

高等院校大学数学系列教材

高等数学 (上册)

张海燕 徐利艳 主 编
俞竺君 孙丽洁 副主编

清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

本书是清华大学出版社“十四五”规划教材。分上、下两册出版,上册内容包括函数、极限与连续,导数与微分,微分中值定理与导数的应用,不定积分,定积分及其应用,微分方程;下册内容包括向量代数与空间解析几何,多元函数微分学及其应用,重积分,曲线积分与曲面积分,无穷级数。每章都配有习题及总习题,书末还附有基本初等函数图形、初等数学常用公式和习题参考答案。

本书在编写中力求结构严谨、由浅入深、通俗易懂,可作为高等院校理工科各专业的教材,也可供具有相当储备的自学者学习使用。

版权所有,侵权必究。举报:010-62782989, beiqinquan@tup.tsinghua.edu.cn.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册/张海燕,徐利艳主编.--北京:清华大学出版社,2026.5.
(高等院校大学数学系列教材).--ISBN 978-7-302-71436-1

I. O13

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 20262JK031 号

责任编辑:佟丽霞

封面设计:傅瑞学

责任校对:王淑云

责任印制:刘 菲

出版发行:清华大学出版社

网 址: <https://www.tup.com.cn>, <https://www.wqxuetang.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084

社 总 机:010-83470000 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:河北盛世彩捷印刷有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm

印 张:14.75

字 数:359千字

版 次:2026年5月第1版

印 次:2026年5月第1次印刷

定 价:45.00元

产品编号:100173-01

前言



本书是为普通高等院校非数学专业“高等数学”课程编写的教材,在保持结构严谨、内容通俗易懂的同时,注重基础、加强应用,尽量减少烦琐而又难以起到启发思维作用的证明.在编写的过程中,我们特别注重对学生的基本运算、分析问题及解决问题能力的培养.

本书内容丰富,叙述详细,可供普通高等学校作为“高等数学”课程的教材,也可供工程技术人员、报考研究生的读者作为参考用书.

本书是天津农学院数学教研室集体劳动的成果,由张海燕、徐利艳、俞竺君、孙丽洁、穆志民、崔军文、刘琦等老师共同编写完成,全书由张海燕老师完成统稿、定稿工作.

天津农学院基础科学学院及教务处的领导和老师在本书出版过程中给予了大力的协助,在此一并致谢!

由于编者水平有限,书中难免存在纰漏,敬请广大读者不吝指正.

编者

2026年1月28日

目 录



第 1 章 函数、极限与连续	1
1.1 函数的基本概念	1
1.1.1 函数的定义	1
1.1.2 反函数与复合函数	3
1.1.3 函数的基本性质	4
1.1.4 初等函数	5
习题 1.1	5
1.2 数列的极限	7
1.2.1 数列极限问题举例	7
1.2.2 数列的概念	8
1.2.3 数列极限的定义	8
1.2.4 数列极限的性质	10
习题 1.2	12
1.3 函数的极限	13
1.3.1 自变量趋于无穷大时函数的极限	13
1.3.2 自变量趋于有限值时函数的极限	14
1.3.3 函数极限的性质	16
习题 1.3	17
1.4 无穷小量与无穷大量	18
1.4.1 无穷小量	18
1.4.2 无穷大量	19
习题 1.4	20
1.5 极限的运算法则	21
习题 1.5	25
1.6 两个重要极限	26
习题 1.6	30
1.7 无穷小量的比较	31
习题 1.7	33
1.8 函数的连续性与间断点	33
1.8.1 函数的连续性	33
1.8.2 函数的间断点	35
习题 1.8	36

1.9	连续函数的运算与初等函数的连续性	36
1.9.1	连续函数的运算	36
1.9.2	初等函数的连续性	37
1.9.3	利用函数的连续性求极限	38
1.9.4	闭区间上连续函数的性质	38
	习题 1.9	39
	总习题 1	40
第 2 章	导数与微分	43
2.1	导数的概念	43
2.1.1	导数概念的引出	43
2.1.2	导数的定义	44
2.1.3	导数的几何意义	49
2.1.4	函数的可导性与连续性之间的关系	50
	习题 2.1	51
2.2	函数的求导法则	52
2.2.1	函数的和、差、积、商的求导法则	52
2.2.2	反函数的求导法则	55
2.2.3	复合函数的求导法则	56
	习题 2.2	59
2.3	高阶导数	59
	习题 2.3	62
2.4	隐函数及由参数方程所确定的函数的导数	62
2.4.1	隐函数的导数	62
2.4.2	由参数方程所确定的函数的导数	65
	习题 2.4	67
2.5	微分	67
2.5.1	微分的概念	67
2.5.2	微分的几何意义	70
2.5.3	微分的基本公式和微分运算法则	70
2.5.4	利用微分进行近似计算	73
	习题 2.5	75
	总习题 2	75
第 3 章	微分中值定理与导数的应用	77
3.1	微分中值定理	77
3.1.1	费马引理	77
3.1.2	罗尔定理	78
3.1.3	拉格朗日中值定理	79

3.1.4 柯西中值定理	82
习题 3.1	83
3.2 洛必达法则	84
3.2.1 基本未定式 $\frac{0}{0}$	84
3.2.2 基本未定式 $\frac{\infty}{\infty}$	86
3.2.3 其他型未定式	87
习题 3.2	88
3.3 泰勒公式	89
习题 3.3	92
3.4 函数单调性的判别法	92
习题 3.4	94
3.5 函数的极值与最大值、最小值	94
3.5.1 函数的极值	94
3.5.2 函数的最大值和最小值	97
3.5.3 应用举例	97
习题 3.5	97
3.6 函数作图法	98
3.6.1 曲线的凸凹性与拐点	98
3.6.2 曲线的渐近线	100
3.6.3 函数图形的描绘	101
习题 3.6	102
总习题 3	103
第 4 章 不定积分	104
4.1 不定积分的概念与性质	104
4.1.1 原函数与不定积分的概念	104
4.1.2 不定积分的性质	106
习题 4.1	106
4.2 不定积分的第一类换元积分法	107
习题 4.2	111
4.3 不定积分的第二类换元积分法	111
习题 4.3	113
4.4 不定积分的分部积分法	114
习题 4.4	116
4.5 有理函数的不定积分	117
习题 4.5	118
总习题 4	119

第 5 章 定积分	121
5.1 定积分的概念与性质	121
5.1.1 定积分实际问题举例	121
5.1.2 定积分的定义	123
5.1.3 定积分的几何意义	124
5.1.4 定积分的性质	126
习题 5.1	130
5.2 微积分基本定理	130
5.2.1 可变上限的定积分	131
5.2.2 牛顿-莱布尼茨公式	134
习题 5.2	136
5.3 定积分的积分法	137
5.3.1 定积分的换元积分法	138
5.3.2 定积分的分部积分法	142
习题 5.3	145
5.4 广义积分	145
5.4.1 积分区间为无穷区间的广义积分	146
5.4.2 被积函数具有无穷间断点的广义积分	148
习题 5.4	152
总习题 5	152
第 6 章 定积分的应用	155
6.1 微元法	155
习题 6.1	157
6.2 平面图形的面积	157
6.2.1 直角坐标系下平面图形的面积	157
6.2.2 极坐标系下平面图形的面积	161
习题 6.2	164
6.3 体积	164
6.3.1 已知平行截面面积的立体的体积	164
6.3.2 旋转体的体积	165
习题 6.3	169
6.4 平面曲线的弧长	169
6.4.1 平面曲线弧长的概念	170
6.4.2 由参数方程确定的平面曲线的弧长	170
6.4.3 直角坐标系下平面曲线的弧长	171
6.4.4 极坐标系下平面曲线的弧长	171
习题 6.4	172

6.5 定积分的物理应用	172
6.5.1 变力沿直线所做的功	173
6.5.2 液体压力	173
6.5.3 转动惯量	174
习题 6.5	175
总习题 6	175
第 7 章 微分方程	176
7.1 微分方程的基本概念	176
7.1.1 引例	176
7.1.2 基本概念	177
习题 7.1	178
7.2 可分离变量的微分方程	178
习题 7.2	182
7.3 齐次微分方程	182
习题 7.3	185
7.4 一阶线性微分方程	186
7.4.1 线性方程	186
* 7.4.2 伯努利方程	189
习题 7.4	190
7.5 可降阶的高阶微分方程	191
7.5.1 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程	191
7.5.2 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程	191
7.5.3 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程	193
习题 7.5	194
7.6 二阶线性微分方程	194
7.6.1 二阶线性微分方程的概念	195
7.6.2 二阶线性微分方程解的结构	195
7.6.3 二阶常系数齐次线性微分方程	196
7.6.4 二阶常系数非齐次线性微分方程	199
习题 7.6	202
总习题 7	202
常微分方程发展简史与相关著名科学家简介	204
附录 1 基本初等函数图形	206
附录 2 初等数学常用公式	210
习题参考答案	212
参考文献	226

函数、极限与连续

初等数学的研究对象基本上是不变的量,而高等数学是以变量作为研究对象的一门数学.函数刻画的就是变量之间的某种依赖关系,用极限来研究函数是高等数学的一种基本方法.本章在复习函数有关内容的基础上,着重学习函数极限的概念及其求法,使读者能够熟练掌握这些内容,为后面的学习打下良好的基础.

1.1 函数的基本概念

1.1.1 函数的定义

在一个问题中往往同时存在几个变量在变化,而这些变量并不是孤立地变化的,它们相互联系并遵循着一定的变化规律,下面先来分析两个例子.

例 1 圆的面积.考虑圆的面积 A 与它的半径 r 之间的相依关系.大家知道,它们之间符合如下公式:

$$A = \pi r^2.$$

当半径 r 在区间 $(0, +\infty)$ 内任意取定一个数值时,由上式可以唯一确定圆的面积 A 的相应数值.

例 2 自由落体运动.设物体下落的时间为 t ,落下的距离为 s .假定开始下落的时刻为 $t=0$,那么 s 与 t 之间的相依关系符合如下公式:

$$s = \frac{1}{2}gt^2,$$

其中, g 是重力加速度.假定物体着地的时刻为 $t=T$,那么当时间 t 在闭区间 $[0, T]$ 上任意取定一个数值时,由上式可以唯一确定 s 的相应数值.

撇开上面这两个例子中所涉及变量的实际意义,就会发现,它们都反映了两个变量之间的相依关系,这种相依关系就是当其中的一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时,另一个变量就有唯一确定的数值与之对应,两个变量之间的这种相依关系就是函数概念的实质.

定义 1 设 D 为非空实数集,若存在一个对应法则 f ,使得对 D 中的任意实数 x ,按照法则 f 都有唯一确定的实数 y 与之对应,则称 f 是定义在 D 上的函数,记作 $y=f(x)$, y 称为函数在 x 处的函数值.其中, x 称为自变量, y 称为因变量,数集 D 称为函数 $f(x)$ 的定义域.

函数值的集合

$$f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的值域, 记作 R_f .

表示函数的记号是任意选取的, 除了常用的记号 f 外, 还可以用其他字母, 例如 ϕ, φ 等, 这时函数就分别记作 $y=\phi(x), y=\varphi(x)$ 等. 有时还直接用因变量的记号来表示函数, 即把函数记作 $y=y(x)$. 但应该注意, 在同一问题中, 讨论几个不同的函数时, 为了表示它们的区别, 需要用不同的符号来表示函数. 例如, 函数 $y=y_1(x), y=y_2(x)$.

函数的对应法则和函数的定义域是函数的两个要素. 如果两个函数的定义域相同, 对应法则也相同, 那么这两个函数就是相同的, 否则就是不同的. 例如, 函数 $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$ 不相同, 因为二者的对应法则不同.

在实际问题中, 函数的定义域是根据问题的实际意义而确定的. 如例 1 中, 定义域 $D=(0, +\infty)$; 例 2 中, 定义域 $D=[0, T]$.

在高等数学中, 有时不考虑函数的实际意义, 而研究用抽象解析式来表示的函数, 这时我们约定: 函数的定义域就是使得函数解析式有意义的一切自变量的全体构成的集合. 例如, 函

数 $y=\sqrt{4-x^2}$ 的定义域为闭区间 $[-2, 2]$, 函数 $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域为开区间 $(-1, 1)$.

函数除了用解析式来表示外, 还可以用表格、图像来表示, 因此函数的表示方法主要有三种: 表格法、图像法、解析法(公式法).

如果函数的自变量在定义域内任取一个数值时, 对应的函数值有且只有一个, 则称这种函数为单值函数; 否则称为多值函数. 本书中所讨论的函数若无特殊说明, 均指单值函数.

在函数中, 有时一个函数要用几个表达式来表示, 这种在定义域的不同范围内, 对应法则用不同的表达式来表示的函数, 称为分段函数. 例如, 函数 $y=\begin{cases} 2x+1, & x \geq 0, \\ e^x, & x < 0 \end{cases}$ 就是一个分段函数.

下面给出几个函数的例子.

例 3 常函数 $y=2$, 其定义域为 $D=(-\infty, +\infty)$, 值域为 $W=\{2\}$. 它的图形是一条平行于 x 轴的直线, 如图 1.1 所示.

例 4 绝对值函数

$$y=|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$$

其定义域为 $D=(-\infty, +\infty)$, 值域为 $W=[0, +\infty)$. 它的图形是两条从原点出发的射线, 如图 1.2 所示.

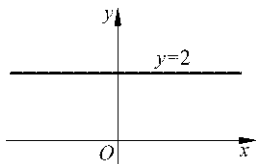


图 1.1

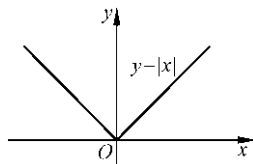


图 1.2

例 5 符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

其定义域为 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域为 $W = \{-1, 0, 1\}$. 它的图形是原点和两条平行于 x 轴的射线, 如图 1.3 所示. 对于任何实数 x , 总有等式 $x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$ 成立.

例 6 取整函数. 设 x 为任一实数, 不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分, 记作 $[x]$, 例如

$$\left[\frac{4}{9}\right] = 0, \quad [\sqrt{2}] = 1, \quad [\pi] = 3, \quad [-1] = -1, \quad [-3.6] = -4.$$

其定义域为 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域为 $W = \mathbf{Z}$. 它的图形为阶梯曲线, 在 x 为整数数值处发生跳跃, 且跳跃的高度为 1, 如图 1.4 所示.

