输入端,微分作用对输入噪声有明显的放大作用。当输入端噪声严重时,不宜选用比例-微分控制。由于微分器的输入信号是低能量的误差信号,要求比例-微分控制具有足够的放大作用,为了不明显恶化信噪比,需选用高质量的前置放大器;测速反馈控制对输入端噪声有滤波作用,同时测速发电机的输入信号能量水平较高,因此对系统组成元件没有过高的质量要求,使用场合比较广泛。

(2) 比例-微分控制对系统的开环增益和无阻尼振荡频率均无影响;测速反馈控制虽不

影响无阻尼振荡频率, 但会降低开环增益, 使得系统稳态误差有所增加, 然而测速反馈控制能削弱内部回路中被包围部件的非线性特性、参数漂移等不利因素的影响。

(3) 比例-微分控制相当于在系统中加入了实零点, 可以加快上升时间。在相同阻尼比的条件下, 比例-微分控制系统的超调量大于测速反馈控制系统的超调量。

(4) 从实现角度看, 比例-微分控制的线路结构简单, 成本较低; 而测速反馈控制部件则较昂贵。

例 3-5 某一位置随动系统如图 3-3-12(a) 所示, 其中 $K=10$ 。在该系统中引入测速反馈控制, 其结构图如图 3-3-12(b) 所示。若要系统的等效阻尼比为 $\zeta_d=0.5$, 试确定反馈系数 K_f 的值, 并计算系统在引入测速反馈控制前后的调节时间和超调量。

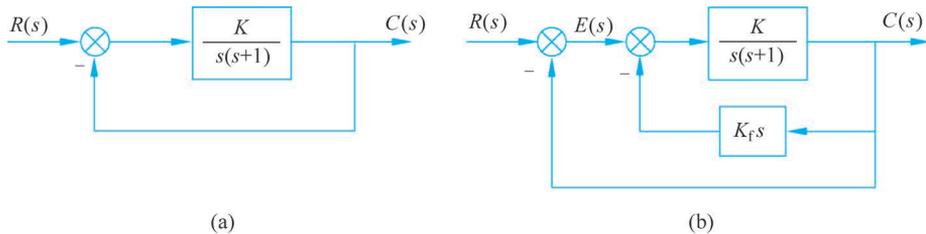


图 3-3-12 位置随动系统结构图

解: 由图 3-3-12(a) 可得原系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{10}{s^2 + s + 10}$$

与二阶系统标准式相比较, 可得

$$\omega_n = \sqrt{10} = 3.16 \text{ rad/s}, \quad \zeta = \frac{1}{2\omega_n} = 0.158$$

已知等效阻尼比 $\zeta_d=0.5$, 由式(3-3-19)得

$$K_f = \frac{2(\zeta_d - \zeta)}{\omega_n} = 0.216$$

当 $\zeta=0.158$ 时, 即未引入测速反馈控制的系统调节时间和超调量分别为

$$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n} = \frac{3}{0.158 \times 3.16} = 6.01 \text{ s} (\Delta = 5\%)$$

$$\sigma\% = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% = e^{-3.14 \times 0.158 / \sqrt{1-0.158^2}} \times 100\% = 60.5\%$$

当 $\zeta_d=0.5$ 时, 即引入测速反馈控制的系统调节时间和超调量分别为

$$t_s = \frac{3}{\zeta_d\omega_n} = \frac{3}{0.5 \times 3.16} = 1.90 \text{ s} (\Delta = 5\%)$$

$$\sigma\% = e^{-\pi\zeta_d/\sqrt{1-\zeta_d^2}} \times 100\% = e^{-3.14 \times 0.5 / \sqrt{1-0.5^2}} \times 100\% = 16.3\%$$

上述计算表明, 引入测速反馈控制后, 系统的调节时间减小, 超调量下降, 动态性能得到明显改善。

3.3.5 MATLAB 实现

例 3-6 某一位置随动系统如图 3-3-12(a) 所示, 用 MATLAB 绘制开环增益 K 分别为

10, 0.5, 0.09 时系统的单位阶跃响应曲线。

解: MATLAB 程序如下。

```

clc;clear
t = [0:0.2:25];
k = [10,0.5,0.09];
for i = 1:length(k)
    num = k(i);
    den = [1,1,0];
    G = tf(num,den);
    sys = feedback(G,1,-1);
    step(sys,t);
    hold on;
end
gtext('k = 10');
gtext('k = 0.5');
gtext('k = 0.09');
xlabel('t/s');ylabel('c(t)');title('step response');grid on

```

执行该程序,运行结果如图 3-3-13 所示。由图可见,降低开环增益 K 能使阻尼比增大,超调量下降,可改善系统动态性能,但开环增益 K 降低太多,系统成为过阻尼二阶系统,过渡过程过于缓慢,这也是不希望的。

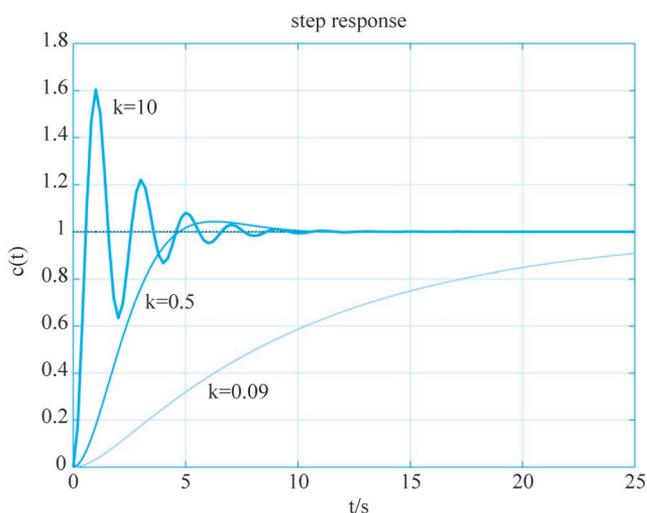


图 3-3-13 单位阶跃响应曲线

例 3-7 某控制系统如图 3-3-14(a) 所示,其中 $K=5$, $T=1.67\text{s}$ 。分别采用比例-微分和测速反馈控制,系统结构分别如图 3-3-14(b) 和图 3-3-14(c) 所示,其中 $K_t=0.38$ 。利用 MATLAB 对比分析系统单位阶跃输入作用下的动态性能。

