第8章 向量代数与空间解析几何

空间解析几何是用代数的方法研究空间图形的一门数学学科.在微积分的发展史上,空间解析几何具有十分重要的地位.直观是人们认识和理解事物的最有效的形式,正如平面解析几何使一元函数微积分有了几何的直观一样,空间解析几何知识对学习多元函数微积分是不可缺少的.

8.1 向量及其运算

8.1.1 空间直角坐标系与向量、向量模的概念

在平面解析几何中,我们建立了平面直角坐标系,并通过平面直角坐标系,把平面上的点与有序数组(即点的坐标(x,y))对应起来.同理,为了把空间的任一点与有序数组对应起来,建立了**空间直角坐标系**,如图8.1所示.

空间三个相互垂直且原点重合的数轴构成空间直角坐标系.三个数轴分别称为x轴(横轴),y轴(纵轴),z轴(竖轴),统称为**坐标轴**;三个数轴的共同原点称为空间直角坐标系的**原点**.

注 (1) 通常三个数轴应具有相同的长度单位;

(2) 通常把x轴和y轴配置在水平面上,而z轴是水平面上的铅垂线;

(3) 数轴的正向通常符合右手规则.通常按右手法则来确定轴的方向:当x轴正向按右手握拳方向以$\frac{\pi}{2}$的角度转向y轴时,大拇指的指向就是z轴的正向.

三条坐标轴中每两条坐标轴都可以确定一个平面,称为**坐标平面**.由x轴和y轴所确定的平面称为xOy平面,由y轴和z轴所确定的平面称为yOz平面;由x轴和z轴所确定的平面称为xOz平面.三个坐标面把整个空间分成八个部分,依次称为Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限,坐标平面不属于任何卦限,如图8.2所示.

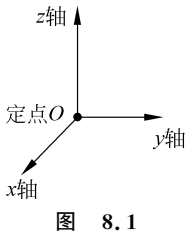

图 8.1

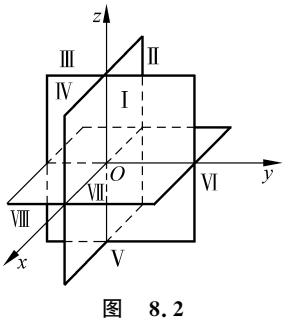

图 8.2

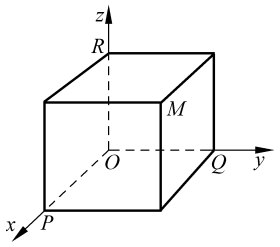

图 8.3

设 M 为空间中一点，过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴且与这三个坐标轴分别交于点 P,Q,R. 点 P,Q,R 对应的三个实数依次为 x,y,z，如图 8.3 所示，于是点 M 唯一确定了一个有序实数组 (x,y,z). 反之，一个有序数组 (x,y,z) 唯一确定一点 M. (x,y,z) 称为点 M 的坐标，x,y,z 分别称为点 M 的**横坐标、纵坐标、竖坐标**. 坐标为 (x,y,z) 的点 M 记为 $M(x,y,z)$.

坐标面和坐标轴上各点坐标有下述特征：原点 O 的坐标为 $(0,0,0)$；x,y,z 轴上的点的坐标分别为 $(x,0,0),(0,y,0),(0,0,z)$；xy,zx,yz 面上点的坐标分别为 $(x,y,0),(x,0,z),(0,y,z)$.

1. 空间两点间的距离

设 $P_1(x_1,y_1,z_1),P_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点. 过 P_1,P_2 分别作平行于坐标面的平面，这六个平面构成一个长方体，它的三条边长分别为 $|x_1-x_2|,|y_1-y_2|,|z_1-z_2|$（图 8.4）. 两次运用勾股定理，得 P_1 与 P_2 的距离 d 为

$$\begin{aligned} d^2 &= |P_1P|^2 + |PP_2|^2 \\ &= |P_1P|^2 + (z_1-z_2)^2, \end{aligned}$$