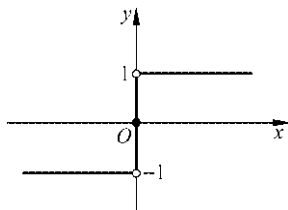


图 1.3

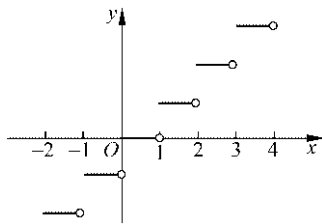


图 1.4

1.1.2 反函数与复合函数

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 W . 一般地, 对于任一数值 $y \in W$, 在 D 中有一个确定数值 x 与之对应, 这个数值 x 适合关系:

$$f(x) = y.$$

此时, 如果把 y 看作自变量, x 看作因变量, 按照函数概念, 得到一个新的函数 $x = \varphi(y)$, 则称这个新的函数 $x = \varphi(y)$ 为原来函数 $y = f(x)$ 的反函数, 记作 $x = f^{-1}(y)$. 相对于反函数 $x = f^{-1}(y)$ 来说, 原来的函数 $y = f(x)$ 称为直接函数. 习惯上, 用字母 x 表示函数的自变量, 用字母 y 表示函数的因变量. 这样, 反函数 $x = f^{-1}(y)$ 可表示为 $y = f^{-1}(x)$ 的形式. 由于函数的实质是对应法则, 我们改变的只是表示函数的自变量和因变量的字母, 而没有改变函数的对应法则, 所以函数 $x = f^{-1}(y)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 实质上还是同一个函数.

在同一个坐标平面上, 直接函数 $y = f(x)$ 与反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称 (见图 1.5). 因为如果 $P(a, b)$ 是函数 $y = f(x)$ 图形上的点, 则 $Q(b, a)$ 就是函数 $y = f^{-1}(x)$ 图形上的点; 反之, 若 $Q(b, a)$ 是函数 $y = f^{-1}(x)$ 图形上的点, 则 $P(a, b)$ 就是函数 $y = f(x)$ 图形上的点, 而点 $P(a, b)$ 和点 $Q(b, a)$ 是关于直线 $y = x$ 对称的, 故函数 $y = f(x)$ 与函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.

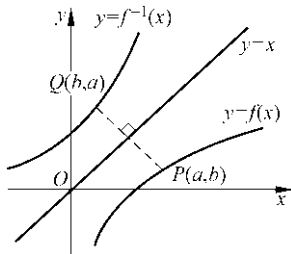


图 1.5

例如, 对数函数 $y = \log_a x$ 的反函数是指数函数 $y = a^x$, 二者的图形关于直线 $y = x$ 对称.

下面来讨论复合函数.

一般地, 若函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_1 , 函数 $u = \varphi(x)$ 的定义域为 D_2 , 值域为 W_2 , 并且 $W_2 \subset D_1$, 那么对于每个数值 $x \in D_2$, 有确定的数值 $u \in W_2$ 与之对应, 而 $W_2 \subset D_1$, 相应地也有确定的数值 y 与数值 u 对应. 即对于每个数值 $x \in D_2$, 通过变量 u 有确定的数值 y

与之对应, 这样我们就得到了一个以 x 为自变量、以 y 为因变量的函数, 这个函数称为由函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=\varphi(x)$ 构成的复合函数, 记作 $y=f[\varphi(x)]$. 其中 $y=f(u)$ 称为外层函数, $u=\varphi(x)$ 称为内层函数, u 称为中间变量.

例如, 函数 $y=\sin x^2$ 就是一个由 $y=\sin u$ 与 $u=x^2$ 构成的复合函数, 复合函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 它也是内层函数 $u=x^2$ 的定义域.

必须注意, 不是任何两个函数都能构成复合函数. 例如, $y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 就不能构成复合函数, 因为内层函数 $u=2+x^2$ 的值域完全不在外层函数 $y=\arcsin u$ 的定义域内.

1.1.3 函数的基本性质

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $A \subset D$. 如果存在正数 M , 使得对于一切 $x \in A$, 恒有

$$|f(x)| \leq M$$

成立, 则称函数 $f(x)$ 在数集 A 上有界, 也称 $f(x)$ 为数集 A 上的有界函数; 如果这样的正数 M 不存在, 则称函数 $f(x)$ 在数集 A 上无界, 也称 $f(x)$ 为数集 A 上的无界函数.

例如, 函数 $y=\sin x, y=\cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是有界函数. 因为对于所有 x , 都有 $|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$. 而函数 $y=x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是无界函数.

从几何图形上看, 函数 $f(x)$ 在数集 A 上有界, 就是函数 $f(x)$ 在数集 A 上的图形位于直线 $y=-M$ 与 $y=M$ 之间.

有界函数的另一种等价定义如下.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $A \subset D$. 如果存在两个数 m, M , 使得对于一切 $x \in A$, 恒有

$$m \leq f(x) \leq M$$

成立, 则称函数 $f(x)$ 在数集 A 上有界.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$, 如果对于任意 $x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) < f(x_2)$$

成立, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增函数(见图 1.6). 区间 I 称为函数 $f(x)$ 的单调增区间. 如果对于任意 $x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) > f(x_2)$$

成立, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减函数(见图 1.7). 区间 I 称为函数 $f(x)$ 的单调减区间. 单调增函数与单调减函数统称为单调函数. 单调增区间与单调减区间统称为单调区间.

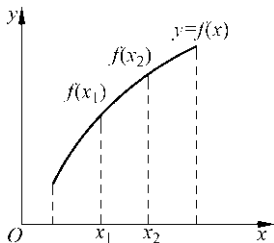


图 1.6

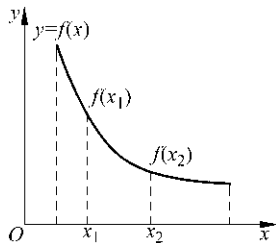


图 1.7

例如,函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上是单调减函数,在区间 $[0, +\infty)$ 上是单调增函数,但在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上不具有单调性. 函数 $y=x^3$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上是单调增函数.

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于坐标原点对称(即若 $x \in D$, 则 $-x \in D$). 如果对于任何 $x \in D$, 恒有

$$f(-x) = -f(x) \quad (f(-x) = f(x))$$

成立,则称函数 $f(x)$ 为奇(偶)函数.

例如,函数 $f(x) = \sin x$, $f(x) = x^3$ 是奇函数. 函数 $f(x) = \cos x$, $f(x) = x^2$ 是偶函数. 函数 $f(x) = \sin x + \cos x$ 既非奇函数也非偶函数.

由函数奇偶性的定义可知,偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于坐标原点对称.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在正数 T , 使得对于任意 $x \in D$, $x+T \in D$, 恒有

$$f(x+T) = f(x)$$

成立,则称函数 $f(x)$ 为周期函数,正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期.

通常所说的周期均指其最小正周期. 例如,函数 $\sin x$, $\cos x$ 的周期均为 $T=2\pi$. 函数 $\tan x$, $\cot x$ 的周期均为 $T=\pi$.

思考题 任何周期函数都有最小正周期吗?

1.1.4 初等函数

基本初等函数是指中学时所学过的以下六类函数,由于它们在高等数学中具有非常基础但很重要的地位,希望读者熟练掌握这些函数的性质及其图形等(图形详见附录1),这里不再一一赘述.

(1) 常函数: $y=C$ (C 为常数).

(2) 幂函数: $y=x^\mu$ (μ 是常数).

(3) 指数函数: $y=a^x$ ($a>0, a \neq 1$).

(4) 对数函数: $y=\log_a x$ ($a>0, a \neq 1$).

(5) 三角函数: $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$.

(6) 反三角函数: $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$.

所谓初等函数,是指由基本初等函数经有限次四则运算及有限次复合所构成的,并可和一个式子来表示的函数.

例如,函数 $y=\sin(2x+1), y=\log_a(1+\sqrt{1+x^2}), y=10^{\arcsin x}$ 等都是初等函数.

在实际应用中也常常遇到非初等函数. 分段函数就是一种常见的非初等函数,例如,

$$y = \begin{cases} \sin 2x, & x \geq 0, \\ 1+x^2, & x < 0 \end{cases} \text{ 就是一个非初等函数.}$$

习 题 1.1

1. 求下列函数的表达式:

(1) 已知 $f(x+1)=x^2+x$, 求 $f(x)$;

(2) 已知 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, 求 $f(x)$;

(3) 已知 $2f(x) + f(1-x) = x^2$, 求 $f(x)$;

(4) 已知 $f(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2$, 求 $f(x)$.

2. 求下列函数的定义域:

(1) $y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$;

(2) $y = \tan(x+2)$;

(3) $y = \arcsin(x-3)$;

(4) $y = \ln(x+1)$;

(5) $y = \frac{1}{x} - \sqrt{1-x^2}$;

(6) $y = \sqrt{3-x} + \arctan \frac{1}{x}$.

3. 下列各题中, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同? 为什么?

(1) $f(x) = \lg x^2, g(x) = 2 \lg x$;

(2) $f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2}$;

(3) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}, g(x) = x \sqrt[3]{x-1}$;

(4) $f(x) = 1, g(x) = \sec x^2 - \tan x^2$.

4. 判断下列函数在所给区间上的单调性:

(1) $f(x) = e^{\cos x}, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

(2) $f(x) = e^{-\sin x}, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

(3) $f(x) = \sin(\sin x), x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

(4) $f(x) = \cos(\sin x), x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

5. 下列函数中哪些是偶函数? 哪些是奇函数? 哪些既非奇函数又非偶函数?

(1) $y = x(x-1)(x+1)$;

(2) $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$;

(3) $y = \sin x - \cos x + 1$;

(4) $y = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$;

(5) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$;

(6) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

6. 下列各函数中哪些是周期函数? 对于周期函数, 指出其周期.

(1) $y = \cos(x-2)$;

(2) $y = \sin 4x$;

(3) $y = 2 + \sin \pi x$;

(4) $y = x \cos x$;

(5) $y = \cos^2 x$.

7. 设 $f(x)$ 的定义域为 $D = [0, 1]$, 求下列各函数的定义域:

(1) $f(x^2)$;

(2) $f(\sin x)$;

(3) $f(x+a) (a > 0)$;

(4) $f(x+a) + f(x-a) (a > 0)$.

8. 设 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $f_4(x) = f(f(f(f(x))))$.

9. 讨论狄利克雷(Dirichlet)函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数,} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

的单调性、有界性、周期性.

10. 设下面所考虑的函数都是定义在对称区间 $(-l, l)$ 上的, 证明:

(1) 两个偶函数的和是偶函数, 两个奇函数的和是奇函数;

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数, 两个奇函数的乘积是偶函数, 偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

11. 设 $f(x)$ 是定义在 $(-l, l)$ 内的奇函数, 若 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加, 证明 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

12. 在下列各题中, 求所给函数构成的复合函数, 并求复合函数在自变量给定取值 x_1 和 x_2 的函数值.

$$(1) y = \ln u, u = 1 + x^2, x_1 = 0, x_2 = 2; \quad (2) y = u^2, u = \sin x, x_1 = 0, x_2 = \frac{\pi}{2};$$

$$(3) y = \sin u, u = 2x, x_1 = \frac{\pi}{8}, x_2 = \frac{\pi}{4}; \quad (4) y = e^u, u = x^2, x_1 = 0, x_2 = 1.$$

13. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-l, l)$, 证明:

(1) $F(x) = f(x) + f(-x) (x \in (-l, l))$ 为偶函数;

(2) $G(x) = f(x) - f(-x) (x \in (-l, l))$ 为奇函数;

(3) 函数 $f(x)$ 可以表示为奇函数与偶函数之和.

1.2 数列的极限

高等数学的研究对象是变量, 为了很好地掌握变量的变化规律, 不仅要考察变量的变化过程, 更重要的是要通过它的变化过程来判断它的变化趋势, 而变量确定的变化趋势就是变量的极限. 本节研究数列的极限.

1.2.1 数列极限问题举例

极限概念是在求某些实际问题之精确值的过程中产生的. 例如, 我国古代数学家刘徽利用圆内接正多边形来推算圆面积的方法——割圆术, 就是极限思想在几何学上的应用.

设有一个圆, 首先作圆的内接正六边形, 把它的面积记为 A_1 ; 再作内接正十二边形, 其面积记为 A_2 ; 再作内接正二十四边形, 其面积记为 A_3 ; 按此规律作下去. 一般地, 把内接正 $6 \times 2^{n-1}$ 边形的面积记为 $A_n (n \in \mathbb{N}^+)$, 这样就得到一系列内接正多边形的面积:

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$$

它们构成一系列有次序的数, 当 n 越大, 内接正多边形与圆的差别就越小, 从而用 A_n 作为圆面积的近似值也就越精确. 因此, 设想 n 无限增大 (记为 $n \rightarrow \infty$, 读作 n 趋于无穷大) 时, 内接正多边形就无限接近于圆, 同时 A_n 也无限接近于某个确定的数值, 这个确定的数值就是圆的面积. 在数学上这个确定的数值称为这一列有序数 (所谓数列) $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ 在 $n \rightarrow \infty$ 时的极限. 在求圆面积的问题中, 我们看到, 正是这个数列的极限才精确地表达了圆的面积.

上述实际问题的解决就体现了极限的思想, 如今极限的方法已经成为高等数学中的一种基本方法, 应用非常广泛.

1.2.2 数列的概念

按照一定的法则,依次由自然数 $1, 2, \dots, n, \dots$ 编号排成的一列数

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

称为数列,记作 $\{x_n\}$. 数列中的每一个数称为数列的项,第 n 项 x_n 称为数列的一般项或通项. 例如:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

$$2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots$$

$$1, -1, 1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots$$

都是数列,它们的通项分别为

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad x_n = \frac{n+1}{n}, \quad x_n = (-1)^{n+1}.$$

数列 $\{x_n\}$ 可看作自变量为正整数 n 的函数,即

$$x_n = f(n).$$

它的定义域是全体正整数,当自变量 n 依次取 $1, 2, 3, \dots$ 时,对应的函数值就构成了一个数列 $\{x_n\}$.

1. 单调数列

如果数列 $\{x_n\}$ 满足条件:

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \dots,$$

则称数列 $\{x_n\}$ 为单调递增数列.

如果数列 $\{x_n\}$ 满足条件:

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \dots,$$

则称数列 $\{x_n\}$ 为单调递减数列.

单调递增数列和单调递减数列统称为单调数列. 例如,数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 是一个单调递减数列,数列 $\{2^n\}$ 是一个单调递增数列.

2. 有界数列

对于数列 $\{x_n\}$, 如果存在正数 M , 使得对任何正整数 n , 都有

$$|x_n| \leq M$$

成立, 则称数列 $\{x_n\}$ 是有界数列; 否则, 称数列 $\{x_n\}$ 是无界数列. 例如, 数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $\left\{1 + \frac{1}{n}\right\}$, $\{(-1)^{n+1}\}$ 都是有界数列, 数列 $\{2^n\}$ 是无界数列.

