

估计 $\int_0^{2\pi} e^{\sin t} \sin t dt$ 的值有多种方法,如下所示。

【方法 1】图像法。

虚线为 $y = \sin x$, 其在区间 $[0, \pi]$, $[\pi, 2\pi]$ 上与 x 轴围成图形的面积相等。实线为 $y = e^{\sin x} \sin x$, 在区间 $[0, \pi]$ 上 $e^{\sin x} > 1$, 在区间 $[\pi, 2\pi]$ 上 $e^{\sin x} < 1$, 由图 1-7 易知 $S_1 > S_2$, 所以 $\int_0^{2\pi} e^{\sin x} \sin x dx = S_1 - S_2 > 0$, 故选 A。

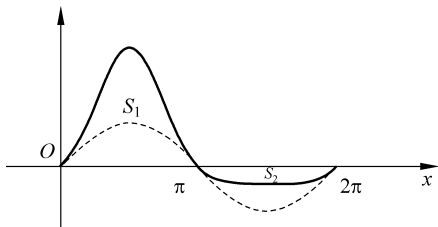


图 1-7

【方法 2】区间代换。

划分 $y = e^{\sin t} \sin t$ 取值正、负区间, 则

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{2\pi} e^{\sin t} \sin t dt = \int_0^{\pi} e^{\sin t} \sin t dt + \int_{\pi}^{2\pi} e^{\sin t} \sin t dt \\ &= \int_0^{\pi} e^{\sin t} \sin t dt + \int_0^{\pi} e^{-\sin u} (-\sin u) du \\ &= \int_0^{\pi} (e^{\sin t} - e^{-\sin t}) \sin t dt \end{aligned}$$

当 $0 < t < \pi$ 时, $\sin t > 0$, $e^{\sin t} - e^{-\sin t} > 0$, 所以 $F(x) > 0$, 故选 A。

【方法 3】分部积分。

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{2\pi} e^{\sin t} \sin t dt = - \int_0^{2\pi} e^{\sin t} d\cos t \\ &= -e^{\sin t} \cos t \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos t de^{\sin t} \\ &= -e^0(1-1) + \int_0^{2\pi} e^{\sin t} \cos^2 t dt = \int_0^{2\pi} e^{\sin t} \cos^2 t dt > 0, \text{ 故选 A。} \end{aligned}$$

例题 3 设在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$, 令 $S_1 = \int_a^b f(x) dx$, $S_2 = f(b)(b-a)$,

$S_3 = \frac{1}{2}[f(a) + f(b)](b-a)$, 则()。

A. $S_1 < S_2 < S_3$

B. $S_2 < S_1 < S_3$

C. $S_3 < S_1 < S_2$

D. $S_2 < S_3 < S_1$

答案 B

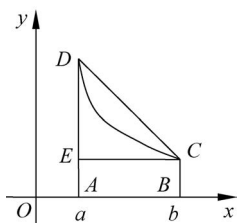


图 1-8

解 图像法。由 $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$ 可知, 曲线 $y = f(x)$ 是上半平面的一段下降的凹弧, $y = f(x)$ 的图形大致如图 1-8 所示。

$S_1 = \int_a^b f(x) dx$ 是曲边梯形 ABCD 的面积; $S_2 = f(b)(b-a)$ 是矩形

ABCE 的面积; $S_3 = \frac{1}{2}[f(a) + f(b)](b-a)$ 是梯形 ABCD 的面积。由

图 1-8 可知, $S_2 < S_1 < S_3$, 故选 B。

技巧专题 16 积分区间代换

例题 1 $\int_0^{+\infty} e^{-x} |\sin x| dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案 $\frac{e^{\pi} + 1}{2(e^{\pi} - 1)}$

解 $I = \int_0^{+\infty} e^{-x} |\sin x| dx \xrightarrow{(x+\pi=t)} \int_{\pi}^{+\infty} e^{-(t-\pi)} |\sin(t-\pi)| dt = e^{\pi} \cdot \int_{\pi}^{+\infty} e^{-t} |\sin t| dt =$

$e^{\pi} \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} |\sin t| dt - \int_0^{\pi} e^{-t} |\sin t| dt \right) = e^{\pi} \left(I - \int_0^{\pi} e^{-t} \sin t dt \right)$, 所以有 $I = \frac{e^{\pi}}{e^{\pi}-1} \int_0^{\pi} e^{-t} \sin t dt$. 又因为

$$\int_0^{\pi} e^{-t} \sin t dt = \left. \frac{(e^{-t})' (\sin t)'}{1+1} \right|_0^{\pi} = \frac{e^{-\pi} + 1}{2}, \text{ 所以 } I = \frac{e^{\pi}}{e^{\pi}-1} \int_0^{\pi} e^{-t} \sin t dt = \frac{e^{\pi}}{e^{\pi}-1} \cdot \frac{e^{-\pi} + 1}{2} = \frac{e^{\pi} + 1}{2(e^{\pi} - 1)}.$$

例题 2 积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\tan^{\lambda} x} dx (\lambda > 0)$ 的值为().

A. $\frac{\pi}{4}$

B. $\frac{\pi}{8}$

C. $\frac{1}{2}$

D. 和参数 λ 有关

答案 A

解 设 $t = \frac{\pi}{2} - x$, 应用换元积分法得 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\tan^{\lambda} \left(\frac{\pi}{2} - t \right)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^{\lambda} x}{1+\tan^{\lambda} x} dx$,

此时有 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{1+\tan^{\lambda} x} \right) dx = \frac{\pi}{2} - I \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$. 故选 A.

例题 3 积分 $\int_{-\pi}^{\pi} |x \sin^4 x| \arctan e^x dx = ()$.

A. $\frac{3\pi^3}{32}$

B. $\frac{3\pi^3}{16}$

C. $\frac{3\pi^3}{8}$

D. 无法确定

答案 A

解 $\int_{-\pi}^{\pi} |x \sin^4 x| \arctan e^x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} x \sin^4 x dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \sin^4 x dx$ (题后有证明)

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi^3}{32}. \text{ 故选 A.}$$

补充证明: $I = \int_{-a}^a g(x) f(x) dx = A \int_0^a g(x) dx$, 其中 $g(x)$ 为偶函数, $f(x) + f(-x) = A$.

$I = \int_{-a}^a g(x) f(x) dx = \int_a^{-a} g(-x) f(-x) (-dx) = \int_{-a}^a g(x) f(-x) dx$, 所以

$$2I = \int_{-a}^a g(x) f(x) dx + \int_{-a}^a g(x) f(-x) dx = \int_{-a}^a g(x) [f(x) + f(-x)] dx = A \int_{-a}^a g(x) dx = 2A \int_0^a g(x) dx, \text{ 从而}$$

$$I = \int_{-a}^a g(x) f(x) dx = A \int_0^a g(x) dx.$$

进一步说明: $\int_{-\pi}^{\pi} |x \sin^4 x| \arctan e^x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} x \sin^4 x dx$.

取 $f(x) = \arctan e^x, a = \pi$.

由于 $f(x) + f(-x) = \arctan e^x + \arctan e^{-x}$ 满足 $(\arctan e^x + \arctan e^{-x})' = \frac{e^x}{1+e^{2x}} + \frac{-e^{-x}}{1+e^{-2x}} = 0$,

故 $\arctan e^x + \arctan e^{-x} = A$. 令 $x=0$, 得 $2\arctan 1 = A \Rightarrow A = \frac{\pi}{2}$, 即 $f(x) + f(-x) = \frac{\pi}{2}$.

$g(x) = |x \sin^4 x|$ 为偶函数, 于是有

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} |x \sin^4 x| \arctan e^x dx = A \int_0^a g(x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} |x \sin^4 x| dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} x \sin^4 x dx.$$

技巧专题 17 周期函数积分

例题 1 积分 $\int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \sin^2 2x \cdot (\tan x + 1) dx = (\quad)$ 。

A. $\frac{\pi}{2}$

B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{8}$

D. 与 α 有关

答案 A

解 由于 $\sin^2 2x$ 和 $\tan x$ 均是以 π 为周期的周期函数, 再由周期函数积分的性质, 有

$$\begin{aligned} \text{原积分 } I &= \int_0^{\pi} (\tan x + 1) \sin^2 2x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\tan x + 1) \sin^2 2x dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4x}{2} dx = \frac{\pi}{2}. \text{ 故选 A.} \end{aligned}$$

例题 2 积分 $I = \int_0^{n\pi} x \sin^4 x dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案 $\frac{3\pi^2 n^2}{16}$

解 $I = \int_0^{n\pi} x \sin^4 x dx = \int_{n\pi}^0 (n\pi - t) \sin^4 (n\pi - t) d(-t) = \int_0^{n\pi} (n\pi - t) \sin^4 t dt$ 。

$$I = \frac{n\pi}{2} \int_0^{n\pi} \sin^4 t dt = \frac{n^2 \pi}{2} \int_0^{\pi} \sin^4 t dt = \frac{n^2 \pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt = n^2 \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt = n^2 \pi \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi^2 n^2}{16}.$$

原理如下。

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{nT} x f(x) dx = \int_{nT}^0 (nT - t) f(nT - t) (-dt) = \int_0^{nT} (nT - t) f(t) dt = nT \int_0^{nT} f(t) dt - \\ &\int_0^{nT} t f(t) dt, \text{ 所以 } 2I = nT \int_0^{nT} f(t) dt \Rightarrow I = \frac{nT}{2} \int_0^{nT} f(t) dt = \frac{n^2 T}{2} \int_0^T f(t) dt. \end{aligned}$$

技巧专题 18 特殊曲线的积分

例题 1 曲线 $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ 所围成平面图形的面积为()。

A. $\frac{3}{4}a^2$

B. $\frac{3}{2}a^2$

C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}a^2$

D. $\frac{3\sqrt{2}}{4}a^2$

答案 B

解 该曲线为笛卡儿叶形线, 其在第一象限中的图形为封闭曲线, 如图 1-9 所示。

采用极坐标方程计算更简便。该曲线的极坐标方程为 $r = \frac{3a \cos \theta \sin \theta}{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta}$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$), 于是所求面积为 $S = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2(\theta) d\theta = \frac{9}{2} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \theta \sin^2 \theta}{(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)^2} d\theta =$

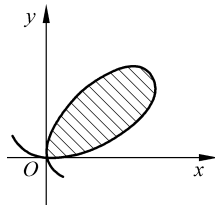


图 1-9

$$\frac{9}{2}a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^2 \theta}{(1+\tan^3 \theta)^2} d\tan \theta = \frac{9}{2}a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\tan^3 \theta}\right) = -\frac{3}{2}a^2 \left(\frac{1}{1+\tan^3 \theta}\right)_0^{\frac{\pi}{2}}, \text{ 故选 B.}$$

例题 2 心形线 $\rho = 1 + \cos \theta$ 与圆 $\rho = 3\cos \theta$ 所围平面图形公共部分的面积为_____。

答案 $\frac{5}{4}\pi$

解 心形线 $\rho = 1 + \cos \theta$ 与圆 $\rho = 3\cos \theta$ 的交点为 $(\rho, \theta) =$

$\left(\frac{3}{2}, \pm \frac{\pi}{3}\right)$, 如图 1-10 所示, 由图形的对称性可知, 心形线 $\rho =$

$1 + \cos \theta$ 与圆 $\rho = 3\cos \theta$ 所围平面图形公共部分的面积为 $A =$

$$2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} (1 + \cos \theta)^2 d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (3\cos \theta)^2 d\theta \right] = \frac{5}{4}\pi.$$

例题 3 (数学三不要求) 参数方程 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$, 其中 $t \in$

$[0, 2\pi]$ 表示的曲线与 x 轴所围平面图形的面积为()。

A. $3\pi a^2$

B. $\frac{3\pi}{2}a^2$

C. $\frac{3\pi}{4}a^2$

D. $\frac{3\pi}{8}a^2$

答案 A

解 $A = \int_0^{2\pi} y dx = \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 dt = a^2 \left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2$, 故选 A。

技巧专题 19 计算弧长(数学三不要求)

例题 1 曲线 $y = \int_0^x \tan t dt$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$) 的弧长 $s =$ _____。

答案 $\ln(1 + \sqrt{2})$

解 $s = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \tan^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln(1 + \sqrt{2})$ 。

技巧专题 20 正割函数的积分

例题 1 积分 $\int \sec^3 x dx =$ _____。

答案 $\frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln |\sec x + \tan x| + C$ (C 为常数)

解 $\int \sec^3 x dx = \int \sec x d\tan x = \sec x \tan x - \int \tan x \sec x \tan x dx = \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1) \sec x dx =$
 $\sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x| - \int \sec^3 x dx, \int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + C$ (C 为常数)。

技巧专题 21 循环积分

例题 1 函数 $y_n(x)$ 是方程 $y_n(x) + y'_n(x) = ne^{-x} \cos nx$ 满足 $y_n(0) = 0$ 的特解, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 y_n(x) dx =$

答案 0

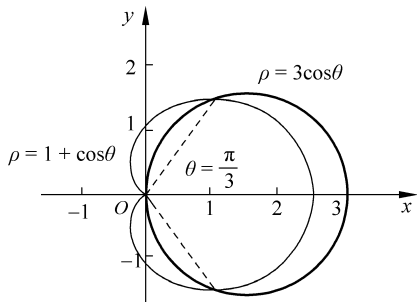


图 1-10

解 根据一阶线性微分方程的求解公式可得 $y_n(x) = e^{-\int 1 \cdot dx} \left(\int n e^{-x} \cos nx \cdot e^{\int 1 \cdot dx} dx + c \right) = e^{-x} (\sin nx + c)$, 又因为 $y_n(0) = 0$, 所以 $c = 0$, 即 $y_n(x) = e^{-x} \sin nx$ 。令 $I_n = \int e^{-x} \sin nx dx = \int -\sin nx de^{-x} = -e^{-x} \sin nx + n \int e^{-x} \cos nx dx = -e^{-x} \sin nx - n e^{-x} \cos nx - n^2 I_n$, 所以 $I_n = -\frac{n \cos nx + \sin nx}{n^2 + 1} e^{-x} + C$ (C 为常数), 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 e^{-x} \sin nx dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{n \cos nx + \sin nx}{n^2 + 1} e^{-x} \Big|_0^1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{n \cos n + \sin n}{n^2 + 1} e^{-1} + \frac{n}{n^2 + 1} \right) = 0$ 。

技巧专题 22 求函数平均值

例题 1 设 $f(\sin^2 x) = \frac{x}{\sin x}$, 则 $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 的平均值为_____。

答案 2

解 首先要利用 $f(\sin^2 x) = \frac{x}{\sin x}$ 求出 $f(x)$ 。令 $u = \sin^2 x$, 则有 $\sin x = \sqrt{u}$, $x = \arcsin \sqrt{u}$, 于是 $f(u) = \frac{\arcsin \sqrt{u}}{\sqrt{u}}$ 。(换元求出函数的表达式)

函数 $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 的平均值为 $\bar{g} = \frac{\int_0^1 g(x) dx}{1} = \int_0^1 g(x) dx$ 。
 $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x) dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx \xrightarrow{\sqrt{x} = \sin t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\cos t} 2 \sin t \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t \sin t dt$ (换元积分法) $= 2(-t \cos t + \sin t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$ 。所以, 函数 $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 的平均值为 2。

技巧专题 23 求全微分方程的通解

例题 1 微分方程 $(3x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy)dy = 0$ 的通解为_____。

答案 $x^3 + x^2y - xy^2 = C$ (C 为常数)

解 使用全微分的方法求解。

$$\begin{aligned} & (3x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy)dy \\ &= 3x^2 dx + (y d(x^2) + x^2 dy) - (y^2 dx + x d(y^2)) \\ &= d(x^3) + d(x^2y) - d(xy^2) \\ &= d(x^3 + x^2y - xy^2) = 0, \text{ 故通解为 } x^3 + x^2y - xy^2 = C \text{ (} C \text{ 为常数)。} \end{aligned}$$

技巧专题 24 变量替换微分方程

例题 1 设函数 $y = y(x)$ 满足微分方程 $y'' + 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, 则 $\int_0^{+\infty} y(x) dx =$

()。

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{4}$

D. 1

答案 C**解** 【方法 1】 不求微分方程。

$$\int_0^{+\infty} y(x) dx = -\frac{1}{4} \int_0^{+\infty} (y'' + 4y') dx = -\frac{1}{4} (y' + 4y) \Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{4} \{y'(+\infty) + 4y(+\infty) - [y'(0) + 4y(0)]\} = -\frac{1}{4} [0 - (1 + 0)] = \frac{1}{4}, \text{ 故选 C.}$$

注意：当 $y(x) = e^{\lambda x} P(x)$ 的指数部分 $e^{\lambda x}$ 满足 $\lambda < 0$ 时，有 $y'(+\infty) = y(+\infty) = 0$ 。

【方法 2】 微分方程 $y'' + 4y' + 4y = 0$ 的特征方程为 $r^2 + 4r + 4 = 0$ ，其特征根为 $r_1 = r_2 = -2$ ，则微分方程的通解为 $y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$ ，其导数为 $y' = -2C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-2x} - 2C_2 x e^{-2x}$ 。

由 $y(0) = 0, y'(0) = 1$ ，得 $\begin{cases} C_1 = 0, \\ -2C_1 + C_2 = 1 \end{cases}$ ，则 $\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 1 \end{cases}$ 。

所以 $y(x) = x e^{-2x}$ ，故 $\int_0^{+\infty} y(x) dx = \int_0^{+\infty} x e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} x d(e^{-2x})$
 $= -\frac{1}{2} x e^{-2x} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx = 0 - \frac{1}{4} e^{-2x} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{4}$ ，故选 C。

例题 2 设函数 $y(x)$ 满足 $y'' + 2ky' + y = 0 (k > 1)$ ，且 $y(0) = m, y'(0) = n$ ，则 $\int_0^{+\infty} y(x) dx =$ ()。

A. $2n + 2km$

B. $n + 2km$

C. $n + km$

D. $2n + km$

答案 B

解 $y'' + 2ky' + y = 0$ 的特征方程为 $r^2 + 2kr + 1 = 0$ ，得 $r_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 - 1}$ 。

故原方程的通解为 $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ (C_1, C_2 为任意常数)。

由 $k > 1$ ，知 r_1, r_2 均小于零。所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (C_1 r_1 e^{r_1 x} + C_2 r_2 e^{r_2 x}) = 0, \text{ 所以}$$

$$\int_0^{+\infty} y(x) dx = \int_0^{+\infty} [-y''(x) - 2ky'(x)] dx = [-y'(x) - 2ky(x)] \Big|_0^{+\infty}$$

$$= 0 - [-y'(0) - 2ky(0)] = y'(0) + 2ky(0) = n + 2km, \text{ 故选 B.}$$

技巧专题 25 由解反求方程

例题 1 在下列微分方程中，以 $y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$ (C_1, C_2, C_3 为任意常数) 为通解的是 ()。

A. $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$

B. $y''' + y'' + 4y' + 4y = 0$

C. $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$

D. $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$

答案 D

解 由通解可知,其对应的特征根是 $1, \pm 2i$, 故特征方程为 $(r-1)(r+2i)(r-2i)=0$, 即 $r^3-r^2+4r-4=0$, 故相应的微分方程应为 $y'''-y''+4y'-4y=0$, 故选 D。

例题 2 若 $y=x+e^{2x+1}$ 是某齐次常系数线性微分方程的一个解, 则满足条件的最低阶微分方程为_____。

答案 $y'''-2y''=0$

解 $y=xe^{0 \cdot x}+e \cdot e^{2x}$, 所以特征值必有 $\lambda=0, \lambda=2$, 且 $\lambda=0$ 至少为二重根。所以特征值至少有三个, 分别是 $0, 0, 2$ 。由此可推知最低阶微分方程为 $y'''-2y''=0$ 。

技巧专题 26 求非齐次微分方程的特解

例题 1 微分方程 $y''+y=x^2+1+\sin x$ 的特解形式可设为()。

- A. $y^*=ax^2+bx+c+x(A\sin x+B\cos x)$
- B. $y^*=x(ax^2+bx+c+A\sin x+B\cos x)$
- C. $y^*=ax^2+bx+c+A\sin x$
- D. $y^*=ax^2+bx+c+A\cos x$

答案 A

解 对应齐次方程 $y''+y=0$ 的特征方程为 $\lambda^2+1=0$, 特征根为 $\lambda=\pm i$, 对 $y''+y=x^2+1=e^0(x^2+1)$ 而言, 因 0 不是特征根, 从而其特解形式可设为 $y_1^*=ax^2+bx+c$;
对 $y''+y=\sin x$, 因 i 为特征根, 从而其特解形式可设为 $y_2^*=x(A\sin x+B\cos x)$;
从而 $y''+y=x^2+1+\sin x$ 的特解形式可设为 $y^*=ax^2+bx+c+x(A\sin x+B\cos x)$,
故选 A。

例题 2 微分方程 $y''-4y'+8y=e^{2x}(1+\cos 2x)$ 的特解可设为()。

- A. $y^*=Ae^{2x}+e^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$
- B. $y^*=Axe^{2x}+e^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$
- C. $y^*=Ae^{2x}+xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$
- D. $y^*=Axe^{2x}+e^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$

答案 C

解 特征方程为 $\lambda^2-4\lambda+8=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=2 \pm 2i$ 。

因为 $f(x)=e^{2x}(1+\cos 2x)=e^{2x}+e^{2x}\cos 2x$, 设 $e^{2x}, e^{2x}\cos 2x$ 对应的特解分别为 y_1^*, y_2^* , 所以 $y_1^*=Ae^{2x}, y_2^*=xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$, 故特解为 $y^*=y_1^*+y_2^*=Ae^{2x}+xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$, 故选 C。

技巧专题 27 化为微分方程

例题 1 设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数, 而 $z=f(e^x \sin y)$ 满足方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{2x}z$, 则 $f(u)=$ _____。

答案 $C_1 e^u + C_2 e^{-u}$, 其中 C_1, C_2 为任意常数

解 先用复合函数求导法, 求出两个二阶偏导数。

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u)e^x \sin y, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(u)(e^x \sin y)^2 + f'(u)e^x \sin y.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'(u)e^x \cos y, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u)(e^x \cos y)^2 - f'(u)e^x \sin y.$$

将两个结果代入题干中的方程,得 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u)e^{2x} = e^{2x}f(u)$, 即 $f''(u) - f(u) = 0$.