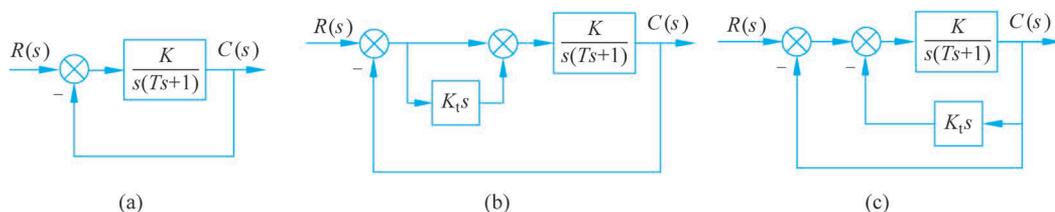


图 3-3-14 系统结构图

解：MATLAB 程序如下。

```

clc;clear
t = [0:0.1:20];
num = [5];den = [1.67 1 0];
G0 = tf(num,den);
sys0 = feedback(G0,1,-1);           % 原系统的闭环传递函数
step(sys0,'r-',t);hold on         % 原系统的单位阶跃响应
num1 = [0.38 1];den1 = [1];
G1 = tf(num1,den1);
sys1 = feedback(G0 * G1,1,-1);     % 引入比例-微分控制后系统的闭环传递函数
step(sys1,'b-',t);hold on         % 引入比例-微分控制后系统的单位阶跃响应
sys2 = feedback(G0,G1,-1);        % 引入测速反馈控制后系统的闭环传递函数
step(sys2,'k--',t);hold on       % 引入测速反馈控制后系统的单位阶跃响应
legend('原系统','引入比例-微分','引入测速反馈');
xlabel('t/s');ylabel('c(t)');title('step response');grid on

```

执行该程序,运行结果如图 3-3-15 所示,同时记录各系统的性能指标如表 3-3-2 所示。

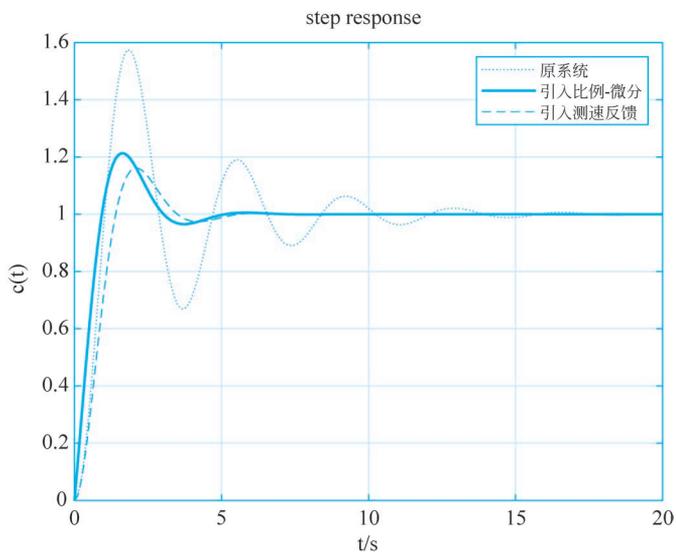


图 3-3-15 各系统的单位阶跃响应曲线

表 3-3-2 各系统的性能指标

性能指标	$\sigma\%$	t_r/s	t_p/s	$t_s/s(\Delta=2\%)$
原系统	57.4%	1.03	1.8	13.1
引入比例-微分控制	21.3%	0.94	1.6	4.39
引入测速反馈控制	16.2%	1.41	2.1	4.66

可以看出,采用比例-微分控制和测速反馈控制后,调节时间减小,超调量下降,系统的动态性能得到明显改善。引入比例-微分控制后,系统闭环传递函数出现了附加零点,使得在相同阻尼比的条件下,比例-微分控制系统的超调量大于测速反馈控制系统的超调量。

3.4 高阶系统的动态性能分析

由三阶或三阶以上微分方程描述的系统,称为高阶系统。在控制工程中,绝大多数的系统是高阶系统。确定高阶系统的动态性能指标是比较复杂的,工程上常利用闭环主导极点的概念对高阶系统进行近似分析或直接应用 MATLAB 软件进行高阶系统分析。

3.4.1 高阶系统的数学模型

高阶系统的微分方程式为

$$\begin{aligned} & a_n \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dc(t)}{dt} + a_0 c(t) \\ & = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t), \quad n \geq m \end{aligned} \quad (3-4-1)$$

式(3-4-1)中, $n \geq 3$, 参数 a_j ($j=1, 2, \dots, n$)、 b_i ($i=1, 2, \dots, m$) 为与系统结构和参数有关的常系数。

设初始条件为零,对式(3-4-1)两边取拉普拉斯变换,可求出系统的闭环传递函数

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \\ &= \frac{K(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)} \end{aligned} \quad (3-4-2)$$

式(3-4-2)中, $K = \frac{b_m}{a_n}$; s_j ($j=1, 2, \dots, n$) 为系统的闭环极点; z_i ($i=1, 2, \dots, m$) 为系统的闭环零点。

3.4.2 高阶系统的单位阶跃响应

设闭环系统的 n 个闭环极点中,有 n_1 个实数极点、 n_2 对共轭复数极点,且闭环极点互不相等。由于一对共轭复数极点形成一个 s 的二阶项,因此,式(3-4-2)的因式包括一阶项和二阶项,故可写为

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{l=1}^{n_1} (s - s_l) \prod_{k=1}^{n_2} (s^2 + 2\zeta_k \omega_k s + \omega_k^2)} \quad (3-4-3)$$

式(3-4-3)中, $n_1 + 2n_2 = n$ 。

当输入为单位阶跃信号时,高阶系统输出量的拉普拉斯变换式为

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{l=1}^{n_1} (s - s_l) \prod_{k=1}^{n_2} (s^2 + 2\zeta_k \omega_k s + \omega_k^2)} \cdot \frac{1}{s} \quad (3-4-4)$$

将式(3-4-4)展开成部分分式,可得

$$C(s) = \frac{A_0}{s} + \sum_{l=1}^{n_1} \frac{A_l}{s-s_l} + \sum_{k=1}^{n_2} \frac{B_k s + C_k}{s^2 + 2\zeta_k \omega_k s + \omega_k^2} \quad (3-4-5)$$

式(3-4-5)中, A_0 为 $C(s)$ 在原点处的留数, A_l 为 $C(s)$ 在实数极点 s_l 处的留数, 其值为

$$A_0 = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot C(s) = \frac{b_0}{a_0}$$

$$A_l = \lim_{s \rightarrow s_l} (s - s_l) \cdot C(s)$$

B_k 和 C_k 为与 $C(s)$ 在闭环复数极点 $s = -\zeta_k \omega_k \pm j\omega_k \sqrt{1-\zeta_k^2}$ 处的留数有关的常系数。

对式(3-4-5)两边取拉普拉斯反变换, 可得高阶系统的单位阶跃响应为

$$c(t) = A_0 + \sum_{l=1}^{n_1} A_l e^{s_l t} + \sum_{k=1}^{n_2} B_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \cos(\omega_k \sqrt{1-\zeta_k^2}) t +$$

$$\sum_{k=1}^{n_2} \frac{C_k - B_k \zeta_k \omega_k}{\omega_k \sqrt{1-\zeta_k^2}} e^{-\zeta_k \omega_k t} \sin(\omega_k \sqrt{1-\zeta_k^2}) t, \quad t \geq 0 \quad (3-4-6)$$