对于给定的数列 $\{x_n\}$, 我们要讨论的问题是: 当项数 n 无限增大(即 $n \rightarrow \infty$) 时, 对应的项 x_n 是否能够无限趋近于或等于某一个确定的常数, 如果能够, 那么这个常数是多少? 这就是数列极限所要研究的问题.

1.2.3 数列极限的定义

对于给定的数列 $\{x_n\}$, 如果当项数 n 无限增大($n \rightarrow \infty$) 时, 对应的项 x_n 无限趋近于或等

于一个确定的常数 A , 则称常数 A 为数列 $\{x_n\}$ 的极限, 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ 或 $x_n \rightarrow A (n \rightarrow \infty)$. 例如, 数列 $\left\{1 + \frac{1}{n}\right\}$ 的一般项 $x_n = 1 + \frac{1}{n}$, 从直观上可以看出, 当项数 n 无限增大时, 数列的项 x_n 无限接近常数 1. 也就是说, 常数 1 是数列 $\left\{1 + \frac{1}{n}\right\}$ 的极限.

显然, 对于比较简单的数列, 很容易从数列通项的变化趋势上分析出数列的极限. 当然如果数列的通项比较复杂, 要想从直观上得出数列的极限就不太容易了, 况且上述定义只是一种描述性定义, 不够准确和严谨, 为了准确地描述“无限增大”和“无限趋近”的意义, 揭示数列极限的实质, 我们必须用精确的数学语言来描述这一概念.

我们知道, 两个数之间的接近程度可以用这两个数之差的绝对值来度量. 例如, $|b - a|$ 越小, 说明数 a 与 b 越接近.

再来考察数列 $\left\{1 + \frac{1}{n}\right\}$, 从数列的变化趋势来看, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $x_n \rightarrow 1$. 这就意味着, 当项数 n 充分大时, 数 x_n 与 1 可以任意接近, 即 $|x_n - 1|$ 可以任意地小. 换句话说, 只要 n 充分大, $|x_n - 1| = \frac{1}{n}$ 就可以任意小于预先给定的正数 ϵ . 由此可知, 对于任意给定的正数 ϵ (无论它多么小), 总存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 恒有不等式

$$\left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| < \epsilon$$

成立. 这就是当 $n \rightarrow \infty$ 时, 数列 $x_n = \frac{1+n}{n} \rightarrow 1$ 的实质. 由此推广到一般, 便得到数列极限的精确定义.

定义 1 给定数列 $\{x_n\}$, a 为一常数, 如果对于任意给定的正数 ϵ (无论它多么小), 总存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 恒有不等式

$$|x_n - a| < \epsilon$$

成立, 则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限, 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 或 $x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$. 此时也称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a ; 反之, 称数列 $\{x_n\}$ 没有极限, 或称数列 $\{x_n\}$ 发散.

在上面定义中, 正数 ϵ 的任意性很重要, 因为只有这样, 不等式 $|x_n - a| < \epsilon$ 才能表达出 x_n 与 a 无限接近的意思. 此外还应注意, 定义中的正整数 N 与正数 ϵ 有关, 正整数 N 随着 ϵ 的给定而选定.

从几何上来看, 常数 a 和数列 $\{x_n\}$ 的各项都可用数轴上的对应点来表示. 因为 $|x_n - a| < \epsilon$ 等价于 $a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$, 所以数列 $\{x_n\}$ 以 a 为极限的几何解释就是: 对于任意给定的正数 ϵ , 总存在正整数 N , 从第 N 项以后的所有项 x_{N+1}, x_{N+2}, \dots 的对应点都落在以 a 为中心、长度为 2ϵ 的开区间 $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ 内, 至多有有限个点在此区间之外 (见图 1.8).

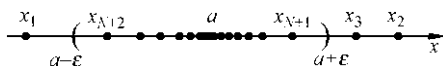


图 1.8

通常, 我们将开区间 $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ 内的所有点构成的集合称为点 a 的 ϵ 邻域, 记作 $U(a, \epsilon)$. 点 a 称为邻域中心, ϵ 称为邻域半径. 将点 a 的 ϵ 邻域中的邻域中心 a 去掉后所得

到的集合称为点 a 的去心 ϵ 邻域, 记作 $\dot{U}(a, \epsilon)$. 因此, 数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的几何解释也可以说成: 对于任意给定的正数 ϵ , 总存在正整数 N , 第 N 项后的所有点都落在点 a 的 ϵ 邻域内.

数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 的定义可简单表述为:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \text{存在正整数 } N, \text{当 } n > N \text{ 时, 有 } |x_n - a| < \epsilon.$$

例 1 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + (-1)^{n-1}}{n} = 1$.

证 由于 $|x_n - a| = \left| \frac{n + (-1)^{n-1}}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n}$, 对于任意给定的正数 ϵ , 要使 $\left| \frac{n + (-1)^{n-1}}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n} < \epsilon$, 只要 $n > \frac{1}{\epsilon}$, 故取正整数 $N = \left[\frac{1}{\epsilon} \right]$, 则当 $n > N$ 时, 恒有 $\left| \frac{n + (-1)^{n-1}}{n} - 1 \right| < \epsilon$, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + (-1)^{n-1}}{n} = 1.$$

例 2 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = 0$.

证 由于 $|x_n - a| = \left| \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} - 0 \right| = \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n+1}$, 对于任意给定的正数 ϵ (设 $\epsilon < 1$), 要使 $|x_n - a| < \epsilon$, 只要 $\frac{1}{n+1} < \epsilon$, 即 $n > \frac{1}{\epsilon} - 1$, 故取正整数 $N = \left[\frac{1}{\epsilon} - 1 \right]$, 则当 $n > N$ 时, 恒有 $\left| \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} - 0 \right| < \epsilon$, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = 0.$$

例 3 设 $|q| < 1$, 证明等比数列 $1, q, q^2, \dots, q^{n-1}, \dots$ 的极限是 0.

证 对于任意给定的 $\epsilon > 0$ (设 $\epsilon < 1$), 由于 $|x_n - a| = |q^{n-1} - 0| = |q|^{n-1} < \epsilon$, 取自然对数 $(n-1)\ln|q| < \ln\epsilon$, 解得 $n > 1 + \frac{\ln\epsilon}{\ln|q|}$, 故取正整数 $N = \left[1 + \frac{\ln\epsilon}{\ln|q|} \right]$, 则当 $n > N$ 时, 恒有 $|q^{n-1} - 0| < \epsilon$, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n-1} = 0.$$

通过以上几个例子, 可总结出利用定义证明数列极限的一般步骤如下:

(1) 对于 $\forall \epsilon > 0$, 假设 $|x_n - a| < \epsilon$.

(2) 从上述假设的不等式出发, 解出 $n > f(\epsilon)$ (一般可采用加强不等式的方法).

(3) 取正整数 $N \geq f(\epsilon)$ 即可. 特别值得注意的是, 对于任意给定的正数 ϵ , 能求出满足定义要求的正整数 N 即可, 它是不唯一的, 也没有必要是最小的.

1.2.4 数列极限的性质

定理 1 (极限的唯一性) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则其极限唯一.

证 反证法. 假设 $x_n \rightarrow a$ 及 $x_n \rightarrow b$, 且 $a < b$. 取 $\epsilon = \frac{b-a}{2} > 0$, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 故存在正

整数 N_1 , 使得对于 $n > N_1$ 的一切 x_n , 恒有不等式

$$|x_n - a| < \frac{b-a}{2}$$

成立.

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$, 故存在正整数 N_2 , 使得对于 $n > N_2$ 的一切 x_n , 恒有不等式

$$|x_n - b| < \frac{b-a}{2}$$

成立. 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 当 $n > N$ 时, 有不等式

$$x_n < \frac{a+b}{2} \text{ 与 } x_n > \frac{a+b}{2}$$

同时成立, 这是矛盾的. 故 $a=b$.

例 4 证明数列 $x_n = (-1)^{n+1} (n=1, 2, \dots)$ 是发散数列.

证 反证法. 假设该数列收敛, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. 由数列极限的定义, 对于 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, 存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 恒有不等式 $|x_n - a| < \frac{1}{2}$ 成立, 即当 $n > N$ 时, 所有 x_n 都落在开区间 $(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2})$ 内, 但这是不可能的. 因为当 $n \rightarrow \infty$ 时, x_n 总是在 1 和 -1 之间跳动, 而不可能同时属于长度为 1 的开区间 $(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2})$ 内, 故数列 $\{(-1)^{n+1}\}$ 发散.

定理 2(收敛数列的有界性) 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则数列 $\{x_n\}$ 一定有界.

证 由于数列 $\{x_n\}$ 收敛, 故不妨假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. 由数列极限的定义, 对于给定的 $\varepsilon = 1$, 存在正整数 N , 使得对于 $n > N$ 的一切 x_n , 总有 $|x_n - a| < \varepsilon = 1$. 故当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n| = |x_n - a + a| \leq |x_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

取 $M = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|, \dots, |x_N|, 1 + |a|\}$, 则对于一切正整数 n , 恒有不等式 $|x_n| \leq M$ 成立, 所以数列 $\{x_n\}$ 有界.

根据该定理, 如果数列 $\{x_n\}$ 无界, 那么数列 $\{x_n\}$ 一定发散. 需要注意, 如果数列 $\{x_n\}$ 有界, 却不能断定它一定收敛. 例如, 数列 $\{(-1)^n\}$ 虽然是有界数列, 但它却是发散的. 所以数列有界是数列收敛的必要非充分条件.

定理 3(收敛数列的保号性) 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 且 $a > 0$ (或 $a < 0$), 则存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 有 $x_n > 0$ (或 $x_n < 0$).

证 仅证明 $a > 0$ 的情形. 由数列极限的定义, 对于 $\varepsilon = \frac{a}{2} > 0$, 存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - a| < \frac{a}{2},$$

从而

$$x_n > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0.$$

推论 1(收敛数列的保序性) 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 数列 $\{y_n\}$ 收敛于 b , 且 $a > b$, 则存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 有 $x_n > y_n$.

推论 2 如果数列 $\{x_n\}$ 从某项起有 $x_n \geq 0$ (或 $x_n \leq 0$), 且数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 则 $a \geq 0$ (或 $a \leq 0$).

证 仅证明 $x_n \geq 0$ 的情形. 设数列 $\{x_n\}$ 从 N_1 项起, 即当 $n > N_1$ 时, 有 $x_n \geq 0$ 成立. 现用反证法证明. 假设 $a < 0$, 则由定理 3 知, 存在正整数 N_2 , 当 $n > N_2$ 时, 有 $x_n < 0$ 成立. 现取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时, 有 $x_n \geq 0$ 与 $x_n < 0$ 同时成立, 这是矛盾的, 所以必有 $a \geq 0$.

最后, 介绍子数列的概念以及收敛数列与其子数列之间的关系.

在数列 $\{x_n\}$ 中任意抽取无限多项并保持这些项在原数列 $\{x_n\}$ 中的先后次序, 这样得到的一个新数列称为原数列 $\{x_n\}$ 的子数列 (或子列).

设在数列 $\{x_n\}$ 中, 第一次抽取 x_{n_1} , 第二次在 x_{n_1} 之后抽取 x_{n_2} , 第三次在 x_{n_2} 后抽取 x_{n_3} , \dots , 这样一直继续下去, 得到一个新数列

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots,$$

这个新数列 $\{x_{n_k}\}$ 称为数列 $\{x_n\}$ 的一个子数列 (或子列).

注意 由子数列的定义可知, x_{n_k} 是子数列的通项, 它是子数列 $\{x_{n_k}\}$ 的第 k 项, 而在原数列 $\{x_n\}$ 中却是第 n_k 项, 显然 $n_k \geq k$.

定理 4 (收敛数列与其子数列间的关系) 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 那么它的任一子数列也收敛于 a .

证 设数列 $\{x_{n_k}\}$ 是数列 $\{x_n\}$ 的任一子数列.

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 故对于任意给定的正数 ϵ , 存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 有不等式 $|x_n - a| < \epsilon$ 成立.

取 $K = N$, 则当 $k > K$, 即 $n_k > n_K = n_N \geq N$ 时, 恒有不等式

$$|x_{n_k} - a| < \epsilon$$

成立, 故 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$.

由定理 4 可知, 如果数列 $\{x_n\}$ 中有两个子数列收敛于不同的极限或有一个子数列极限不存在, 那么原数列 $\{x_n\}$ 一定发散.

例如, 数列 $\{x_n = (-1)^{n+1}\}$ 的子数列 $\{x_{2k-1}\}$ 收敛于 1, 而子数列 $\{x_{2k}\}$ 收敛于 -1, 因此数列 $\{x_n = (-1)^{n+1}\}$ 是发散的. 同时这个例子也说明, 一个发散的数列也可能有收敛的子数列.

再如, 数列 $1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, \dots, n^{(-1)^n}, \dots$ 中有一个发散的子数列 $x_{2k} = 2k$, 因此数列 $x_n = n^{(-1)^n}$ 发散.

习 题 1.2

1. 观察下列数列 $\{x_n\}$ 的变化趋势, 写出它们的极限:

$$(1) x_n = \frac{1}{3^n}; \quad (2) x_n = (-1)^n \frac{1}{n}; \quad (3) x_n = 2 + \frac{1}{n^2};$$

$$(4) x_n = \frac{n-1}{n+1}; \quad (5) x_n = n(-1)^n.$$

2. 根据数列极限的定义证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+1} = \frac{3}{2};$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n} = 1; \quad (4) \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{0.999 \cdots 9}_{n \uparrow} = 1.$$

3. 设 $|x| < 1$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+x)(1+x^2)(1+x^4) \cdots (1+x^{2^n})$.

4. 设数列 $\{x_n\}$ 有界, 又 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$.

5. 对于数列 $\{x_n\}$, 若 $x_{2k} \rightarrow a (k \rightarrow \infty)$, $x_{2k+1} \rightarrow a (k \rightarrow \infty)$, 证明 $x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$.

6. 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 数列 $\{y_n\}$ 收敛于 b , 且 $a < b$, 证明存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 有 $x_n < y_n$.

7. 如果数列 $\{x_n\}$ 从某项起有 $x_n \leq 0$, 且数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 证明 $a \leq 0$.

8. 证明数列 $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$ 是发散的.

1.3 函数的极限

在 1.2 节中研究了数列的极限, 因为数列 $\{x_n\}$ 可看成自变量为正整数 n 的特殊函数 $x_n = f(n)$, 所以我们把数列的极限问题推广到一般的函数上, 便得到一般函数的极限问题, 这就是本节所要研究的主要内容.

函数的极限实质上就是研究在自变量的某种变化趋势下相应的函数值的变化趋势, 所以函数值的变化趋势是由自变量的变化趋势所决定的. 自变量的变化趋势一般可分两种情形: ① 自变量的绝对值 $|x|$ 无限增大, 即 x 趋向于无穷大 (记作 $x \rightarrow \infty$); ② 自变量 x 任意接近于一个常数 x_0 或者说趋近于有限值 x_0 (记作 $x \rightarrow x_0$). 下面我们分别就这两种情形来讨论函数的极限.