相应的特征方程 $\lambda^2 - 1 = 0$ 的特征根为 $\lambda = \pm 1$, 故 $f(u) = C_1 e^u + C_2 e^{-u}$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

例题 2 设函数 $f(x)$ 具有连续的一阶导数, 且满足 $f(x) = \int_0^x (x^2 - t^2)f'(t)dt + x^2$, 则 $f(x) =$ _____.

答案 $e^{x^2} - 1$

解 $f(x) = x^2 \int_0^x f'(t)dt - \int_0^x t^2 f'(t)dt + x^2$.

两边对 x 求导, 得 $f'(x) = x^2 f'(x) + 2x \int_0^x f'(t)dt - x^2 f'(x) = 2x [f(x) - f(0)] + 2x$.

又 $f(0) = 0$, 故有 $f'(x) - 2xf(x) = 2x$, 从而 $f(x) = e^{\int 2x dx} \left(\int 2x e^{-\int 2x dx} dx + C \right) = e^{x^2} \left(\int 2x e^{-x^2} dx + C \right) = e^{x^2} (-e^{-x^2} + C) = -1 + Ce^{x^2}$. 由 $f(0) = 0$, 得 $C = 1$, 所以 $f(x) = e^{x^2} - 1$.

例题 3 设 $f(x)$ 非负连续, 且当 $x > -1$ 时, $f(x) \left[\int_0^x f(t)dt + 1 \right] = \frac{x e^x}{2(1+x)^2}$, 则 $f(x) =$ _____.

答案 $\frac{x e^{\frac{x}{2}}}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}$

解 令 $F(x) = \int_0^x f(t)dt + 1$, 由原式可得 $F'(x)F(x) = \frac{x e^x}{2(1+x)^2}$. 令 $x = 0$, 得 $F(0) = 1$.

$$\begin{aligned} \text{于是 } [F^2(x)]' &= \frac{x e^x}{(1+x)^2}, \text{ 所以 } F^2(x) = \int \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx = \int \frac{e^x}{1+x} dx - \int \frac{e^x}{(1+x)^2} dx \\ &= \int \frac{e^x}{1+x} dx + \int e^x d \frac{1}{1+x} = \int \frac{e^x}{1+x} dx + \int e^x d \frac{1}{1+x} = \int \frac{e^x}{1+x} dx + \frac{e^x}{1+x} - \int \frac{e^x}{1+x} dx = \frac{e^x}{1+x} + C. \end{aligned}$$

由 $F(0) = 1$, 得 $C = 0$. 因此 $F(x) = \sqrt{\frac{e^x}{1+x}} = \int_0^x f(t)dt + 1, f(x) = \left(\sqrt{\frac{e^x}{1+x}} \right)' = \frac{x e^{\frac{x}{2}}}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}.$

例题 4 利用 $x = \sin t$ 可将微分方程 $(1-x^2)y'' - xy' - 4 = 0$ 化简为().

A. $\frac{d^2 y}{dt^2} = 0$

B. $\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \cdot \sin t (1 - \sec t) = 4$

C. $\cos^2 t \frac{d^2 y}{dt^2} - \sin t \frac{dy}{dt} = 4$

D. $\frac{d^2 y}{dt^2} = 4$

答案 D

解 $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\cos t},$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d(y')}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\cos t} \right) \cdot \frac{1}{\cos t} = \frac{d^2 y}{dt^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{\sin t}{\cos^3 t}.$$

将 y' 和 y'' 代入 $(1-x^2)y''-xy'-4=0$, 可得 $\frac{d^2y}{dt^2}=4$, 故选 D。

技巧专题 28 欧拉方程(仅数学一)

例题 1 欧拉方程 $x^2y''+xy'-4y=0$ 满足条件 $y(1)=1, y'(1)=2$ 的解为 $y=$ _____。

答案 x^2

解 令 $x=e^t$, 则 $xy'=\frac{dy}{dt}, x^2y''=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}$, 原方程化为 $\frac{d^2y}{dt^2}-4y=0$, 特征方程为 $\lambda^2-4=0$, 特征根为 $\lambda_1=2, \lambda_2=-2$, 通解为 $y=C_1e^{2t}+C_2e^{-2t}=C_1x^2+C_2x^{-2}$, 将初始条件 $y(1)=1, y'(1)=2$ 代入得 $C_1=1, C_2=0$, 故满足初始条件的解为 $y=x^2$ 。

技巧专题 29 “退化”的二元函数

例题 1 设函数 $f(x, y)$ 可微, 且 $f(x+1, e^x)=x(x+1)^2, f(x, x^2)=2x^2\ln x$, 则 $df(1, 1)=$ _____。

答案 dy

解 将两个方程左右两边对 x 求导, 有

$$f'_1(x+1, e^x)+e^xf'_2(x+1, e^x)=(x+1)^2+2x(x+1) \quad ①$$

$$f'_1(x, x^2)+2xf'_2(x, x^2)=2(2x\ln x+x) \quad ②$$

令①中 $x=0$, ②中 $x=1$ 得

$$\begin{cases} f'_1(1, 1)+f'_2(1, 1)=1 \\ f'_1(1, 1)+2f'_2(1, 1)=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_1(1, 1)=0 \\ f'_1(1, 1)=1 \end{cases}, \text{所以 } df(1, 1)=dy.$$

技巧专题 30 由偏导数求原函数

例题 1 设函数 $f(x, y)$ 具有一阶连续偏导数, 且 $df(x, y)=ye^y dx+x(1+y)e^y dy, f(0, 0)=0$, 则 $f(x, y)=$ _____。

答案 xye^y

解 $f'_x=ye^y, f'_y=x(1+y)e^y, f(x, y)=\int ye^y dx=xye^y+c(y)$, 故 $f'_y=xe^y+xye^y+c'(y)=xe^y+xye^y$, 因此 $c'(y)=0$, 即 $c(y)=C$, 再由 $f(0, 0)=0$, 可得 $f(x, y)=xye^y$ 。

例题 2 设 $z=f(x, y)$, 且 $f(x, 1)=0, f'_y(x, 0)=\sin x, f''_{yy}(x, y)=2x$, 则 $dz|_{(\frac{\pi}{2}, 1)}=$ _____。

答案 $(\pi+1)dy$

解 【方法 1】先求多元原函数(此类问题的一般方法)。

因为 $f''_{yy}(x, y)=2x$, 所以等式两边对 y 积分得 $f'_y(x, y)=2xy+C_1(x)$ 。

由 $f'_y(x, 0)=\sin x$, 得 $C_1(x)=\sin x$, 于是 $f'_y(x, y)=2xy+\sin x$, 两边对 y 积分, 得 $f(x, y)=xy^2+y\sin x+C_2(x)$ 。

由 $f(x, 1)=0$, 得 $C_2(x)=-x-\sin x$, 从而 $f(x, y)=xy^2+y\sin x-x-\sin x, f_x(x, y)=y^2+y\cos x-1-\cos x, f'_x(\frac{\pi}{2}, 1)=0, f'_y(\frac{\pi}{2}, 1)=\pi+1$, 故 $d[f(x, y)]|_{(\frac{\pi}{2}, 1)}=(\pi+1)dy$ 。

【方法 2】先求全微分(本题的特殊方法)。

由 $f(x, 1) = 0 \Rightarrow f'_x(x, 1) = 0$, 有 $dz|_{(\frac{\pi}{2}, 1)} = f'_x(\frac{\pi}{2}, 1)dx + f'_y(\frac{\pi}{2}, 1)dy = f'_y(\frac{\pi}{2}, 1)dy$ 。

因为 $f''_{yy}(x, y) = 2x$, 所以等式两边对 y 积分得 $f'_y(x, y) = 2xy + C_1(x)$ 。由 $f'_y(x, 0) = \sin x$, 得 $C_1(x) = \sin x$, 于是 $f'_y(x, y) = 2xy + \sin x$, $f'_y(\frac{\pi}{2}, 1) = \pi + 1$, 故 $d[f(x, y)]|_{(\frac{\pi}{2}, 1)} = (\pi + 1)dy$ 。

例题 3 设 $f(u)$ 具有二阶连续导数, $z = f(e^x \sin y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{2x} z$, 且有 $f(0) = 1, f'(0) = -1$ 。则积分 $\int_0^{+\infty} x^3 f(x) dx =$ _____。

答案 6

解 先用复合函数求导法, 求出两个二阶偏导数。

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u)e^x \sin y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(u)(e^x \sin y)^2 + f'(u)e^x \sin y。$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'(u)e^x \cos y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u)(e^x \cos y)^2 - f'(u)e^x \sin y。$$

将所得结果代入题干中的方程得 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u)e^{2x} = e^{2x} f(u)$, 即 $f''(u) - f(u) = 0$ 。

由初始条件 $f(0) = 1, f'(0) = -1$, 解得 $f(u) = e^{-u}$, $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx = 3! = 6$ 。

注意, 上述积分可用分部积分法求解, 此处用到公式 $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n! (n \text{ 为正整数})$ 。记住这个常用公式(伽马函数), 可以节省很多时间。

技巧专题 31 多元条件极值

例题 1 函数 $u = \sin x \sin y \sin z$ 满足 $x + y + z = \frac{\pi}{2} (x > 0, y > 0, z > 0)$ 的条件极值为()。

A. 1

B. 0

C. $\frac{1}{6}$

D. $\frac{1}{8}$

答案 D

解 【方法 1】设 $F(x, y, z) = \sin x \sin y \sin z + \lambda \left(x + y + z - \frac{\pi}{2}\right)$, 则

$$\begin{cases} F'_x = \cos x \sin y \sin z + \lambda = 0, & \lambda = -\cos x \sin y \sin z & \text{①} \\ F'_y = \sin x \cos y \sin z + \lambda = 0, & \lambda = -\sin x \cos y \sin z & \text{②} \\ F'_z = \sin x \sin y \cos z + \lambda = 0, & \lambda = -\sin x \sin y \cos z & \text{③} \end{cases}$$

由①与②得 $\tan y = \tan x$, 由②与③得 $\tan z = \tan y$, 因而 $\tan x = \tan y = \tan z$ 。而 $x + y + z = \frac{\pi}{2}$, 故 $x = y = z$, 即 $x = y = z = \frac{\pi}{6}$ 为条件极值点, 于是所求的条件极值为 $u = \sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ 。故选 D。

【方法 2】由 x, y, z 的轮换对称性可知, 条件极限点处 $x = y = z = \frac{\pi}{6}$, 故 $u = \left(\sin \frac{\pi}{6}\right)^3 = \frac{1}{8}$ 。故选 D。

例题 2 设函数 $z = (1 + e^y) \cos x - ye^y$, 则函数 $z = f(x, y)$ ()。

- A. 无极值
B. 有有限个极值
C. 有无穷多个极大值
D. 有无穷多个极小值

答案 C

解 $\begin{cases} z'_x = -(1 + e^y) \sin x = 0 \\ z'_y = e^y (\cos x - 1 - y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{驻点 } (k\pi, \cos k\pi - 1), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

又 $z''_{xx} = -(1 + e^y) \cos x, z''_{xy} = -e^y \sin x, z''_{yy} = e^y (\cos x - 2 - y)$ 。

(1) 当 $k = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$ 时, 驻点 $(k\pi, 0)$, 从而 $A = z''_{xx}(k\pi, 0) = -2, B = z''_{xy}(k\pi, 0) = 0, C = z''_{yy}(k\pi, 0) = -1$, 于是 $AC - B^2 > 0$ 。又 $A = -2 < 0$, 即驻点 $(k\pi, 0)$ 均为极大值点, 因此函数有无穷多个极大值。

(2) $k = \pm 1, \pm 3, \dots$ 时, 驻点 $(k\pi, -2)$, 从而 $A = z''_{xx}(k\pi, -2) = 1 + e^{-2}, B = z''_{xy}(k\pi, -2) = 0, C = z''_{yy}(k\pi, -2) = -e^{-2}$, 于是 $AC - B^2 < 0$, 即驻点 $(k\pi, -2)$ 不是极值点。

故选 C。

例题 3 设函数 $f(x) > 0$ 具有二阶连续导数, 且 $f(x) > 0, f'(0) = 0$, 则函数 $z = f(x) \ln f(y)$ 在点 $(0, 0)$ 处取得极小值的一个充分条件是 ()。

- A. $f(0) > 1, f''(0) > 0$
B. $f(0) > 1, f''(0) < 0$
C. $f(0) < 1, f''(0) > 0$
D. $f(0) < 1, f''(0) < 0$

答案 A

解 由 $z = f(x) \ln f(y)$, 知 $z'_x = f'(x) \ln f(y), z'_y = \frac{f(x)}{f(y)} f'(y), z''_{xy} = \frac{f'(x)}{f(y)} f'(y)$

$$z''_{xx} = f''(x) \ln f(y), z''_{yy} = f(x) \frac{f''(y)f(y) - (f'(y))^2}{f^2(y)}。$$

$$\text{令 } A = z''_{xx}(0, 0) = f''(0) \ln f(0), B = z''_{xy}(0, 0) = \frac{f'(0)}{f(0)} f'(0) = 0, C = z''_{yy}(0, 0) = f(0) \frac{f''(0)f(0) - (f'(0))^2}{f^2(0)} = f''(0)。$$

要使得函数 $z = f(x) \ln f(y)$ 在点 $(0, 0)$ 处取得极小值, 仅需 $AC - B^2 > 0, A > 0$, 即有 $f''(0) \ln f(0) \cdot f''(0) > 0, f''(0) \ln f(0) > 0$ 。所以有 $f(0) > 1, f''(0) > 0$, 故选 A。

技巧专题 32 隐函数存在定理

例题 1 根据隐函数存在定理, 方程 $(x^2 + y^2)z + \ln z + 2(x + y + 1) = 0$ 在其定义域任意点 (x, y, z) 的邻域内, 下列说法正确的有 ()。

- ① 可确定具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y, z)$
② 可确定具有连续偏导数的隐函数 $y = y(x, z)$
③ 可确定具有连续偏导数的隐函数 $z = z(x, y)$

- A. 0 个
B. 1 个
C. 2 个
D. 3 个

答案 B

解 令 $F(x, y, z) = (x^2 + y^2)z + \ln z + 2(x + y + 1), F'_x = 2xz + 2, F'_y = 2yz + 2, F'_z = x^2 + y^2 + \frac{1}{z}$ 。

因为函数定义域要求 $z > 0$, 所以 $F'_z = x^2 + y^2 + \frac{1}{z} > 0$ 。而 F'_x, F'_y 均可能等于 0, 所以方程 $F(x, y, z) = 0$ 在任意点 (x, y, z) 的邻域内, 可确定具有连续偏导数的隐函数 $z = z(x, y)$ 。故选 B。

技巧专题 33 多元极限取得极值

例题 1 设二元函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某一邻域内连续, 且满足 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{x^2 + 1 - x \sin y - \cos^2 y} = -1$, 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处 ()。

- A. 取得极大值
B. 取得极小值
C. 不取得极值
D. 是否取得极值不确定

答案 A

解 因为 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某一邻域内连续, 且 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{x^2 + 1 - x \sin y - \cos^2 y} = -1 < 0$, 所以在点 $(0, 0)$ 的某一去心邻域内, 有 $\frac{f(x, y) - f(0, 0)}{x^2 + 1 - x \sin y - \cos^2 y} < 0$, 而 $x^2 + 1 - x \sin y - \cos^2 y = \left(x - \frac{1}{2} \sin y\right)^2 + \frac{3}{4} \sin^2 y > 0$, 于是 $f(x, y) - f(0, 0) < 0$, 即 $f(x, y) < f(0, 0)$, 故 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处取得极大值, 故选 A。

例题 2 已知函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某个邻域内连续, 且 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - kxy}{(x^2 + y^2)^2} = 1$, 则 ()。

- A. 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点
B. 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点
C. 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点
D. 点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点与 k 有关

答案 D

解 若 $k=1$, 由 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2} = 1$ 可知, 分子的极限为 0。又由 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续, 则必有 $f(0,0)=0$ 。故 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点取决于在 $(0,0)$ 的充分小邻域内, $f(x,y)$ 是否恒大于或恒小于 $f(0,0)$ 。

由极限与无穷小的关系得:

$$\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1+o(1)(\rho=\sqrt{x^2+y^2}\rightarrow 0)$$

$$\Rightarrow f(x, y) = xy + (x^2 + y^2)^2 + o((x^2 + y^2)^2) = xy + o(\rho^2)(\rho \rightarrow 0).$$

当 $y=x$ 时, $f(x,y)-f(0,0)=x^2[1+o(1)]>0(0<\rho<\delta)$;

当 $y = -x$ 时, $f(x, y) - f(0, 0) = -x^2[1 + o(1)] < 0 (0 < \rho < \delta)$ 。

其中, δ 是充分小的正数, 因此 $(0, 0)$ 不是 $f(x, y)$ 的极值点。

若 $k=0$, 则由 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y)-kxy}{(x^2+y^2)^2} = 1$ 及函数保号性可知, $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点, 故选 D.

技巧专题 34 偏导数的应用(仅数学一)

例题 1 在曲线 $x=t, y=-t^2, z=t^3$ 的所有切线中, 与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线 ()。

- A. 只有 1 条 B. 只有 2 条 C. 至少有 3 条 D. 不存在

答案 B

解 平面 $x+2y+z=4$ 的法向量 $\mathbf{n}=(1,2,1)$, 曲线在任意点处的切向量 $\boldsymbol{\tau}=(x'(t), y'(t), z'(t))=(1, -2t, 3t^2)$ 。由题意可知 $\mathbf{n} \perp \boldsymbol{\tau} \Leftrightarrow \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$, 即 $1-4t+3t^3=0$, 解得 $t=1, t=\frac{1}{3}$, 所以有 2 条, 故选 B。

例题 2 设 $\mathbf{n}$ 是曲面 $z=x^2+y^2$ 在点 $M(1,1,2)$ 处指向下侧的法向量, 则函数 $u=x^2+yz$ 在点 M 处沿方向 $\mathbf{n}$ 的方向导数为_____。

答案 $\frac{7}{3}$

解 令 $F(x, y, z)=x^2+y^2-z$, 则曲面 $z=x^2+y^2$ 在点 M 处指向下侧的法向量

$$\mathbf{n}=(F'_x, F'_y, F'_z)|_M=(2x, 2y, -1)|_{(1,1,2)}=(2, 2, -1)。$$

将其单位化, 得 $\mathbf{n}^0=(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$, 则 $\mathbf{n}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha=\frac{2}{3}, \cos\beta=\frac{2}{3}, \cos\gamma=-\frac{1}{3}$,

方向导数为 $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}=(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma)|_M=(2x\cos\alpha+z\cos\beta+y\cos\gamma)|_{(1,1,2)}$

$$=2 \times 1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{2}{3} + 1 \times (-\frac{1}{3}) = \frac{7}{3}。$$

技巧专题 35 交换积分次序

例题 1 设 $f(x, y)$ 是连续函数, 则极坐标下的二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \rho^2 d\rho$ 可写成()。

A. $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy$

B. $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)(x^2+y^2) dy$

C. $\int_0^1 dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) \sqrt{x^2+y^2} dx$

D. $\int_0^1 dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y)(x^2+y^2) dx$

答案 C

解 极坐标下的二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \rho^2 d\rho$ 对应的二重积分的积分区域 D 如图 1-11 中阴影所示。在直角坐标下, 可表示为

$$D=\{(x, y) | 0 \leq y \leq \sqrt{2x-x^2}, 0 \leq x \leq 2\} \text{ 或}$$

$$D=\{(x, y) | 1-\sqrt{1-y^2} \leq x \leq 1+\sqrt{1-y^2}, 0 \leq y \leq 1\}。$$

由 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$, 有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \rho^2 d\rho = \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) \sqrt{x^2+y^2} dy$$

$$= \int_0^1 dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) \sqrt{x^2+y^2} dx, \text{ 故选 C。}$$

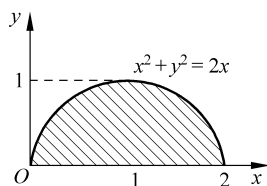


图 1-11

注意: $\rho d\rho d\theta = dx dy$, 所以被积函数只能是 $\sqrt{x^2+y^2}$, 而不能是 x^2+y^2 。

例题 2 设积分区域 D 由直线 $y=x$ 与曲线 $y^2=x$ 围成, 则 $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin\pi y}{y} dy = ()$ 。

A. π

B. $-\pi$

C. $\frac{1}{\pi}$

D. $-\frac{1}{\pi}$

答案 C**解** 由于 $\frac{\sin \pi y}{y}$ 关于 y 的原函数不能用初等函数表示, 所以将积分区域表示成 Y 型区域 $D =$

$$\{(x, y) | 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq y\}, \text{ 故 } \iint_D \frac{\sin \pi y}{y} d\sigma = \int_0^1 dy \int_{y^2}^y \frac{\sin \pi y}{y} dx = \int_0^1 \frac{\sin \pi y}{y} dy \int_{y^2}^y dx$$

$$= \int_0^1 \frac{\sin \pi y}{y} (y - y^2) dy = \int_0^1 (1 - y) \sin \pi y dy = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 (1 - y) d(\cos \pi y)$$

$$= -\frac{1}{\pi} [(1 - y) \cos \pi y] \Big|_0^1 - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \cos \pi y dy = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 \cos \pi y d(\pi y) = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi^2} \sin(\pi y) \Big|_0^1 = \frac{1}{\pi}. \text{ 故选 C.}$$

例题 3 积分 $\int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{x^2 + y^2} dy = (\quad)$.

A. $\frac{1}{6} [\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2})]$

B. $\frac{1}{6} [\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$

C. $\frac{1}{2} (1 + \sqrt{2} - \ln \sqrt{2})$

D. $\frac{1}{2} (1 + \sqrt{2} + \ln \sqrt{2})$

答案 B**解** 在极坐标下, $D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq \sec \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$, 则

$$\int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{x^2 + y^2} dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sec \theta} \rho \cdot \rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3} \rho^3 \Big|_0^{\sec \theta} d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 \theta d\theta = \frac{1}{6} [\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})],$$

故选 B.

熟练掌握以下计算过程。

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 \theta d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec \theta d(\tan \theta) = \sec \theta \tan \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 \sec \theta d\theta \\ &= \sqrt{2} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 \theta - 1) \sec \theta d\theta = \sqrt{2} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 \theta d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec \theta d\theta \\ &= \sqrt{2} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 \theta d\theta + \ln(\sec \theta + \tan \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 \theta d\theta \end{aligned}$$

$$\text{所以 } 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 \theta d\theta = \sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}), \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 \theta d\theta = \frac{1}{2} [\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})].$$

例题 4 设函数 $f(x, y)$ 连续, 则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy = (\quad)$.