由式(3-4-6)可以得到以下结论。

(1) 高阶系统的单位阶跃响应包含稳态分量和瞬态分量两部分。其中稳态分量 A_0 与时间 t 无关, 瞬态分量与时间 t 有关, 包括指数项、正弦项和余弦项。

(2) 若所有闭环极点都分布在 s 左半平面, 即如果所有实数极点为负值, 所有共轭复数极点具有负实部, 当时间 t 趋于无穷大时, 瞬态分量衰减为零, 系统稳态输出为 A_0 。这种情况下高阶系统是稳定的。稳定是系统能正常工作的首要条件, 有关这方面的内容, 将在 3.5 节中进行较详细的阐述。

(3) 瞬态分量衰减的快慢取决于闭环极点离虚轴的距离。闭环极点离虚轴越远, 相应瞬态分量衰减越快, 对系统动态响应影响越小。反之, 闭环极点离虚轴越近, 相应的瞬态分量衰减越慢, 对动态响应影响越大。

(4) 瞬态分量的幅值(即部分分式系数)与闭环极点、零点在 s 平面中的位置有关。若某极点离原点很远, 那么相应瞬态分量幅值很小; 若某极点靠近闭环零点又远离原点及其他极点, 相应瞬态分量的幅值也很小。工程上常把处于这种情况的闭环零点、极点, 称为偶极子。偶极子对瞬态分量影响较小的现象, 称之为零极点相消; 若某极点远离零点又接近原点, 相应瞬态分量幅值大, 对系统动态响应影响较大。

3.4.3 高阶系统的分析方法

由以上高阶系统单位阶跃响应的求解过程和讨论可知, 对高阶系统的分析是十分烦琐的事情。为简单和方便起见, 在控制工程中常常利用下面介绍的闭环主导极点对高阶系统进行近似分析。实践表明, 这种近似分析方法是行之有效的。

对于稳定的高阶系统, 如果存在离虚轴最近的闭环极点, 且其附近没有闭环零点, 而其他闭环极点又远离虚轴, 那么距虚轴最近的闭环极点所对应的瞬态分量, 随时间的推移衰减缓慢, 在系统的动态响应过程中起主导作用, 这样的闭环极点称为闭环主导极点。除闭环主导极点外, 其他闭环极点由于其对应的瞬态分量随时间的推移迅速衰减, 对系统的动态响应过程影响甚微, 因而统称为非主导极点。实际工程中, 一般非主导极点的实部比闭环主导极



点的实部大 6 倍以上时,非主导极点的作用可以忽略。有时甚至比主导极点的实部大 2~3 倍的非主导极点也可忽略不计。

在对高阶系统进行分析时,常根据闭环主导极点的概念将高阶系统近似为一、二阶系统进行分析。同样,在设计高阶系统时,也常常利用主导极点的概念选择系统参数,使系统具有一对共轭主导极点,以便于近似地按二阶系统的性能指标设计系统。

若高阶系统不满足应用闭环主导极点的条件,则高阶系统不能近似为一、二阶系统。这时高阶系统的动态过程必须具体求解。应当指出,利用 MATLAB 软件,可以很容易求出高阶系统的输出响应及绘制出相应的响应曲线,这给高阶系统的分析和设计带来了方便。

例 3-8 某控制系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{2.688}{(s + 4.2)(s^2 + 0.8s + 0.64)}$$

估算系统的动态性能指标 t_s 和 $\sigma\%$ 。

解: 这是一个三阶系统,求得 3 个闭环极点分别为 $s_{1,2} = -0.4 \pm j0.69$, $s_3 = -4.2$ 。该系统的实数极点与复数极点距离虚轴距离之比为 10.5,故复数极点 $s_{1,2}$ 可视为闭环主导极点,因此该三阶系统可以用具有这一对复数极点的二阶系统近似。近似的二阶系统闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{0.8^2}{(s + 0.4 + j0.69)(s + 0.4 - j0.69)} = \frac{0.8^2}{s^2 + 0.8s + 0.8^2}$$

注意近似后的二阶系统应与原高阶系统具有相同的闭环增益,以保证阶跃响应终值相同。将其与二阶系统标准式相比较,可得 $\omega_n = 0.8 \text{ rad/s}$, $\zeta = 0.5$ 。

由二阶系统性能指标计算公式,可求出

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{0.5 \times 0.8} = 10 \text{ s} (\Delta = 2\%)$$

$$\sigma\% = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% = e^{-0.5\pi/\sqrt{1-0.5^2}} \times 100\% = 16.3\%$$

3.4.4 MATLAB 实现

例 3-9 利用 MATLAB 绘制例 3-8 降阶前后系统的单位阶跃响应曲线,并比较降阶前后系统的性能指标。

解: MATLAB 程序如下。

```
clc;clear
t = [0:0.1:25];
tf1 = tf([0,2.688],conv([1,4.2],[1,0.8,0.64]));
step(tf1,'b-',t);hold on;
tf2 = tf(0.64,[1,0.8,0.64]);
step(tf2,'r--',t);
legend('原系统阶跃响应','降阶系统阶跃响应');
xlabel('t/s');ylabel('c(t)');title('step response');grid on
```

执行命令后,运行结果如图 3-4-1 所示,同时记录降阶前后系统的性能指标如表 3-4-1 所示。可以看出,当系统存在一对闭环主导极点时,三阶系统可降阶为二阶系统进行分析,其结果不会带来太大的误差。

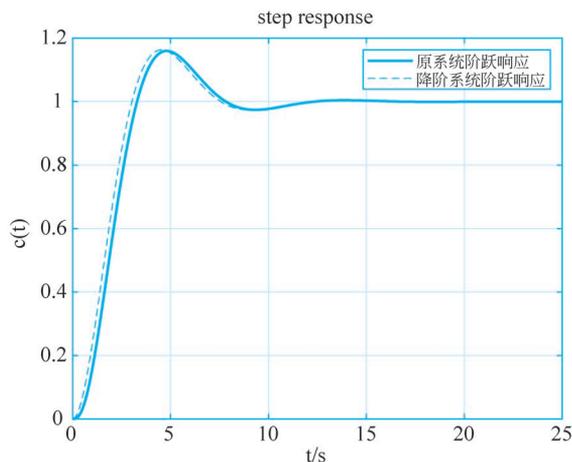


图 3-4-1 单位阶跃响应曲线

表 3-4-1 降阶前后系统的性能指标

性能指标	σ	t_r/s	t_p/s	$t_s/s(\Delta=2\%)$
原三阶系统	16.0%	3.29	4.8	10.3
二阶系统	16.3%	3.02	4.5	10.1

例 3-10 某控制系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s^3 + 7s^2 + 24s + 24}{s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24}$$

用 MATLAB 求解该系统的单位阶跃响应表达式。

解：当输入为单位阶跃信号时，系统输出量的拉普拉斯变换式为

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{s^3 + 7s^2 + 24s + 24}{s^5 + 10s^4 + 35s^3 + 50s^2 + 24s}$$