1.3.1 自变量趋于无穷大时函数的极限

与数列极限的意义类似, 对于函数 $y = f(x)$, 如果当自变量 x 趋向于无穷大时, 对应的函数值无限接近于或等于某个确定的常数, 那么这个确定的常数称为函数 $f(x)$ 在自变量 x 趋于无穷大时的极限, 其精确定义如下.

定义 1 设函数 $f(x)$ 在 $|x| > M (M > 0)$ 时有定义, A 为常数. 如果对于任意给定的正数 ϵ , 总存在正数 $X (X \geq M)$, 使得对于适合 $|x| > X$ 的一切 x , 恒有不等式

$$|f(x) - A| < \epsilon$$

成立, 则称常数 A 为函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow \infty$ 时的极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow \infty).$$

如果 $x > 0$ 且趋向于无穷大 (记作 $x \rightarrow +\infty$), 那么只要把上面定义中的“ $|x| > X$ ”改为

“ $x > X$ ”, 便得到 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 的定义. 同样, 如果 $x < 0$ 且 $|x|$ 无限增大 (记作 $x \rightarrow -\infty$), 那么只要把 “ $|x| > X$ ” 改为 “ $x < -X$ ”, 便得到 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 的定义.

命题 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$.

例如, 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x \neq \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x$, 故 $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$ 不存在.

函数极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 的定义可作如下简述:

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, 存在正数 X , 当 $|x| > X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 的几何解释: 对于任意给定的正数 ε , 作直线 $y = A + \varepsilon$ 和 $y = A - \varepsilon$, 得一带形区域, 无论这一带形区域多么窄, 总存在正数 X , 使得只要 x 落入区间 $(-\infty, -X)$ 与 $(X, +\infty)$ 内时, 所对应的函数 $y = f(x)$ 的图形就都落在这两条直线 $y = A + \varepsilon$ 和 $y = A - \varepsilon$ 之间 (见图 1.9).

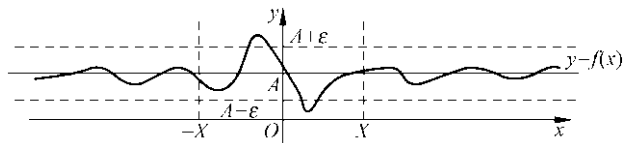


图 1.9

例 1 证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

证 由于 $|f(x) - 0| = \left| \frac{\sin x}{x} - 0 \right| = \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|}$, 对于任意给定的正数 ε , 要使 $\left| \frac{\sin x}{x} - 0 \right| < \varepsilon$, 只需 $\frac{1}{|x|} < \varepsilon$, 即 $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$, 故取 $X = \frac{1}{\varepsilon}$, 当 $|x| > X$ 时, 恒有不等式

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 0 \right| < \varepsilon$$

成立, 故 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

一般地, 如果 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$, 则称直线 $y = c$ 是函数 $y = f(x)$ 图形的水平渐近线.

1.3.2 自变量趋于有限值时函数的极限

在自变量 $x \rightarrow x_0$ 的过程中, 对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于或等于常数 A , 就是 $|f(x) - A|$ 能任意小. 正如数列极限概念中那样, $|f(x) - A|$ 能任意小这件事可以用 $|f(x) - A| < \varepsilon$ (ε 是任意给定的正数) 来描述, 因为函数值 $f(x)$ 无限接近于 A 是在 $x \rightarrow x_0$ 的过程中实现的, 所以对于任意给定的正数 ε , 要求充分接近 x_0 的 x 所对应的函数值 $f(x)$ 满足不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$; 而充分接近 x_0 的 x 可表达为 $0 < |x - x_0| < \delta$ ($\delta > 0$), 其中 δ 体现了 x 接近 x_0 的程度.

基于以上分析, 下面给出当 $x \rightarrow x_0$ 时函数极限的定义.

定义 2 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义, A 为常数. 如果对于任意给定的正

数 ϵ (无论它多么小), 总存在正数 δ , 使得对于满足不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的一切 x , 恒有不等式

$$|f(x) - A| < \epsilon$$

成立, 则称常数 A 为函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时的极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0).$$

在定义中, 不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 表示自变量 x 与 x_0 很接近, 但 $x \neq x_0$. 所以当 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 是否有极限与函数 $f(x)$ 在点 x_0 处是否有定义无关.

函数极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的定义可作如下简述:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \text{ 存在 } \delta > 0, \text{ 当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \epsilon.$$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的几何解释: 对于任意给定的正数 ϵ , 作直线 $y = A + \epsilon$ 和 $y = A - \epsilon$, 得一带形区域, 无论这一带形区域多么窄, 总存在点 x_0 的某去心 δ 邻域, 使得只要当 x 落入该邻域内时, 其所对应的函数 $y = f(x)$ 的图形就落在这两直线 $y = A + \epsilon$ 和 $y = A - \epsilon$ 之间 (见图 1.10).

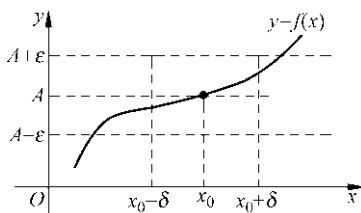


图 1.10

例 2 证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$, 其中 c 为一常数.

证 由于 $|f(x) - A| = |c - c| = 0$, 因此对于任意给定的正数 ϵ , 可任取一正数 δ , 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有不等式

$$|f(x) - A| = 0 < \epsilon$$

成立, 所以 $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$.

例 3 证明 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$.

证 由于 $|f(x) - A| = \left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| = |(x + 2) - 4| = |x - 2|$, 对于任意给定的正数 ϵ , 要使 $\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < \epsilon$, 只需 $|x - 2| < \epsilon$, 故取 $\delta = \epsilon$, 则当 $0 < |x - 2| < \delta$ 时, 恒有不等式

$$\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < \epsilon$$

成立, 所以 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$.

在上述极限讨论中, 自变量 x 是从 x_0 的左右两侧趋近于 x_0 , 但有时只能或只需考虑自变量 x 从 x_0 的一侧趋近于 x_0 的情形, 这便是单侧极限 (左极限和右极限) 的概念.

如果 $x < x_0$ 且 x 趋近于 x_0 (记作 $x \rightarrow x_0^-$) 时, 函数 $f(x) \rightarrow A$ 或 $f(x) = A$, 则称常数 A 是函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时的左极限, 记作 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ 或 $f(x_0^-) = A$.

类似地, 如果当 $x > x_0$ 且 x 趋近于 x_0 (记作 $x \rightarrow x_0^+$) 时, 函数 $f(x) \rightarrow A$ 或 $f(x) = A$, 则称常数 A 是函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时的右极限, 记作 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ 或 $f(x_0^+) = A$.

左极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ 与右极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ 的定义作如下简述:

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$.

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$.

命题 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$.

例 4 给定函数

$$f(x) = \begin{cases} x - 2, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x + 5, & x > 0. \end{cases}$$

讨论当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限是否存在.

解 由于左极限 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 2) = -2$, 右极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 5) = 5$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在.

1.3.3 函数极限的性质

定理 1(函数极限的唯一性) 如果极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 那么其极限唯一.

定理 2(函数极限的局部有界性) 如果 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$, 那么存在常数 $M > 0$ 和 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| \leq M$.

证 因为 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$, 所以对于 $\epsilon = 1$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有不等式

$$|f(x) - A| < \epsilon = 1,$$

于是

$$|f(x)| = |f(x) - A + A| \leq |f(x) - A| + |A| < 1 + |A|.$$

故函数 $f(x)$ 在 x_0 的去心邻域 $\{x | 0 < |x - x_0| < \delta\}$ 内有界.

定理 3(函数极限的局部保号性) 如果 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$, 而且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 那么存在正数 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$).

证 仅证明 $A > 0$ 的情形.

因为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 所以对于 $\epsilon = \frac{A}{2} > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有不等式

$$|f(x) - A| < \epsilon = \frac{A}{2},$$

从而

$$f(x) > \frac{A}{2} > 0.$$

推论 如果在 x_0 的某一去心邻域内 $f(x) \geq 0$ (或 $f(x) \leq 0$), 而且 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$, 那么 $A \geq 0$ (或 $A \leq 0$).

证 仅证明 $f(x) \geq 0$ 的情形. 假设上述论断不成立, 即设 $A < 0$, 那么由定理 3 可知, 存在 x_0 的某一去心邻域, 在该邻域内 $f(x) < 0$, 这与 $f(x) \geq 0$ 的假定矛盾, 所以 $A \geq 0$.

定理 4(函数极限与数列极限的关系) 如果 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$, $\{x_n\}$ 为函数 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列, 且 $x_n \neq x_0 (n \in \mathbb{N}^+)$, 那么函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必收敛, 且 $f(x_n) \rightarrow A (n \rightarrow \infty)$.

证 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$.

又因 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, 故对上述 $\delta > 0$, 存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - x_0| < \delta$.

由假设 $x_n \neq x_0 (n \in \mathbb{N}^+)$, 故当 $n > N$ 时, 有不等式 $0 < |x_n - x_0| < \delta$ 成立, 从而 $|f(x_n) - A| < \epsilon$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

本定理常常用来判断函数在某点处的极限不存在.

例 5 证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在.

证 取数列

$$x'_n = \frac{1}{2n\pi} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty),$$

$$x''_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty).$$

显然

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x'_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin 2n\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x''_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(2n\pi + \frac{\pi}{2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1,$$

所以, 根据定理 4 知, $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在.

习 题 1.3

1. 根据函数极限的定义证明:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 3} (3x - 1) = 8; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 2} (5x + 2) = 12;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = -4; \quad (4) \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{1 - 4x^2}{2x + 1} = 2.$$

2. 当 $x \rightarrow 2$ 时, $y = x^2 \rightarrow 4$. 问: δ 等于多少, 可使当 $|x - 2| < \delta$ 时, $|y - 4| < 0.001$?

3. 设函数 $f(x) = \frac{|x - 2|}{x - 2}$, 求 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

4. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 3, \\ -ax, & x < 3, \end{cases}$: (1) 求 $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$; (2) 若 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ 存在, a 应取何值?

5. 根据函数极限的定义证明: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{2x^3} = \frac{1}{2}$.

6. 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, 证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |a|$. 举例说明反之不成立.

7. 根据极限的定义证明: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 的充分必要条件是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A.$$

8. 根据极限的定义证明: 函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时极限存在的充分必要条件是 $f(x)$ 在 x_0 处的左极限、右极限存在并且相等.

9. 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \neq 0$, 证明存在 x_0 的某去心邻域 $\dot{U}(x_0)$, 当 $x \in \dot{U}(x_0)$ 时, 有

$$|f(x)| > \frac{|A|}{2}.$$

1.4 无穷小量与无穷大量

1.4.1 无穷小量

如果函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的极限为零, 则称函数 $f(x)$ 为 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷小量, 简称无穷小. 因此只要在函数极限的定义中, 令常数 $A = 0$, 便得到无穷小的精确定义.

定义 1 如果对于任意给定的正数 ϵ (无论它多么小), 总存在正数 δ (或正数 X), 使得对于满足不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ (或 $|x| > X$) 的一切 x , 恒有不等式

$$|f(x)| < \epsilon$$

成立, 则称函数 $f(x)$ 是 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷小量.

应该注意, 无穷小量是以零为极限的变量, 不能把它和很小的数 (例如百万分之一) 混为一谈, 除零以外的任何常数都不是无穷小量, 并且无穷小量还与自变量的某一变化过程有关系. 否则, 空谈某个变量是无穷小量是没有意义的.

函数 $f(x)$ 是 $x \rightarrow x_0$ 的无穷小量可作如下简述:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \text{ 存在 } \delta > 0, \text{ 当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, 有 } |f(x)| < \epsilon.$$

特别地, 以零为极限的数列 $\{x_n\}$ 是 $n \rightarrow \infty$ 时的无穷小量.

例如, 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$, 所以函数 $\frac{1}{x^2}$ 是 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小量; 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$, 所以函

数 $x - 1$ 是 $x \rightarrow 1$ 时的无穷小量; 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$, 所以数列 $\left\{ \frac{1}{n+1} \right\}$ 是 $n \rightarrow \infty$ 时的无穷小量.

定理 1 在自变量的同一变化过程 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 中, 函数 $f(x)$ 极限等于 A 的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha$, 其中 α 是无穷小量.

证 仅证明当 $x \rightarrow x_0$ 时的情形.

(1) 必要性

设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \epsilon.$$

令 $\alpha = f(x) - A$, 则 α 是 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小量, 且

$$f(x) = A + \alpha,$$

故函数 $f(x)$ 等于它的极限 A 与一个无穷小量 α 之和.

(2) 充分性

设 $f(x) = A + \alpha$, 其中 A 是常数, 于是

$$|f(x) - A| = |\alpha|.$$

因为 α 是 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小量, 则 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$, 有

$$|f(x) - A| = |\alpha| < \epsilon,$$

故常数 A 是 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时的极限.

类似地可以证明当 $x \rightarrow \infty$ 时的情形.

1.4.2 无穷大量

如果当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时, 函数值的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大, 则称函数 $f(x)$ 是 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷大量, 简称为无穷大.

定义 2 如果对于任意给定的正数 M (无论它多么大), 总存在正数 δ (或正数 X), 使得对于适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ (或 $|x| > X$) 的一切 x , 恒有不等式

$$|f(x)| > M$$

成立, 则称函数 $f(x)$ 是 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷大量.

应该注意, 无穷大量是一个变量, 不能把它与很大很大的常数 (如一千万、一亿等) 混为一谈, 任何常数都不是无穷大量, 并且无穷大量还与自变量的某一变化过程有关系. 否则, 空谈某个变量是无穷大量是没有意义的.

例如, 函数 $\frac{1}{x-1}$ 是 $x \rightarrow 1$ 时的无穷大量.

根据函数极限的定义, 如果 $f(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷大量, 那么函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的极限是不存在的, 但为了讨论方便, 我们通常也说“函数 $f(x)$ 的极限是无穷大”, 并记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \text{ (或 } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty).$$

类似地, 可定义正无穷大量和负无穷大量.

在无穷大的定义中, 如果把“ $|f(x)| > M$ ”换成“ $f(x) > M$ ”, 则称函数 $f(x)$ 是 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的正无穷大量, 并记作 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ (或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$).

在无穷大的定义中, 如果把“ $|f(x)| > M$ ”换成“ $f(x) < -M$ ”, 则称函数 $f(x)$ 是 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的负无穷大量, 并记作 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ (或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$).