A. $\int_0^1 dy \int_{\pi + \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx$

B. $\int_0^1 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx$

C. $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi + \arcsin y} f(x, y) dx$

D. $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx$

答案 B**解** 由题意可知, $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \sin x \leq y \leq 1$, 则 $0 \leq y \leq 1, \pi - \arcsin y \leq x \leq \pi$, 故选 B.**例题 5** 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 并设 $\int_0^1 f(x) dx = A$, 则 $\int_0^1 dx \int_x^1 f(x) f(y) dy = (\quad)$.

A. $\frac{1}{2}A^2$

B. A^2

C. $2A^2$

D. $4A^2$

答案 A**解** 【方法 1】 交换次序。

将累次积分 $I = \int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y)dy$ 交换积分次序得 $I = \int_0^1 dy \int_0^y f(x)f(y)dx$, 如图 1-12 所示。

由于定积分与积分变量无关, 改写成 $I = \int_0^1 dx \int_0^x f(y)f(x)dy$ 。

$$\text{则 } 2I = \int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y)dy + \int_0^1 dx \int_0^x f(x)f(y)dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 f(x)f(y)dy = \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 f(y)dy = A^2 \Rightarrow I = \frac{1}{2}A^2, \text{ 故}$$

选 A。

【方法 2】 变限函数法。

设 $F(x) = \int_0^x f(x)dx$, 则 $F(1) = \int_0^1 f(x)dx = A$,

$$\int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y)dy = \int_0^1 f(x)dx \int_x^1 dF(x) = \int_0^1 f(x)[F(1) - F(x)]dx$$

$$= F(1) \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 f(x)F(x)dx = F(1) \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 F(x)dF = F^2(1) - \frac{1}{2}F^2(1)$$

$$= \frac{1}{2}F^2(1) = \frac{1}{2}A^2, \text{ 故选 A。}$$

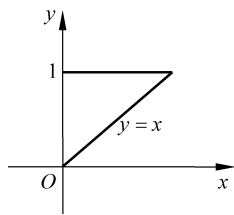


图 1-12

技巧专题 36 二重积分的简化

例题 1 若 $D: x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{4}$, 则 $\iint_D \frac{\tan(x^2)}{1 - \tan(x^2) \cdot \tan(y^2)} dx dy =$ _____。

答案 $\frac{\pi}{4} \ln 2$

解 设 D 的第一象限部分为 D_1 , 则 $\iint_D \frac{\tan(x^2)}{1 - \tan(x^2) \cdot \tan(y^2)} dx dy = 4 \iint_{D_1} \frac{\tan(x^2)}{1 - \tan(x^2) \cdot \tan(y^2)} dx dy =$
 $4 \iint_{D_1} \frac{\tan(y^2)}{1 - \tan(y^2) \cdot \tan(x^2)} dx dy = 2 \iint_{D_1} \frac{\tan(y^2) + \tan(x^2)}{1 - \tan(y^2) \cdot \tan(x^2)} dx dy = 2 \iint_{D_1} \tan(x^2 + y^2) dx dy =$
 $2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \tan r^2 \cdot r dr = \frac{\pi}{4} \ln 2。$

例题 2 设 $I = \iint_D [y^2 + f(\sin x \sin y)] dx dy$, 其中 f 为连续的奇函数, D 是由曲线 $y = -x^3$ 与直线 $x = 1, y = 1$ 围成的平面区域, 则 $I =$ ()。

A. $-\frac{2}{3}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\iint_D f(\sin x \sin y) dx dy$

D. $2 \iint_D f(\sin x \sin y) dx dy$

答案 B

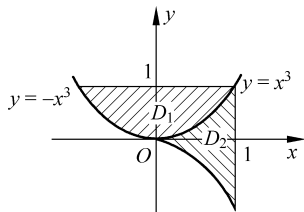


图 1-13

解 如图 1-13 所示,作曲线 $y=x^3 (x \geq 0)$,将 D 分为 D_1 与 D_2 ,则

$$\begin{aligned} I &= \iint_D y^2 dx dy + \iint_D f(\sin x \sin y) dx dy \\ &= \iint_{D_1} y^2 dx dy + \iint_{D_2} y^2 dx dy + \iint_{D_1} f(\sin x \sin y) dx dy + \iint_{D_2} f(\sin x \sin y) dx dy. \end{aligned}$$

因为 D_1 和 D_2 分别关于 y 轴和 x 轴对称,被积函数 $f(\sin x \sin y)$ 关

于 x, y 均为奇函数,所以 $\iint_{D_1} f(\sin x \sin y) dx dy = \iint_{D_2} f(\sin x \sin y) dx dy = 0$ 。

又被积函数 y^2 同时是关于 x, y 的偶函数,所以

$$\iint_{D_1} y^2 dx dy + \iint_{D_2} y^2 dx dy = 2 \iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} y^2 dx dy = 2 \int_0^1 dx \int_0^1 y^2 dy = 2 \cdot \frac{1}{3} y^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3}, \text{得 } I = \frac{2}{3}, \text{故选 B.}$$

例题 3 $\iint_{x^2+y^2 \leq 2x-2y+2} (2x-2y+2) dx dy = (\quad)。$

A. 8π B. 16π C. 24π D. 32π

答案 C

解 无论在直角坐标下还是在极坐标下计算该二重积分,都比较烦琐,故考虑将其简化。

积分区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2x - 2y + 2\} = \{(x, y) | (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 4\}$, 所以区域 D 的面积 $\sigma = \pi \times 2^2 = 4\pi$, 形心在圆心, 形心坐标 $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, -1)$ (找出形心)。

故 $\iint_{x^2+y^2 \leq 2x-2y+2} (2x-2y+2) dx dy = 2 \iint_D x dx dy - 2 \iint_D y dx dy + 2 \iint_D dx dy = 2\bar{x}\sigma - 2\bar{y}\sigma + 2\sigma = 24\pi$, 故选 C。

说明: 形心坐标公式为 $\bar{x} = \frac{\iint_D x dx dy}{\iint_D dx dy}, \bar{y} = \frac{\iint_D y dx dy}{\iint_D dx dy}。$

技巧专题 37 极坐标化为直角坐标积分

例题 1 二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\int_0^{\frac{1}{\cos \theta}} \frac{\ln(1+r \cos \theta)}{\cos \theta} dr \right] d\theta = \underline{\hspace{2cm}}。$

答案 $2\ln 2 - 1$

解 把原积分化为二重积分, 积分区域是由直线 $y=x, x=1$ 及 x 轴围成的三角形 D , 原积分 =

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\ln(1+x)}{x} d\sigma &= \int_0^1 \left[\int_0^x \frac{\ln(1+x)}{x} dy \right] dx = \int_0^1 \ln(1+x) dx = x \ln(1+x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx = \ln 2 - \\ &[x - \ln(1+x)] \Big|_0^1 = 2\ln 2 - 1. \end{aligned}$$

例题 2 设 D 是由直线 $y=1, y=x, y=-x$ 围成的有界区域, 则积分 $\iint_D \frac{x^2 - xy - y^2}{x^2 + y^2} dx dy$ 的值

为()。

A. $1 + \frac{\pi}{2}$

B. $1 - \frac{\pi}{2}$

C. $\frac{1-\pi}{2}$

D. $\frac{\pi-1}{2}$

答案 B

解 由于 D 关于 $x=0$ 对称,应用奇偶性、对称性,则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 2 \iint_{D(x \geq 0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} dx dy = 2 \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int_0^{\csc \theta} \frac{\rho^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{\rho^2} \rho d\rho \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\cot^2 \theta - 1) d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\csc^2 \theta - 2) d\theta = -\cot \theta \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} - \frac{\pi}{2} = 1 - \frac{\pi}{2}. \text{ 故选 B.} \end{aligned}$$

例题 3 设 $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq x \leq 1\}$, 则 $\iint_D (e^{\frac{y}{x+y}} + 1) d\sigma =$ _____。

答案 $\frac{e}{2}$

解 $\iint_D (e^{\frac{y}{x+y}} + 1) d\sigma = \iint_D e^{\frac{y}{x+y}} d\sigma + \iint_D d\sigma = \frac{1}{2} + \iint_D e^{\frac{y}{x+y}} d\sigma$, 边界直线 $y=1-x$ 化为极坐标 $r = \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}$, 于是

$$\begin{aligned} \iint_D e^{\frac{y}{x+y}} d\sigma &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}} e^{\frac{\sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta}} r dr = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{\sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta}} \frac{1}{(\cos \theta + \sin \theta)^2} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{\sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta}} d\left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta}\right) = \frac{1}{2} e^{\frac{\sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} (e - 1), \text{ 所以 } \iint_D (e^{\frac{y}{x+y}} + 1) d\sigma = \frac{e}{2}. \end{aligned}$$

例题 4 二次积分 $\int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\theta}{2}}^{\pi} (\theta^2 - 1) e^{r^2} dr =$ _____。

答案 $\frac{1}{3} e^{\pi^2} (4\pi^2 - 7) + \frac{7}{3}$

解 在 (θ, r) 平面上积分换序, 将 $D: \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \frac{\theta}{2} \leq r \leq \pi \end{cases}$ 换为 $\begin{cases} 0 \leq r \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq 2r \end{cases}$, 如

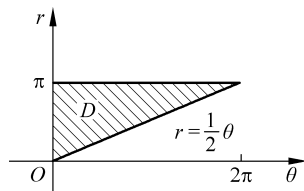


图 1-14

图 1-14 所示。

$$\begin{aligned} \text{所以原式} &= \int_0^{\pi} dr \int_0^{2r} (\theta^2 - 1) e^{r^2} d\theta = \int_0^{\pi} e^{r^2} \left(\frac{\theta^3}{3} - \theta \right) \Big|_0^{2r} dr \\ &= \frac{8}{3} \int_0^{\pi} r^3 e^{r^2} dr - 2 \int_0^{\pi} r e^{r^2} dr \stackrel{t=r^2}{=} \frac{4}{3} \int_0^{\pi^2} t e^t dt - \int_0^{\pi^2} e^t dt = \frac{4}{3} e^t (t - 1) \Big|_0^{\pi^2} - e^t \Big|_0^{\pi^2} \\ &= \frac{1}{3} e^{\pi^2} (4\pi^2 - 7) + \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

技巧专题 38 二重积分比较大小

例题 1 设 $I_1 = \iint_{1 \leq x^2 + y^2 \leq 2} \ln(x^2 + y^2) dx dy$, $I_2 = \iint_{|x| + |y| \leq 1} \cos(2 + x^2 + y^2) dx dy$, $I_3 = \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \sin(x + y) dx dy$, 则 I_1, I_2, I_3 的大小关系为()。

A. $I_1 < I_2 < I_3$

B. $I_2 < I_3 < I_1$

C. $I_3 < I_2 < I_1$

D. $I_2 < I_1 < I_3$

答案 B

解 对于 I_1 , 因为 $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$, 所以 $\ln(x^2 + y^2) > 0$, 从而 $I_1 > 0$ 。

对于 I_2 , 当 $|x| + |y| \leq 1$ 时, $2 \leq 2 + x^2 + y^2 \leq 3$, 此时 $\cos(2 + x^2 + y^2) < 0$, 故 $I_2 < 0$ 。

对于 I_3 , 区域 $x^2 + y^2 \leq 1$ 关于 x 轴、 y 轴都对称, 而 $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$, 其中 $\sin x \cos y$ 关于 x 是奇函数, $\cos x \sin y$ 关于 y 是奇函数, 故 $I_3 = 0$ 。

综上, $I_2 < I_3 < I_1$, 故选 B。

例题 2 设 $I_1 = \iint_D e^{-\sqrt{x^2+y^2}} d\sigma$, $I_2 = \iint_D e^{-(x^2+y^2)} d\sigma$, $I_3 = \iint_D e^{-(x^2+y^2)^2} d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid |x| \leq \frac{1}{2}, |y| \leq \frac{1}{2}\}$, 则 ()。

A. $I_3 < I_2 < I_1$

B. $I_1 < I_2 < I_3$

C. $I_2 < I_1 < I_3$

D. $I_3 < I_1 < I_2$

答案 B

解 对于 D , 显然有 $0 \leq x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}$, 从而 $(x^2 + y^2)^2 < x^2 + y^2 < \sqrt{x^2 + y^2}$, 所以 $e^{-\sqrt{x^2+y^2}} < e^{-(x^2+y^2)} < e^{-(x^2+y^2)^2}$, 因此 $I_1 < I_2 < I_3$, 故选 B。

技巧专题 39 二重积分极限

例题 1 设 $f(x, y)$ 在平面上有界, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \iint_{x^2+y^2 \leq n^2} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2 + 1} dx dy = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案 0

解 由于 $f(x, y)$ 在平面上有界, 所以 $\exists M > 0, \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$ 有 $|f(x, y)| \leq M$, 于是

$$\left| \frac{1}{n^2} \iint_{x^2+y^2 \leq n^2} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2 + 1} dx dy \right| \leq \frac{M}{n^2} \iint_{x^2+y^2 \leq n^2} \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} dx dy = \frac{M}{n^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^n \frac{r}{r^2 + 1} dr = \frac{\pi M}{n^2} \ln(1 + n^2).$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi M}{n^2} \ln(1 + n^2) = 0$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \iint_{x^2+y^2 \leq n^2} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2 + 1} dx dy = 0$ 。

例题 2 设 $f(x)$ 为可积函数, 则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{2n} \frac{2}{n^2} f\left(\frac{2i+j}{n}\right)$ 化二重积分为 ()。

A. $\int_0^1 dx \int_0^1 f(2x + y) dy$

B. $\int_0^2 dx \int_0^2 f(2x + y) dy$

C. $\int_0^2 dx \int_0^2 f(x + y) dy$

D. $\int_0^2 dx \int_0^1 f(x + y) dy$

答案 C

解 原极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{2n} f\left(\frac{2i+j}{n}\right) \cdot \frac{2}{n^2}$, 令 $\frac{2i}{n} = x$, 当 $i: 1 \rightarrow n (n \rightarrow \infty)$ 时, $x: 0 \rightarrow 2$, 令 $\frac{j}{n} = y$, 当 $j: 1 \rightarrow 2n (n \rightarrow \infty)$ 时, $y: 0 \rightarrow 2$, 所以区域为 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$, 因此原极限 = $\int_0^2 dx \int_0^2 f(x + y) dy$, 故选 C。

技巧专题 40 旋转曲面(仅数学一)

例题 1 设直线 L 过 $A(1, 0, 0), B(0, 1, 1)$ 两点, 将 L 绕 z 轴旋转一周得到曲面 Σ , Σ 与平面 $z = 0, z = 2$ 所围成的立体区域为 Ω , 则 Ω 的形心坐标为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案 $(0, 0, \frac{7}{5})$

解 直线 L 过 A, B 两点, 所以其方程为 $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1} \Rightarrow \begin{cases} x=1-z \\ y=z \end{cases}$, 所以其绕着 z 轴旋转一周所得曲面的方程为 $x^2 + y^2 = (1-z)^2 + z^2 \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{2} - \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ 。由形心坐标计算公式可得

$$\bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz}{\iiint_{\Omega} dx \, dy \, dz} = \frac{\pi \int_0^2 z [(1-z)^2 + z^2] \, dz}{\pi \int_0^2 [(1-z)^2 + z^2] \, dz} = \frac{7}{5}, \text{ 所以形心坐标为 } \left(0, 0, \frac{7}{5}\right)。$$

技巧专题 41 散度与旋度(仅数学一)

例题 1 已知向量场 $\mathbf{u}(x, y, z) = xy^2\mathbf{i} + ye^z\mathbf{j} + x\ln(1+z^2)\mathbf{k}$ 。

(1) 在点 $P(1, 1, 0)$ 处的散度 $\operatorname{div} \mathbf{u} = (\quad)$ 。

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

(2) 在点 $P(1, 1, 0)$ 处的旋度 $\operatorname{rot} \mathbf{u} = (\quad)$ 。

A. $(2, 1, 0)$ B. $(-1, 0, -2)$ C. $(1, 2, 0)$ D. $(2, 0, 1)$

答案 (1) B (2) B

解 (1) 直接用散度公式有 $\operatorname{div} \mathbf{u}|_P = \left[\frac{\partial}{\partial x}(xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}(ye^z) + \frac{\partial}{\partial z}(x\ln(1+z^2)) \right] \Big|_P = \left(y^2 + e^z + x \cdot \frac{2z}{1+z^2} \right) \Big|_{(1,1,0)} = 1^2 + e^0 + 1 \times \frac{2 \times 0}{1+0^2} = 1+1=2$ 。故选 B。

$$\begin{aligned} (2) \text{ 用旋度公式有 } \operatorname{rot} \mathbf{u}|_P &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \Big|_P = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2 & ye^z & x\ln(1+z^2) \end{vmatrix} \Big|_{(1,1,0)} \\ &= (-ye^z, -\ln(1+z^2), 2xy) \Big|_{(1,1,0)} = (-1, 0, -2)。 \text{ 故选 B。} \end{aligned}$$

技巧专题 42 法向量与切向量(仅数学一)

例题 1 曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $2x + 4y - z = 0$ 平行的切平面的方程是_____。

答案 $2x + 4y - z = 5$

解 令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$, 曲面方程为 $F(x, y, z) = 0$, 它在点 (x_0, y_0, z_0) 处的法向量为 $\mathbf{n} = (F'_x, F'_y, F'_z) = (2x, 2y, -1)$, 它与平面 $2x + 4y - z = 0$ 的法向量平行, 即 $\frac{2x}{2} = \frac{2y}{4} = \frac{-1}{-1}$, 从而解得 $x=1, y=2, z=5$ 。由点法式, 切平面方程为 $2(x-1) + 4(y-2) - (z-5) = 0$, 即 $2x + 4y - z = 5$ 。

技巧专题 43 补面满足高斯公式(仅数学一)

例题 1 S 为有向曲面 $z = x^2 + y^2$ ($0 \leq z \leq 1$), 其法向量与 z 轴正向的夹角为锐角, 则曲面积分

$$I = \iint_S (2x + z) \, dy \, dz + z \, dx \, dy = \underline{\hspace{2cm}}。$$

答案 $-\frac{\pi}{2}$

解 添加辅助面 $S_1: z=1 (x^2+y^2 \leq 1)$, 方向朝下, 则 $\iint_{S_1} (2x+z)dydz + zdx dy = \iint_{S_1} dx dy = -\iint_D 1dx dy = -\pi$, 其中, D 是 S_1 在平面 xOy 的投影区域: $x^2+y^2 \leq 1$ 。 S 与 S_1 即 $z=x^2+y^2$ 与 $z=1$ 围成区域 Ω , S 与 S_1 的法向量指向 Ω 内部, 所以在 Ω 上满足高斯公式的条件, 所以 $\iint_{S \cup S_1} (2x+z)dydz + zdx dy = -3 \iiint_{\Omega} dV = -3 \int_0^1 dz \iint_{D(z)} dx dy = -3 \int_0^1 \pi z dz = -\frac{3\pi}{2}$, 其中, $D(z)$ 是圆域: $x^2+y^2 \leq z$, 面积为 πz 。 因此, $I = -\frac{3}{2}\pi - \iint_{S_1} (2x+z)dydz + zdx dy = -\frac{3}{2}\pi - (-\pi) = -\frac{\pi}{2}$ 。

技巧专题 44 由对称性化简曲线(仅数学一)

例题 1 设 L 是曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线, 则 $\oint_L xy ds =$ _____。

答案 $-\frac{\pi}{3}$

解 先求交线 $L: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$, 由于曲面方程与平面方程中的 x, y, z 满足轮换对称性, 因此在曲线 L 上 x, y, z 具有轮换对称性。 又知 $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2 + 2(xy+yz+zx) = 0 \Rightarrow xy+yz+zx = -\frac{1}{2}$, 由轮换对称性可得 $\oint_L xy ds = \frac{1}{3} \oint_L (xy+yz+zx) ds = -\frac{1}{6} \oint_L ds = -\frac{1}{6} \cdot 2\pi = -\frac{\pi}{3}$ 。

技巧专题 45 与路径无关问题(仅数学一)

例题 1 若曲线积分 $\int_L \frac{x dx - ay dy}{x^2+y^2-1}$ 在区域 $D = \{(x, y) | x^2+y^2 < 1\}$ 内与路径无关, 则 $a =$ _____。

答案 -1

解 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2-1)^2}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2axy}{(x^2+y^2-1)^2}$, 由积分与路径无关知 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow a = -1$ 。

技巧专题 46 空间曲线积分(仅数学一)

例题 1 设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=x+y$ 的交线, 从 z 轴正向往 z 轴负向看去, L 取逆时针方向, 则曲线积分 $\oint_L xz dx + x dy + \frac{y^2}{2} dz =$ _____。

答案 π

解 【方法 1】 化为定积分。

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = \cos t + \sin t \end{cases}, \text{其中 } t \in [0, 2\pi].$$

$$\begin{aligned}
 \text{所以原积分} &= \int_0^{2\pi} [\cos t (\cos t + \sin t) (-\sin t) + \cos t \cos t + \frac{1}{2} \sin^2 t (\cos t - \sin t)] dt \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} [\cos t (\cos t + \sin t) (-\sin t) + \cos t \cos t + \frac{1}{2} \sin^2 t (\cos t - \sin t)] dt \\
 &= 2 \int_0^{\pi} \cos^2 t dt = \pi.
 \end{aligned}$$

【方法 2】 使用斯托克斯公式。

平面 $z=x+y$ 被柱面 $x^2+y^2=1$ 所截部分记为 Σ , 按右手法则向量朝上, Σ 在 xOy 平面上投影区域是 $D: x^2+y^2 \leq 1$ 。

由斯托克斯公式, 得

$$\begin{aligned}
 J &= \oint_L xz dx + x dy + \frac{y^2}{2} dz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dy dz & dz dx & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & x & \frac{y^2}{2} \end{vmatrix} = \iint_{\Sigma} y dy dz + x dz dx + dx dy = \\
 &= \iint_D \left[y \left(-\frac{\partial z}{\partial x} \right) + x \left(-\frac{\partial z}{\partial y} \right) + 1 \right] dx dy, \text{ 其中, } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 1, \text{ 于是 } J = \iint_D (-y - x + 1) dx dy = 0 + 0 + \pi = \pi.
 \end{aligned}$$