MATLAB 程序如下：

```
clc;clear
num = [1,7,24,24];
den = [1,10,35,50,24,0];
[r,p,k] = residue(num,den)
```

执行该程序，运行结果如下：

```
r =
-1.0000
 2.0000
-1.0000
-1.0000
 1.0000
p =
-4.0000
-3.0000
-2.0000
-1.0000
 0
k =
[]
```

即系统输出量的部分分式展开式为

$$C(s) = -\frac{1}{s+4} + \frac{2}{s+3} - \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s}$$

因此该系统的单位阶跃响应时域表达式为

$$c(t) = -e^{-4t} + 2e^{-3t} - e^{-2t} - e^{-t} + 1$$

3.5 线性系统的稳定性分析

稳定是控制系统的重要性能,也是系统能够正常运行的首要条件。分析系统的稳定性,并提出确保系统稳定的条件,是自动控制理论的基本任务之一。本节主要研究线性系统稳定性的概念、稳定的充要条件和稳定的代数判定方法。

3.5.1 稳定性的概念

为了建立稳定性的概念,首先通过一个直观的例子来说明稳定的含义。图 3-5-1(a)表示小球在一个光滑的凹面里,原平衡位置为 A,在外界扰动作用下,小球偏离了原平衡位置 A,当外界扰动消失后,小球在重力和阻力的作用下,经过来回几次减幅摆动,最终可以回到原平衡位置 A,称具有这种特性的平衡是稳定的。反之,若小球处于图 3-5-1(b)所示的平衡位置 B,在外界扰动作用下偏离了原平衡位置 B,当外界扰动消失后,无论经过多长时间,小球也不可能再回到原平衡位置 B,称具有这种特性的平衡是不稳定的。

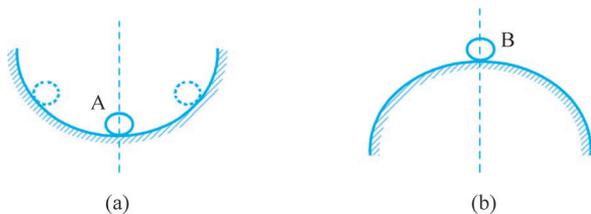


图 3-5-1 小球的平衡

通过上文关于稳定性的直观示例可以看出,任何系统在扰动作用下都会偏离平衡状态,产生初始偏差。当扰动消失后,若系统能以足够的准确度恢复到原来的平衡状态,则系统是稳定的;若系统在扰动作用消失后不能恢复原来的平衡状态,且偏差越来越大,则系统是不稳定的。由此可知,稳定性是表征系统在扰动消失后自身的一种恢复能力,因而它是系统的一种固有特性。对于线性系统而言,稳定性仅取决于系统的结构和参数,而与初始条件及外作用无关。

3.5.2 线性系统稳定的充分必要条件

设线性系统在零初始条件下,作用一个理想单位脉冲 $\delta(t)$,这时系统的输出增量为脉冲响应 $c(t)$ 。这相当于系统在扰动信号作用下,输出信号偏离原平衡点的问题。若 $t \rightarrow \infty$ 时,脉冲响应

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 0 \quad (3-5-1)$$

即输出增量收敛于原平衡点,则线性系统是稳定的。

由于理想单位脉冲 $\delta(t)$ 的拉普拉斯变换等于 1, 所以系统的单位脉冲响应即为闭环传递函数的拉普拉斯反变换。如同 3.4 节所假设的那样, 若系统的闭环传递函数有 n_1 个实数极点、 n_2 对共轭复数极点, 且闭环极点彼此不相等, 则闭环传递函数如式(3-4-3)所示, 对式(3-4-3)求拉普拉斯反变换, 即得系统的单位脉冲响应为

$$c(t) = \sum_{l=1}^{n_1} A_l e^{s_l t} + \sum_{k=1}^{n_2} B_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \cos(\omega_k \sqrt{1-\zeta_k^2}) t + \sum_{k=1}^{n_2} \frac{C_k - B_k \zeta_k \omega_k}{\omega_k \sqrt{1-\zeta_k^2}} e^{-\zeta_k \omega_k t} \sin(\omega_k \sqrt{1-\zeta_k^2}) t, \quad t \geq 0 \quad (3-5-2)$$

由式(3-5-2)可见, 当且仅当系统的特征根全部具有负实部时, 式(3-5-1)才成立, 即系统稳定; 若特征根中有一个或一个以上正实部根, 脉冲响应 $c(t)$ 趋于发散, 表明系统不稳定; 若特征根中具有一个或一个以上零实部根, 而其余的特征根均具有负实部, 脉冲响应 $c(t)$ 趋于常数或趋于等幅振荡, 则系统临界稳定, 在工程上认为是不稳定的。

综上所述, 线性系统稳定的充分必要条件是: 闭环系统特征方程的所有根均具有负实部, 也就是说, 系统的全部闭环极点都位于 s 左半平面。

3.5.3 劳斯稳定判据

由线性系统稳定的充分必要条件可知, 只要能够求出系统的全部特征根, 就可以判定系统的稳定性。但对于三阶或三阶以上特征方程, 求根是比较困难的。劳斯(E. J. Routh)于 1877 年提出了由特征方程的系数, 直接利用代数方法判别特征根的分布位置, 以此判别系统是否稳定, 这就是劳斯稳定判据。

设线性系统的闭环特征方程为

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0, \quad a_n > 0 \quad (3-5-3)$$

式(3-5-3)中的系数均为实数。

1. 稳定的必要条件

线性系统稳定的必要条件是式(3-5-3)中各项系数均为正数。这是因为一个具有实系数的 s 多项式, 总可以分解成一次因子和二次因子两种类型, 即 $(s+a)$ 和 (s^2+bs+c) , 式中 a 、 b 和 c 都是实数。一次因子具有实根, 而二次因子则是复根。只有当 b 和 c 都是正值时, 因子 (s^2+bs+c) 才能具有负实部的根。所有因子中的常数 a 、 b 和 c 都是正值是所有根都具有负实部的必要条件。这些只包含正系数的一次因子和二次因子相乘时, 所得多项式的系数都是正数。因此, 式(3-5-3)若缺项或具有负的系数, 系统便是不稳定的。

2. 劳斯稳定判据

如果式(3-5-3)中所有系数均为正值, 根据特征方程的系数列写劳斯表如表 3-5-1 所示。劳斯表的前两行系数由特征方程系数组成, 第一行由特征方程的第 1, 3, 5, ... 项系数组成, 第二行由特征方程的第 2, 4, 6, ... 项系数组成, 以后各行系数按表 3-5-1 逐行计算, 直到计算到第 $(n+1)$ 行为止, 而劳斯表第 $(n+1)$ 行系数只有一个, 恰好等于特征方程最后一项系数 a_0 。在计算劳斯表的过程中, 可以用一个正整数去除或乘某一整行系数, 这样不会改变所得结论。