无穷大量 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ 与 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 的定义可作如下简述:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| > M$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0$, 存在 $X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 有 $|f(x)| > M$.

例 1 证明 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} = \infty$.

证 对于任意给定的正数 M , 要使 $\left| \frac{1}{x-3} \right| > M$, 只要 $|x-3| < \frac{1}{M}$, 取 $\delta = \frac{1}{M}$, 则对于适合不等式 $0 < |x-3| < \delta = \frac{1}{M}$ 的一切 x , 恒有不等式 $\left| \frac{1}{x-3} \right| > M$ 成立, 所以 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} = \infty$.

直线 $x=3$ 是函数 $y = \frac{1}{x-3}$ 图形的铅直渐近线.

一般来说, 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 则称直线 $x=x_0$ 是函数 $y=f(x)$ 图形的铅直渐近线.

定理 2 (无穷大量与无穷小量之间的关系) 在自变量的同一变化过程中, 如果 $f(x)$ 为无穷大量, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小量; 反之, 如果 $f(x)$ 为无穷小量, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大量.

证 下面仅证明当 $x \rightarrow x_0$ 时的情形.

设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 任意给定 $\epsilon > 0$, 根据无穷大量的定义, 对于 $M = \frac{1}{\epsilon} > 0$, 总存在正数 δ , 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| > M = \frac{1}{\epsilon}$, 即 $\left| \frac{1}{f(x)} \right| < \epsilon$, 所以函数 $\frac{1}{f(x)}$ 是 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小量.

反之, 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 且 $f(x) \neq 0$, 任意给定 $M > 0$, 根据无穷小量的定义, 对于正数 $\epsilon = \frac{1}{M}$, 总存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| < \epsilon = \frac{1}{M}$. 由于 $f(x) \neq 0$, 从而

$\left| \frac{1}{f(x)} \right| > M$, 所以函数 $\frac{1}{f(x)}$ 是 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷大量.

类似地, 可以证明当 $x \rightarrow \infty$ 时的情形.

习 题 1.4

1. 请举例说明下述结论不正确:

- (1) 无界函数必是无穷大量; (2) 两个无穷小量的商仍是无穷小量;
 (3) 两个无穷大量的和仍为无穷大量; (4) 有界函数与无穷大量的积仍是无穷大量.

2. 根据无穷小量定义证明:

(1) 函数 $y = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$ 是当 $x \rightarrow 3$ 时的无穷小量;

(2) 函数 $y = x^2 \sin \frac{1}{x}$ 是当 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小量.

3. 根据函数极限定义和无穷大量定义,填写表 1.1.

表 1.1

	$f(x) \rightarrow A$	$f(x) \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow +\infty$
$x \rightarrow x_0$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 恒有 $ f(x) - A < \varepsilon$			
$x \rightarrow x_0^+$				
$x \rightarrow x_0^-$				
$x \rightarrow \infty$		$\forall M > 0, \exists X > 0$, 当 $ x > X$ 时, 恒有 $ f(x) > M$		
$x \rightarrow +\infty$				
$x \rightarrow -\infty$				

4. 函数 $y = x \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是否有界? 这个函数是否为当 $x \rightarrow +\infty$ 时的无穷大量? 为什么?

1.5 极限的运算法则

前面介绍了函数极限的概念,但是利用函数极限的定义来求极限并非易事,因此,有必要进一步讨论求极限的方法. 本节将给出求数列极限和函数极限的四则运算法则,通过运用这些四则运算法则,可以求出很多复杂函数的极限.

在下面的讨论中,记号 \lim 代表 $\lim_{x \rightarrow x_0}$ 或 $\lim_{x \rightarrow \infty}$ 两种情况. 证明时,我们仅证明 $x \rightarrow x_0$ 的情形,而 $x \rightarrow \infty$ 的情形可以类似证明.

定理 1 有限个无穷小的和是无穷小.

证 仅考虑两个无穷小的和的情形.

设 α 及 β 均为 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小,且 $\gamma = \alpha + \beta$. 对于任意的 $\varepsilon > 0$,因为 α 是 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小,对于 $\frac{\varepsilon}{2} > 0$,存在 $\delta_1 > 0$,当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时,有不等式

$$|\alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$$

成立.

因为 β 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小,对于 $\frac{\varepsilon}{2} > 0$,存在 $\delta_2 > 0$,当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时,有不等式

$$|\beta| < \frac{\varepsilon}{2}$$

成立. 取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$,则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,有不等式

$$|\alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ 及 } |\beta| < \frac{\varepsilon}{2}$$

同时成立,从而 $|\gamma| = |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$,故 γ 也是 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小.

类似地可以证明其他情形.

定理 2 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

证 设函数 u 在 x_0 的某一去心邻域内有界,即 $\exists M > 0$,当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时,有 $|u| \leq M$.

又设 α 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小,即 $\forall \varepsilon > 0$,存在 $\delta_2 > 0$,当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时,有 $|\alpha| < \frac{\varepsilon}{M}$.

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$,则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,有

$$|u\alpha| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

故 $u\alpha$ 也是无穷小.

例如,当 $x \rightarrow \infty$ 时,函数 $\frac{1}{x}$ 是无穷小量,函数 $\arctan x$ 是有界函数,所以 $\frac{1}{x}\arctan x$ 也是无穷小量.

推论 1 常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论 2 有限个无穷小的乘积也是无穷小.

定理 3(函数极限的四则运算法则) 设 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$,则有

法则 I $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$.

法则 II $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$.

特别地:

(1) $\lim[kf(x)] = k \lim f(x) = kA$ (k 为常数);

(2) $\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n = A^n$ (n 为正整数).

法则 III $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B}$ ($B \neq 0$).

其中,法则I和法则II均可推广到有限多个函数的情形.例如,如果 $\lim f(x), \lim g(x), \lim h(x)$ 都存在,则有

$$\lim[f(x) + g(x) - h(x)] = \lim f(x) + \lim g(x) - \lim h(x),$$

$$\lim[f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) \cdot \lim h(x).$$

下面仅证明法则I和法则II,法则III读者可自证.

证 法则I的证明如下.

因 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$,由1.4节定理1有

$$f(x) = A + \alpha, \quad g(x) = B + \beta,$$

其中, α 和 β 是与 $f(x)$ 和 $g(x)$ 同一变化过程的无穷小量.于是有

$$f(x) \pm g(x) = (A + \alpha) \pm (B + \beta) = (A \pm B) + (\alpha \pm \beta).$$

因为 $\alpha \pm \beta$ 是无穷小量,所以得

$$\lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B = \lim f(x) \pm \lim g(x).$$

法则II的证明如下.

因 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 由 1.4 节定理 1 有

$$f(x) = A + \alpha, \quad g(x) = B + \beta,$$

其中, α 和 β 是与 $f(x)$ 和 $g(x)$ 同一变化过程的无穷小量. 于是有

$$f(x) \cdot g(x) = (A + \alpha) \cdot (B + \beta) = A \cdot B + (A\beta + B\alpha + \alpha\beta).$$

因为 $A\beta + B\alpha + \alpha\beta$ 是无穷小量, 所以得

$$\lim[f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B = \lim f(x) \cdot \lim g(x).$$

关于数列, 也有类似的四则运算法则.

定理 4 给定数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$, 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, 那么

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b;$$

$$(3) \text{ 当 } y_n \neq 0 (n=1, 2, \dots) \text{ 且 } b \neq 0 \text{ 时, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

证明略.

定理 5 如果 $\varphi(x) \geq \psi(x)$, 而 $\lim \varphi(x) = A, \lim \psi(x) = B$, 那么 $A \geq B$.

证 令 $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$, 则 $f(x) \geq 0$, 且 $\lim f(x) = \lim \varphi(x) - \lim \psi(x) = A - B$, 由函数极限局部保号性的推论, 故 $A \geq B$.

例 1 设 $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$, 求 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n) \\ &= a_0 (\lim_{x \rightarrow x_0} x)^n + a_1 (\lim_{x \rightarrow x_0} x)^{n-1} + \dots + a_{n-1} (\lim_{x \rightarrow x_0} x) + \lim_{x \rightarrow x_0} a_n \\ &= a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \dots + a_{n-1} x_0 + a_n = f(x_0). \end{aligned}$$

即有理整函数 $f(x)$ 在 x_0 处的极限等于函数 $f(x)$ 在 x_0 处的函数值 $f(x_0)$. 例如, $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 3x^2 + 6) = 2^3 - 3 \times 2^2 + 6 = 2$.

例 2 求 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 1}{x^3 - 2x^2 + 3}$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 1}{x^3 - 2x^2 + 3} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 + 1)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 2x^2 + 3)} = \frac{2 \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} 1}{\lim_{x \rightarrow 2} x^3 - 2 \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} 3} \\ &= \frac{2(\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 + 1}{(\lim_{x \rightarrow 2} x)^3 - 2(\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 + 3} = \frac{2^3 + 1}{2^3 - 2^3 + 3} = \frac{9}{3} = 3. \end{aligned}$$

例 3 求 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$.

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)(x + 4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x + 4) = \lim_{x \rightarrow 4} x + \lim_{x \rightarrow 4} 4 = 8.$$

例 4 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 3}{x^2 - 5x + 4}$.

$$\text{解 } \text{由于 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{2x - 3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 5x + 4)}{\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 3)} = \frac{1^2 - 5 \times 1 + 4}{2 \times 1 - 3} = 0, \text{ 根据无穷大量与无穷}$$

小量的关系,得

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-3}{x^2-5x+4} = \infty.$$

由例2、例3、例4可以总结出如下一般结论.

设有理分式函数

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

其中, $P(x), Q(x)$ 都是有理函数, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0), \lim_{x \rightarrow x_0} Q(x) = Q(x_0)$.

(1) 如果 $Q(x_0) \neq 0$, 则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = R(x_0).$$

(2) 如果 $Q(x_0) = 0$ 且 $P(x_0) \neq 0$, 则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{R(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)} = \frac{Q(x_0)}{P(x_0)} = 0,$$

根据无穷小量和无穷大量的关系, 知 $\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \infty$.

(3) 如果 $Q(x_0) = 0$ 且 $P(x_0) = 0$, 先将分子分母中的公因式 $x - x_0$ 约去后再求极限.

例5 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 5x^2 + 1}{3x^3 + 4x^2 + 2}$.

解 先用 x^3 去除分子及分母, 然后再取极限, 得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 5x^2 + 1}{3x^3 + 4x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^3}}{3 + \frac{4}{x} + \frac{2}{x^3}} = \frac{4}{3}.$$

例6 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 7x - 3}{4x^3 + x^2 - 6}$.

解 先用 x^3 去除分子及分母, 然后再取极限, 得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 7x - 3}{4x^3 + x^2 - 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x} + \frac{7}{x^2} - \frac{3}{x^3}}{4 + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^3}} = \frac{0}{4} = 0.$$

例7 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + x^2 - 6}{2x^2 + 7x - 3}$.

解 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 7x - 3}{4x^3 + x^2 - 6} = 0$, 根据无穷小量和无穷大量的关系, 得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + x^2 - 6}{2x^2 + 7x - 3} = \infty.$$

例5、例6、例7是下列一般情况的特例. 即当 $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, m, n$ 为非负整数时, 有如下

结论:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m} = \begin{cases} 0, & n < m, \\ \frac{a_0}{b_0}, & n = m, \\ \infty, & n > m. \end{cases}$$

例 8 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x^2}$.

解 由于当 $x \rightarrow \infty$ 时, 分子及分母的极限都不存在, 故不能应用极限运算法则中商的运算法则.

注意到当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $\frac{1}{x^2}$ 是无穷小量, $\sin x$ 是有界函数, 由于无穷小量与有界函数的乘积是无穷小量, 故 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x^2} = 0$.

下面我们给出求复合函数极限的运算法则.

定理 6 (复合函数的极限运算法则) 设函数 $y = f[g(x)]$ 是由函数 $u = g(x)$ 与函数 $y = f(u)$ 复合而成, 复合函数 $y = f[g(x)]$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义, 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$, $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$, 且存在 $\delta_0 > 0$, 当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta_0)$ 时, 有 $g(x) \neq u_0$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$.

证 根据函数极限的定义, 由于 $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$, 当 $0 < |u - u_0| < \eta$ 时, 有 $|f(u) - A| < \varepsilon$ 成立.

又由于 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$, 对于上述的 $\eta > 0, \exists \delta_1 > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时, 有 $|g(x) - u_0| < \eta$ 成立.

因此, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|g(x) - u_0| < \eta$ 与 $|g(x) - u_0| \neq 0$ 同时成立, 即有 $0 < |g(x) - u_0| < \eta$ 成立, 从而有

$$|f[g(x)] - A| = |f(u) - A| < \varepsilon,$$

故 $\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$.

定理 6 表明, 如果函数 $g(x)$ 和 $f(x)$ 满足该定理的条件, 则可作变量替换 $u = g(x)$, 把求复合函数极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)]$ 转化成求外层函数极限 $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$, 其中 $u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

例 9 求 $\lim_{x \rightarrow 2} \ln(x^2 + 2x - 4)$.

解 函数 $y = \ln(x^2 + 2x - 4)$ 可看作由函数 $y = \ln u$ 与 $u = x^2 + 2x - 4$ 复合而成, 并且函数 $y = \ln u$ 与 $u = x^2 + 2x - 4$ 满足定理 6 的条件, 而 $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x - 4) = 4$, 故 $\lim_{x \rightarrow 2} \ln(x^2 + 2x - 4) = \lim_{u \rightarrow 4} \ln u = \ln 4$.

习 题 1.5

1. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 1}{2x + 3}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}; \quad (3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h};$$

$$\begin{aligned}
 (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^2 + 2x}; & \quad (5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}; & \quad (6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}; \\
 (7) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4}; & \quad (8) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right); & \quad (9) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}; \\
 (10) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x^4 - 3x^2 - 1}; & \quad (11) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + x}{2x^2 + 1}; & \quad (12) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) \left(2 - \frac{1}{x^2} \right); \\
 (13) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{30} (3x-2)^{20}}{(5x+1)^{50}}; & & \quad (14) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}; \\
 (15) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}; & & \quad (16) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \right); \\
 (17) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2} \right); & & \quad (18) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}}; \\
 (19) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right).
 \end{aligned}$$

2. 计算下列极限:

$$\begin{aligned}
 (1) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}; & \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 4 \sin x}{5x - 2 \cos x}; \\
 (3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x^2}.
 \end{aligned}$$

3. 试求下列极限中的常数 a, b :

$$\begin{aligned}
 (1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{1 - x} = 5; & \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 3} - ax - b \right) = 0; \\
 (3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b) = 0; & \quad (4) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b) = 0.
 \end{aligned}$$

4. 设 $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + g(x)] = 5, \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 11$, 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} f(x); \quad (2) \lim_{x \rightarrow 2} \{ [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \}; \quad (3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3g(x)}{f(x) - g(x)}.$$

5. 下列陈述中, 哪些是对的? 哪些是错的? 如果是对的, 说明理由; 如果是错的, 试给出一个反例.