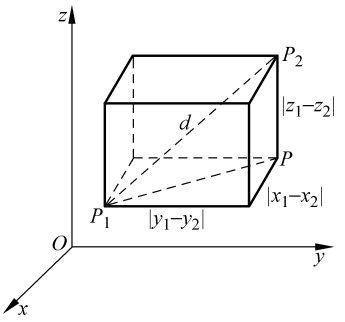

图 8.4

并将

$$|P_1P|^2 = (y_1-y_2)^2 + (x_1-x_2)^2$$

代入上式，得

$$d^2 = (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2,$$

故

$$d = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2}. \tag{8.1}$$

特别地，点 $P(x,y,z)$ 到原点 $(0,0,0)$ 的距离为 $|OP| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

可以应用距离公式(8.1)，求平面方程与球面方程.

例 1 在 z 轴上求与两点 $A(-1,2,3)$ 和 $B(2,6,-2)$ 等距离的点 P.

解 由于所求的点 P 在 z 轴上，设该点的坐标为 $(0,0,z)$，依题意有 $|PA| = |PB|$，由两点间的距离公式，得

$$\sqrt{(0+1)^2 + (0-2)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{(0-2)^2 + (0-6)^2 + (z+2)^2},$$

解得 $z=-3$. 所以，所求的点为 $P(0,0,-3)$.

例 2 求到两定点 $M_1(1,-1,1)$ 与 $M_2(2,1,-1)$ 等距离的点 $M(x,y,z)$ 的轨迹方程.

解 由于

$$|M_1M| = |M_2M|,$$

所以

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2}.$$

化简得点 M 的轨迹方程为

$$2x + 4y - 2z - 3 = 0.$$

2. 向量

我们将既有大小又有方向的量称为**向量**，如力、位移等. 向量通常用黑体字母来表示，记为 $\boldsymbol{a}$ 或 $\vec{a}$. 有时，向量也常用有向线段 $\overrightarrow{AB}$（A 为起点，B 为终点）来表示. 向量的大小为有向线段的长度，称为向量的**模**，记为 $|\boldsymbol{a}|$，或 $|\vec{a}|$，或 $|\overrightarrow{AB}|$. 模为 1 的向量称为**单位向量**. 模为 0 的向量称为**零向量**，记为 $\boldsymbol{0}$，规定 $\boldsymbol{0}$ 的方向是任意的.

向量的方向、大小、起点三个因素中，方向与大小为两要素. 与起点无关的向量称为自由向量. 将向量 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 平行移动使得它们的起点重合，它们所在射线之间的夹角 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角. 如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 大小相等，方向相同，则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

3. 向量的坐标

在空间直角坐标系中，若将向量 $\boldsymbol{a}$ 平行移动使得它的起点与原点 O 重合，则它的终点必与唯一的某个点 M 重合. 也就是说，向量 $\boldsymbol{a}$ 与空间中的点 M 有一一对应的关系，满足 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$（图 8.5）. 因此，可将点 M 的坐标 (x,y,z) 视为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，记为 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$. 将三个特殊的单位向量 $(1,0,0)$，$(0,1,0)$，$(0,0,1)$ 分别记为 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$，那么对于任意向量 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$，有

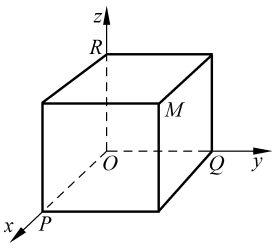

图 8.5

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}. \tag{8.2}$$

式(8.2)称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标式. 由于 $|\overrightarrow{OM}|$ 是 $\boldsymbol{a}$ 的模，利用式(8.1)得

$$|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{8.3}$$

8.1.2 向量的线性运算

向量的线性运算是指向量的加法和向量与数的乘法运算.

定义 1 设向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，

向量的加法

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2),$$

向量与数的乘法

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1),$$

向量的减法

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-1)\boldsymbol{b}=(x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2).$$

向量的加法是遵循三角形法则的，即

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC},$$

如图 8.6 所示. 也遵循平行四边形法则，即

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC},$$

如图 8.7 所示，其中四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

向量减法的几何意义如图 8.8 所示.