技巧专题 47 一型曲面积分(仅数学一)

例题 1 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在柱体 $x^2+y^2 \leq 2x$ 内的部分, 曲面积分 $\iint_{\Sigma} z dS =$ _____。

答案 $\frac{32}{9}\sqrt{2}$

解 将一型曲面积分 I 化为二重积分 $I = \iint_{D_{xy}} f(x, y) dx dy$ 。被积函数 $f(x, y) = z \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2} =$

$\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}, \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{2}$ (其中 $z=\sqrt{x^2+y^2}$), 积分区域为 Σ 在

xOy 平面的投影区域 D_{xy} , 如图 1-15 所示。由题意有 $D_{xy}: x^2+y^2 \leq 2x$, 即

$(x-1)^2+y^2 \leq 1$ 。所以, 原式 $I = \iint_{D_{xy}} \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} dx dy$ 。做极坐标变换 $x =$

$r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 则 $D_{xy}: 0 \leq r \leq 2 \cos \theta, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, 因此 $I =$

$$\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} r \cdot r dr = \frac{16\sqrt{2}}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta = \frac{32}{9}\sqrt{2}.$$

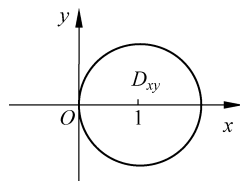


图 1-15

技巧专题 48 求带阶乘的级数(仅数学一、数学三)

例题 1 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{(2n+1)!} =$ ()。

A. $\sin 1 + \cos 1$

B. $2\sin 1 + \cos 1$

C. $2\sin 1 + 2\cos 1$

D. $2\sin 1 + 3\cos 1$

答案 B

解 $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$, 而 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2n+1}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} = \cos 1 + 2\sin 1$, 故选 B。

例题 2 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^n$ 在 $(0, +\infty)$ 内的和函数 $S(x) =$ _____。

答案 $\cos \sqrt{x} - 1$

解 由 $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$, $x \in (-\infty, +\infty)$, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\sqrt{x})^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\sqrt{x})^{2n} - 1 = \cos \sqrt{x} - 1$, $x \in (0, +\infty)$ 。

技巧专题 49 无穷小级数(仅数学一、数学三)

例题 1 设 $f(x)$ 有二阶连续导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = k$, $a_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$, $n=1, 2, \dots$, 则下列说法正确的有()。

① $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 必收敛

② $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性与 k 值有关

③ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 的敛散性与 k 值有关

A. 0 个

B. 1 个

C. 2 个

D. 3 个

答案 C

解 由 $f(x)$ 二阶导连续且极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = k$ 可得 $f(0) = 0$, $f'(0) = k$ 。当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x) = f'(0)x + o(x)$ 。

若 $k \neq 0$, 则 $f\left(\frac{1}{n}\right) \sim k \cdot \frac{1}{n}$, 此时有交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

若 $k = 0$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, 有 $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2) = \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$ 。

$f\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{f''(0)}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$, 此时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 均收敛。

由上可知, 无论 k 取何值, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 均收敛, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性与 k 值有关。①② 正确, 故选 C。

技巧专题 50 收敛半径(仅数学一、数学三)

例题 1 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛, 在 $x=-4$ 处发散, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n$ 的收敛域为()。

A. $(1, 5)$

B. $(1, 5]$

C. $(-2, 2)$

D. $(-2, 2]$

答案 B

解 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛 $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ 在 $t=2$ 处收敛 $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ 的收敛半径 $R \geq 2$,
 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+2)^n$ 在 $x=-4$ 处发散 $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ 在 $t=-2$ 处发散 $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ 的收敛半径 $R \leq 2$,
 于是 $R=2$. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ 的收敛区间是 $(-2, 2)$, 收敛域是 $(-2, 2]$. 则 $-2 < t = x-3 \leq 2 \Rightarrow 1 < x \leq 5 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n$ 的收敛域是 $(1, 5]$, 故选 B.

例题 2 设数列 $\{a_n\}$ 单调递减, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ($n=1, 2, \dots$) 无界, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 的收敛域为 ().

A. $(-1, 1]$ B. $[-1, 1)$ C. $[0, 2)$ D. $(0, 2]$ **答案** C

解 由于幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 的收敛区间的中心为 $x=1$, 故排除选项 A 和选项 B. 在幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 中, 取 $x=0$, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, 由于 $\{a_n\}$ 单调递减, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, 由交错级数的莱布尼茨定理知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛.

在幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 中, 取 $x=2$, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 由于 $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 无界, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 故幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 的收敛域为 $[0, 2)$, 故选 C.

例题 3 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} e^{-nx}$ 的收敛域为 $(a, +\infty)$, 则 $a =$ _____.

答案 -1

解 令 $u_n(x) = \frac{n!}{n^n} e^{-nx}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! e^{-(n+1)x}}{n! e^{-nx}} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)e^{-x}}{n+1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n =$
 $e^{-x} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = e^{-x} \cdot \frac{1}{e} = e^{-x-1} < 1$, 故 $x > -1$, $a = -1$.

技巧专题 51 微分方程级数求和(仅数学一、数学三)

例题 1 幂级数 $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ ($-\infty < x < +\infty$) 的和函数为 _____.

答案 $\frac{2}{3} e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{1}{3} e^x$

解 逐项求导. $y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}$, $y''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

$$\begin{aligned}
 y'' + y' + y &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!} + \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} + \frac{x^{3n}}{(3n)!} \right] + 1 \\
 &= 1 + \left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \right) + \left(\frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} \right) + \cdots \\
 &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, x \in (-\infty, +\infty)
 \end{aligned}$$

所以和函数 $y(x)$ 满足微分方程 $y'' + y' + y = e^x$, 且 $y(0) = 1, y'(0) = 0$. 该微分方程相应的齐次方程为 $y'' + y' + y = 0$, 对应的特征方程是 $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$, 特征根是 $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. 因此该齐次方程的通解为 $y = e^{-\frac{1}{2}x} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right)$. 再设原非齐次方程的一个特解为 $y^* = Ae^x$, 代入原方程, 有 $y^{*''} + y^{*'} + y^* = 3Ae^x = e^x$, 所以 $A = \frac{1}{3}$. 再由 $y(0) = 1, y'(0) = 0$, 得 $C_1 = \frac{2}{3}, C_2 = 0$. 所以, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = y(x) = \frac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{3}e^x, x \in (-\infty, +\infty)$.

技巧专题 52 常数项级数求和(仅数学一、数学三)

例题 1 关于 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n(n^2-1)}$, 下列说法正确的为().

- A. 值为 $\frac{5}{8} - \frac{3}{4}\ln 2$ B. 值为 $\frac{5}{4} - \frac{3}{2}\ln 2$
C. 该级数发散 D. 以上均不对

答案 A

解 先将级数分解, 令 $A = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n(n^2-1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{n+1}$

$$\frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+2} \cdot n} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n}.$$

$$\text{令 } A_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+2} \cdot n}, A_2 = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n}, \text{ 则 } A = A_1 - A_2.$$

由 $\ln(1+x)$ 幂级数展开式, 即 $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n (-1 < x \leq 1)$, 得 $A_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+2} \cdot n} = -\frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{1}{4} \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \ln 2$, $A_2 = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n} = -\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = -\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \right] = -\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \ln 2 - \frac{5}{8}$, 因此, $A = A_1 - A_2 = \frac{5}{8} - \frac{3}{4}\ln 2$, 故选 A.

技巧专题 53 傅里叶级数系数(仅数学一)

例题 1 设函数 $f(x) = \pi x + x^2 (-\pi < x < \pi)$ 的傅里叶级数展开式为 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx +$

$b_n \sin nx$), 则其中系数 b_3 的值为_____。

答案 $\frac{2}{3}\pi$

解 由傅里叶积分表达式, 有 $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$ 。所以 $b_3 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi x + x^2) \sin 3x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} x \sin 3x \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin 3x \, dx$ 。因为 $x^2 \sin 3x$ 为奇函数, 所以 $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin 3x \, dx = 0$; $x \sin 3x$ 为偶函数, 所以 $b_3 = \int_{-\pi}^{\pi} x \sin 3x \, dx = 2 \int_0^{\pi} x \sin 3x \, dx = 2 \int_0^{\pi} x \, d\left(-\frac{1}{3} \cos 3x\right) = \left(-\frac{2x}{3} \cos 3x\right) \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{3} \int_0^{\pi} \cos 3x \, dx = \frac{2}{3}\pi + \frac{2}{3} \left(\frac{\sin 3x}{3}\right) \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3}\pi$ 。

第 2 章

线性代数技巧

技巧专题 1 余子式

例题 1 四阶矩阵 $A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_3^T \\ \alpha_4^T \end{bmatrix}$ 不可逆, a_{12} 的代数余子式 $A_{12} \neq 0$, A^* 为 A 的伴随矩阵, 则

$(A^T)^* x = 0$ 的通解为 ()。

A. $x = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3$

B. $x = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_4$

C. $x = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_3 + k_3 \alpha_4$

D. $x = k_1 \alpha_2 + k_2 \alpha_3 + k_3 \alpha_4$

答案 D

解 因为 A 不可逆, 所以 $|A| = 0$, 因为 $A_{12} \neq 0$, 所以 $r(A) = r(A^T) = 3$, 所以 $r(A^*) = 1$, 所以 $A^* x = 0$ 的基础解系有 3 个线性无关的解向量。由 $(A^T)^* A^T = |A^T| E = O$ 可知, A^T 的列向量为方程 $(A^T)^* x = 0$ 的解, 即 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 均为方程 $(A^T)^* x = 0$ 的解。又因为 $A_{12} \neq 0$, 所以 $\alpha_2^T, \alpha_3^T, \alpha_4^T$ 线性无关, 即 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 所以 $(A^T)^* x = 0$ 的通解为 $x = k_1 \alpha_2 + k_2 \alpha_3 + k_3 \alpha_4$, 故选 D。

例题 2 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$, A_{ij} 为元素 a_{ij} 对应的代数余子式。

(1) 第 4 行各元素的代数余子式之和为_____。

(2) 所有元素的代数余子式之和 $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 A_{ij}$ 为_____。

答案 (1) 0 (2) 168

解 (1) 用 A_{4j} ($j=1, 2, 3, 4$) 表示第四行各元素的代数余子式, 由于 $A_{4j} = (-1)^{4+j} M_{4j}$, 于是 $A_{41} +$

$$A_{42} + A_{43} + A_{44} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0。$$

$$(2) \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 A_{ij} = \sum_{j=1}^4 A_{1j} + \sum_{j=1}^4 A_{3j} + \sum_{j=1}^4 A_{4j} + \sum_{j=1}^4 A_{2j}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 a_{2j} A_{1j} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 a_{2j} A_{3j} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 a_{2j} A_{4j} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 a_{2j} A_{2j} = \frac{1}{2} D = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 168。$$

技巧专题 2 伴随矩阵

例题 1 已知实矩阵 $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ 满足条件 $a_{ij} = A_{ij}$ ($i, j=1, 2, 3$), 其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式; 且 $a_{11} \neq 0$, 则行列式 $|A| =$ _____。

答案 1

解 因为 $a_{ij} = A_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$, 即 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = (A^*)^T$, 即 $A^T =$

A^* 。由逆矩阵的计算公式 $AA^* = |A|E$, 故 $AA^T = |A|E$, 两边取行列式, 得 $|A|^2 = |A| \cdot |A^T| = |A|E$ 。因为 A 为三阶行列式, 所以 $|A|^2 = ||A|E| = |A|^3$, 从而 $|A|^2(|A| - 1) = 0$, 得 $|A| = 1$ 或 $|A| = 0$ 。由于 $a_{11} \neq 0$, 对 $|A|$ 按第 1 行展开, 有 $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 > 0$, 故必有 $|A| = 1$ 。

例题 2 设 A, B 均为二阶矩阵, A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵。若 $|A| = 2, |B| = 3$, 则分块矩阵

$\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$ 的伴随矩阵为()。

A. $\begin{bmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{bmatrix}$

答案 B

解 因为 $|A| = 2, |B| = 3$, 所以 $\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^4 |A| |B| = 6 \neq 0$, 故 $\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$ 可逆。

当 C 可逆时, 有 $C^* = |C|C^{-1}$, 所以 $\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^{-1} = (-1)^4 |A| |B| \begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & |A| |B| B^{-1} \\ |B| |A| A^{-1} & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & |A| B^* \\ |B| A^* & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{bmatrix}$ 。故选 B。

技巧专题 3 列行矩阵

说明: 本书将 $A = \alpha\beta^T$ 称为列行矩阵 (α, β 均为列向量)。

例题 1 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ a & 1 & b \\ 4 & c & 6 \end{bmatrix}$, 若存在秩大于 1 的三阶矩阵 B , 使得 $BA = O$, 则 $A^n =$ _____。

答案 $9^{n-1} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

解 由 $BA = O$, 有 $r(A) + r(B) \leq 3$, 又因 $r(B) \geq 2$, 故 $r(A) \leq 3 - r(B) \leq 1$ 。显然 $r(A) \geq 1$, 所以

$r(A) = 1$ 。由 $\frac{2}{a} = \frac{-1}{1} = \frac{3}{b}, \frac{2}{4} = \frac{-1}{c} = \frac{3}{6}$, 知 $a = -2, b = -3, c = -2$ 。即 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 6 \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, 而 $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = 9, A^n = 9^{n-1}A = 9^{n-1} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 6 \end{bmatrix}$ 。

补充: 若 $A = \alpha\beta^T$, 其中 α, β 均为 n 列向量, 记 $\lambda = \alpha^T\beta = \beta^T\alpha = (\alpha, \beta)$, 则有 $A^n = \alpha\beta^T\alpha\beta^T\cdots\alpha\beta^T = \alpha(\beta^T\alpha)\cdots(\beta^T\alpha)\beta^T = \lambda^{n-1}\alpha\beta^T = \lambda^{n-1}A$ 。

例题 2 $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, 若 $A = \alpha\beta^T$, 则下列说法正确的是()。

A. $A+E$ 可逆, $A-E$ 可逆

B. $A+E$ 不可逆, $A-E$ 可逆

C. $A+E$ 可逆, $A-E$ 不可逆

D. $A+E$ 不可逆, $A-E$ 不可逆

答案 C

解 $A = \alpha\beta^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [-1 \ 1 \ 2]$ 的特征值为 $\alpha^T\beta, 0, 0$, 即为 $1, 0, 0$ 。 $A+E$ 的特征值为 $2, 1, 1$, 故可逆。

$A-E$ 的特征值为 $0, -1, -1$, 故不可逆。故选 C。

例题 3 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ 中可对角化的有()。

A. 0 个

B. 1 个

C. 2 个

D. 3 个

答案 C

解 $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ 为实对称矩阵, 必可对角化。 A, B 均为列行矩阵。

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ -1] = \alpha_1\beta_1^T$ 的特征值为 $\alpha_1^T\beta_1, 0, 0$, 即 $0, 0, 0$ 。

$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} [1 \ 1 \ -1] = \alpha_2\beta_2^T$ 的特征值为 $\alpha_2^T\beta_2, 0, 0$, 即 $2, 0, 0$ 。

矩阵 B 可对角化, 而矩阵 A 不可对角化, 故选 C。

技巧专题 4 基本初等矩阵

例题 1 设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$

$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 其中 A 可逆, 则 $B^{-1} = ()$ 。

A. $A^{-1}P_1P_2$

B. $P_1A^{-1}P_2$

C. $P_1P_2A^{-1}$

D. $P_2A^{-1}P_1$

答案 C

解 由题意可知 $AE_{23}E_{14}=B$, 其中 $E_{23}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $E_{14}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 。

由题设条件知 $P_1=E_{14}$, $P_2=E_{23}$, 因此 $B=AP_2P_1$ 。由于对初等矩阵 E_{ij} 有 $E_{ij}^{-1}=E_{ij}$, 故 $P_1^{-1}=P_1$, $P_2^{-1}=P_2$ 。因此有 $B^{-1}=(AP_2P_1)^{-1}=P_1^{-1}P_2^{-1}A^{-1}=P_1P_2A^{-1}$ 。故选 C。

例题 2 $P_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $P_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $P_1^{2009}P_2^{-1}=\underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

解 $P_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}=E_{23}$, 因为 $E_{ij}^{-1}=E_{ij}$, 所以 $E_{ij}^2=E$, 于是 $P_1^{2009}P_2^{-1}=P_1P_2^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 。

例题 3 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, $P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $Q=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 那么 $(P^{-1})^{2022}A(Q^{2021})^{-1}=(\quad)$ 。

A. $\begin{bmatrix} 8005 & 10007 & 12009 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 4043 & 2 & 3 \\ 10109 & 5 & 6 \\ 16175 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2005 & 4007 & 6009 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 1 & 2003 & 3 \\ 4 & 8009 & 6 \\ 7 & 14015 & 9 \end{bmatrix}$

答案 B

解 P, Q 均为初等矩阵, 因为 $P^{-1}=P$, 且 P 左乘 A 相当于矩阵 A 互换 1, 3 两行, 那么 $P^{2022}A$ 表示把 A 的 1, 3 两行互换 2022 次, 从而有 $(P^{-1})^{2022}A=P^{2022}A=A$ 。

又 $(Q^{2021})^{-1}=(Q^{-1})^{2021}$, 且 $Q^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 而 Q^{-1} 右乘 A 相当于把矩阵 A 的第 2 列加至第 1 列, 那么 $A(Q^{-1})^{2021}$ 表示把矩阵 A 第 2 列的 2021 倍加到第 1 列, 故选 B。

技巧专题 5 正交矩阵

例题 1 设 A 为 n 阶实矩阵, 且 $A^T=A^{-1}$, $|A|<0$, 则行列式 $|A+E|=\underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案 0

解 $|A+E|=|A+AA^T|=|A(E+A^T)|=|A(E+A^T)|=|A||E+A^T|$ 。因为 A 是正交矩阵, 故 $|A|=\pm 1$ 。又因为 $|A|<0$, 故 $|A|=-1$, 于是 $|A+E|=-|A+E|$, 即 $|A+E|=0$ 。

例题 2 已知 A, B 为 n 阶正交矩阵, 则()。

- A. $|A+B| = |A| + |B|$ 恒成立
 B. $|A+B| = |A| + |B|$ 恒不成立
 C. 当 $|A||B| < 0$ 时, $|A+B| = |A| + |B|$
 D. 当 $|A||B| > 0$ 时, $|A+B| = |A| + |B|$

答案 C

解 由 A, B 为正交矩阵, 即 $AA^T = E, BB^T = E$, 得 $|A|^2 = |B|^2 = 1$ 。当 $|A||B| < 0$ 时, 不妨设 $|A| = 1, |B| = -1$, 从而 $|A+B| = |AB^TB + AA^TB| = |A(B^T + A^T)B| = |A(B+A)^T| |B| = -|A+B|$, 所以 $|A+B| = 0 = |A| + |B|$, 故选 C。

技巧专题 6 矩阵可逆性

例题 1 设 α 是 n 维单位列向量, E 为 n 阶单位矩阵, 则()。

- A. $E - \alpha\alpha^T$ 不可逆
 B. $E + \alpha\alpha^T$ 不可逆
 C. $E + 2\alpha\alpha^T$ 不可逆
 D. $E - 2\alpha\alpha^T$ 不可逆

答案 A

解 选项 A, 由 $(E - \alpha\alpha^T)\alpha = \alpha - \alpha = 0$ 得 $(E - \alpha\alpha^T)x = 0$ 有非零解, 故 $|E - \alpha\alpha^T| = 0$, 即 $E - \alpha\alpha^T$ 不可逆。选项 B, 由 $r(\alpha\alpha^T) = 1$ 得 $\alpha\alpha^T$ 的特征值为 $n-1$ 个 0, 1 个 1, 故 $E + \alpha\alpha^T$ 的特征值为 $n-1$ 个 1, 1 个 2, 故可逆。其他选项类似, 故选 A。

例题 2 设 A 为 n 阶非零矩阵, E 为 n 阶单位矩阵, 若 $A^3 = O$, 则()。

- A. $E - A$ 不可逆, $E + A$ 不可逆
 B. $E - A$ 不可逆, $E + A$ 可逆
 C. $E - A$ 可逆, $E + A$ 可逆
 D. $E - A$ 可逆, $E + A$ 不可逆

答案 C

解 $A^3 = O \Rightarrow A^3 + E = E \Rightarrow (A + E)(A^2 - A + E) = E$, 所以 $A + E$ 可逆。 $A^3 = O \Rightarrow A^3 - E = -E \Rightarrow (E - A)(A^2 + A + E) = E$, 所以 $E - A$ 可逆, 故选 C。

说明: 本题也可用特征值判断是否可逆。

例题 3 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 矩阵 A 满足 $AX + E = A^2 + X$, 其中 E 为三阶单位矩阵, 则矩阵 $X =$ _____。

答案 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

解 将 A^2 与 E 组合, 得 $A^2 - E = AX - X$, 即 $(A - E)(A + E) = (A - E)X$, 而 $A - E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 且

$|A - E| = -1 \neq 0$, 故 $A - E$ 可逆, 所以 $X = A + E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 。

技巧专题 7 求秩

例题 1 设 A 是 3×3 矩阵, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是三维列向量, 其中至少有一个 β_i 不是方程组 $Ax=0$ 的解, 记 $B = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]$ 且满足 $r(AB) < r(A), r(AB) < r(B)$, 则 $r(AB)$ 等于()。

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

答案 B

解 存在 β_i 不是方程组 $Ax=0$ 的解, 即 $AB \neq 0, r(AB) \geq 1$ 。又 $r(AB) < r(A)$, 则矩阵 B 不可逆(若 B 可逆, 则 $r(AB) = r(A)$, 这与 $r(AB) < r(A)$ 矛盾), $r(B) \leq 2$, 从而 $r(AB) < r(B) \leq 2$, 即 $r(AB) \leq 1$ 。因此有 $r(AB) = 1$, 故选 B。

例题 2 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 满足 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$, 若 $r(a\alpha_1 + b\alpha_2, a\alpha_2 + b\alpha_3, a\alpha_3 + b\alpha_1) = 3$, 则 a, b 满足()。