- (1) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 不存在, 那么 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$ 不存在;
- (2) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 都不存在, 那么 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$ 不存在;
- (3) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 不存在, 那么 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)]$ 不存在.

1.6 两个重要极限

前面介绍了求极限的四则运算法则, 本节将给出判定极限存在的两个准则, 并利用它们推导出两个重要极限. 无论是极限的判定准则还是两个重要极限, 它们在求极限的过程中都具有十分重要的作用.

准则 I (夹逼准则) 如果数列 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ 满足下列条件:

$$(1) y_n \leq x_n \leq z_n (n=1, 2, 3, \dots);$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a.$$

那么数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

证 由于 $y_n \rightarrow a, z_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$, 根据数列极限的定义, 对于任意给定的正数 ϵ , 存在正整数 N_1 , 当 $n > N_1$ 时, 有 $|y_n - a| < \epsilon$; 存在正整数 N_2 , 当 $n > N_2$ 时, 有 $|z_n - a| < \epsilon$.

现取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$|y_n - a| < \epsilon, \quad |z_n - a| < \epsilon$$

同时成立, 即

$$a - \epsilon < y_n < a + \epsilon, \quad a - \epsilon < z_n < a + \epsilon$$

同时成立. 又因 x_n 介于 y_n 与 z_n 之间, 所以, 当 $n > N$ 时, 有

$$a - \epsilon < y_n \leq x_n \leq z_n < a + \epsilon,$$

即有

$$|x_n - a| < \epsilon,$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

例 1 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \dots + \frac{n}{n^2 + 2n} \right)$.

解 由于 $\frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{n^2 + 2n} \leq \frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \dots + \frac{n}{n^2 + 2n} \leq \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{n^2 + n + 1}$,

又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} n(n+1)}{n^2 + 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{2n^2 + 4n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{4}{n}} = \frac{1}{2}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} n(n+1)}{n^2 + n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{2n^2 + 2n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2},$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \dots + \frac{n}{n^2 + 2n} \right) = \frac{1}{2}.$$

将准则 I 中的数列换成一般的函数, 即得函数极限的夹逼准则.

准则 I' 如果函数 $g(x), f(x), h(x)$ 满足:

$$(1) \text{当 } x \in \dot{U}(x_0) \text{ (或 } |x| > M \text{) 时, } g(x) \leq f(x) \leq h(x);$$

$$(2) \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x) = A, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} h(x) = A.$$

那么 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x)$ 存在, 并且 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = A$.

证明略.

作为准则 I' 的应用,下面证明第一个重要极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

证 函数 $\frac{\sin x}{x}$ 在一切 $x \neq 0$ 处都有定义,且 $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$,故主要分析 $x > 0$ 时的情况.

设 $0 < x < \frac{\pi}{2}$,作单位圆(见图 1.11),其中 AD 与单位圆相切于 A 点, $BC \perp OA$, $\angle AOB = x$ (弧度)为圆心角,则有

$$\sin x = BC, \quad x = \widehat{AB}, \quad \tan x = AD,$$

且有

$$S_{\triangle AOB} < S_{\text{扇形}AOB} < S_{\triangle OAD},$$

即

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x,$$

相应地有

$$\sin x < x < \tan x.$$

当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时,用 $\sin x$ 去除不等式的两边,得

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \text{或} \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \quad (1.1)$$

当 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 时,用 $-x$ 代替 x ,表达式(1.1)的关系依然不变,结论依然成立.

由于 $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$,根据不等式(1.1)及函数极限的夹逼准则 I',即得 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

由第一个重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 与复合函数的极限法则,可以推出它的另外两种常用形式:

(1) 如果 $\alpha(x)$ 是 $x \rightarrow \Delta$ 时的无穷小,且 $\alpha(x) \neq 0$,那么 $\lim_{x \rightarrow \Delta} \frac{\sin[\alpha(x)]}{\alpha(x)} = 1$;

(2) 如果 $\alpha(x)$ 是 $x \rightarrow \Delta$ 时的无穷小,且 $\alpha(x) \neq 0$,那么 $\lim_{x \rightarrow \Delta} \frac{\alpha(x)}{\sin[\alpha(x)]} = 1$.

注意 这里 Δ 代表 $x_0, x_0^+, x_0^-, \infty, -\infty, +\infty$ 六种情形之一.

例 2 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$.

解 由于 $\frac{\sin 5x}{x} = \frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5$,令 $\alpha = 5x$,当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha \rightarrow 0$,所以有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = 5 \cdot \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 5 \times 1 = 5.$$

例 3 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 4x}$.

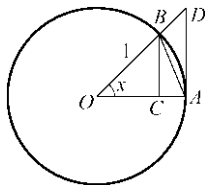


图 1.11

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 4x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{4x}{\sin 4x} \cdot \frac{1}{\cos 3x} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sin 4x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 3x} \\ &= \frac{3}{4} \times 1 \times 1 \times \frac{1}{1} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{例 4} \quad \text{求} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{例 5} \quad \text{求} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{\sin(x - 1)}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{\sin(x - 1)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x^2 - 1} \cdot \frac{x - 1}{\sin(x - 1)} \cdot \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x^2 - 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sin(x - 1)} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) \\ &= 1 \times 1 \times 2 = 2. \end{aligned}$$

准则 II 单调有界数列必有极限.

对于该准则的几何解释: 单调数列的点 x_n 在数轴上只能作单向移动, 单向移动只有两种情形: 一种情形是点 x_n 沿数轴向右(或向左)移向无穷远; 另一种情形是点 x_n 无限趋近某一定点 A . 而又因为数列 $\{x_n\}$ 有界, 有界数列 $\{x_n\}$ 的全部点落在某一闭区间 $[-M, M]$ 内, 从而上述情形中只可能出现第二种情形, 故单调有界数列必有极限.

在 1.2 节中曾证明: 收敛的数列一定是有界数列; 但也曾指出: 有界数列不一定是收敛数列. 准则 II 表明: 如果一个数列不仅有界, 而且还单调, 那么该数列一定收敛.

作为准则 II 的应用, 下面讨论第二个重要极限:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

证 这里只证明 x 取正整数 n 趋于 $+\infty$ 的情形.

设 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (n 为正整数), 由二项式公式, 有

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!} \left(\frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

同样, 有

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \\ &\quad \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right). \end{aligned}$$

两式相比较, 易见 $x_n < x_{n+1}$ ($n=1, 2, \cdots$), 因此数列 $\{x_n\}$ 是单调递增数列.

下面证明数列 $\{x_n\}$ 的有界性.

将 x_n 展开式中的 $\frac{i}{n}$ ($i=1, 2, \dots, n-1$) 都换作 0, 则有

$$\begin{aligned} 0 < x_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \\ < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3, \end{aligned}$$

故数列 $\{x_n\}$ 是有界数列. 由准则 II 可知, 数列 $\{x_n\}$ 的极限一定存在, 通常用字母 e 来表示, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

可以证明, 当 x 取实数趋于 $+\infty$ 或 $-\infty$ 时, 函数 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 的极限都存在且都等于 e. 因此

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

无论是在理论上还是在实际应用中, 无理数 e 都有特殊作用, 它是自然对数的底, 其近似值是 2.71828.

由第二个重要极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 和复合函数的极限法则, 我们可以得到第二个重要极限的另外两种常用形式:

(1) 如果 $\alpha(x)$ 是 $x \rightarrow \Delta$ 时的无穷大, 那么 $\lim_{x \rightarrow \Delta} \left(1 + \frac{1}{\alpha(x)}\right)^{\alpha(x)} = e$;

(2) 如果 $\alpha(x)$ 是 $x \rightarrow \Delta$ 时的无穷小, 且 $\alpha(x) \neq 0$, 那么 $\lim_{x \rightarrow \Delta} (1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e$.

注意 这里 Δ 代表 $x_0, x_0^+, x_0^-, \infty, -\infty, +\infty$ 六种情形之一.

例 6 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{kx}$ (k 为正整数).

解 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{kx} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{(-x)(-k)} = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-k} = e^{-k}$.

例 7 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{x+2}$.

解 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-3}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{-3} \cdot (-3)} = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-3}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{-3}}\right]^{-3} = e^{-3}$.

例 8 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \tan x)^{\cot x}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \tan x)^{\cot x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \tan x)^{\frac{1}{3 \tan x} \cdot 3} = \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \tan x)^{\frac{1}{3 \tan x}}\right]^3 = e^3$.

习 题 1.6

1. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{x}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} (b \neq 0);$$

- (3) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot 3x$; (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{1+x}-1}$;
- (5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x-1}$; (6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}$;
- (7) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{2}{x}$; (8) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n}$ (x 为不等于零的常数).

2. 计算下列极限:

- (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^x$; (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x$;
- (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3+2}{x^3}\right)^{x^2}$; (4) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{1}{x}}$;
- (5) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3 \tan^2 x)^{\cot^2 x}$; (6) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$;
- (7) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$; (8) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$;
- (9) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|}\right)$; (10) $\lim_{n \rightarrow \infty} n[\ln n - \ln(n+2)]$.

3. 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = 4$, 求常数 c .

4. 利用极限存在的准则证明:

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) = 1$;
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n^2+1} + \frac{2}{2n^2+2} + \cdots + \frac{n}{2n^2+n}\right) = \frac{1}{4}$.

1.7 无穷小量的比较

在 1.6 节中我们已经知道,两个无穷小量的和、差、积仍是无穷小.但是,对于两个无穷小的商,却会出现多种情况,例如,当 $x \rightarrow 0$ 时, $x, 3x^2, \sin x$ 都是无穷小,而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3x^2} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

两个无穷小比值的极限的各种情况,反映了不同的无穷小趋于零的“快慢”程度.例如,对于上面的例子,在 $x \rightarrow 0$ 的过程中, $3x^2 \rightarrow 0$ 比 $x \rightarrow 0$ “快些”,反之, $x \rightarrow 0$ 比 $3x^2 \rightarrow 0$ “慢些”, $\sin x \rightarrow 0$ 与 $x \rightarrow 0$ “快慢相同”.

下面我们分不同情况给出两个无穷小之间的比较,这里指出,下面的 α 及 β 都是在同一个自变量的变化过程中的无穷小,而 $\lim \frac{\beta}{\alpha}$ 也是在这个变化过程中的极限.

定义 1 (1) 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 则称 β 是比 α 高阶的无穷小,记作 $\beta = o(\alpha)$;

(2) 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 则称 β 是比 α 低阶的无穷小;

(3) 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = C \neq 0$ (C 为常数), 则称 β 与 α 为同阶无穷小;

(4) 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 则称 β 与 α 为等价无穷小, 记作 $\alpha \sim \beta$.

显然, 等价无穷小是同阶无穷小的特例.

由定义可知, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $3x^2$ 是比 x 高阶的无穷小, x 是比 $3x^2$ 低阶的无穷小, 而 x 与 $\sin x$ 则是等价无穷小.

又如, 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, 所以当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x$ 与 x^2 为同阶无穷小. 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \infty, \text{ 所以当 } n \rightarrow \infty \text{ 时, } \frac{1}{n} \text{ 是比 } \frac{1}{n^2} \text{ 低阶的无穷小.}$$

对于等价无穷小量有如下定理.

定理 1 设当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时, $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ 都为无穷小量, 且 $\alpha' \sim \alpha, \beta' \sim \beta$. 若 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在 (或为无穷大量), 则

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}.$$

证

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \left(\frac{\beta}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha} \right) = \lim \frac{\beta}{\beta'} \cdot \lim \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}.$$

该定理称为等价无穷小量代换定理. 利用等价无穷小量代换求极限时, 往往能使计算更为简便.

例 1 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 2x}$.

解 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin 3x \sim 3x, \tan 2x \sim 2x$, 因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

例 2 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x \sin \frac{x}{2}}$.

解 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt{1+x^2}-1 \sim \frac{1}{2}x^2, \sin \frac{x}{2} \sim \frac{x}{2}$. 因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x \sin \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x \cdot \frac{x}{2}} = 1.$$

例 3 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$.

解 因为 $\tan x - \sin x = \frac{\sin x(1 - \cos x)}{\cos x}$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \sim x$, $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, 所以

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

习 题 1.7

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $2x - x^2$ 与 $x^2 - x^3$ 相比, 哪一个高阶无穷小?

2. 证明: 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列各对无穷小是等价的.

(1) $\arctan x$ 与 x ; (2) $\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x$ 与 $\frac{x^3}{2}$.

3. 求下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^m}{\sin x^n} (m, n \neq 0)$; (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x^2 + 2x)}{x}$;

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 2x}{1 - \cos x}$; (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\sqrt{1+x^2}-1}$;

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x)}{\tan(\sin x)}$; (6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x + x^3}$;

(7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ax - 1}{\cos bx - 1} (a, b \neq 0)$; (8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-3x)}{\arcsin 2x}$.

4. 证明无穷小的等价关系具有下列性质:

- (1) $\alpha \sim \alpha$ (自反性); (2) 若 $\alpha \sim \beta$, 则 $\beta \sim \alpha$ (对称性);
(3) 若 $\alpha \sim \beta, \beta \sim \gamma$, 则 $\alpha \sim \gamma$ (传递性).

1.8 函数的连续性与间断点

1.8.1 函数的连续性

自然界中有许多自然现象, 如生物的生长、液体的流动、气温的变化、人体的增高等都是连续变化的, 这种现象反映在函数关系上, 就是函数的连续性.

以气温变化为例, 当时间变动很小时, 气温的变化也很小, 而且随着时间变动的减少而减少, 这种现象就反映了温度函数的连续性. 下面我们先引进增量的概念, 再给出连续性的定义.

设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义, x 是这个邻域内的另一点, 当自变量由 x_0 变到 x 时, 差 $x - x_0$ 叫作自变量在点 x_0 的增量(或改变量), 用 Δx 来表示, 即 $\Delta x = x - x_0$, 对应的函数值之差 $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的增量, 记为 Δy , 即

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

我们先从几何上来解释一下函数连续变化的意思,通常说一个函数是连续的,就是说它的图形是一条连续曲线,如图 1.12 所示.这样的曲线的特点是:在任意一点 x_0 处,当自变量的增量 Δx 很小时,函数的增量 Δy 也很小,并且当 Δx 趋于零时, Δy 也趋于零.

定义 1 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义,如果当自变量 x 在 x_0 点的增量 Δx 趋于零时,函数的相应增量 Δy 也趋于零时,即

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0, \quad (1.2)$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续, x_0 叫作函数 $f(x)$ 的连续点.