向量与数的乘法的几何意义是向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行或共线，因此有下面的定理.

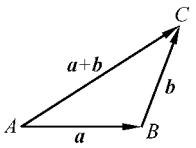

图　8.6

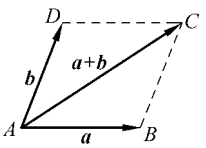

图　8.7

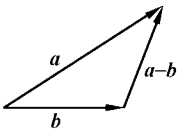

图　8.8

定理 1　向量 $\boldsymbol{a}$ 与非零向量 $\boldsymbol{b}$ 平行的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

容易验证向量的线性运算满足以下规律：

(1) 加法交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2) 加法结合律 $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$；

(3) 数乘分配律 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$；

(4) 数乘结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

对于非零向量 $\boldsymbol{a}$，由数乘运算的定义可知，$\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同，且

$$\left|\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}\right|=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=1,$$

故 $\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，记作 $\boldsymbol{e}_a$，即

$$\boldsymbol{e}_a=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}\quad\text{或}\quad\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a. \tag{8.4}$$

例 3　设向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点为 $A(4,0,5)$，终点为 $B(7,1,3)$，求 $\boldsymbol{e}_a$ 的坐标.

解　由 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(7-4,1-0,3-5)=(3,1,-2)$ 得

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{14},$$

故 $\boldsymbol{e}_a=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}=\left(\dfrac{3}{\sqrt{14}},\dfrac{1}{\sqrt{14}},\dfrac{-2}{\sqrt{14}}\right)$.

8.1.3　向量的方向角、投影

1. 方向角与方向余弦

非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴、y 轴、z 轴的正向的夹角 α,β,γ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的方向角，方向角的余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

如图 8.9 所示，作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$. 由于 $a_x=|\overrightarrow{OP}|$，$a_y=|\overrightarrow{OQ}|$，$a_z=|\overrightarrow{OR}|$，且 $MP\perp OP$，$MQ\perp OQ$，$MR\perp OR$，故

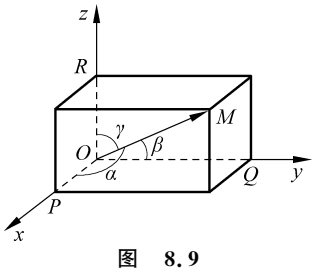

图　8.9

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|},\quad\cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|},\quad\cos\gamma=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|} \tag{8.5}$$

易知

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_a,$$

且

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. \tag{8.6}$$

例 4 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点为 $A(3,-1,3)$，终点为 $B(-1,2,15)$，求 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表达式及它的模与方向角.

解 $\boldsymbol{a}=(-1-3,2-(-1),15-3)=(-4,3,12)$，

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(-4)^2+3^2+12^2}=13,$$

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{-4}{13},\quad \cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{3}{13},\quad \cos\gamma=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{12}{13},$$

即方向角为 $\alpha=\arccos\left(\frac{-4}{13}\right),\beta=\arccos\left(\frac{3}{13}\right),\gamma=\arccos\left(\frac{12}{13}\right)$.

2. 投影

设向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM},\boldsymbol{b}=\overrightarrow{ON},\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，且向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 φ（图 8.10）. 过 N 作平面与 OM 所在直线交于点 N'，则称 $\overrightarrow{ON'}$ 为向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量，易知

$$\overrightarrow{ON'}=(|\overrightarrow{ON}|\cos\varphi)\boldsymbol{e}_a=(|\boldsymbol{b}|\cos\varphi)\boldsymbol{e}_a,$$

称上式中的数 $|\boldsymbol{b}|\cos\varphi$ 为向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影，并记作 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$，即

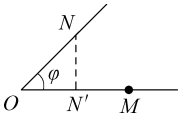

图 8.10

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}).$$

性质 1 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2)=\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}_1+\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}_2$；

性质 2 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\lambda\boldsymbol{b}=\lambda\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$.