A. $a=b$ B. $a \neq b$ C. $|a| = |b|$ D. $a+b \neq 0$

答案 D

解 $r(a\alpha_1 + b\alpha_2, a\alpha_2 + b\alpha_3, a\alpha_3 + b\alpha_1) = 3, r\left([\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{bmatrix}\right) = 3 = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 所以

$C = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{bmatrix}$ 可逆, 得 $\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{vmatrix} \neq 0$, 即 $a+b \neq 0$, 故选 D。

例题 3 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$ 的秩为()。

A. 3

B. 2

C. 1

D. 0

答案 C

解 因二次型 f 的矩阵为对称矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 故 f 的秩等于 1, 故选 C。

例题 4 已知三阶矩阵 A 与三维列向量 α , 若向量组 $\alpha, A\alpha, A^2\alpha$ 线性无关, 且 $A^3\alpha = 3A\alpha - 2A^2\alpha$, 则 A 的秩为()。

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

答案 C

解 由 $A[\alpha, A\alpha, A^2\alpha] = [A\alpha, A^2\alpha, A^3\alpha] = [A\alpha, A^2\alpha, 3A\alpha - 2A^2\alpha] = [\alpha, A\alpha, A^2\alpha] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, 因为向量组 $\alpha, A\alpha, A^2\alpha$ 线性无关, 故 $A = [\alpha, A\alpha, A^2\alpha] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} [\alpha, A\alpha, A^2\alpha]^{-1}$,

所以 A 与矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ 相似, 矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ 的秩为 2, 所以 $r(A) = 2$ 。故选 C。

例题 5 若 $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $A = \alpha\beta^T$, B 是四阶矩阵, $r(B^*) = 1$, 则 $r(AB - 4B) = (\quad)$ 。

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

答案 C

解 $r(B^*) = 1 \Rightarrow r(B) = 3$, $AB - 4B = (A - 4E)B$ 。而 $A - 4E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [1 \ 2 \ 3 \ 4] - 4E =$

$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ 。显然 $|A - 4E| = 64 \neq 0$, 从而 $A - 4E$ 可逆, 故 $r(AB - 4B) = r(B) = 3$ 。故

选 C。

例题 6 设 A, B 分别是 3×2 和 2×3 的矩阵, 且满足 $AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $(\quad)$ 。

A. $r(A) = 1, r(B) = 1$ B. $r(A) = 2, r(B) = 2$ C. $r(A) = 1, r(B) = 2$ D. $r(A) = 2, r(B) = 1$

答案 B

解 因为 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, 所以 $r(AB) < 3$, 且 $r(AB) \geq 2$, 即 $r(AB) = 2$ 。

因为 $r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$, 所以 $r(A), r(B)$ 均大于或等于 2。

又因为 A, B 分别是 3×2 和 2×3 的矩阵, 所以 $r(A), r(B)$ 均小于或等于 2。

故 $r(A), r(B)$ 均等于 2, 故选 B。

例题 7 设 $n (n \geq 3)$ 阶矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{bmatrix}$, 若矩阵 $r(A^*) = 1$, 则 a 必为 $(\quad)$ 。

A. 1

B. $\frac{1}{1-n}$

C. -1

D. $\frac{1}{n-1}$

答案 B

解 $A = \begin{bmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a-1 & 1-a & 0 & \cdots & 0 \\ a-1 & 0 & 1-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a-1 & 0 & 0 & \cdots & 1-a \end{bmatrix}$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 0 & 1-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a \end{bmatrix}$$

由阶梯型矩阵的基本特征知,当 $1+(n-1)a=0$, 即 $a=\frac{1}{1-n}$ 时, 有 $r(A)=n-1$, 此时有 $r(A^*)=1$ 。

故选 B。

技巧专题 8 线性相关性

例题 1 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 均为 n 维列向量, A 为 $m \times n$ 矩阵, 下列选项正确的是()。

- A. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关
- B. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关
- C. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关
- D. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关

答案 A

解 记 $B=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$, 则 $[A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s]=AB$ 。若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $r(B) < s$, 从而 $r(AB) \leq r(B) < s$, 向量组 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 也线性相关, 故选 A。

例题 2 设向量组 I: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可由向量组 II: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示, 则()。

- A. 当 $r < s$ 时, 向量组 II 必线性相关
- B. 当 $r > s$ 时, 向量组 II 必线性相关
- C. 当 $r < s$ 时, 向量组 I 必线性相关
- D. 当 $r > s$ 时, 向量组 I 必线性相关

答案 D

解 向量组 I: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可由向量组 II: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示, 则 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \leq r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$, 故 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \leq r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) \leq s$ 。当 $r > s$ 时, $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \leq s < r$, 向量组 I 线性相关, 故选 D。

例题 3 已知向量 $\alpha_1=(1, -1, 2, 4)^T, \alpha_2=(0, 3, 1, 2)^T, \alpha_3=(3, 0, 7, 14)^T, \alpha_4=(1, -2, 2, 0)^T, \alpha_5=(2, 1, 5, 10)^T$, 则不是该向量组的极大无关组的是()。

- A. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$
- B. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$
- C. $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$
- D. $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

答案 A

解 因 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 0 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$

故 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)=3$, 且 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4)=r(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4)=r(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)=3$, 即 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4; \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4; \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 这 3 组向量都是该向量组的极大无关组。又 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)=2 < 3$, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 不是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 的极大无关组, 故选 A。

技巧专题 9 分块矩阵的秩

例题 1 设 A, B 为 n 阶实矩阵, 下列说法正确的有()。

$$\textcircled{1} r\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}^T \mathbf{A} \end{bmatrix}\right) = 2r(\mathbf{A}) \quad \textcircled{2} r\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{AB} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}^T \end{bmatrix}\right) = 2r(\mathbf{A})$$

$$\textcircled{3} r\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{BA} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}^T \mathbf{A} \end{bmatrix}\right) = 2r(\mathbf{A}) \quad \textcircled{4} r\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{BA} & \mathbf{A}^T \end{bmatrix}\right) = 2r(\mathbf{A})$$

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

答案 D**解** 本题用到的重要结论:

(1) $\mathbf{AB}$ 的列向量组可由 $\mathbf{A}$ 的列向量组线性表示, 即 $[\mathbf{A}, \mathbf{AB}]$ 可经列变换成为 $[\mathbf{A}, \mathbf{O}]$, 故 $r([\mathbf{A}, \mathbf{AB}]) = r(\mathbf{A})$ 。

(2) $\mathbf{BA}$ 的行向量组可由 $\mathbf{A}$ 的行向量组线性表示, 即 $\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{BA} \end{bmatrix}$ 可经行变换成为 $\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix}$, 故 $r\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{BA} \end{bmatrix}\right) = r(\mathbf{A})$ 。

(3) $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{0}$ 与方程 $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{0}$ 同解, $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 与 $\mathbf{A}$ 行向量组等价, $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 可经过行变换成为 $\mathbf{A}$, 故 $r(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = r(\mathbf{A})$ 。

本题①②③④均正确, 证明如下:

$$\textcircled{1} r\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}^T \mathbf{A} \end{bmatrix}\right) = r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{A}) = 2r(\mathbf{A})。$$

$$\textcircled{2} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{AB} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}^T \end{bmatrix} \text{ 经列变换后可得 } \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}^T \end{bmatrix}, \text{ 故 } r\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{AB} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}^T \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}^T \end{bmatrix}\right) = r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{A}^T) = 2r(\mathbf{A})。$$

$$\textcircled{3} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{BA} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}^T \mathbf{A} \end{bmatrix} \text{ 经行变换可得 } \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{BA} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A} \end{bmatrix}, \text{ 再经行变换可得 } \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A} \end{bmatrix}, \text{ 故 } r\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{BA} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}^T \mathbf{A} \end{bmatrix}\right) = 2r(\mathbf{A})。$$

$$\textcircled{4} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{BA} & \mathbf{A}^T \end{bmatrix} \text{ 经行变换后可得 } \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}^T \end{bmatrix}, \text{ 故 } r\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{BA} & \mathbf{A}^T \end{bmatrix}\right) = r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{A}^T) = 2r(\mathbf{A})。$$

故选 D。

技巧专题 10 线性表示

例题 1 设向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示, 但不能由向量组 (I) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$ 线性表示, 记向量组 (II) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}, \beta$, 则 ()。

- A. α_m 不能由 (I) 线性表示, 也不能由 (II) 线性表示
- B. α_m 不能由 (I) 线性表示, 但可由 (II) 线性表示
- C. α_m 可由 (I) 线性表示, 也可由 (II) 线性表示
- D. α_m 可由 (I) 线性表示, 但不可由 (II) 线性表示

答案 B

解 向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示, 但不能由向量组 (I) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$ 线性表示。这说明若 $r(\mathbf{I}) = r$, 则 $r(\mathbf{I}, \alpha_m) = r + 1$, 且 $r(\mathbf{I}, \alpha_m, \beta) = r(\mathbf{I}, \alpha_m) = r(\mathbf{I}, \beta) = r + 1$, 所以有 $r(\mathbf{I}, \alpha_m) = r + 1 \neq r(\mathbf{I}) = r$, 即 α_m 不能由 (I) 线性表示。

同时有 $r(\mathbf{I}, \beta, \alpha_m) = r + 1 = r(\mathbf{I}, \beta)$, 即 α_m 能由 (II) 线性表示, 故选 B。

例题 2 设矩阵 $\mathbf{A} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$ 经初等行变换变为矩阵 $\mathbf{B} = [\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4]$, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 则 ()。

- A. β_4 不能由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示
 B. β_4 可由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示, 但表示方法不唯一
 C. β_4 可由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示, 且表示方法唯一
 D. β_4 能否由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示, 不能确定

答案 C

解 因矩阵 A 经初等行变换变为矩阵 B , A 的列向量组与 B 的列向量组有相同的线性关系。因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 故 α_4 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 且表示方法唯一。故选 C。

例题 3 若向量组 α, β, γ 线性无关, α, β, δ 线性相关, 则()。

- A. α 必可由 β, γ, δ 线性表示
 B. β 必不可由 α, γ, δ 线性表示
 C. δ 必可由 α, β, γ 线性表示
 D. δ 必不可由 α, β, γ 线性表示

答案 C

解 由向量组 α, β, γ 线性无关, 知 α, β 线性无关。又因 α, β, δ 线性相关, 故 δ 必可由 α, β 线性表示, 因此, δ 必可由 α, β, γ 线性表示, 故选 C。

技巧专题 11 $AB=O$ 的含义

例题 1 设 A, B 为满足 $AB=O$ 的任意两个非零矩阵, 则必有()。

- A. A 的列向量组线性相关, B 的行向量组线性相关
 B. A 的列向量组线性相关, B 的列向量组线性相关
 C. A 的行向量组线性相关, B 的行向量组线性相关
 D. A 的行向量组线性相关, B 的列向量组线性相关

答案 A

解 设 A 按列分块为 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$, 由 $B \neq O$ 知 B 至少有一列非零, 设 B 的第 j 列

$$[b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj}]^T \neq 0, \text{ 则 } AB \text{ 的第 } j \text{ 列为 } [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = 0, \text{ 即 } b_{1j}\alpha_1 + b_{2j}\alpha_2 + \dots + b_{nj}\alpha_n = 0,$$

因为常数 $b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj}$ 不全为零, 故知 A 的列向量组线性相关。再由 $AB=O$ 取转置得 $B^T A^T = O$, 利用已证结果可知 B^T 的列向量组线性相关, 即 B 的行向量组线性相关, 故选 A。

例题 2 已知 $Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$, P 为三阶非零矩阵, 且满足 $PQ=O$, 则()。

- A. $t=6$ 时, P 的秩必为 1
 B. $t=6$ 时, P 的秩必为 2
 C. $t \neq 6$ 时, P 的秩必为 1
 D. $t \neq 6$ 时, P 的秩必为 2

答案 C

解 若 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times s$ 矩阵, $AB=O$, 则 $r(A) + r(B) \leq n$ 。当 $t=6$ 时, 矩阵的三行元素对

应成比例, $r(Q)=1$, 由 $r(P)+r(Q)\leq 3$, 知 $r(P)\leq 2$ 。所以, $r(P)$ 可能是 1, 也有可能是 2, 所以选项 A 和选项 B 都不正确; 当 $t\neq 6$ 时, 矩阵的第一行和第三行元素对应成比例, $r(Q)=2$, 于是由 $r(P)+r(Q)\leq 3$ 得 $r(P)\leq 1$ 。又因 $P\neq O$, 则 $r(P)\geq 1$, 从而 $r(P)=1$ 必成立, 故选 C。

技巧专题 12 向量组等价

例题 1 设矩阵 A, B, C 均为 n 阶矩阵, 若 $AB=C$, 且 B 可逆, 则()。

- A. 矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价
- B. 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价
- C. 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价
- D. 矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价

答案 B

解 由 $C=AB$ 可知 C 的列向量组可以由 A 的列向量组线性表示, 又 B 可逆, 故令 $A=CB^{-1}$, 从而 A 的列向量组也可以由 C 的列向量组线性表示, 故根据向量组等价的定义可知正确选项为 B。

例题 2 设 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{bmatrix}$, 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 等价, 则 λ 的取值范围是()。

- A. $\{0, 1\}$
- B. $\{\lambda \mid \lambda \in \mathbf{R}, \lambda \neq -2\}$
- C. $\{\lambda \mid \lambda \in \mathbf{R}, \lambda \neq -1, \lambda \neq -2\}$
- D. $\{\lambda \mid \lambda \in \mathbf{R}, \lambda \neq -1\}$

答案 C

解 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^3 \end{bmatrix}$
 $\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 0 & (2+\lambda)(1-\lambda) & (\lambda+1)^2(1-\lambda) \end{bmatrix}$, 下面分情况讨论。

① 当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 且 $\lambda \neq -1$ 时, $r([\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]) = r([\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4]) = r([\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4]) = 3$, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 等价。

② 当 $\lambda=1$ 时, $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 可得 $r([\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]) = r([\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4]) = r([\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4]) = 1$, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 等价。

③ 当 $\lambda=-2$ 时, $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, 可得 $r([\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]) = 2 \neq r([\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4]) = 3$, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 不等价。

④ 当 $\lambda=-1$ 时, $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, 可得 $r([\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]) = 3 \neq r([\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4]) = 2$,

故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 不等价。综上, 故选 C。

技巧专题 13 转换为求解方程组

例题 1 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ 。若存在可逆矩阵 P , 使得 $AP=B$ 。

(1) 常数 a 应满足的条件为_____。

(2) 满足条件的所有可逆矩阵 $P =$ _____。

答案

(1) $a = -2$ (2) $\begin{bmatrix} 1+8k_1-4+8k_2 & 8k_3 \\ -2k_1 & 1-2k_2 & -2k_3 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 \end{bmatrix}$, 其中 $k_1, k_2 \in \mathbf{R}, k_3 \neq 0$

解

(1) 由 A 与 B 列等价, 所以 $r(A) = r(B) = 2$ 。

$$\text{即 } \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a = -2.$$

(2) 解方程组 $AP=B$, 其中 $P = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$,

$$\text{增广矩阵 } [A:B] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & : & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & : & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & : & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & : & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{所以 } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{解得 } \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+8k_1 \\ -2k_1 \\ -k_1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{同理, 由 } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ 可解得 } \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+8k_2 \\ 1-2k_2 \\ -k_2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{同理, 由 } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ 可解得 } \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8k_3 \\ -2k_3 \\ -k_3 \end{bmatrix},$$

$$\text{所以 } P = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+8k_1-4+8k_2 & 8k_3 \\ -2k_1 & 1-2k_2 & -2k_3 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 \end{bmatrix}, \text{ 其中 } k_1, k_2 \in \mathbf{R}, k_3 \neq 0.$$

$$\text{检验: 当 } k_3 \neq 0 \text{ 时, 有 } |P| = \begin{vmatrix} 1+8k_1-4+8k_2 & 8k_3 \\ -2k_1 & 1-2k_2 & -2k_3 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 8k_3 \\ 0 & 1 & -2k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 \end{vmatrix} = -k_3 \neq 0, \text{ 所}$$

以 P 可逆。

例题 2 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, B 为三阶矩阵, 则满足 $AB=O$ 的所有矩阵 $B =$ _____。

答案 $\begin{bmatrix} -k & -l & -m \\ -k & -l & -m \\ k & l & m \end{bmatrix}$, 其中 k, l, m 为任意常数

解 将矩阵 B 按列分块, 令 $B = (b_1, b_2, b_3)$, 则 $AB = A(b_1, b_2, b_3) = (Ab_1, Ab_2, Ab_3) = O \Leftrightarrow Ab_1 = O, Ab_2 = O, Ab_3 = O$ 。即 B 的列向量 b_1, b_2, b_3 是齐次线性方程组 $Ax=O$ 的解向量。

对矩阵 A 实施初等行变换, 有

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

其同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$, 即 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 其中 k 为任意常数。

取 $b_1 = \begin{bmatrix} -k \\ -k \\ k \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} -l \\ -l \\ l \end{bmatrix}, b_3 = \begin{bmatrix} -m \\ -m \\ m \end{bmatrix}$, 其中 k, l, m 为任意常数, 则 b_1, b_2, b_3 分别为 $Ax=O$ 的

通解, 所以 $B = \begin{bmatrix} -k & -l & -m \\ -k & -l & -m \\ k & l & m \end{bmatrix}$, 其中 k, l, m 为任意常数。

例题 3 与 $\alpha_1 = (1, 2, 3, -1)^T, \alpha_2 = (0, 1, 1, 2)^T, \alpha_3 = (2, 1, 3, 0)^T$ 都正交的单位向量是 _____。

答案 $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)^T$

解 设 $\beta = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 正交, 由定义有

$$\begin{cases} \alpha_1^T \beta = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ \alpha_2^T \beta = x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ \alpha_3^T \beta = 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{亦即 } Ax=O.$$

对其系数矩阵 A 作初等行变换, 得到 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

可取基础解系 $\alpha = (-1, -1, 1, 0)^T$ 。将其单位化, 即得所求的向量为 $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)^T$ 。

例题 4 要使 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 都是线性方程组 $Ax=O$ 的解, 只要系数矩阵 A 为 ()。

A. $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -6 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\text{C. } \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{D. } \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

答案 A

解 【方法 1】 排除法。

ξ_1, ξ_2 向量对应的分量不成比例, 所以 ξ_1, ξ_2 是 $Ax=0$ 两个线性无关的解, 故 $n-r(A) \geq 2$ 。由 $n=3$ 知 $r(A) \leq 1$ 。再看 A 选项秩为 1; B 和 C 选项秩为 2; 而 D 选项秩为 3, 故选 A。

【方法 2】 反解矩阵法。

$A[\xi_1, \xi_2]=0$, 转置后有 $\begin{bmatrix} \xi_1^T \\ \xi_2^T \end{bmatrix} A^T=0$ 。即 A^T 的列向量均为方程组 $\begin{bmatrix} \xi_1^T \\ \xi_2^T \end{bmatrix} x=0$ 的解。也就是 A 的行向量均为方程组 $\begin{bmatrix} \xi_1^T \\ \xi_2^T \end{bmatrix} x=0$ 的解。系数矩阵 $\begin{bmatrix} \xi_1^T \\ \xi_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \xi_1^T \\ \xi_2^T \end{bmatrix} x=0$ 对应的同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$, 可取 $\alpha = (-2, 1, 1)^T$ 。方程组的通解为 $k\alpha$, 其中 k 为任意常数。所以矩阵 A 的行向量均可用 $k\alpha$ 线性表示, 故选 A。

说明: 可以在解答题中使用方法 2。

技巧专题 14 $AX=B$ 的求解

例题 1 设 $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ a & -1 \\ a^2 & -1 \end{bmatrix}$, 如果矩阵方程 $AX=B$ 有无穷多解, 则 $a=(\quad)$ 。

A. 0

B. 1

C. -1

D. 2

答案 B

解 如果矩阵方程 $AX=B$ 有解, 但解不唯一, 则 $r(A)=r(A|B)<3$ 。

$$\begin{aligned} [A|B] &= \left[\begin{array}{ccc|cc} a & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & a & a^2 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & a & a^2 & -1 \\ 1 & a & 1 & a & -1 \\ a & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & a & a^2 & -1 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-a^2 & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a^3 & a-1 \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & a & a^2 & -1 \\ 0 & a-1 & 1-a & a(1-a) & 0 \\ 0 & 0 & (a-1)(a+2) & (a-1)(a+1)^2 & 1-a \end{array} \right], \text{ 于是 } a=1, \text{ 故选 B.} \end{aligned}$$

例题 2 若 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$, 则 $X = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案 $\begin{bmatrix} 2-C_1 & 3-C_2 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix}$, 其中 C_1, C_2 为任意常数 (答案形式不唯一)

解 【方法 1】 待定系数法。

由 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$, 故矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ 不可逆, 用解方程组的方法求 X 。由所给方程可以看到 X 为 2×2

的矩阵,因而可设 $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix}$, 于是有

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \quad ①$$

上述方程可化为线性非齐次方程求解。事实上,由方程①得到

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$$

用初等行变换,易求得 $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 6 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$, 对应齐次方程组的基础解系为

$\alpha_1 = (-1, 1, 0, 0)^T, \alpha_2 = (0, 0, -1, 1)^T$, 其特解为 $\eta = (2, 0, 3, 0)^T$, 则其通解为 $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = c_1(-1, 1, 0, 0)^T + c_2(0, 0, -1, 1)^T + (2, 0, 3, 0)^T = (2 - c_1, c_1, 3 - c_2, c_2)^T$ 。

故 $x_1 = 2 - c_1, x_2 = c_1, x_3 = 3 - c_2, x_4 = c_2$, 于是所求矩阵为 $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - c_1 & 3 - c_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix}$,

其中 c_1, c_2 为任意常数。

【方法 2】 利用 $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ 求解。

原方程化为 $\mathbf{A}[x_1, x_2] = [\beta_1, \beta_2]$ 。增广矩阵为 $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 。

所以 $\mathbf{Ax}_1 = \beta_1$ 对应的同解方程为 $t_1 + t_2 = 2$, 通解为 $k_1(1, -1)^T + (2, 0)^T = (2 + k_1, -k_1)^T$;

同理 $\mathbf{Ax}_2 = \beta_2$ 对应的同解方程为 $t_1 + t_2 = 3$, 通解为 $k_2(1, -1)^T + (3, 0)^T = (3 + k_2, -k_2)^T$ 。

所以 $\mathbf{X} = [x_1, x_2] = \begin{bmatrix} 2 + k_1 & 3 + k_2 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix}$, 其中 k_1, k_2 为任意常数。