为了应用方便起见,下面把函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的定义用不同的方式来叙述.

设 $x=x_0+\Delta x$,则 $\Delta x \rightarrow 0$ 就是 $x \rightarrow x_0$.又由于

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x) - f(x_0),$$

即

$$f(x) = f(x_0) + \Delta y,$$

可见 $\Delta y \rightarrow 0$ 就是 $f(x) \rightarrow f(x_0)$,因此式(1.2)与

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

相当.所以,函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的定义也可叙述如下.

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义,当 $x \rightarrow x_0$ 时,若函数 $f(x)$ 的极限存在,且极限值等于 $f(x)$ 在点 x_0 的函数值 $f(x_0)$,即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \quad (1.3)$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

仿照极限的定义,也可以给出连续性的 ε - δ 形式的定义.

定义 3 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义,对于任意给定的正数 ε ,都存在 $\delta > 0$,当 $|x-x_0| < \delta$ 时,恒有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

下面介绍左连续和右连续的概念.

如果 $f(x)$ 在点 x_0 的左侧邻域内有定义,且 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$,则称 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续.

如果 $f(x)$ 在点 x_0 的右侧邻域内有定义,且 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$,则称 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

性质 1 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处既左连续,又右连续.

定义 4 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内每点处都连续,则称 $f(x)$ 是 (a, b) 内的连续函数.若 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续,且在区间的左端点 a 处右连续,在区间的右端点 b 处左连

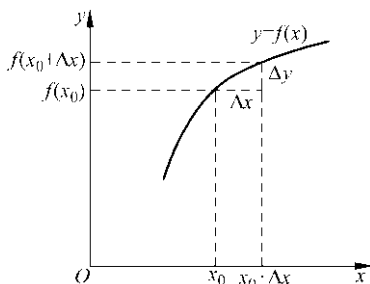


图 1.12

续,则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续.

可以证明,基本初等函数在其定义区间内每一点处都连续.

1.8.2 函数的间断点

从函数连续性的定义可以看出,函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续,必须具备三个条件:

- (1) $f(x)$ 在 x_0 处有定义,即 $f(x_0)$ 存在;
- (2) 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在;
- (3) 极限值 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 与函数值 $f(x_0)$ 相等.

这三个条件中的任何一个被破坏,函数在 x_0 点就不连续,而不连续的点称为函数的间断点,或者说 $f(x)$ 在点 x_0 处间断,所以函数在 x_0 处间断属于下列情形之一:

- (1) $f(x)$ 在 x_0 处没有定义;
- (2) $f(x)$ 在 x_0 处有定义,但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在;
- (3) $f(x)$ 在 x_0 处有定义,且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在,但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

例 1 函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 在 $x = 1$ 处没有定义,尽管 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$,但 $x = 1$ 仍是函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 的间断点.

例 2 函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \\ -x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

在 $x = 0$ 处有定义,但

$$\begin{aligned} f(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0, \\ f(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x + 1) = 1, \\ f(0^-) &\neq f(0^+). \end{aligned}$$

极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在,所以 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处间断.

例 3 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 0, \\ x, & x > 0, \end{cases}$ 试判定 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处的连续性.

解 函数 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处有定义, $f(0) = -1$. 由

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 1) = -1, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0, \end{aligned}$$

可知 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, 所以 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处间断.

以上 3 个例子有一个共同特点,就是函数在间断点处左、右极限都存在,我们把左、右极限都存在的间断点称为第一类间断点,其他间断点称为第二类间断点.

例 4 $y = \sin \frac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 处没有定义, 因此点 $x=0$ 为其间断点, 且是第二类间断点.

当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数值在 -1 与 1 之间无限次振荡.

对于间断点, 如果按照几何形态划分, 还可以分为以下几类:

(1) 跳跃间断点, 指 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 都存在, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$;

(2) 无穷间断点, 指 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$, 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$;

(3) 振荡间断点, 指函数在间断点两侧无限振荡的情形.

在第一类间断点中, 如对于

$$y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1, \\ 0, & x = 1, \end{cases}$$

点 $x=1$ 为两个函数的第一类间断点, 且 $\lim_{x \rightarrow 1} y$ 与 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 都存在. 常称这类间断点为可去间断点, 这是因为可以补充定义 $f(x_0)$ 或修改 $f(x_0)$ 的值, 构成一个新函数:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0, \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), & x = x_0, \end{cases}$$

则 $F(x)$ 在点 x_0 处连续.

习 题 1.8

1. 研究下列函数的连续性:

(1) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$;

(2) $f(x) = \sqrt{x-1}$;

(3) $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x \leq 2; \end{cases}$

(4) $f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x \leq 1, \\ 1, & x < -1 \text{ 或 } x > 1. \end{cases}$

2. 讨论下列函数的连续性, 如有间断点, 指出间断点的类型, 若是可去间断点, 则补充定义, 使其在该点处连续.

(1) $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$;

(2) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$;

(3) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$;

(4) $f(x) = \frac{x}{\tan x}$.

3. 讨论函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}} x$ 的连续性, 若有间断点, 判别其类型.

1.9 连续函数的运算与初等函数的连续性

1.9.1 连续函数的运算

1. 连续函数的和、差、积、商的连续性

由函数在某点连续的定义和极限的四则运算法则, 立即可得出下面的定理.

定理 1 设函数 $f(x)$ 和函数 $g(x)$ 在点 x_0 处连续, 则它们的和(差) $f(x) \pm g(x)$ 、积 $f(x) \cdot g(x)$ 及商 $\frac{f(x)}{g(x)}$ (当 $g(x_0) \neq 0$ 时) 都在点 x_0 处连续.

例 1 因 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, 而 $\sin x$ 和 $\cos x$ 都在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 故由定理 1 知, $\tan x$ 和 $\cot x$ 在它们的定义区间内是连续的.

2. 反函数与复合函数的连续性

定理 2 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上单调增加(或单调减少)且连续, 那么它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 也在对应的区间 $I_y=\{y|y=f(x), x \in I_x\}$ 上单调增加(或单调减少)且连续.

例 2 由于 $y=\sin x$ 在闭区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加且连续, 所以它的反函数 $y=\arcsin x$ 在闭区间 $[-1, 1]$ 上也是单调增加且连续的.

同样, 应用定理 2 可证: $y=\arccos x$ 在闭区间 $[-1, 1]$ 上单调减少且连续, $y=\arctan x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加且连续, $y=\operatorname{arccot} x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上单调减少且连续.

总之, 反三角函数 $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\operatorname{arccot} x$ 在它们的定义域内都是连续的.

定理 3 设函数 $y=f[g(x)]$ 由函数 $u=g(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 复合而成, $U(x_0) \subset D_{f \circ g}$. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$, 而函数 $y=f(u)$ 在 $u=u_0$ 处连续, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0). \quad (1.4)$$

证 由于 $f(u)$ 在点 $u=u_0$ 处连续, 故对于任意给定的正数 ϵ , 存在正数 η , 使当 $|u-u_0| < \eta$ 时, $|f(u)-f(u_0)| < \epsilon$ 成立. 又因为 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$, 故对于上面得到的正数 η , 存在着正数 δ , 使当 $0 < |x-x_0| < \delta$ 时, $|g(x)-u_0| < \eta$ 成立.

将上面两个步骤合起来, 得到: 对于任意给定的正数 ϵ , 存在正数 δ , 使当 $0 < |x-x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(u)-f(u_0)| = |f[g(x)]-f(u_0)| < \epsilon$$

成立, 这就证明了 $\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0)$.

定理 4 设函数 $y=f[g(x)]$ 由函数 $u=g(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 复合而成, $U(x_0) \subset D_{f \circ g}$. 若 $u=g(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续, 且 $g(x_0)=u_0$, 而函数 $y=f(u)$ 在 $u=u_0$ 处连续, 则复合函数 $y=f[g(x)]$ 在 $x=x_0$ 处也连续.

证 只要在定理 3 中令 $u_0=g(x_0)$, 这就表示 $g(x)$ 在点 x_0 处连续, 于是由式(1.4)得

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = f(u_0) = f[g(x_0)],$$

这就证明了复合函数 $y=f[g(x)]$ 在点 $x=x_0$ 处连续.

1.9.2 初等函数的连续性

前面已经讨论了三角函数和反三角函数的连续性, 我们还可以证明幂函数 $y=x^\mu$ 、指数函数 $y=a^x$ ($a>0, a \neq 1$)、对数函数 $y=\log_a x$ 在其定义域内是连续的, 在此我们不做证明.

综合起来得到：基本初等函数在它们的定义域内都是连续的，根据连续函数的运算性质即可得到下面的定理.

定理 5 任何初等函数在它的定义区间内都是连续的.

故对于任意初等函数 $f(x)$ 定义区间内的点 x_0 都有： $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

1.9.3 利用函数的连续性求极限

我们利用上面的结论，来求函数的极限.

例 3 求 $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x-3}{x^2-9}}$.

解 $y = \sqrt{\frac{x-3}{x^2-9}}$ 可看作由函数 $y = \sqrt{u}$ 与函数 $u = \frac{x-3}{x^2-9}$ 复合而成. 因为 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{1}{6}$, 而函数 $y = \sqrt{u}$ 在点 $u = \frac{1}{6}$ 处连续, 所以有

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x-3}{x^2-9}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9}} = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

例 4 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x(\sqrt{1+x^2}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1} = 0$.

例 5 求 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h}$.

解 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \ln(1+h)^{\frac{1}{h}} = \ln\{\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}\} = \ln e = 1$.

例 6 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x}$.

解 令 $e^x-1=h$, 则 $x=\ln(1+h)$, 且在 $x \rightarrow 0$ 时, $h \rightarrow 0$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{\ln(1+h)} = 1.$$

例 7 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a-1}{x}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{a \ln(1+x)}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{a \ln(1+x)}-1}{a \ln(1+x)} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot a$
 $= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y-1}{y} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot a = a$.

1.9.4 闭区间上连续函数的性质

闭区间上的连续函数具有一些重要的性质, 在几何直观上是十分明显的, 但严格证明比较困难, 因此, 下面的定理证明均略去.

定理 6(有界性与最大值、最小值定理) 设 $y=f(x)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 则它在这个区间上有界且一定能取得它的最大值和最小值.

这就是说, 如果 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 那么存在常数 $M>0$, 对任一 $x \in [a, b]$, 满足 $|f(x)| \leq M$; 且至少有一点 ξ_1 , 使 $f(\xi_1)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值; 又至少有一点 ξ_2 , 使 $f(\xi_2)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值(见图 1.13).

注意 如果函数在开区间内连续, 或函数在闭区间上有间断点, 那么函数在该区间上不一定有界, 也不一定有最大值或最小值. 例如, 函数 $y=\tan x$ 在开区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内是连续的, 但它在开区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内是无界的, 且既无最大值又无最小值.

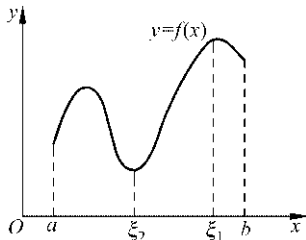


图 1.13

定理 7(零点定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号(即 $f(a) \cdot f(b) < 0$), 那么在开区间 (a, b) 内至少有一点 ξ , 使得

$$f(\xi) = 0.$$

定理 8(介值定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且在这区间的端点取不同的函数值, $f(a)=A$ 及 $f(b)=B$, 那么, 对于 A 与 B 之间的任意一个数 C , 在开区间 (a, b) 内至少有一点 ξ , 使得

$$f(\xi) = C, \quad a < \xi < b.$$

证 设 $\varphi(x) = f(x) - C$, 则 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $\varphi(a) = A - C$ 与 $\varphi(b) = B - C$ 异号. 根据零点定理, 开区间 (a, b) 内至少有一点 ξ , 使得

$$\varphi(\xi) = 0, \quad a < \xi < b,$$

又 $\varphi(\xi) = f(\xi) - C$, 因此由上式即得

$$f(\xi) = C, \quad a < \xi < b.$$

推论 在闭区间上的连续函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

例 8 证明方程 $x^3 - 4x^2 + 1 = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内至少有一个根.

证 函数 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, 又

$$f(0) = 1 > 0, \quad f(1) = -2 < 0,$$

根据零点定理, 在 $(0, 1)$ 内至少有一点 ξ , 使得

$$f(\xi) = 0,$$

即

$$\xi^3 - 4\xi^2 + 1 = 0, \quad 0 < \xi < 1.$$

该等式说明方程 $x^3 - 4x^2 + 1 = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内至少有一个根是 ξ .

习 题 1.9

1. 求下列函数或数列的极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 - 2x + 5};$$

$$(2) \lim_{t \rightarrow -2} \frac{e^t + 1}{t};$$

(3) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^3;$

(4) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{9}} \ln(2\cos 3x);$

(5) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{2\cos(\pi-x)};$

(6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x};$

(7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1-\sqrt{1+x^2}};$

(8) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1};$

(9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{5}{n}}{\tan \frac{1}{n^2}};$

(10) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+\frac{2}{\sqrt{n}})}{\sqrt{n}}.$

2. 求下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}};$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \frac{\sin x}{x};$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)^x;$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3 \tan^2 x)^{\cot^2 x};$

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x}.$

3. 证明方程 $x^5-3x=1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.

4. 证明方程 $e^x \cos x=0$ 在 $(0, \pi)$ 内至少有一个根.

总习题 1

1. 填空题

(1) 函数 $f(x) = \sqrt{25-x^2} + \frac{x-10}{\ln x}$ 的连续区间是_____.

(2) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{1+x}, & x \neq -1, \\ A, & x = -1. \end{cases}$ 当 $A =$ _____时, 函数 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处连续.

(3) 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{-kx} = e^{-10}$, 则 $k =$ _____.

(4) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[(x-1) \sin \frac{2}{x-1} + \frac{2}{x-1} \sin(x-1) \right] =$ _____.

(5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^{10}-2)(3x+1)^{20}}{(2x+3)^{30}} =$ _____.

(6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{\tan x}}{\arcsin \frac{x}{2}} =$ _____.

(7) 要使函数 $f(x) = \frac{2e^{\frac{1}{x}}+1}{3e^{\frac{1}{x}}+\frac{3}{2}}$ 在 $x=0$ 处连续, 需定义 $f(0) =$ _____.

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{x^2 + 2x};$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m} \quad (n, m \text{ 为正整数});$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{\tan x}}{\ln\left(1 + \arcsin \frac{x}{2}\right)};$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin^2 x)}{e^{x^2} - 1};$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2} - 1)(\sqrt{1+\sin x} - 1)};$$

$$(12) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

4. 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = 9$, 求 a 的值.

5. 已知 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + ax + b}{x - 3} = 4$, 求 a, b .

6. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - e^{\tan x}}{x}, & x > 0, \\ \arcsin \frac{x}{2}, & x = 0, \\ a e^{2x}, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 求常数 a 的值.