向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 上的投影也称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影，分别记为

$$a_x=\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a},\quad a_y=\mathrm{Prj}_y\boldsymbol{a},\quad a_z=\mathrm{Prj}_z\boldsymbol{a},$$

或记为

$$a_x=(\boldsymbol{a})_x,\quad a_y=(\boldsymbol{a})_y,\quad a_z=(\boldsymbol{a})_z.$$

习题 8.1

1. 指出下列各点所在的坐标轴、坐标面或卦限：

(1) $A(0,-7,0)$；(2) $B(0,-1,2)$；(3) $C(-1,0,3)$；(4) $D(2,-3,-5)$.

2. 设向量的方向余弦分别满足：(1)$\cos\gamma=0$；(2)$\cos\alpha=1$；(3)$\cos\alpha=\cos\gamma=0$，说明这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何？

3. 已知两点 $M_1(4,0,1)$ 和 $M_2(3,\sqrt{2},2)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦、方向角以及平行于 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的单位向量.

4. 已知 $A(1,-3,2)$，求点 $B(x,-3,-4)$，使 A,B 的距离为 6.

5. 在 z 轴上求与点 $A(3,-1,1)$ 和点 $B(0,1,2)$ 等距离的点.

8.2 向量的数量积、向量积、混合积

8.2.1 向量的数量积

定义 1 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的模与其夹角余弦的乘积，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) \tag{8.7}$$

称为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的**数量积**，也称为**点积**或**内积**. 特别地，

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}})=|\boldsymbol{a}|^2.$$

当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，式(8.7)中的因子 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 就是向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$，故 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ 或 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}$.

当 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时，有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$ 或 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$.

数量积满足以下规律：

(1) 交换律　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

(2) 分配律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$；

(3) 数乘结合律　$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$.

定理 1　$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

证　当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 有一个为 $\boldsymbol{0}$ 时，结论显然成立.

当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时，由 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 有 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$，故 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$. 必要性得证.

由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$，$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 有，$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$，故 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 充分性得证. □

数量积的坐标表示式为：设向量 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积(或内积、点积)

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \tag{8.8}$$

下面我们来进行推导式(8.8). 按数量积的运算规律可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{z})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{z})\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+a_yb_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+\\&\quad a_zb_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 互相垂直，所以 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$，$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=0$. 又因为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的模均为 1，所以 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$. 因而得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时，由式(8.7)可知

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|},$$

由此可得

$$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\arccos\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}. \tag{8.9}$$

如果 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，则

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \tag{8.10}$$

这就是两向量夹角余弦的坐标表示式.

例 1　设 $\boldsymbol{a}=(1,-2,3)$，$\boldsymbol{b}=(2,3,-1)$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 以及 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ.

解　由数量积的坐标表示式得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times2+(-2)\times3+3\times(-1)=-7,$$

且

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{14},\quad |\boldsymbol{b}|=\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}=\sqrt{14},$$

代入两向量夹角余弦的表达式，得

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{-7}{\sqrt{14}\times\sqrt{14}}=-\frac{1}{2},$$

由此得

$$\theta=\frac{2}{3}\pi.$$

8.2.2 向量的向量积

定义 2 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角为 θ，定义向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积（或外积、叉积）$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是这样一个向量，其模

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta, \tag{8.11}$$

方向与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 都垂直，且使 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 符合右手法则.

定理 2 当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$.

证 用循环证法证明.

若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，有 $\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$，从而 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$，故 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，有 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$，由 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 有，$\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$，故 $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$.

若 $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$，有 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向或反向，故 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. □

向量积满足以下规律：

（1）**反交换律** $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$；

（2）**分配律** $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$；

（3）**数乘结合律** $\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$.