技巧专题 15 伴随矩阵的基础解系

例题 1 设 $\mathbf{A} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$ 是四阶矩阵, $\mathbf{A}^*$ 为 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵。若 $(1, 0, 1, 0)^T$ 是方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的一个基础解系, 则 $\mathbf{A}^* \mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的基础解系可为 ()。

A. α_1, α_3

B. α_1, α_2

C. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

D. $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

答案 D

解 由于 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的基础解系中仅有一个解向量, 所以 $n - r(\mathbf{A}) = 1$, 由 $n = 4$, 知 $r(\mathbf{A}) = 3$ 。

由于 $r(\mathbf{A}^*) = \begin{cases} n, r(\mathbf{A}) = n \\ 1, r(\mathbf{A}) = n - 1 \\ 0, r(\mathbf{A}) \text{ 取其他值} \end{cases}$, 所以 $r(\mathbf{A}^*) = 1$ 。

由 $\mathbf{A}^* \mathbf{A} = |\mathbf{A}| \mathbf{E} = \mathbf{0}$ 知, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 都是 $\mathbf{A}^* \mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解, 且 $\mathbf{A}^* \mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的极大线性无关组就是其

基础解系, 又 $\mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha_1 + \alpha_3 = \mathbf{0}$, 所以 α_1, α_3 线性相关, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 或 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

为极大无关组, 故选 D。

技巧专题 16 同解方程

例题 1 若四元线性齐次方程组 (I) $\begin{cases} x_1 + x_2 + ax_3 + bx_4 = 0 \\ x_2 + cx_3 + dx_4 = 0 \end{cases}$ 与方程组 (II) 有同解, 其中方程组 (II)

的通解为 $k_1(0, 1, 1, 0)^T, k_2(-1, 2, 2, 1)^T$, 则 a, b, c, d 满足_____。

答案 $a=c=-1, b=1, d=0$

解 方程组 (I) 的系数矩阵为 A , 显然 $r(A)=2$, 基础解系中解向量有 $n-r(A)=4-2=2$ 个。因为方程组 (I) (II) 同解, 所以 $(0, 1, 1, 0)^T, (-1, 2, 2, 1)^T$ 必为 (I) 的解向量。代入方程组可得 $a=c=-1, b=1, d=0$ 。

例题 2 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{bmatrix}$, 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T(A^T A)x$ 的秩为 2, 则方程 $Ax=0$ 的通

解为_____。

答案 $k(1, 1, -1)^T, k$ 为任意实数

解 $A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & a & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1-a \\ 0 & 1+a^2 & 1-a \\ 1-a & 1-a & 3+a^2 \end{bmatrix}$ 。因为二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T(A^T A)x$ 的秩为 2, 即 $A^T A$ 的秩为 2, 所以 $|A^T A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1-a \\ 0 & 1+a^2 & 1-a \\ 1-a & 1-a & 3+a^2 \end{vmatrix} = (a^2+3)(a+1)^2 = 0$, 由此可得 $a=-1$ 。求解 $Ax=0$, 可得 $\xi = (1, 1, -1)^T$, 通解为 $k(1, 1, -1)^T, k$ 为任意实数。

例题 3 设 A, B 均为 n 阶矩阵, 如果方程组 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解, 则()。

- A. 方程组 $\begin{bmatrix} A & O \\ E & B \end{bmatrix} y = 0$ 只有零解
- B. 方程组 $\begin{bmatrix} E & A \\ O & AB \end{bmatrix} y = 0$ 只有零解
- C. 方程组 $\begin{bmatrix} A & B \\ O & B \end{bmatrix} y = 0$ 与 $\begin{bmatrix} B & A \\ O & A \end{bmatrix} y = 0$ 同解
- D. 方程组 $\begin{bmatrix} AB & B \\ O & A \end{bmatrix} y = 0$ 与 $\begin{bmatrix} BA & A \\ O & B \end{bmatrix} y = 0$ 同解

答案 C

解 方程组 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解, 意味着对应系数矩阵行等价, 所以矩阵 A 可经过行变换化为 B , 矩阵 B 也可经过行变换化为 A 。

对于 C 选项: 矩阵 $\begin{bmatrix} A & B \\ O & B \end{bmatrix}$ 可经过行变换化为 $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$, 进一步行变换为 $\begin{bmatrix} B & O \\ O & A \end{bmatrix}$, 再进一步行变换为 $\begin{bmatrix} B & A \\ O & A \end{bmatrix}$, 故选 C。

技巧专题 17 线性无关解向量的个数

例题 1 设 A 是三阶非零矩阵, 满足 $A^2 = O$, 则线性非齐次方程组 $Ax = b$ 的线性无关解向量最多有()。

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

答案 C

解 A 是 3×3 矩阵, $A^2 = A \cdot A = O$, $r(A) + r(A) = 2r(A) \leq 3$, 得 $r(A) \leq \frac{3}{2}$ 。又 $A \neq O$, $r(A) \geq 1$, 从而 $r(A) = 1$ 。齐次方程组 $Ax = O$ 基础解系中线性无关解向量有 $n - 1 = 3 - 1 = 2$ 个, 非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的线性无关解向量最多有 3 个, 故选 C。

技巧专题 18 构造解

例题 1 设三阶矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 有 3 个不同的特征值, 且 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$, $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, 则方程组 $Ax = \beta$ 的通解为 _____。

答案 $k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} (k \in \mathbf{R})$

解 首先说明矩阵 A 的秩为 2。由 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$ 可得 $\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = O$, 即 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 因此, $|A| = |\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3| = 0$, 即 A 的特征值必有 0。又因为 A 有 3 个不同的特征值, 则 3 个特征值中只有 1 个 0, 另外两个非 0。且由于 A 必可对角化, 则可设其对角矩阵为 $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$ 。

所以 $r(A) = r(\Lambda) = 2$ 。

再求非齐次方程组的解。

由 $r(A) = 2$, 知 $3 - r(A) = 1$, 即 $Ax = O$ 的基础解系只有 1 个解向量, 由 $\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = O$ 可得

$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = O$, 则 $Ax = O$ 的基础解系为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ 。又 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, 即

$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \beta$, 则 $Ax = \beta$ 的一个特解为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 。综上, $Ax = \beta$ 的通解为 $k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, k \in \mathbf{R}$ 。

例题 2 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的 3 个不同的解, 那么向量 $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3, 2(\alpha_2 - \alpha_1), \alpha_1 - 3\alpha_2 + 2\alpha_3$ 中是导出组 $Ax = O$ 的解向量的共有()。

A. 4 个

B. 3 个

C. 2 个

D. 1 个

答案 A

解 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的 3 个不同的解。若 $\alpha = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \lambda_3 \alpha_3$ 的系数和 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, 则 α 为 $Ax = O$ 的解向量。因 $1 - 1 = 0, 1 + 1 - 2 = 0, 2 - 2 = 0, 1 - 3 + 2 = 0$, 故上述 4 个向量均是 $Ax = O$ 的解向量, 故选 A。

例题 3 设 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 都是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的解向量, 考虑以下向量:

- ① $3\beta_1 - 2\beta_2$ ② $\beta_2 - \beta_3$ ③ $\frac{1}{2}\beta_1 + \frac{1}{3}\beta_2 + \frac{1}{6}\beta_3$
 ④ $\beta_1 + \beta_2 - 2\beta_3$ ⑤ $\beta_1 - 3\beta_2 + 2\beta_3$ ⑥ $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$

其中齐次线性方程组 $Ax=0$ 与非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解向量的个数分别为()。

- A. 2 个, 2 个 B. 2 个, 3 个 C. 3 个, 2 个 D. 3 个, 3 个

答案 C

解 因 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 都是 $Ax=b$ 的解, 故有 $A\beta_1=b, A\beta_2=b, A\beta_3=b$ 。

设 $\beta = \lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + \lambda_3\beta_3$, 则 $A\beta = A(\lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + \lambda_3\beta_3) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)b$ 。

(1) $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ 时, $\beta = \lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + \lambda_3\beta_3$ 是 $Ax=0$ 的解。

(2) $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ 时, $\beta = \lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + \lambda_3\beta_3$ 是 $Ax=b$ 的解。

②④⑤满足 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, 对应的向量为 $Ax=0$ 的解。

①③满足 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, 对应的向量为 $Ax=b$ 的解。

故选 C。

注意: 本题重要结论: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为非齐次方程组 $Ax=\beta$ 的解, $\alpha = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \dots + \lambda_n\alpha_n$, 则

- (1) $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ 时, α 为 $Ax=0$ 的解; (2) $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ 时, α 为 $Ax=\beta$ 的解。

技巧专题 19 隐含的特征值

例题 1 设四阶方阵 $A=[a_{ij}]$ 的各行元素的秩之和为 4, 方程 $Ax=x+4\beta$ 有通解 $2\beta+k\alpha$ (k 为任意常数), 且 $|A+E|=120$, 若 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 则 $\sum_{i=1}^4 A_{ii} =$ _____。

答案 50

解 $A=[a_{ij}]$ 的各行元素的秩之和为 4, 说明矩阵 A 有特征值 4。方程 $Ax=x+4\beta$ 有通解 $2\beta+k\alpha$ (k 为任意常数), 说明 $(A-E)x=4\beta$ 有通解 $2\beta+k\alpha$, 所以 $(A-E)\alpha=0$, 且 $(A-E)2\beta=4\beta \Rightarrow (A-E)\beta=2\beta$, 即矩阵 $A-E$ 有特征值 0 和 2。所以矩阵 A 有特征值 1 和 3, 设矩阵 A 的另一个特征值为 a , $A+E$ 的所有特征值为 $5, 2, 4, a+1$, 又因为 $|A+E|=120$, 所以 $5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot (a+1)=120$, 解得 $a=2$, 所以矩阵 A 的四个特征值为 $1, 2, 3, 4$ 。若矩阵 A 存在非零特征值 λ , 则矩阵 A^* 存在特征值 $\frac{|A|}{\lambda}$ 。

矩阵 A 的特征值为 $1, 2, 3, 4$, 所以, $|A|=24$, 矩阵 A^* 对应的特征值为 $24, 12, 8, 6$ 。 $\sum_{i=1}^4 A_{ii}$ 为伴随矩阵 A^* 的对角线之和, 其大小等于矩阵 A^* 的特征值之和, 所以有 $\sum_{i=1}^4 A_{ii} = 6+8+12+24=50$ 。

例题 2 设 A 是三阶实对称矩阵, E 是三阶单位矩阵, 若 $A^2+A=2E$, 且 $|A|=4$, 则二次型 $x^T Ax$ 的规范形为()。

A. $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

B. $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

C. $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

D. $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

答案 C

解 设 λ 是 A 的特征值, 根据 $A^2 + A = 2E$ 得 $\lambda^2 + \lambda = 2$, 解得 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = -2$ 。又因为 $|A| = 4$, 所以 A 的特征值为 $1, -2, -2$, 根据二次型的惯性定理, $x^T A x$ 的规范形为 $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$, 故选 C。

例题 3 设二阶矩阵 A 有两个不同的特征值, α_1, α_2 是 A 的线性无关的特征向量, 且满足 $A^2(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2$, 则 $|A| =$ _____。

答案 -1

解 设 α_1, α_2 对应的特征值分别是 λ_1, λ_2 , 则 $A^2(\alpha_1 + \alpha_2) = A^2\alpha_1 + A^2\alpha_2 = \lambda_1^2\alpha_1 + \lambda_2^2\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_2 \Rightarrow (\lambda_1^2 - 1)\alpha_1 + (\lambda_2^2 - 1)\alpha_2 = 0$ 。由于 α_1, α_2 线性无关, 所以 $\lambda_1^2 = 1, \lambda_2^2 = 1$, 从而 A 的两个不同的特征值为 $-1, 1$, 于是 $|A| = -1 \times 1 = -1$ 。

技巧专题 20 相似求特征值

例题 1 设 A 为三阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性无关的三维列向量, 且满足 $A\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, A\alpha_2 = 2\alpha_2 + \alpha_3, A\alpha_3 = 2\alpha_2 + 3\alpha_3$ 则矩阵 A 的 3 个特征值为 _____。

答案 $1, 1, 4$

解 $A[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, 可知 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ 。由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性无关的三维列向量, 可知矩阵 $C = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 可逆, 所以 $C^{-1}AC = B$, 即矩阵 A 与 B 相似, 由此可得矩阵 A 与 B 有相同的特征值。由 $|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 2 & -2 \\ -1 & -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 4) = 0$, 得矩阵 B 的特征值, 即矩阵 A 的特征值: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$ 。

技巧专题 21 反求 A

例题 1 设三阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 对应于 λ_1 的特征向量为 $\xi_1 = (0, 1, 1)^T$, 则 $A =$ _____。

答案 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

解 设对应于 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 的特征向量为 $\xi = [x_1, x_2, x_3]^T$, 因为 A 为实对称矩阵, 且实对称矩阵的不同特征值所对应的特征向量相互正交, 故 $\xi^T \xi_1 = 0$, 即 $x_2 + x_3 = 0$ 。解得 $\xi_2 = (1, 0, 0)^T, \xi_3 = (0, 1, -1)^T$ 。

于是有 $A[\xi_1, \xi_2, \xi_3] = [\lambda_1 \xi_1, \lambda_2 \xi_2, \lambda_3 \xi_3]$, 所以 $A = (\lambda_1 \xi_1, \lambda_2 \xi_2, \lambda_3 \xi_3)(\xi_1, \xi_2, \xi_3)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ 。

技巧专题 22 构造 $AP = PB$

例题 1 已知三阶矩阵 A 与三维列向量 x , 若向量组 x, Ax, A^2x 线性无关, 且 $A^3x = 3Ax - 2A^2x$, 则

矩阵 A 的属于特征值 $\lambda = -3$ 的特征向量是()。

A. x

B. $A^2x + 3Ax$

C. $A^2x - Ax$

D. $A^2x + 2Ax - 3x$

答案 C

解 【方法 1】 利用 $AP = PB, A(x, Ax, A^2x) = (Ax, A^2x, A^3x) = (Ax, A^2x, 3Ax - 2A^2x) = (x, Ax,$

$A^2x) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ 。记 $P = (x, Ax, A^2x), B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, 由 x, Ax, A^2x 线性无关可知 $P = (x,$

$Ax, A^2x)$ 可逆。所以, 存在可逆矩阵 P , 使得 $AP = PB \Rightarrow A = PBP^{-1}$, 即矩阵 A, B 相似。

(1) 先求矩阵 B 的属于特征值 $\lambda = -3$ 的特征向量 $B + 3E = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, (B + 3E)x = 0$

的同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 。可取 $\alpha = (0, -1, 1)$ 为方程 $(B + 3E)x = 0$ 的解, 同时为矩阵 B 的属于特征值 $\lambda = -3$ 的特征向量。

(2) 根据相似关系求解矩阵 A 的属于特征值 $\lambda = -3$ 的特征向量。若 α 为矩阵 B 属于特征值 λ 对应的特征向量, 则必有 $B\alpha = \lambda\alpha$ 。又因为 $A = PBP^{-1}$, 所以 $A(P\alpha) = PBP^{-1}(P\alpha) = PB\alpha = P(\lambda\alpha) =$

$\lambda(P\alpha)$ 。此时有 $P\alpha$ 为矩阵 A 属于特征值 λ 对应的特征向量, 故向量 $P\alpha = (x, Ax, A^2x) \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = A^2x - Ax$

Ax 为矩阵 A 的属于特征值 $\lambda = -3$ 的特征向量。

故选 C。

【方法 2】 利用特征值与特征向量的定义。

由 $A^3x + 2A^2x - 3Ax = A(A^2 + 2A - 3E)x = A(A + 3E)(A - E)x = 0$ 得到 $A(A + 3E)(A - E)x = 0$, 即 $A(A - E)x = -3(A - E)x$ 。因 x, Ax, A^2x 线性无关, 故 Ax, A^2x 线性无关, 所以 $A^2x - Ax = A(A - E)x \neq 0$ 。则由 $A(A^2x - Ax) = -3(A^2x - Ax)$ 知, A 的属于特征值 $\lambda = -3$ 的特征向量为 $A^2x - Ax = A(A - E)x$, 故选 C。

例题 2 已知三阶矩阵 A 与三维向量 x , 使得向量组 x, Ax, A^2x 线性无关, 且满足 $A^3x = 3Ax - 2A^2x$, 则 $|A^2 + 3A + 2E| =$ _____。

答案 24

解 由于 $AP = PB$, 即 $A[x, Ax, A^2x] = [Ax, A^2x, A^3x] = [Ax, A^2x, 3Ax - 2A^2x] = [x, Ax, A^2x] \cdot$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, 所以令 $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ 。则 $A \sim B$, 那么 $A + E \sim B + E$, 从而 $|A + E| = |B + E| =$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$ 。同理 $|A + 2E| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -6$ 。所以 $|A^2 + 3A + 2E| = |A + 2E| \cdot |A + E| = 24$ 。

技巧专题 23 二次型最大值

例题 1 已知 $[1, -1, 0]^T$ 是二次型 $x^T Ax = ax_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2bx_2x_3$ 的矩阵 A 的特征向

量,则 $\mathbf{x}^T \mathbf{x} = 2$ 时, $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 的最大值为()。

A. $\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$

C. 2

D. 4

答案 B

解 设 $[1, -1, 0]^T$ 是 λ 所对应的特征向量, 则 $\begin{bmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & 0 & b \\ 1 & b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 。于是 $a+1=\lambda, -1=-\lambda$,

$$1-b=0, \text{ 从而 } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}。$$

由 $|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 3) = 0$, 求得 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \sqrt{3}, \lambda_3 = -\sqrt{3}$ 。在 $\mathbf{x}^T \mathbf{x} = 2$ 条件下的最大值即为 $\lambda_{\max} \cdot 2 = \sqrt{3} \cdot 2 = 2\sqrt{3}$ 。故选 B。

补充: 所求的正交变换为 $\mathbf{x} = \mathbf{C} \mathbf{y}$, 它将二次型化为标准形, 即有 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = y_1^2 + \sqrt{3} y_2^2 - \sqrt{3} y_3^2$ 。

因为 $\mathbf{x}^T \mathbf{x} = [\mathbf{C} \mathbf{y}]^T [\mathbf{C} \mathbf{y}] = \mathbf{y}^T \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{y}$, 求 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在条件 $\mathbf{x}^T \mathbf{x} = 2$ 下的最大值, 也就是求 $f(y_1, y_2, y_3)$ 在条件 $\mathbf{y}^T \mathbf{y} = 2$ 下的最大值, 由于 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = y_1^2 + \sqrt{3} y_2^2 - \sqrt{3} y_3^2 \leq \sqrt{3} (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = \sqrt{3} \mathbf{y}^T \mathbf{y}$, 所以 f 在条件 $\mathbf{x}^T \mathbf{x} = 2$ 下的最大值是 $2\sqrt{3}$ 。

技巧专题 24 特征对应关系

例题 1 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换为 $\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{y}$ 下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 其中 $\mathbf{P} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ 。若 $\mathbf{Q} = [\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2]$, 则 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{y}$ 下的标准形为()。

A. $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$ B. $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ C. $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$ D. $2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

答案 A

解 【方法 1】 由特征向量与特征值的对应关系可快速得出结果。本题中二次型矩阵设为 $\mathbf{A}$, 则有

$$\mathbf{A}[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}, \text{ 所以 } \mathbf{A}[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2] = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2] \begin{bmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \text{ 所以 } \mathbf{A}[\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2] = [\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2] \begin{bmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}。$$

$f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{y}$ 下的标准形为 $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$, 故选 A。

【方法 2】 由 $\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{y}$, 故有 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^T (\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}) \mathbf{y} = 2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 且 $\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 。

由已知可得 $\mathbf{Q} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{P} \mathbf{C}$, 故有 $\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{C}^T (\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}) \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 所以有 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^T (\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q}) \mathbf{y} = 2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$, 故选 A。

技巧专题 25 可对角化矩阵

例题 1 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & y \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$, 已知 A 可对角化, $\lambda = 2$ 是 A 的二重特征值, 则 A 的所有特征值为_____。

答案 2, 2, 6

解 因 A 可对角化, 说明矩阵 A 有 3 个线性无关特征向量, $\lambda = 2$ 是二重特征值, 故对应的线性无关特

征向量有 2 个, $r(2E - A) = 1$, 将 $2E - A$ 做初等行变换, 得 $2E - A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -x & -2 & -y \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2-x & 0 & -2-y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 。由 $r(2E - A) = 1$ 得 $x = 2, y = -2$, 从而 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ 。 A 的另一个

特征值为 $\lambda_3 = \sum_{i=1}^3 a_{ii} - \lambda_1 - \lambda_2 = 10 - 4 = 6$ 。

例题 2 设三阶矩阵 A 满足 $A\alpha_i = i\alpha_i (i=1, 2, 3)$, 其中列向量 $\alpha_1 = (1, 2, 2)^T, \alpha_2 = (2, -2, 1)^T, \alpha_3 = (-2, -1, 2)^T$, 则矩阵 $A =$ _____。

答案 $\begin{bmatrix} \frac{7}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 2 \end{bmatrix}$

解 $A[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [\alpha_1, 2\alpha_2, 3\alpha_3]$ 。

由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 知矩阵 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 可逆, 故 $A = [\alpha_1, 2\alpha_2, 3\alpha_3][\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^{-1}$ 。

而 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$,

故 $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 2 & -4 & -3 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 2 \end{bmatrix}$ 。

技巧专题 26 二次型为 0

例题 1 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + 2x_3)^2$, 则 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解为_____。

答案 $x = k[-2, -1, 1]^T, k$ 为任意常数

解 由 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 可得 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ 。对该齐次线性方程组的系数矩阵做初等行变换得

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

$f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 有非零解 $\mathbf{x} = k[-2, -1, 1]^T$, k 为任意常数。

例题 2 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 ijx_i x_j$, 则 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的所有解为_____。

答案 $k_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 其中 k_1, k_2 为任意常数(解不唯一)

解 【方法 1】 配方法。二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 ijx_i x_j = x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 12x_2x_3$, 配方后得 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3)^2$ 。令 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3)^2 = 0 \Rightarrow x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ 。解为 $k_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 其中 k_1, k_2 为任意常数。