7. 证明方程 $x^5 - 3x = 1$ 在 $(1, 2)$ 内至少存在一个实根.

8. 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, x_1, x_2, \dots, x_n 为 $[a, b]$ 上的任意一组数. 证明: $\exists x_0 \in [a, b]$, 使得 $f(x_0) = \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)]$.

9. 设 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) < g(a), f(b) > g(b)$. 证明: 在区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f(\xi) = g(\xi)$.

高等数学最重要的组成部分是微分和积分,统称微积分.它是近代数学乃至自然科学中很多学科的基础,它是人们认识客观世界、探索实际生活规律的典型数学手段之一.

微积分学包含微分学与积分学两个主要部分,其中微分学包括一元函数微分学与多元函数微分学两个部分.本章研究一元函数微分学的两个最基本内容:导数与微分.

2.1 导数的概念

2.1.1 导数概念的引出

数学上的概念很多来源于解决实际问题的需要.在实际生活中,人们除了需要研究变量之间的函数关系以外,还需要研究变量变化快慢的程度,也就是变化率问题,例如物体运动的速度、国家人口增长速度、经济发展速度、劳动生产率等.下面我们来讨论两个具体的问题:变速直线运动的瞬时速度问题与曲线的切线问题,这两个问题与导数概念的形成有着密切的关系.

1. 变速直线运动的瞬时速度

设某物体作变速直线运动,在 $[0, t]$ 内所走过的路程为 $s = s(t)$,其中 $t > 0$ 为时间,求物体在时刻 t_0 的瞬时速度 $v = v(t_0)$.

我们知道,当物体作匀速直线运动时,速度 v 等于物体所走过的路程 s 除以所用的时间 t ,即 $v = \frac{s}{t}$.这一速度其实是物体走过某段路程的平均速度,平均速度通常记为 \bar{v} .由于匀速直线运动物体的速度是不变的,所以瞬时速度 $v = \bar{v}$.但变速直线运动物体的速度 $v(t)$ 是随时间 t 的变化而变化的,不同时刻的速度可能不同,因此,用上述公式算出的平均速度 \bar{v} 不能真实反映物体在 t_0 时的瞬时速度 $v = v(t_0)$.

为求 $v(t_0)$,我们可先求出物体在 $[t_0, t_0 + \Delta t]$ 这一小段时间内的平均速度 \bar{v} ,当 Δt 很小时,通常速度的变化不会很大,因此平均速度 \bar{v} 可作为 $v(t_0)$ 的近似值.容易看出, Δt 越小,则 \bar{v} 越接近于 $v(t_0)$,当 Δt 无限变小时,则 \bar{v} 将无限接近于 $v(t_0)$,即 $v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v}$.这就是我们求 $v(t_0)$ 的基本思路.以下具体求 $v(t_0)$.

设物体在 $[0, t_0]$ 内所走过的路程为 $s(t_0)$,在 $[0, t_0 + \Delta t]$ 内所走过的路程为 $s(t_0 + \Delta t)$,从而物体在 $[t_0, t_0 + \Delta t]$ 这段时间内所走过的路程为

$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0),$$

物体在 $[t_0, t_0 + \Delta t]$ 这段时间内的平均速度为

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

根据前面的分析,当 Δt 无限变小时,则 \bar{v} 将无限接近于 $v(t_0)$,由极限的概念知,

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}. \quad (2.1)$$

2. 曲线的切线问题

在初等数学中,将圆的切线定义为“与圆只有一个交点的直线”.但对于一般曲线而言,这种定义显然不能表示切线的真正含义.

那么,怎样来定义并求出曲线的切线呢?法国数学家费马(Fermat)在17世纪给出了切线的如下定义和求法.

设曲线 L 及 L 上一点 M_0 ,在 L 上另取一点 M ,作割线 M_0M .当 M 点沿曲线 L 趋向于 M_0 时,割线 M_0M 绕 M_0 点旋转,若割线 M_0M 存在极限位置 M_0T ,则直线 M_0T 为曲线 L 在点 M_0 处的切线.这里,极限位置的含义是:当点 M 沿曲线 L 趋于 M_0 时, $\angle MM_0T$ 趋于零(见图2.1).

设曲线 L 的方程为 $y = f(x)$, $M_0(x_0, y_0)$ 是 L 上的点,即 $y_0 = f(x_0)$.要求曲线 L 在点 M_0 处的切线方程,只需求出切线的斜率即可.

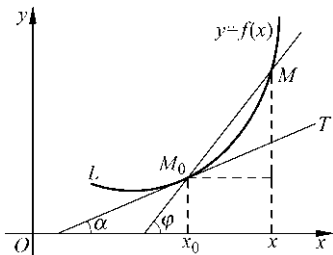


图 2.1

根据切线的定义,如果曲线 L 在 M_0 处的切线存在,切线的斜率就应该是割线 M_0M 的斜率的极限.因此,设点 M 的坐标为 (x, y) ,则割线 M_0M 的斜率为

$$k_{M_0M} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

若设 $x = x_0 + \Delta x$,则割线 M_0M 的斜率也可以表示为

$$k_{M_0M} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

当点 M 沿着 L 趋向于 M_0 时,即 $x \rightarrow x_0, \Delta x \rightarrow 0$,割线斜率 k_{M_0M} 的极限就是切线 M_0T 的斜率 k ,即

$$k = \lim_{M \rightarrow M_0} k_{M_0M} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (2.2)$$

显然式(2.2)与前面讨论的直线运动的瞬时速度(即式(2.1))在本质上是相同的,都可以归结为计算函数的增量与自变量的增量比值的极限,也就是求因变量对自变量的变化率.

无论是在自然科学还是在社会科学的研究过程中,涉及很多关于变化率的问题,如线密度、电流、反应速度等,都可以归结到形如式(2.1)或式(2.2)的数学形式.我们撇开不同变化率的具体意义,提炼它们在数量关系上的共同本质,就得到函数导数的概念.

2.1.2 导数的定义

定义1 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义,当自变量 x 在点 x_0 取得增量

Δx (点 $x_0 + \Delta x$ 仍在该邻域) 时, 相应地函数取得增量

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

如果极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导, 并称上述极限值为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数, 记为 $f'(x_0)$, 即

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

也可以记成 $y'|_{x=x_0}$, $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$ 或 $\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$.

如果定义 1 中的极限不存在, 则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处不可导或导数不存在, 如果上述极限趋于无穷大, 为描述方便, 也说函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数为无穷大, 记为 $f'(x_0) = \infty$.

显然, 导数的定义也可以写成下面的形式:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

上式中的 h 即增量 Δx .

如果令 $\Delta x = x - x_0$, 则有

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

导数是各种具体变化率概念的抽象概括, 导数从纯粹的数量方面刻画了变化率的本质, 反映了函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处当自变量 x 变化时, 因变量 y 变化的快慢程度.

导数的定义依赖于极限的定义, 而极限有左极限和右极限的概念, 因此就有下面的左导数和右导数的概念.

定义 2 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的左侧 $(x_0 - \delta, x_0]$ 上有定义, 如果极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称此极限为函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处的左导数, 记为 $f'_-(x_0)$, 即

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

左导数也可以写成

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

类似地, 可以定义函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的右导数, 即

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

也可以写成

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

左导数和右导数统称为单侧导数.

根据函数极限存在的充分必要条件(左极限、右极限存在并且相等)可得如下结论:

$f(x)$ 在点 x_0 处可导的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处的左导数 $f'_-(x_0)$ 和右导数 $f'_+(x_0)$ 都存在且相等.

若函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a, b) 内的每一点处都可导,则称 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内可导.如果 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导,且 $f'_-(b)$ 及 $f'_+(a)$ 都存在,则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可导.

若函数 $f(x)$ 在区间 I 上可导,这时区间 I 上的每一个确定的 x 值都对应着 $f(x)$ 的一个确定的导数值 $f'(x)$,这样就构成了一个新的函数,这个函数叫作函数 $y=f(x)$ 的导函数,记作 $y', f'(x), \frac{dy}{dx}$ 或 $\frac{df(x)}{dx}$.

将导数定义中的 x_0 换成 x ,即得导函数的定义

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

虽然在上式中 x 可以取区间 I 上的任何数值,但在取极限的过程中 x 是常数, Δx 是变量.

为了方便起见,导函数 $f'(x)$ 也常简称为导数, $f'(x_0)$ 称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数或导函数 $f'(x)$ 在点 x_0 处的值.

有了导数的概念我们就可以利用导数的定义来求一些函数的导数.

利用导数的定义求函数的导数,应该由下面三个步骤完成:

(1) 求函数的增量 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$;

(2) 作增量的比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$;

(3) 求当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限,即

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

例 1 求函数 $y=c$ (c 为常数)的导数.

解 求增量:

$$\Delta y = c - c = 0.$$

作比值:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

求极限:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

所以,常数的导数是零,即

$$(c)' = 0.$$

例 2 求函数 $y = x^n$ (n 为正整数) 的导数.

解 求增量: 由二项式定理 $(a+b)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i a^i b^{n-i}$ 得

$$\begin{aligned} \Delta y &= (x + \Delta x)^n - x^n \\ &= [x^n + C_n^1 x^{n-1} \Delta x + C_n^2 x^{n-2} (\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n] - x^n \\ &= nx^{n-1} \Delta x + o(\Delta x). \end{aligned}$$

作比值:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}.$$

求极限:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1},$$

即

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

一般地,在幂函数的定义区间内,有

$$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}, \quad \mu \text{ 为实数.}$$

这就是幂函数的求导公式. 利用此公式,可以容易地求出幂函数的导数,例如:

$$\begin{aligned} (\sqrt{x})' &= (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \\ \left(\frac{1}{x^2}\right)' &= (x^{-2})' = -2x^{-2-1} = -\frac{2}{x^3}. \end{aligned}$$

例 3 求函数 $y = \cos x$ 的导数.

解 求增量:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2 \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}.$$

作比值:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

求极限: 由重要极限 I 及 $\sin x$ 的连续性,有

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin x,$$

即

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

类似地可得到 $(\sin x)' = \cos x$.

例 4 求函数 $y = \ln x$ 的导数.

解 求增量:

$$\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln \frac{x + \Delta x}{x} = \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right).$$

作比值:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{\ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)}{x \cdot \frac{\Delta x}{x}}.$$

求极限: 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) \sim \frac{\Delta x}{x}$, 因此得

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x},$$

即

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

用类似的方法可以得到对数函数 $f(x) = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) 的导数为

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}.$$

例 5 求 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) 的导数.

解 求增量:

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x (a^{\Delta x} - 1).$$

作比值:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

求极限: 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $a^{\Delta x} - 1 \sim \Delta x \ln a$, 因此得

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \ln a,$$

即

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

特别地, 当 $a = e$ 时, 有

$$(e^x)' = e^x.$$

例 6 设 $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ \sin x, & x \geq 0, \end{cases}$ 求 $f'(x)$.

解 当 $x < 0$ 时, 有

$$f'(x) = (x)' = 1;$$

当 $x > 0$ 时, 有

$$f'(x) = (\sin x)' = \cos x;$$

当 $x = 0$ 时, 有

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1.$$

因此有

$$f'_-(0) = f'_+(0) = 1,$$

所以

$$f'(0) = 1.$$

综上所述,得

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ \cos x, & x \geq 0. \end{cases}$$

通过例 6 可以看出,对于分段函数 $f(x)$ 求导,可用分段函数的分点将定义域分成几个区间,在每个区间上分别求 $f(x)$ 的导数. 在分点处,计算左导数和右导数以确定 $f(x)$ 在该点处的可导性,最后写出 $f(x)$ 的导数表达式.

2.1.3 导数的几何意义

在前面的讨论中我们已经知道,函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $M_0(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率,即

$$f'(x_0) = \tan \alpha,$$

其中 α 是切线的倾角(见图 2.2).

若 $f'(x_0) = \infty$, 则说明连续曲线 $y=f(x)$ 的割线以垂直于 x 轴的直线 $x=x_0$ 为极限位置,即曲线 $y=f(x)$ 在点 $M_0(x_0, f(x_0))$ 处具有垂直于 x 轴的切线 $x=x_0$.

由导数的几何意义,并应用直线的点斜式方程,可知曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

我们将过切点 $M_0(x_0, f(x_0))$ 且与切线垂直的直线叫作曲线 $y=f(x)$ 在点 M_0 处的法线(如图 2.2 中的 M_0N). 如果

$f'(x_0) \neq 0$, 法线的斜率为 $-\frac{1}{f'(x_0)}$, 则曲线 $y=f(x)$ 在点

$M_0(x_0, f(x_0))$ 处的法线方程为

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

例 7 求曲线 $y = -\frac{1}{x}$ 在点 $(2, -\frac{1}{2})$ 处的切线方程和法线方程.

解 因为 $y' = \frac{1}{x^2}$, 所以有

$$y' \Big|_{x=2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}.$$

所求切线方程为

$$y + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(x - 2),$$

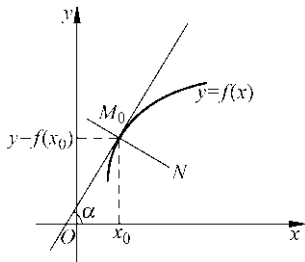


图 2.2

即

$$x - 4y - 4 = 0.$$

所求法线方程为

$$y + \frac{1}{2} = -4(x - 2),$$

即

$$8x + 2y - 15 = 0.$$

2.1.4 函数的可导性与连续性之间的关系

函数的连续性和可导性都是逐点定义的,那么同一个函数 $f(x)$ 在同一个点 x_0 处的可导性与连续性有什么关系呢? 也就是需要回答下面两个问题:

- (1) 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, $f(x)$ 在点 x_0 处是否一定可导?
- (2) 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, $f(x)$ 在点 x_0 处是否一定连续?

定理 1 如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

证 由于 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导, 即

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在, 所以

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \Delta x \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0.$$

根据连续的定义, 可知 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

定理 1 回答了前面的第二个问题. 简单地说, 可导一定连续; 但是其逆命题不一定成立, 即 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续, 但不一定可导. 举例说明如下.

例 8 函数 $f(x)=|x|$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 但在点 $x=0$ 处, 有

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|\Delta x| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|\Delta x| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

$$f'_-(0) \neq f'_+(0).$$

因此 $f'(0)$ 不存在, 即 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不可导. 从几何上直观来看, $y=|x|$ 在原点处没有切线(见图 2.3).

例 9 函数 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 但在点 $x=0$ 处, 有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{-\frac{2}{3}} = \infty,$$

即导数为无穷大, 因此 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处导数不存在.

这一结论在几何上直观表现为曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 在原点处具有垂直于 x 轴的切线 $x=0$ (见图 2.4).