由向量积的定义可得

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0},\\&\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\\&\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}.\end{aligned}$$

再利用向量积的运算规律可以推出，若 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1),\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则向量积的坐标表达式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\times(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})\\&=(y_1z_2-z_1y_2)\boldsymbol{i}+(z_1x_2-x_1z_2)\boldsymbol{j}+(x_1y_2-y_1x_2)\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

也可以写成

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}. \tag{8.12}$$

例 2 设 $\boldsymbol{a}=(2,3,4),\boldsymbol{b}=(1,-3,-2)$，计算 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

解 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&3&4\\1&-3&-2\end{vmatrix}=6\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}-9\boldsymbol{k}.$

8.2.3 向量的混合积

定义 3 设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是三个向量，先作向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，所得向量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 再与 $\boldsymbol{c}$ 作数量积，得到的数 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的混合积，记作 $[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]$.

下面推导混合积的坐标计算式.

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，$\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$，则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k},$$

所以

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}c_x-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}c_y+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}c_z.$$

利用三阶行列式，可得到混合积的便于记忆的坐标计算式：

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}\tag{8.13}$$

混合积的几何意义

如果向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面，则它们可看作一个平行六面体的相邻三棱（图 8.11），该平行六面体的底面积为 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$，且 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 垂直于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 所在的底面.

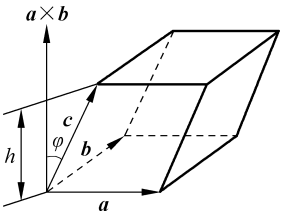

图 8.11

若记向量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为 φ，则当 $0\leqslant\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$|\boldsymbol{c}|\cos\varphi$ 就是该平行六面体的高 h，于是

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\varphi=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|h,$$

即 $[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]$ 为该平行六面体的体积 V. 当 $\dfrac{\pi}{2}<\varphi\leqslant\pi$ 时，该平行六面体的高为 $h=-|c|\cos\varphi$，故 $[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=-V$.

如果向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面，显然 $[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=0$.

由此可见，**混合积 $[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]$ 的绝对值是以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为相邻三棱的平行六面体的体积，且三向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是 $[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=0$.**

习题 8.2

1. 设向量 $\boldsymbol{a}=(1,-3,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,0,1)$，计算：(1)向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦；(2)$(4\boldsymbol{a})\cdot(-2\boldsymbol{b})$；(3)$3\boldsymbol{a}\times2\boldsymbol{b}$.

2. 设 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，求：(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；(2)$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；(3)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(5\boldsymbol{b})$；(4)$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$.

3. 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$，求：(1)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；(2)$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.

4. 已知 $A(1,-1,2)$，$B(5,-6,2)$，$C(1,3,-1)$，求与 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 同时垂直的单位向量.

5. 设向量 $\boldsymbol{a}=(3,5,-2)$，$\boldsymbol{b}=(2,1,4)$，问 λ 与 μ 有怎样的关系，能使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直？

8.3 曲面及其方程

8.3.1 曲面方程

在空间直角坐标系中，若曲面 S 上任一点的坐标都满足方程 $F(x,y,z)=0$，而不在曲面 S 上的任何点的坐标都不满足该方程，则方程 $F(x,y,z)=0$ 称为曲面 S 的方程，而曲面 S 就称为方程 $F(x,y,z)=0$ 的图形.

空间曲面研究的两个基本问题分别为：

(1) 已知曲面上的点所满足的几何条件，建立曲面的方程；

(2) 已知曲面方程，研究曲面的几何形状.

例 1 求空间一动点 $M(x,y,z)$ 到一定点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的距离等于定长 R 的点的轨迹方程.

解 因为

$$|MM_0|=R(\text{定长}),$$

所以，由距离公式(8.1)得

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R,$$

即

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

这就是半径为 R，球心在 (x_0,y_0,z_0) 的**球面方程**，它是三元二次方程.

特别地，半径为 R，球心在原点的球面方程是

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

下面简要介绍常用空间曲面的定义及其特性.

8.3.2 旋转曲面

以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所围成的曲面称为旋转曲面，这条平面曲线称为母线，这条定直线称为轴.

设坐标平面 yOz 内有一条曲线 C，其方程为 $f(y,z)=0$，将这条曲线绕 z 轴旋转一周，就得到一个以 z 轴为轴的旋转曲面，如图 8.12 所示. 下面建立旋转曲面的方程.