【方法 2】 正交变换法。

$$\text{二次型矩阵为 } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}, |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -3 \\ -2 & \lambda - 4 & -6 \\ -3 & -6 & \lambda - 9 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 14) = 0, \text{特征值为 } \lambda_1 =$$

$$14, \lambda_2 = \lambda_3 = 0。$$

当 $\lambda = 14$ 时, $(\lambda E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的基础解系为 $\alpha_1 = [1, 2, 3]^T$; 当 $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ 时, $(\lambda E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的基础解系为 $\alpha_2 = [-2, 1, 0]^T, \alpha_3 = [-3, -6, 5]^T$ 。 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 已经正交, 单位化得 $\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}[1, 2, 3]^T, \beta_2 =$

$\frac{1}{\sqrt{5}}[-2, 1, 0]^T, \beta_3 = \frac{1}{\sqrt{70}}[-3, -6, 5]^T$, 令正交矩阵 $Q = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]$, 经过正交变换 $\mathbf{x} = Q\mathbf{y}$, 二次型为

$f(y_1, y_2, y_3) = 14y_1^2$ 。又因为 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, 所以有 $f(y_1, y_2, y_3) = 14y_1^2 = 0 \Rightarrow y_1 = 0, y_2 = k_1,$

$$y_3 = k_2 \text{ 其中 } k_1, k_2 \text{ 为任意常数。又因为 } \mathbf{x} = Q\mathbf{y}, \text{ 所以 } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-3}{\sqrt{70}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-6}{\sqrt{70}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{70}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}, \text{ 所以 } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} =$$

$$k_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ 其中 } k_1, k_2 \text{ 为任意常数。}$$

【说明】

① 两种方法得出的结果等价。

② 本题【方法 1】简单。但如果已知正交变换矩阵与标准形, 则【方法 2】更快。

技巧专题 27 已知 A^2 求 A

例题 1 若可逆矩阵 A 满足 $A^T A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, 则 $A =$ _____。

答案 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix}$ (不唯一)

解 【方法 1】可逆变换法。 $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T A^T A \mathbf{x} = x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_1x_2$ 。

配方后得

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 + (\sqrt{6}x_3)^2 \quad ①$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T A^T A \mathbf{x} = (\mathbf{Ax})^T A \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{y} = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \quad ②$$

联合 ① ② 可得 $\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = \sqrt{6}x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ (也就是 $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$), 所以 $A =$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix}$ 。值得注意的是, 矩阵 A 并不唯一。例如: 若令 $\begin{cases} y_1 = x_2 \\ y_2 = x_1 - x_2 \\ y_3 = \sqrt{6}x_3 \end{cases}$, 则可得出 $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, 此时 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix}$ 。

【方法 2】行列向量法。

记 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = D$, 则其对应的二次型为 $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T D \mathbf{x} = x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_1x_2 =$

$$(x_1 - x_2)^2 + x_2^2 + (\sqrt{6}x_3)^2 = (x_1 - x_2, x_2, \sqrt{6}x_3) \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 \\ \sqrt{6}x_3 \end{bmatrix} \quad (\text{分解为行列向量点乘}) = (x_1, x_2, x_3) \cdot$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \stackrel{\text{记}}{=} [x_1, x_2, x_3] A^T A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \text{其中 } D = A^T A, A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix}。$$

技巧专题 28 向量二次型

例题 1 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$, 记 $\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$,

$\beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$, 若 α, β 正交且均为单位向量, 则二次型 f 在正交变换下的标准形为_____。

答案 $2y_1^2 + y_2^2$

解 $f = (2a_1^2 + b_1^2)x_1^2 + (2a_2^2 + b_2^2)x_2^2 + (2a_3^2 + b_3^2)x_3^2 + (4a_1a_2 + 2b_1b_2)x_1x_2 + (4a_1a_3 + 2b_1b_3)x_1x_3 + (4a_2a_3 + 2b_2b_3)x_2x_3$, 则 f 的矩阵为

$$\begin{bmatrix} 2a_1^2 + b_1^2 & 2a_1a_2 + b_1b_2 & 2a_1a_3 + b_1b_3 \\ 2a_1a_2 + b_1b_2 & 2a_2^2 + b_2^2 & 2a_2a_3 + b_2b_3 \\ 2a_1a_3 + b_1b_3 & 2a_2a_3 + b_2b_3 & 2a_3^2 + b_3^2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1^2 & b_1b_2 & b_1b_3 \\ b_1b_2 & b_2^2 & b_2b_3 \\ b_1b_3 & b_2b_3 & b_3^2 \end{bmatrix} =$$

$2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$. 令 $A = 2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$, 则 $A\alpha = 2\alpha\alpha^T\alpha + \beta\beta^T\alpha = 2\alpha$, $A\beta = 2\alpha\alpha^T\beta + \beta\beta^T\beta = \beta$, 则 1, 2 均为 A 的特征值, 又由于 $r(A) = r(2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T) \leq r(\alpha\alpha^T) + r(\beta\beta^T) = 2$, 故 0 为 A 的特征值, 则三阶矩阵 A 的特征值为 2, 1, 0, 故 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$. (注: 快速求出 $A = 2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$ 的方法. $f = 2x^T\alpha\alpha^Tx + x^T\beta\beta^Tx = x^T(2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T)x$, 所以 $A = 2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$)

例题 2 设 $\alpha = [a_1, a_2, a_3]^T$, $\beta = [b_1, b_2, b_3]^T$, α, β 线性无关, 则二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)$ 的规范形为 ().

A. y_1^2

B. $y_1^2 + y_2^2$

C. $y_1^2 - y_2^2$

D. $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

答案 C

解 由于 α, β 线性无关, 则 α, β 不成比例, 不妨设 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, 令 $\begin{cases} t_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \\ t_2 = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 \\ t_3 = x_3 \end{cases}$, 则此变换为可逆变换, 得 $f = t_1t_2$, 有 3 种方法求解规范形。

【方法 1】 特征值法。对应二次型矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - \frac{1}{4}) = 0$, 解得 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = \pm \frac{1}{2}$, 所以规范形为 $y_1^2 - y_2^2$. 故选 C。

【方法 2】 配方法。令 $\begin{cases} t_1 = y_1 + y_2 \\ t_2 = y_1 - y_2 \\ t_3 = y_3 \end{cases}$, 代入 $f = t_1t_2$, 得 $f = y_1^2 - y_2^2$. 故选 C。

【方法 3】 (仅数学一) 双曲柱面法。 $f = t_1t_2 = 1$ 所对应的二次曲面为双曲柱面, 所以规范形为 $y_1^2 - y_2^2$. 故选 C。

补充: $xy = 1$ 的平面图形为焦点在直线 $y = x$ 上的双曲线, 在三维空间中为双曲柱面。

技巧专题 29 矩阵的合同、相似与等价

例题 1 设 A, B 均为 n 阶矩阵, A 可逆且 $A \sim B$ (相似), 则下列命题中正确的有 () 个。

① $AB \sim BA$

② $A^2 \sim B^2$

③ $A^T \sim B^T$

④ $A^{-1} \sim B^{-1}$

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

答案 D

解 由 $A \sim B$ 可知, 存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$, 故 $P^{-1}A^2P = B^2$, $P^T A^T (P^T)^{-1} = B^T$, $P^{-1}A^{-1}P = B^{-1}$, 所以 $A^2 \sim B^2$, $A^T \sim B^T$, $A^{-1} \sim B^{-1}$. 又由 A 可逆, 可知 $A^{-1}(AB)A = BA$, 故 $AB \sim BA$, 正确的有 4 个, 故选 D.

例题 2 下列矩阵中, 与 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 合同的矩阵是().

A. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

答案 B

解 重要原理: 实对称矩阵 A, B 合同等价于 A, B 的二次型具有相同的正负惯性指数.

因为 $f = \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_3^2 = (x_1 + x_2)^2 - x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 所以与 A 合同的矩阵是选项 B 中的矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. 故选 B.

注意: 本题依然可以用特征值的正负情况来判断.

例题 3 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 A 与 B ().

A. 合同且相似

B. 合同, 但不相似

C. 不合同, 但相似

D. 既不合同也不相似

答案 B

解 由 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 2 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 3)^2$, 可得 $\lambda_1 = \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 0$.

所以 A 的特征值为 3, 3, 0, 而 B 的特征值为 1, 1, 0, 所以 A 与 B 不相似, 但是 A 与 B 的秩均为 2, 且正惯性指数都为 2, 所以 A 与 B 合同, 故选 B.

例题 4 已知 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 则 A 与 B ().

A. 等价, 不相似, 合同

B. 不等价, 不相似, 不合同

C. 等价, 相似, 不合同

D. 等价, 相似, 合同

答案 A

解 由于 $r(A) = 3, r(B) = 3$, 所以 A 与 B 等价.

A 与 B 均为实对称矩阵, 若特征值相同, 则 A 与 B 相似, 否则 A 与 B 不相似. 由于

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1) \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-3)(\lambda-1),$$

$$|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2) \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2) [\lambda - (1+\sqrt{2})] [\lambda - (1-\sqrt{2})],$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_A = -1, 3, 1$, B 的特征值为 $\lambda_B = 2, 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}$, 因此 A 与 B 不相似。

由于 A 与 B 的正负惯性指数是相等的, 正惯性指数都为 2, 负惯性指数都为 1, 所以 A 与 B 合同, 故选 A。

例题 5 A 是 n 阶实对称矩阵, 则 A 合同于矩阵 B 的充分必要条件是()。

A. $r(A) = r(B)$

B. A 与 B 的正负惯性指数相等

C. A 与 B 都是正定矩阵

D. B 是实对称矩阵

答案 B

解 逐项分析。

选项 A 错误。如 $A = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$, 有 $r(A) = r(B)$, 但明显不合同。

选项 B 正确。 A 与 B 的正负惯性指数相等是对称矩阵合同的充分必要条件。

选项 C 错误。只是充分条件, 但不必要。如 $A = \begin{bmatrix} -1 & \\ & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$ 合同, 但不正定。

选项 D 错误。只是必要条件。对称矩阵必定合同于对称矩阵。但不是所有对称矩阵都合同。

如 $A = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$ 都是对称矩阵, 但明显不合同, 故选 B。

例题 6 设 A 为 n 阶矩阵, 将 A 的 1, 2 行互换后再将 1, 2 列互换得到矩阵 B , 则下列说法正确的有() 个。

① A 与 B 等价

② A 与 B 相似

③ A 与 B 合同

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

答案 D

解 由题设知 $B = E_{12} A E_{12}$, 而 E_{12} 可逆, 且 $E_{12}^{-1} = E_{12}$, 又 $E_{12}^T = E_{12}$, 故存在可逆矩阵 P 使 $P^{-1} A P = B$, 即 $P^T A P = B$ 。由定义知 A 与 B 相似且合同, 由矩阵等价的定义知它们也等价, 故选 D。

技巧专题 30 可逆变换

例题 1 若二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 经过可逆变换化为 $2y_1^2 + y_2^2 + 2y_1y_2$, 则该二次型经正交变换可得标准形为_____。

答案 $2z_1^2 + 3z_2^2$

解 二次型矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{bmatrix}$, 经过一次可逆变换后化成的二次型矩阵为 $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 显

然 A 合同于 B , B 的特征值为 $\lambda_1=0, \lambda_{2,3}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ (2 正 1 零)。

下面求 A 的特征值。

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - a & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - a + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - a) \begin{vmatrix} \lambda - a & 1 \\ 1 & \lambda - a + 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \lambda - a \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - a)[(\lambda - a)(\lambda - a + 1) - 1] - [0 + (\lambda - a)] \\ &= (\lambda - a)[(\lambda - a)(\lambda - a + 1) - 2] \\ &= (\lambda - a)(\lambda - a + 2)(\lambda - a - 1), \end{aligned}$$

所以 $\lambda_1=a, \lambda_2=a-2, \lambda_3=a+1$ 。由 A, B 合同可得 $a=2$, A 的特征值为 $2, 3, 0$, 所以正交变换所得标准形为 $2z_1^2 + 3z_2^2$ 。

例题 2 下列从变量 x_1, x_2, x_3 到 y_1, y_2, y_3 的线性变换中, 可逆线性变换为()。

$$\begin{aligned} \text{A. } \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 + y_3 \\ x_3 = 2y_1 + y_2 + y_3 \end{cases} & \quad \text{B. } \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + y_3 \\ x_2 = y_1 + y_2 - y_3 \\ x_3 = -y_1 + y_2 - y_3 \end{cases} \\ \text{C. } \begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 + y_3 \\ x_2 = y_2 - 2y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases} & \quad \text{D. } \begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 + y_3 \\ x_2 = y_2 - 2y_3 \\ x_3 = y_1 - y_2 - y_3 \end{cases} \end{aligned}$$

答案 C

解 线性变换 $x=Cy$ 是可逆的, 当且仅当 $|C| \neq 0$, 故只需要计算各线性变换矩阵的行列式。对于选项 C, 有 $|C| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ 。同理可判断选项 A, B, D 错误, 故选 C。

技巧专题 31 判断正定矩阵

例题 1 下列矩阵中为正定矩阵的是()。

$$\begin{aligned} \text{A. } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} & \quad \text{B. } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & -6 \end{bmatrix} & \quad \text{C. } \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix} & \quad \text{D. } \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

答案 C

解 由二次型正定的必要条件, 主对角线元素 $a_{ii} > 0$ 知, 选项 B 的矩阵不是正定矩阵。事实上, 由于 $a_{33} = -6$, 取 $x_0 = [0, 0, 1]^T$, 则 $f(0, 0, 1) = -6$, 即 $x_0 = [0, 0, 1]^T \neq 0$, 而有 $x_0^T A x_0 < 0$, 与正定的定义不符。

在选项 D 中 $a_{33} = 0$, 选项 D 的矩阵也不是正定矩阵。易知 $f(0, 0, 1) = 0$, 与 $x \neq 0$ 时, $x^T A x > 0$ 相矛盾, 故选项 D 的矩阵也不是正定矩阵。

又选项 A 矩阵的二阶顺序主子式 $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$, 这与二次型正定的充分必要条件, 即各阶顺序主子式全大于零不符, 故选项 A 的矩阵也不是正定矩阵。综上, 故选 C。

例题 2 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + ax_2 - 2x_3)^2 + (2x_2 + 3x_3)^2 + (x_1 + 3x_2 + ax_3)^2$ 正定的充分必要条件是()。

A. $\forall a$ B. $a \neq 1$ C. $a \neq -1$ D. $a > 1$

答案 B

解 $\forall x_1, x_2, x_3$ 有 $f(x_1, x_2, x_3) \geq 0$, 其中取等号的充分必要条件是

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + ax_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

由二次型正定的定义: $\forall \mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T \neq \mathbf{0}, f(x_1, x_2, x_3) > 0$, 因此, 本题中二次型 f 正定 $\Leftrightarrow$ 方程组(1)只有零解。所以方程组的系数矩阵对应的行列式不等于 0, 所以

$$\begin{vmatrix} 1 & a & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3-a & a+2 \end{vmatrix} = 5(a-1) \neq 0, \text{解得 } a \neq 1. \text{ 故选 B.}$$

例题 3 考虑二次型 $f = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$, 若 f 为正定二次型, 则 λ 的取值范围是()。

A. $-2 < \lambda < 2$ B. $-2 < \lambda < 0$ C. $-2 < \lambda < 1$ D. $0 < \lambda < 1$

答案 C

解 【方法 1】配方法。

$$\begin{aligned} f &= x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3 \\ &= (x_1 + \lambda x_2 - x_3)^2 + 3x_3^2 + (4 + 2\lambda)x_2x_3 + (4 - \lambda^2)x_2^2 \\ &= (x_1 + \lambda x_2 - x_3)^2 + 3\left(x_3 + \frac{\lambda + 2}{3}x_2\right)^2 + \left[4 - \lambda^2 - \frac{(\lambda + 2)^2}{3}\right]x_2^2 \end{aligned}$$

因为二次型正定, 所以 $4 - \lambda^2 - \frac{(\lambda + 2)^2}{3} > 0$, 解得 $-2 < \lambda < 1$, 故选 C。

【方法 2】顺序主子式法。

f 的矩阵为 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ \lambda & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, 由于 f 是正定二次型的充分必要条件是 $\mathbf{A}$ 的各阶顺序主子式都

大于 0, 所以有 $\begin{cases} 1 > 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 4 \end{vmatrix} > 0, \text{即} \begin{cases} -2 < \lambda < 2 \\ \lambda < 1 \end{cases} \\ |\mathbf{A}| > 0 \end{cases}$, 解此不等式组得 $-2 < \lambda < 1$, 故选 C。

例题 4 n 阶实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 是正定矩阵的充分必要条件是()。

A. 二次型 $f = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 的负惯性指数为零B. 存在可逆矩阵 $\mathbf{P}$, 使 $\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{E}$ C. 存在 n 阶矩阵 $\mathbf{C}$, 使 $\mathbf{A} = \mathbf{C}^T \mathbf{C}$ D. $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵 $\mathbf{A}^*$ 与 $\mathbf{E}$ 合同

答案 D

解 选项 A 是必要条件,但不是充分条件。因为 $r(f)=p+q \leq n$, 当 $q=0$ 时, 有 $r(f)=p \leq n$, 此时有可能 $p < n$, 故二次型 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 不一定是正定二次型。因此, 矩阵 $\mathbf{A}$ 不一定是正定矩阵。例如, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_3^2$ 。

选项 B 是充分条件, 但不是必要条件。因为 $\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{E}$, 表示 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{E}$ 相似, 即 $\mathbf{A}$ 的特征值全是 1, 此时 $\mathbf{A}$ 是正定矩阵, 但只要 $\mathbf{A}$ 的特征值全大于零就可以保证 $\mathbf{A}$ 是正定矩阵, 因此特征值全是 1 是不必要的条件。

选项 C 中的等式等价于 $\mathbf{A} = \mathbf{C}^T \mathbf{E} \mathbf{C}$, 但矩阵 $\mathbf{C}$ 没有可逆的条件, 因此对于 $\mathbf{A} = \mathbf{C}^T \mathbf{C}$, 不能说 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{E}$ 合同, 也就没有 $\mathbf{A}$ 是正定矩阵的结论。例如, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, 有 $\mathbf{A} = \mathbf{C}^T \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, 显然矩阵 $\mathbf{A}$ 不是正定矩阵。

选项 D, 由于 $\mathbf{A}$ 是正定矩阵, 等价于 $\mathbf{A}^{-1}$ 是正定矩阵, 等价于 $\mathbf{A}^*$ 是正定矩阵。而由 $\mathbf{A}^*$ 是正定矩阵, 等价于 $\mathbf{A}^*$ 与 $\mathbf{E}$ 合同, 所以选项 D 是充分必要条件, 故选 D。

技巧专题 32 规范形与正负惯性指数

例题 1 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_2 x_3$ 的正负惯性指数分别为()。

- A. $p=1, q=1$ B. $p=1, q=2$ C. $p=1, q=0$ D. $p=0, q=2$

答案 A

解 【方法 1】 特征值法。

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_2 x_3$ 与 $g(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 x_2 + 2x_2 x_3$ 的正负惯性指数一样。

对应的二次型矩阵为 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 。由

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 2\lambda - \lambda^3 = \lambda(2 - \lambda^2) = 0$$

得其特征值为 $0, \pm\sqrt{2}$, 故选 A。

【方法 2】 配方法。求正、负惯性指数, 可通过标准形(规范形)或特征值得到, 已知二次型 f 中没有平方项, 先做可逆线性变换产生平方项, 再化为标准形或求其矩阵的特征值。

$$\text{令} \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3, \end{cases} \text{矩阵} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{可逆, 则}$$

$$f = (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) + (y_1 - y_2)y_3 = y_1^2 - y_2^2 + y_1 y_3 - y_2 y_3$$

用配方法化为标准形, 得 $f = \left(y_1 + \frac{1}{2}y_3\right)^2 - \left(y_2 + \frac{1}{2}y_3\right)^2$,

$$\text{令} \begin{cases} z_1 = y_1 + \frac{1}{2}y_3, \\ z_2 = y_2 + \frac{1}{2}y_3, \\ z_3 = y_3, \end{cases} \text{矩阵} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{可逆, 故二次型为 } f = z_1^2 - z_2^2, \text{ 所以 } p=1, q=1. \text{ 故选 A.}$$

例题 2 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 + x_1)^2$ 的正负惯性指数分别

为_____。

答案 2,0

解 因为 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 + x_1)^2$
 $= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$
 $= 2\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{2}(x_2 - x_3)^2$
 $= 2y_1^2 + \frac{3}{2}y_2^2$, 其中 $y_1 = x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3, y_2 = x_2 - x_3$ 。

所以二次型的秩为 2, 正负惯性指数分别为 2, 0。

例题 3 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 的规范形是()。

A. $f = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ B. $f = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$ C. $f = z_1^2 - z_2^2$ D. $f = z_1^2$

答案 D

解 【方法 1】 特征值法。二次型的矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$,

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda - 4 & 4 \\ -2 & 4 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda - 4 & 4 \\ 0 & \lambda & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 4 & -2 \\ 2 & \lambda - 8 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 9) = 0$$

得 A 的特征值 $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, 从而二次型的规范形为 $f = z_1^2$, 故选 D。

【方法 2】 配方法。 $f = (x_1 - 2x_2 + 2x_3)^2$, 令 $z_1 = x_1 - 2x_2 + 2x_3$,

则二次型的规范形为 $f = z_1^2$, 故选 D。

技巧专题 33 过渡矩阵(仅数学一)

例题 1 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是三维向量空间 $\mathbf{R}^3$ 的一组基, 则由基 $\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3$ 到基 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 的过渡矩阵为()。

A. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$

答案 A

解 $[\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1] = [\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$, 故选 A。

第 3 章

概率论与数理统计技巧 (仅数学一、数学三)

技巧专题 1 分布函数与概率

例题 1 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ 1 - e^{-x}, & x \geq 1 \end{cases}$, 则 $P\{X=1\} = (\quad)$ 。

A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2} - e^{-1}$ D. $1 - e^{-1}$

答案 C

解 $P(X=1) = F(1) - F(1^-) = (1 - e^{-1}) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - e^{-1}$, 故选 C。

技巧专题 2 max 与 min 概率

例题 1 对某种电子装置的输出测量了 5 次, 得到的观察值分别为 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 , 设它们是相

互独立的变量, 且具有相同的分布函数 $F(z) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{z^2}{8}}, & z \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 。

(1) $\max\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\} > 4$ 的概率为 $(\quad)$ 。