视频讲解

表 3-5-1 劳斯表

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	...
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	...
s^{n-2}	$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$	$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$	$b_3 = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$	b_4	...
s^{n-3}	$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1}$	$c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1}$	c_3	c_4	...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
s^0	a_0				

劳斯稳定判据指出,系统稳定的充分必要条件是劳斯表第一列系数均为正数,若出现零或负数,系统不稳定,且第一列系数符号改变的次数就是特征方程中正实部根的个数。

例 3-11 已知线性系统的特征方程为

$$s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 2s + 5 = 0$$

试用劳斯稳定判据分析系统的稳定性。

解: 列劳斯表为

s^4	1	4	5
s^3	3	2	0
s^2	10/3	5	0
s^1	-5/2	0	
s^0	5		

劳斯表第一列系数出现负数,故该系统不稳定,且第一列系数符号改变了两次,因此特征方程有两个正实部根。

在列劳斯表时,可能遇到下面两种特殊情况。

(1) 劳斯表中某一行第一个系数为零,其他系数不为零或不全为零。

这时计算劳斯表下一行的第一个系数时,将出现无穷大而使劳斯表无法继续进行,解决办法是用一个很小的正数 ϵ 来代替这个零元素,使劳斯表继续运算下去。观察劳斯表第一列系数,若 ϵ 的上下系数均为正数,则说明系统特征方程存在纯虚根;若 ϵ 的上下系数的符号不同,则符号改变的次数为特征方程正实部根的个数。

例 3-12 已知线性系统的特征方程为

$$s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 8s + 3 = 0$$

试用劳斯稳定判据分析系统的稳定性。

解: 列劳斯表为

s^4	1	4	3
s^3	2	8	0
s^2	0(ϵ)	3	0
s^1	($8\epsilon - 6$)/ ϵ	0	
s^0	3		

由于 ϵ 是很小的正数,所以 $(8\epsilon - 6)/\epsilon$ 为负数,劳斯表第一列系数符号改变了两次。因此,系统不稳定,特征方程有两个正实部根。

(2) 劳斯表中某行系数均为零。

这种情况下劳斯表的计算工作也由于出现无穷大系数而无法继续进行。为了解决这个问题,可以利用全零行的上一行系数构造一个辅助方程,再将辅助方程对复变量 s 求导一次后的系数代替全零行的系数,使劳斯表继续运算下去。辅助方程的解就是原特征方程的部分特征根,这部分特征根对称于原点,可能为一对共轭纯虚根或者两个大小相等、符号相反的实根或者对称于实轴的两对共轭复数根。

例 3-13 已知线性系统的特征方程为

$$s^6 + s^5 + 5s^4 + 3s^3 + 8s^2 + 2s + 4 = 0$$

试用劳斯稳定判据分析系统的稳定性。

解: 列劳斯表为

s^6	1	5	8	4	
s^5	1	3	2	0	
s^4	2	6	4		辅助方程 $2s^4 + 6s^2 + 4 = 0$
s^3	0(8)	0(12)	0(0)		将辅助方程求导一次,得 $8s^3 + 12s = 0$
s^2	3	4			
s^1	4/3	0			
s^0	4				

由劳斯表可知,第一列系数均为正值,表明系统没有在 s 右半平面的特征根。求解辅助方程,得到两对大小相等、符号相反的特征根为 $s_{1,2} = \pm j, s_{3,4} = \pm j\sqrt{2}$ 。利用长除法可以求得另外两个根为 $s_{5,6} = (-1 \pm j\sqrt{7})/2$ 。显然,系统处于临界稳定状态。

3. 劳斯稳定判据的应用

1) 确定使系统稳定的参数取值范围

劳斯稳定判据除了可以判断系统的稳定性外,还可以用来确定使系统稳定的参数取值范围。

例 3-14 某系统结构图如图 3-5-2 所示,确定使系统稳定时 K 的取值范围。

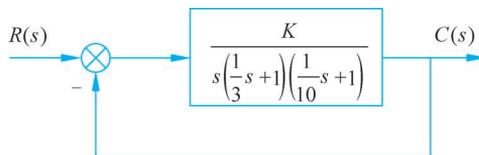


图 3-5-2 系统结构图

解: 由图 3-5-2 知,系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{30K}{s^3 + 13s^2 + 30s + 30K}$$

闭环特征方程为

$$s^3 + 13s^2 + 30s + 30K = 0$$

列劳斯表

s^3	1	30
s^2	13	30K
s^1	$\frac{13 \times 30 - 1 \times 30K}{13}$	0
s^0	30K	

根据劳斯稳定判据,系统稳定的充分必要条件为

$$\begin{cases} 30K > 0 \\ 13 \times 30 - 30K > 0 \end{cases}$$

因此系统稳定时 K 的取值范围是 $0 < K < 13$ 。

2) 确定系统的相对稳定性

劳斯稳定判据解决了系统绝对稳定性问题,但不能表明特征根距虚轴的远近。如果一个系统的特征根紧靠虚轴,尽管是在 s 左半平面,满足稳定条件,但动态过程将具有缓慢的非周期特性或强烈的振荡特性,甚至会由于系统内部参数的微小变化,使特征根转移到 s 右半平面,导致系统不稳定。为了保证系统有一定的稳定裕度,且具有良好的动态性能,希望特征根在 s 左半平面且与虚轴有一定的距离。为此,可在 s 左半平面画一条 $s = -\sigma$ 的直线,而 σ 是系统特征根与虚轴之间的最小距离,通常称为稳定裕量,然后将 $s = s_1 - \sigma$ 代入原特征方程,得到以 s_1 为变量的新特征方程,对新特征方程应用劳斯稳定判据,判断特征根是否位于 $s = -\sigma$ 直线的左半部分,即具有 σ 以上的稳定裕量。

例 3-15 对于例 3-14 的系统,若要使系统具有 $\sigma = 1$ 以上的稳定裕量,确定 K 的取值范围。

解: 将 $s = s_1 - 1$ 代入原系统的特征方程,得

$$(s_1 - 1)^3 + 13(s_1 - 1)^2 + 30(s_1 - 1) + 30K = 0$$

整理后得

$$s_1^3 + 10s_1^2 + 7s_1 + (30K - 18) = 0$$

列劳斯表

s_1^3	1	7
s_1^2	10	$30K - 18$
s_1^1	$\frac{10 \times 7 - (30K - 18)}{10}$	0
s_1^0	$30K - 18$	

根据劳斯稳定判据,系统稳定的充分必要条件是

$$\begin{cases} 30K - 18 > 0 \\ 10 \times 7 - (30K - 18) > 0 \end{cases}$$

因此,当 K 满足 $0.6 < K < 2.93$,系统具有 $\sigma = 1$ 以上的稳定裕量。

3.5.4 MATLAB 实现

判断线性系统的稳定性,最直接的方法是求出系统的所有特征根,根据特征根是否位于 s 左半平面确定系统的稳定性。MATLAB 提供了求解特征根的函数 `roots()`,其调用格式为