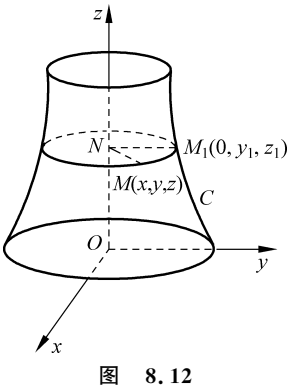

图 8.12

设 $M_1(0,y_1,z_1)$ 是曲线 C 上的任一点，则 M_1 的坐标必满足曲线 C 的方程，即有 $f(y_1,z_1)=0$.

点 M_1 绕 z 轴旋转到另一点 $M(x,y,z)$，旋转过程中有两个“不变”：①竖坐标不变；②到 z 轴的距离不变.

由①得 $z_1=z$.

由于点 $M_1(0,y_1,z_1)$ 到 z 轴的距离为 $|y_1|$，点 $M(x,y,z)$ 到 z 轴的距离为 $\sqrt{x^2+y^2}$，由②得 $|y_1|=\sqrt{x^2+y^2}$.

将 $z_1=z$，$y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 替换方程 $f(y_1,z_1)=0$ 中的 y_1，z_1，得

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0,$$

这就是旋转曲面的方程.

由此可知，在曲线 C 的方程 $f(y,z)=0$ 中，将 y 改成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 即可得到曲线 C 绕 z 轴旋转所成的旋转曲面的方程.

利用相同的方法得到曲线 C 绕 y 轴旋转一周所得的旋转曲面的方程为

$$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0.$$

曲线 C 绕 x 轴旋转一周所得的旋转曲面的方程为

$$f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0.$$

例 2 直线 L 绕另一条与 L 相交的直线旋转一周，所得旋转曲面为圆锥面. 将平面 yOz 内的直线 $L:z=y\cot\alpha$ 绕 z 轴旋转一周得到一个圆锥面，如图 8.13 所示. 写出该圆锥面的方程.

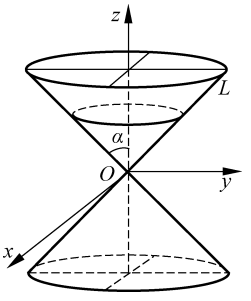

图 8.13

解 直线 $L:z=y\cot\alpha$ 绕 z 轴旋转，用 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 代替 y，得到圆锥面的方程为 $z=\pm\sqrt{x^2+y^2}\cot\alpha$.

令 $a=\pm\cot\alpha$，则 $z^2=a^2(x^2+y^2)$.

8.3.3 柱面

一般地，平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 形成的轨迹称为柱面，定曲线 C 称为柱面的准线，动直线 L 称为柱面的母线. 一般地，方程

$$F(x,y)=0$$

在空间表示平行于 z 轴的直线(母线)沿 xOy 面上曲线 $\begin{cases}F(x,y)=0,\\ z=0\end{cases}$ (准线)移动生成的**柱面**.

类似地，$F(y,z)=0$、$F(z,x)=0$ 分别表示母线平行于 x、y 轴的柱面.

常用柱面有平行于 z 轴的平面 $x+y=a$、椭圆柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$、抛物柱面 $y=\dfrac{x^2}{a^2}$ 等，分别如图 8.14～图 8.16 所示.

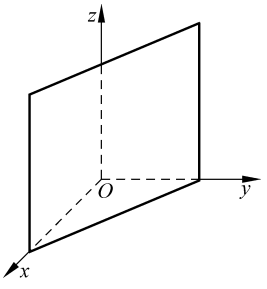

图 8.14

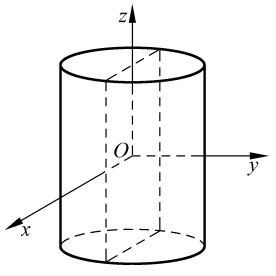

图 8.15

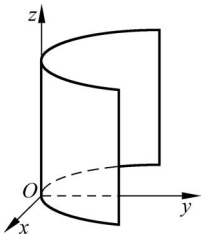

图 8.16