`p = roots(den)` % 求解系统的特征根,其中 `den` 为特征多项式的系数按降幂排列构成的系数行向量;`p` 为特征根

另外,MATLAB 中的 `pzmap()` 函数可用于绘制系统的零极点图,其调用格式为

`pzmap(num, den)` % 绘制系统的零极点图,`num` 和 `den` 分别为系统传递函数的分子和分母多项式的系数按降幂排列构成的系数行向量.零极点图中的极点用“x”表示,零点用“o”表示

`[p, z] = pzmap(num, den)` % 该调用格式不绘制系统的零极点图,而是返回系统的零极点,其作用与
% `tf2zp()`函数相同

例 3-16 某系统闭环传递函数为 $\Phi(s) = \frac{s^2 + 5s + 6}{s^4 + 2s^3 + s^2 + 7s + 6}$, 判断该系统的稳定性。

解: MATLAB 程序如下。

```
clc;clear
num = [1,5,6];
den = [1 2 1 7 6];
p = roots(den)
pzmap(num, den)
```

运行结果如下。

```
p =
    0.6160 + 1.6011i
    0.6160 - 1.6011i
   -2.3727 + 0.0000i
   -0.8592 + 0.0000i
```

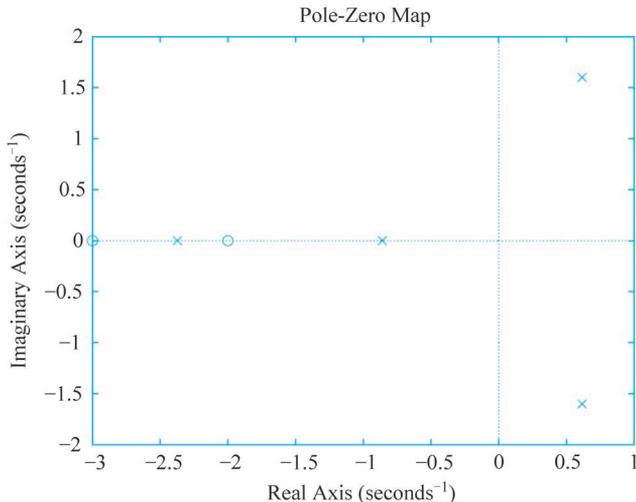


图 3-5-3 零极点分布图

由运行结果及零极点分布图 3-5-3 可以看出,该系统有两个负实根和一对具有正实部的共轭复数根,因此系统不稳定。



视频讲解

3.6 线性系统的稳态误差分析

在控制系统的分析与设计中,稳态误差是一项重要的性能指标,它是系统控制精度或抗扰动能力的一种度量,通常称为稳态性能。控制系统设计的任务之一是尽量减小系统的稳态误差,或使稳态误差小于某一容许值。本节主要讨论线性控制系统由于系统结构参数、输入作用形式和类型所产生的原理性稳态误差,不包括元件的不灵敏区、机械间隙、零点漂移、老化等原因所引起的附加稳态误差。

3.6.1 误差与稳态误差的定义

1. 误差的定义

假设控制系统的结构图如图 3-6-1(a) 所示, 经过等效变换可以化为图 3-6-1(b) 的形式, 系统的误差通常有以下两种定义方法。

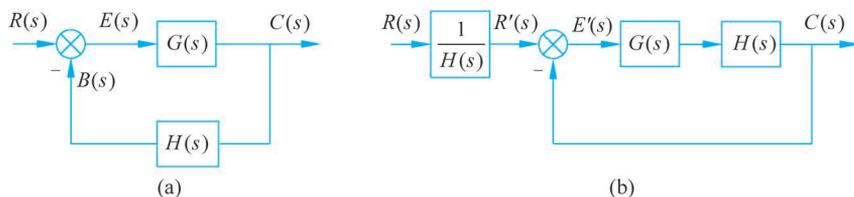


图 3-6-1 控制系统的结构图及等效变换图

(1) 按输入端定义: 系统的误差定义为输入信号 $R(s)$ 与反馈信号 $B(s)$ 之差, 即由图 3-6-1(a) 可得

$$E(s) = R(s) - B(s) = R(s) - H(s)C(s)$$

用这种方法定义的误差, 又称为偏差。由于它是可以测量的, 因而在应用中具有实际意义。

(2) 按输出端定义: 系统的误差定义为输出量的期望值 $R'(s)$ 和实际值 $C(s)$ 之差, 即由图 3-6-1(b) 可得

$$E'(s) = R'(s) - C(s) = \frac{R(s)}{H(s)} - C(s)$$

按输出端定义的误差, 在系统性能指标的提法中经常使用, 但在实际系统中有时无法测量, 因而一般只有数学意义。

显然, 两种误差定义之间存在如下关系:

$$E(s) = E'(s)H(s)$$

对单位反馈系统而言, 由于 $H(s) = 1$, 两种误差定义的方法是一致的。下文除了特别说明外, 讨论的误差都是按输入端定义的误差。

2. 稳态误差的定义

对于一个稳定的系统, 当时间 $t \rightarrow \infty$ 时, 系统的误差称为稳态误差, 以 e_{ss} 表示, 即

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$$

如果有理函数 $sE(s)$ 的极点均位于 s 左半平面(包括坐标原点), 则可根据拉普拉斯变换终值定理, 求得系统的稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \quad (3-6-1)$$

对于图 3-6-1(a) 所示系统, 在输入信号 $R(s)$ 作用下的误差传递函数为

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}$$

系统的误差为

$$E(s) = \Phi_e(s)R(s) = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}R(s) \quad (3-6-2)$$

将式(3-6-2)代入式(3-6-1)可得稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)H(s)} R(s) \quad (3-6-3)$$

式(3-6-3)表明,稳态误差既与系统的结构参数有关,也与外作用的形式有关。注意到 $\Phi_e(s)$ 的分母与闭环传递函数 $\Phi(s)$ 的分母相同,都是闭环特征方程式,所以应用终值定理的条件实际上包含系统必须稳定。这样的要求和物理概念是一致的,对于不稳定的系统而言,系统无法进入稳态,求稳态误差就没有意义。

3.6.2 控制系统的型别

由于稳态误差与系统的结构参数有关,这里介绍一种控制系统按开环传递函数中串联积分环节个数来分类的方法。

设系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^v} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (\tau_i s + 1) \prod_{k=1}^{m_2} (\tau_k^2 s^2 + 2\zeta_k \tau_k s + 1)}{\prod_{j=1}^{n_1} (T_j s + 1) \prod_{l=1}^{n_2} (T_l^2 s^2 + 2\zeta_l T_l s + 1)} \quad (3-6-4)$$

式(3-6-4)中, K 为系统的开环增益, v 为系统开环传递函数中所含积分环节的个数。通常根据 v 的数值定义系统的型别,称 $v=0,1,2,\dots$ 的系统分别为0型、I型、II型、…系统。由于当 $v>2$ 时,对系统的稳定性是不利的,因此除航天控制系统外,III型及III型以上的系统几乎不采用。

3.6.3 典型输入作用下的稳态误差

在系统分析中经常遇到各种典型输入作用下稳态误差的计算问题,因此分析研究典型输入作用下稳态误差与系统结构参数及输入形式的关系,找出其中的规律,是十分必要的。

下面分别讨论在几种典型输入作用下,不同类型系统的稳态误差。

1. 单位阶跃输入

当 $r(t)=1(t)$ 时,则 $R(s)=\frac{1}{s}$,由式(3-6-3)可得稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)H(s)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)} = \frac{1}{1 + K_p} \quad (3-6-5)$$

式(3-6-5)中, $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)$ 称为静态位置误差系数。

对于0型系统, $K_p = K, e_{ss} = \frac{1}{1 + K}$;

对于I型和II型系统, $K_p \rightarrow \infty, e_{ss} = 0$ 。

由此可见,对于单位阶跃输入,0型系统的稳态误差为有限值,且稳态误差随开环增益 K 的增大而减小;I型及以上系统的稳态误差为零。习惯上常把系统在阶跃输入作用下没有稳态误差的系统称为无差系统,反之则称为有差系统。因此,0型系统为有差系统,I型及以上系统为无差系统。

2. 单位斜坡输入

当 $r(t) = t$ 时, 则 $R(s) = \frac{1}{s^2}$, 由式(3-6-3)可得稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)H(s)} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)} = \frac{1}{K_v} \quad (3-6-6)$$

式(3-6-6)中, $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)$ 称为静态速度误差系数。

对于 0 型系统, $K_v = 0, e_{ss} \rightarrow \infty$;

对于 I 型系统, $K_v = K, e_{ss} = \frac{1}{K}$;

对于 II 型系统, $K_v \rightarrow \infty, e_{ss} = 0$ 。

由此可见, 0 型系统不能跟踪斜坡输入信号; I 型系统虽然能跟踪斜坡输入信号, 但存在稳态误差, 稳态误差随开环增益 K 的增大而减小; 对于 II 型及以上系统, 稳态时系统能准确跟踪斜坡输入信号, 稳态误差为零。

应当指出, 这里速度误差的含义是系统在速度(斜坡)信号作用下, 系统稳态输出与输入在相对位置上的误差, 而不是输出、输入信号在速度上存在误差。

3. 单位加速度输入

当 $r(t) = \frac{1}{2}t^2$ 时, 则 $R(s) = \frac{1}{s^3}$, 由式(3-6-3)可得稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)H(s)} \cdot \frac{1}{s^3} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)} = \frac{1}{K_a} \quad (3-6-7)$$

式(3-6-7)中 $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)$ 称为静态加速度误差系数。

对于 0 型和 I 型系统, $K_a = 0, e_{ss} \rightarrow \infty$;

对于 II 型系统, $K_a = K, e_{ss} = \frac{1}{K}$ 。

由此可见, 0 型和 I 型系统均不能跟踪加速度输入信号, II 型系统能跟踪加速度输入信号, 但存在稳态误差。与上文情况类似, 加速度误差是指系统在加速度信号作用下, 系统稳态输出与输入之间的位置误差。

表 3-6-1 列出了各型系统在典型输入作用下的静态误差系数和稳态误差。

表 3-6-1 典型输入作用下的静态误差系数及稳态误差

系统型别	静态误差系数			单位阶跃输入 $r(t) = 1(t)$	单位斜坡输入 $r(t) = t$	单位加速度输入 $r(t) = t^2/2$
	K_p	K_v	K_a	$e_{ss} = \frac{1}{1+K_p}$	$e_{ss} = \frac{1}{K_v}$	$e_{ss} = \frac{1}{K_a}$
0	K	0	0	$\frac{1}{1+K}$	∞	∞
I	∞	K	0	0	$\frac{1}{K}$	∞
II	∞	∞	K	0	0	$\frac{1}{K}$

表 3-6-1 揭示了控制系统在输入作用下稳态误差随系统结构参数及输入形式变化的规律。即在输入一定时,增大开环增益 K ,可以减小稳态误差;提高系统型别,可以消除稳态误差。

特别需要指出,通过采用提高系统型别或增大开环增益以消除或减小稳态误差的措施,必然导致系统稳定性降低,甚至造成系统不稳定,从而恶化系统的动态性能。因此应以确保系统稳定性为前提,同时兼顾动态性能指标和稳态性能指标。

例 3-17 已知单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{10(s+1)}{s^2(s+4)}$$

若输入为 $r(t) = 1(t) + 2t + 3t^2$,求系统的稳态误差。

解: (1) 先判断系统的稳定性。

系统的闭环特征方程为

$$s^3 + 4s^2 + 10s + 10 = 0$$

列劳斯表为

s^3	1	10
s^2	4	10
s^1	30/4	0
s^0	10	

由于劳斯表第一列系数均为正数,因此系统稳定。

(2) 求稳态误差。

将开环传递函数化为时间常数标准形式,即

$$G(s)H(s) = \frac{10(s+1)}{s^2(s+4)} = \frac{\frac{10}{4}(s+1)}{s^2\left(\frac{1}{4}s+1\right)}$$

由此可知,该系统为 II 型系统,开环增益为 $K = \frac{10}{4}$ 。根据表 3-6-1 可得

当输入为 $r(t) = 1(t)$ 时, $e_{ss1} = 0$;

当输入为 $r(t) = 2t$ 时, $e_{ss2} = 0$;

当输入为 $r(t) = 3t^2 = 6 \times \frac{1}{2}t^2$ 时, $e_{ss3} = \frac{6}{K} = 2.4$ 。

因此系统在输入 $r(t) = 1(t) + 2t + 3t^2$ 作用下的稳态误差为

$$e_{ss} = e_{ss1} + e_{ss2} + e_{ss3} = 0 + 0 + 2.4 = 2.4$$

由以上分析可见,掌握了系统结构特征与输入信号之间的规律性联系后,就可以直接由表 3-6-1 得出稳态误差,而不需要再利用终值定理逐步计算,但是值得注意的是:

① 系统必须是稳定的,否则计算稳态误差是没有意义的,因此计算稳态误差之前必须首先判断系统的稳定性;

② 这种规律性的联系只适用于典型输入作用下的稳态误差,而不适用于扰动作用下的稳态误差;

③ 表 3-6-1 中 K 指的是系统的开环增益,即开环传递函数应化为式(3-6-4)所示的时间

常数标准形式：

④ 上述规律适用于按输入端定义的误差,若误差定义有变,则必须将误差化成满足上述定义的形式才能使用本结论。

3.6.4 扰动作用下的稳态误差

控制系统除承受输入作用外,还经常受到各种扰动的影响。系统在扰动作用下的典型结构如图 3-6-2 所示。

由图 3-6-2 可得系统在扰动信号 $N(s)$ 作用下的误差传递函数为

$$\Phi_{en}(s) = \frac{E(s)}{N(s)} = \frac{-G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

扰动作用下的稳态误差为

$$e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \Phi_{en}(s)N(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-sG_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}N(s)$$

系统在扰动作用下稳态误差的大小,反映了系统的抗扰动能力。当 $|G_1(s)G_2(s)H(s)| \gg 1$ 时,有

$$e_{ssn} \approx \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-s}{G_1(s)}N(s)$$

即在深度反馈条件下, e_{ssn} 主要与 $N(s)$ 和 $G_1(s)$ 有关。而 $G_1(s)$ 是误差信号点到扰动作用点之间前向通道的传递函数。

例 3-18 某系统结构图如图 3-6-3 所示,已知扰动信号为 $n(t) = 1(t)$,试分析扰动信号作用于系统不同位置时,稳态误差有何不同。

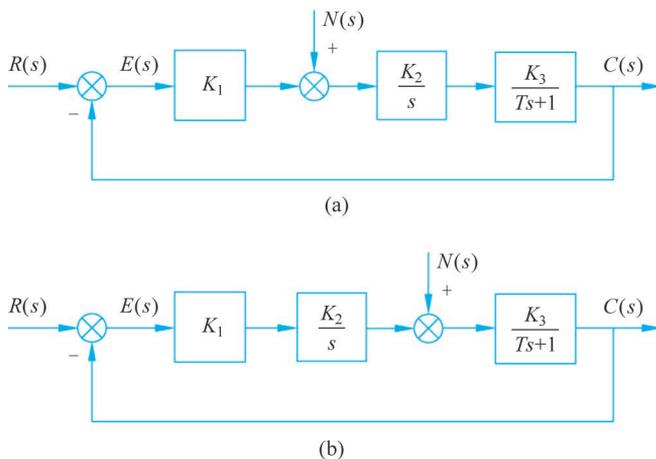


图 3-6-3 系统结构图

解: 图 3-6-3 所示系统,当满足 $T > 0, K_1 K_2 K_3 > 0$ 时,系统闭环稳定。系统为 I 型系统,当扰动为零时,对单位阶跃输入信号,稳态误差为零。由于扰动作用点不同,相同的扰动会引起不同的稳态误差。



视频讲解

对于图 3-6-3(a)所示系统,在单位阶跃扰动 $n(t)=1(t)$ 作用下,系统的稳态误差为

$$e_{\text{ssn}} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \Phi_{\text{en}}(s)N(s) = - \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{\frac{K_2 K_3}{s(Ts+1)}}{1 + \frac{K_1 K_2 K_3}{s(Ts+1)}} \cdot \frac{1}{s} = - \frac{1}{K_1}$$

即系统在扰动作用下的稳态误差与 K_1 有关,而与 K_2 和 K_3 无关。因此,增大扰动作用点之前的前向通道增益,可以减小系统对扰动作用的稳态误差,而增大扰动作用点之后系统的前向通道增益,不能改变系统对扰动的稳态误差数值。

对于图 3-6-3(b)所示系统,在单位阶跃扰动 $n(t)=1(t)$ 作用下,系统的稳态误差为

$$e_{\text{ssn}} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \Phi_{\text{en}}(s)N(s) = - \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{\frac{K_3}{Ts+1}}{1 + \frac{K_1 K_2 K_3}{s(Ts+1)}} \cdot \frac{1}{s} = 0$$

即系统对于阶跃扰动作用的稳态误差为零,由此可以看出,在扰动作用点和误差信号点之间增加积分环节,可减小或消除扰动作用下的稳态误差。

由例 3-18 可见,同一系统对同一形式的扰动作用,由于扰动作用点不同,其稳态误差不一定相同。

例 3-19 某系统结构图如图 3-6-4 所示,已知输入信号为 $R(s)=\frac{10}{s}$,扰动信号为 $N(s)=\frac{2}{s}$,求系统的稳态误差。

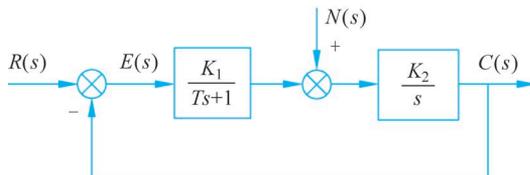


图 3-6-4 系统结构图

解: 此系统为二阶系统,当满足 $T>0, K_1 K_2 > 0$ 时,系统稳定。系统开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K_1 K_2}{s(Ts+1)}$$

由开环传递函数可知,该系统为 I 型系统,开环增益为 $K=K_1 K_2$ 。根据表 3-6-1 可得系统在输入信号 $R(s)=\frac{10}{s}$ 作用下的稳态误差为

$$e_{\text{ssr}} = \frac{10}{K_1 K_2}$$

系统在干扰信号 $N(s)=\frac{2}{s}$ 作用下的稳态误差为

$$e_{\text{ssn}} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{-\frac{K_2}{s}}{1 + \frac{K_1 K_2}{s(Ts+1)}} \cdot \frac{2}{s} = - \frac{2}{K_1}$$

因此总的稳态误差为

$$e_{ss} = e_{ssr} + e_{ssn} = \frac{10}{K_1 K_2} - \frac{2}{K_1}$$

3.6.5 MATLAB 实现

在 MATLAB 中,利用函数 `dcgain()` 可求出控制系统的稳态误差,其调用格式为

`ess = dcgain(num,den)` % 其中 `ess` 为系统的稳态误差;`num` 和 `den` 分别为传递函数的分子和分母多项式的系数按降幂排列构成的系数行向量

例 3-20 利用 MATLAB 求解例 3-17 中系统的稳态误差。

解: 系统在输入信号作用下的稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \Phi_e(s) R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot [1 - \Phi(s)] R(s)$$

MATLAB 程序如下:

```
clc;clear
Gs = tf([10,10],[1,4,0,0]);
sys = feedback(Gs,1); % 求系统的闭环传递函数
[num, den] = tfdata(sys,'v');
sys1 = tf(den-num,den); % 求系统的误差传递函数
s = tf([1 0],[1]); % 定义复变量 s
sys2 = sys1 * s;
R1 = tf([1],[1,0]); % 输入 r(t) = 1(t) 作用下的稳态误差
ess1 = dcgain(sys2 * R1);
R2 = tf([2],[1,0,0]); % 输入 r(t) = 2t 作用下的稳态误差
ess2 = dcgain(sys2 * R2);
R3 = tf([6],[1,0,0,0]); % 输入 r(t) = 3t^2 作用下的稳态误差
ess3 = dcgain(sys2 * R3);
ess = ess1 + ess2 + ess3 % 输入 r(t) = 1 + 2t + 3t^2 作用下的稳态误差
```

运行结果如下:

```
ess1 =
    0
ess2 =
    0
ess3 =
    2.4000
ess =
    2.4000
```

由运行结果可知,系统在 $r(t) = 1(t) + 2t + 3t^2$ 作用下的稳态误差为 $e_{ss} = 0 + 0 + 2.4 = 2.4$,与例 3-17 结论一致。

3.7 习题