A. $1 - (1 - e^{-2})^5$ B. $(1 - e^{-2})^5$ C. e^{-10} D. $1 - e^{-10}$

(2) $\min\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\} < 2$ 的概率为 $(\quad)$ 。

A. $1 - (1 - e^{-\frac{1}{2}})^5$ B. $(1 - e^{-\frac{1}{2}})^5$ C. $e^{-\frac{5}{2}}$ D. $1 - e^{-\frac{5}{2}}$

答案 (1) A (2) D

解 (1) 令 $V = \max\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$, 由于 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 相互独立, 且服从同一分布, 于是有

$$\begin{aligned} F_{\max}(z) &= P(V \leq z) = P[\max(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) \leq z] \\ &= P(X_1 \leq z, X_2 \leq z, X_3 \leq z, X_4 \leq z, X_5 \leq z) \\ &= P(X_1 \leq z)P(X_2 \leq z)P(X_3 \leq z)P(X_4 \leq z)P(X_5 \leq z) \\ &= [F(z)]^5 \end{aligned}$$

所求概率 $P(V > 4) = 1 - P(V \leq 4) = 1 - F_{\max}(4) = 1 - [F(4)]^5 = 1 - (1 - e^{-2})^5$, 故选 A。

(2) 令 $U = \min\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$, 由于 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 相互独立, 且服从同一分布, 于是有

$$\begin{aligned} F_{\min}(z) &= P(U \leq z) = P[\min(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) \leq z] \\ &= 1 - P[\min(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) > z] \\ &= 1 - P(X_1 > z, X_2 > z, X_3 > z, X_4 > z, X_5 > z) \\ &= 1 - P(X_1 > z)P(X_2 > z)P(X_3 > z)P(X_4 > z)P(X_5 > z) \\ &= 1 - [1 - P(X_1 \leq z)][1 - P(X_2 \leq z)] \cdots [1 - P(X_5 \leq z)] \\ &= 1 - [1 - F(z)]^5 \end{aligned}$$

所求概率 $P(U < 2) = F_{\min}(2) = 1 - [1 - F(2)]^5 = 1 - e^{-\frac{5}{2}}$, 故选 D。

例题 2 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 EX 与 EY 存在, 记 $U = \max\{X, Y\}$, $V = \min\{X, Y\}$, 则 $E(UV) = (\quad)$ 。

A. $EU \cdot EV$ B. $EX \cdot EY$ C. $EU \cdot EY$ D. $EX \cdot EV$

答案 B

解 当 $X \geq Y$ 时, $U = X, V = Y$; 当 $X < Y$ 时, $U = Y, V = X$ 。 $UV = \max\{X, Y\} \min\{X, Y\} = XY$, 可知 $E(UV) = E(\max\{X, Y\} \min\{X, Y\}) = E(XY) = EX \cdot EY$ (X, Y 相互独立), 故选 B。

技巧专题 3 泊松分布

例题 1 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布, 则 $P\{X = EX^2\} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案 $\frac{1}{2}e^{-1}$

解 由 $DX = EX^2 - (EX)^2$, 得 $EX^2 = DX + (EX)^2$, 又因为 X 服从参数为 1 的泊松分布, 所以 $DX = EX = 1$, 所以 $EX^2 = 1 + 1 = 2$, 所以 $P\{X = 2\} = \frac{1^2}{2!}e^{-1} = \frac{1}{2}e^{-1}$ 。

技巧专题 4 正态归一化

例题 1 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$), 记 $p = P\{X \leq \mu + \sigma^2\}$, 则 $(\quad)$ 。

A. p 随着 μ 的增加而增加B. p 随着 σ 的增加而增加C. p 随着 μ 的增加而减少D. p 随着 σ 的增加而减少

答案 B

解 $P\{X \leq \mu + \sigma^2\} = P\left\{\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \sigma\right\} = \Phi(\sigma)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态的分布函数, 随 x 增加而增加, 所以概率 p 随着 σ 的增加而增加。故选 B。

例题 2 设 X_1, X_2, X_3 是随机变量, 且 $X_1 \sim N(0, 1), X_2 \sim N(0, 2^2), X_3 \sim N(5, 3^2), p_j = P\{-2 \leq X_j \leq 2\}$ ($j = 1, 2, 3$), 则 $(\quad)$ 。

A. $p_1 > p_2 > p_3$ B. $p_2 > p_1 > p_3$ C. $p_3 > p_1 > p_2$ D. $p_1 > p_3 > p_2$

答案 A

解 由 $X_1 \sim N(0, 1), X_2 \sim N(0, 2^2), X_3 \sim N(5, 3^2)$ 知, $p_1 = P\{-2 \leq X_1 \leq 2\} = P\{|X_1| \leq 2\} = 2\Phi(2) - 1, p_2 = P\{-2 \leq X_2 \leq 2\} = P\{|X_2| \leq 2\} = P\left\{\left|\frac{X_2}{2}\right| \leq 1\right\} = 2\Phi(1) - 1$, 故 $p_1 > p_2$ 。根据 $X_3 \sim N(5, 3^2)$ 及概率密度的对称性知, $p_1 > p_2 > p_3$, 故选 A。

技巧专题 5 二维正态

例题 1 设二维随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布: $(X, Y) \sim N(0, 0; 1, 1; 0)$, 概率 $P\left(\frac{X}{Y} < 0\right) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案 $\frac{1}{2}$

解 由 $(X, Y) \sim N(0, 0; 1, 1; 0)$, 知 $X \sim N(0, 1), Y \sim N(0, 1)$, 且 $\rho_{XY} = 0$, 从而 X, Y 相互独立, 故

$$P\left(\frac{X}{Y} < 0\right) = P(X > 0, Y < 0) + P(X < 0, Y > 0) = P(X > 0) \cdot P(Y < 0) + P(X < 0) \cdot P(Y > 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

技巧专题 6 离散边缘反推联合

例题 1 设随机变量 $X_i \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} (i=1, 2)$, 且满足 $P\{X_1 X_2 = 0\} = 1$, 则 $P\{X_1 = X_2\} =$ ().

A. 0

B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$

D. 1

答案 A

解 $P\{X_1 X_2 = 0\} = 1 \Rightarrow P\{X_1 X_2 \neq 0\} = 0$, 所以 $P\{X_1 = -1, X_2 = -1\} = P\{X_1 = -1, X_2 = 1\} = P\{X_1 = 1, X_2 = -1\} = P\{X_1 = 1, X_2 = 1\} = 0$.

即 X_1 和 X_2 的联合分布简化为

$X_2 \backslash X_1$	-1	0	0	p_j
-1	0		0	$\frac{1}{4}$
0				$\frac{1}{2}$
1	0		0	$\frac{1}{4}$
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

$$P\{X_1 = -1, X_2 = 0\} = P\{X_1 = -1\} - P\{X_1 = -1, X_2 = -1\} - P\{X_1 = -1, X_2 = 1\} = \frac{1}{4}$$

同理可得

$$P\{X_1 = 0, X_2 = -1\} = P\{X_1 = 0, X_2 = 1\} = P\{X_1 = 1, X_2 = 0\} = \frac{1}{4}$$

$$P\{X_1 = 0, X_2 = 0\} = P\{X_1 = 0\} - P\{X_1 = 0, X_2 = -1\} - P\{X_1 = 0, X_2 = 1\} = 0$$

即 X_1 和 X_2 的联合分布为

$X_2 \backslash X_1$	-1	0	1	p_j
-1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

所以 $P\{X_1=X_2\}=P\{X_1=-1, X_2=-1\}+P\{X_1=0, X_2=0\}+P\{X_1=1, X_2=1\}=0$ 。故选 A。

技巧专题 7 二维连续变离散

例题 1 假设二维随机变量 (X, Y) 在矩形 $G = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$ 上服从均匀分布。记 $U = \begin{cases} 0, & X \leq Y \\ 1, & X > Y \end{cases}, V = \begin{cases} 0, & X \leq 2Y \\ 1, & X > 2Y \end{cases}$, 则 $E(UV)$ 为 ()。

A. $\frac{1}{12}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{3}{4}$

答案 B

解 变量 UV 的所有可能取值为 0, 1。所以 $E(UV) = 0 \cdot P(UV=0) + 1 \cdot P(UV=1) = P(UV=1) = P(X > 2Y) = \frac{1}{2}$ 。故选 B。

技巧专题 8 卡方期望与方差

例题 1 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是总体为 $N(0, 1)$ 的简单随机样本。记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$,

$T = \bar{X}^2 - \frac{1}{n} S^2$, 则 $DT =$ _____。

答案 $\frac{2}{n(n-1)}$

解 $\bar{X}$ 和 S^2 独立, 当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时, 有 $DT = D\left(\bar{X}^2 - \frac{1}{n} S^2\right) = D(\bar{X}^2) + \frac{1}{n^2} D(S^2) = \frac{1}{n^2} D[(\sqrt{n}\bar{X})^2] + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{(n-1)^2} D[(n-1)S^2] = \frac{1}{n^2} \cdot 2 + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{(n-1)^2} \cdot 2(n-1) = \frac{2}{n(n-1)}$ 。

注意: $(n-1)S^2 \sim \chi^2(n-1), (\sqrt{n}\bar{X})^2 \sim \chi^2(1)$ 。

技巧专题 9 乘积的数字特征

例题 1 设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=-1\}=\frac{1}{2}$, Y 服从参数为 λ 的泊松分布 $P(\lambda)$ 。令 $Z=XY$, 则 $DZ =$ _____。

答案 $\lambda + \lambda^2$

解 $DZ = E(Z^2) - (EZ)^2, EZ = E(XY) = EX \cdot EY = 0, E(Z^2) = E(X^2 Y^2) = E(X^2) \cdot E(Y^2), E(X^2) = 1, E(Y^2) = DY + (EY)^2 = \lambda + \lambda^2$, 所以 $DZ = \lambda + \lambda^2$ 。

例题 2 设二维随机变量 (X, Y) 服从正态分布 $N(\mu, \mu; \sigma^2, \sigma^2; 0)$, 则 $E(XY^2) =$ _____。

答案 $\mu^3 + \mu\sigma^2$

解 由于 $\rho = 0$, 由二维正态分布的性质可知随机变量 X, Y 独立且同分布。因此 $E(XY^2) = EX \cdot E(Y^2)$ 。由 (X, Y) 服从 $N(\mu, \mu; \sigma^2, \sigma^2; 0)$ 可知 $EX = \mu, E(Y^2) = DY + (EY)^2 = \mu^2 + \sigma^2$, 则

$$E(XY^2) = \mu(\mu^2 + \sigma^2) = \mu^3 + \mu\sigma^2.$$

技巧专题 10 二维概率密度

例题 1 设随机变量 $X \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$, 随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布, 且 X, Y 相互独立。设

$Z = (2X - 1)Y$, 记 (Y, Z) 的分布函数为 $F(y, z)$, 则 (y, z) 的分布函数 $F(y, z) =$ _____。

答案

$$F(y, z) = \begin{cases} 1 - e^{-y}, & 0 < y < z \\ 1 - \frac{1}{4}e^{-y} - \frac{3}{4}e^{-z}, & 0 < z < y \\ \frac{1}{4}(e^z - e^{-y}), & 0 \leq -z < y \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

解 Y 的概率密度为 $f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 由定义可知 $F(y, z) = P(Y \leq y, Z \leq z) = P(Y \leq y,$

$$(2X - 1)Y \leq z, X = 0) + P(Y \leq y, (2X - 1)Y \leq z, X = 1) = \frac{1}{4}P(-z \leq Y \leq y) + \frac{3}{4}P(Y \leq y, Y \leq z).$$

若 $y \leq 0$, 显然 $F(y, z) = 0$ 。以下讨论 $y > 0$ 的情况。

① $z > 0$ 且 $z > y$, 此时 $F(y, z) = \frac{1}{4}P(0 \leq Y \leq y) + \frac{3}{4}P(Y \leq y) = P(Y \leq y) = 1 - e^{-y}$ 。

② $z > 0$ 且 $y > z$, 此时 $F(y, z) = \frac{1}{4}P(0 \leq Y \leq y) + \frac{3}{4}P(Y \leq z) = 1 - \frac{1}{4}e^{-y} - \frac{3}{4}e^{-z}$ 。

③ $z \leq 0$ 且 $-z < y$, 此时 $F(y, z) = \frac{1}{4}P(-z \leq Y \leq y) = \frac{1}{4}(e^z - e^{-y})$ 。

④ $z \leq 0$, 且 $-z \geq y$, 此时 $F(y, z) = 0$ 。

综上, $F(y, z) = \begin{cases} 1 - e^{-y}, & 0 < y < z \\ 1 - \frac{1}{4}e^{-y} - \frac{3}{4}e^{-z}, & 0 < z < y \\ \frac{1}{4}(e^z - e^{-y}), & 0 \leq -z < y \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 。

技巧专题 11 绝对值方差

例题 1 设两个随机变量 X, Y 相互独立, 且都服从均值为 0、方差为 $\frac{1}{2}$ 的正态分布, 则 $|X - Y|$ 的方差为 _____。

答案 $1 - \frac{2}{\pi}$

解 令 $Z = X - Y$, 由于 X, Y 相互独立, 且都服从正态分布, 因此 Z 也服从正态分布, 且 $E(Z) = E(X) - E(Y) = 0, D(Z) = D(X) + D(Y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ 。于是, $Z = X - Y \sim N(0, 1)$ 。 $D|X - Y| = D(|Z|) = E(|Z|^2) - (E|Z|)^2 = D(Z) + (E(Z))^2 - (E|Z|)^2 = 1 - (E|Z|)^2$ 。

$$\text{而 } E|Z| = \int_{-\infty}^{+\infty} |z| \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} d\left(\frac{z^2}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(-e^{-\frac{z^2}{2}}\right) \Big|_0^{+\infty} =$$

$\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, 故 $D|X-Y|=1-\frac{2}{\pi}$ 。

技巧专题 12 相关系数

例题 1 设 X_1 与 X_2 相互独立且均服从 $N(0,1)$, $\bar{X}=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$, $U=X_1-\bar{X}$, $V=X_2-\bar{X}$, 则变量 U, V 的相关系数为_____。

答案 -1

解 【方法 1】 $U+V=(X_1-\bar{X})+(X_2-\bar{X})=0$, 所以相关系数为 -1。

$$\text{补充: } \rho_{UV} = \frac{\text{cov}(U, V)}{\sqrt{DU}\sqrt{DV}} = \frac{\text{cov}(U, -U)}{\sqrt{DU}\sqrt{D(-U)}} = \frac{-DU}{DU} = -1。$$

【方法 2】 由于 $\rho_{UV} = \frac{\text{cov}(X_1-\bar{X}, X_2-\bar{X})}{\sqrt{D(X_1-\bar{X})}\sqrt{D(X_2-\bar{X})}} = \frac{E[(X_1-\bar{X})(X_2-\bar{X})] - E(X_1-\bar{X})E(X_2-\bar{X})}{\sqrt{D(X_1-\bar{X})}\sqrt{D(X_2-\bar{X})}}$,
 $E(X_1-\bar{X}) = EX_1 - E\bar{X} = 0 - 0 = 0$, $E(X_1\bar{X}) = E(X_2\bar{X})$, $D(X_1-\bar{X}) = D(X_2-\bar{X})$,
 $E[(X_1-\bar{X})(X_2-\bar{X})] = E(X_1X_2) - E(X_1\bar{X}) - E(X_2\bar{X}) + E(\bar{X}^2) = EX_1 \cdot EX_2 - 2E\left[X_1 \cdot \frac{1}{2}(X_1 + X_2)\right] + E(\bar{X}^2) = 0 - 2 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ 。

$D(X_1-\bar{X}) = D\left[X_1 - \frac{1}{2}(X_1+X_2)\right] = D\left(\frac{1}{2}X_1 - \frac{1}{2}X_2\right) = \frac{1}{4}DX_1 + \frac{1}{4}DX_2 = \frac{1}{2}$, 故 $\rho_{UV} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -1$ 。

例题 2 将一枚硬币重复掷 n 次, 以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数, 则 X 和 Y 的相关系数等于()。

A. -1

B. 0

C. $\frac{1}{2}$

D. 1

答案 A

解 掷硬币结果不是正面向上就是反面向上, 所以 $X+Y=n$, 从而 $Y=n-X$, 故 $DY=D(n-X)=DX$, $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(X, n-X) = \text{cov}(X, n) - \text{cov}(X, X) = 0 - DX = -DX$ 。由相关系数的定义, 得 $\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{-DX}{\sqrt{DX}\sqrt{DX}} = -1$ 。故选 A。

技巧专题 13 协方差

例题 1 设 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ($n > 1$) 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 其中样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, 则 $\text{cov}(X_1 + X_2, S^2) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案 0

解 由对称性 $\text{cov}(X_1, S^2) = \text{cov}(X_2, S^2) = \cdots = \text{cov}(X_n, S^2) = \frac{1}{n} \text{cov}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n, S^2) = \text{cov}(\bar{X}, S^2) = 0$, 所以 $\text{cov}(X_1 + X_2, S^2) = 0$ 。

技巧专题 14 离散连续全概率

例题 1 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 X 服从标准正态分布 $N(0, 1)$, Y 的概率分布为 $P\{Y=0\} = P\{Y=1\} = \frac{1}{2}$, 记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z=XY$ 的分布函数, 则函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为()。

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

答案 B

解 $F_Z(z) = P(XY \leq z) = P(XY \leq z | Y=0)P(Y=0) + P(XY \leq z | Y=1)P(Y=1) = \frac{1}{2}[P(XY \leq z | Y=0) + P(XY \leq z | Y=1)] = \frac{1}{2}[P(X \cdot 0 \leq z | Y=0) + P(X \leq z | Y=1)]$ 。

因为 X, Y 独立, $F_Z(z) = \frac{1}{2}[P(X \cdot 0 \leq z) + P(X \leq z)]$, ①若 $z < 0$, 则 $F_Z(z) = \frac{1}{2}\Phi(z)$;

②若 $z \geq 0$, 则 $F_Z(z) = \frac{1}{2}(1 + \Phi(z))$ 。所以 $z=0$ 为间断点, 故选 B。

技巧专题 15 统计量的方差

例题 1 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 2)$ 为来自总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, $\bar{X}$ 为样本均值, 记 $Y_i = X_i - \bar{X}, i=1, 2, \dots, n$, 则 $\text{cov}(Y_1, Y_1 + Y_n) =$ _____。

答案 $\frac{n-2}{n}\sigma^2$

解 $\text{cov}(Y_1, Y_1 + Y_n) = \text{cov}(Y_1, Y_1) + \text{cov}(Y_1, Y_n) = DY_1 + \text{cov}(Y_1, Y_n)$,

$$DY_1 = D(X_1 - \bar{X}) = D\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)X_1 - \frac{1}{n}\sum_{j=2}^n X_j\right] = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 DX_1 + \frac{1}{n^2}\sum_{j=2}^n DX_j$$

$$= \frac{(n-1)^2}{n^2}\sigma^2 + \frac{1}{n^2} \cdot (n-1)\sigma^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2。$$

$$\text{cov}(Y_1, Y_n) = E(Y_1 Y_n) - EY_1 \cdot EY_n \quad (EY_1 = E(X_1 - \bar{X}) = 0 - 0)$$

$$= E(Y_1 Y_n) = E[(X_1 - \bar{X})(X_n - \bar{X})] = E(X_1 X_n - X_1 \bar{X} - X_n \bar{X} + \bar{X}^2)$$

$$= E(X_1 X_n) - 2E(X_1 \bar{X}) + E(\bar{X}^2) \quad (\text{对称性, 即 } E(X_1 \bar{X}) = E(X_n \bar{X}) = E(X_n \bar{X}))$$

$$= 0 - \frac{2}{n}E\left(X_1^2 + \sum_{j=2}^n X_1 X_j\right) + D\bar{X} + (E\bar{X})^2 \quad (\text{当 } EX=0 \text{ 时, } E(X^2) = DX + (EX)^2 = DX)$$

$$= -\frac{2}{n}\sigma^2 + \frac{1}{n}\sigma^2 = -\frac{1}{n}\sigma^2。$$

$$\text{所以原式} = \frac{n-1}{n}\sigma^2 - \frac{1}{n}\sigma^2 = \frac{n-2}{n}\sigma^2。$$

技巧专题 16 切比雪夫不等式

例题 1 设总体 X 的分布律为

X	0	1	2
P	$1-\theta$	$\theta-\theta^2$	θ^2

其中, θ 未知 ($0 < \theta < 1$); $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 其中取值为 2 的随机变量个数为 N , 由切比雪夫不等式, $P\{|N - n\theta^2| < \sqrt{n}\theta\} \geq$ _____。

答案 θ^2

解 $N \sim B(n, \theta^2)$, $EN = n\theta^2$, $DN = n\theta^2(1 - \theta^2)$, $P\{|N - n\theta^2| < \sqrt{n}\theta\} \geq 1 - \frac{n\theta^2(1 - \theta^2)}{n\theta^2} = \theta^2$ 。

技巧专题 17 依概率收敛

例题 1 设随机变量序列 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 独立同分布, 且 X_1 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 则

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 依概率收敛于 ()。

A. $\frac{1}{8}$

B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{2}$

答案 B

解 $E(X_1^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-1}^1 x^2 (1 - |x|) dx = 2 \int_0^1 x^2 (1 - x) dx = \frac{1}{6}$, 根据维纳-辛钦大数定理, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 依概率收敛于 $E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2\right) = E(X_1^2) = \frac{1}{6}$, 故选 B。

技巧专题 18 抽样分布

例题 1 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ ($n \geq 2$) 为来自总体 $N(0, 1)$ 的简单随机样本, $\bar{X}$ 为样本均值, S^2 为样本方差, 则 ()。

A. $n\bar{X} \sim N(0, 1)$

B. $nS^2 \sim \chi^2(n)$

C. $\frac{(n-1)\bar{X}}{S} \sim t(n-1)$

D. $\frac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^n X_i^2} \sim F(1, n-1)$

答案 D

解 根据简单随机样本的性质, 可知 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立且都服从 $N(0, 1)$, 于是有 X_1^2 与

$\sum_{i=2}^n X_i^2$ 相互独立且都服从 χ^2 分布, 自由度分别为 1 与 $n-1$, 因此 $\frac{X_1^2}{\frac{\sum_{i=2}^n X_i^2}{n-1}} = \frac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^n X_i^2} \sim F(1, n-1)$,

故选 D。

补充: 由于 $n\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i \sim N(0, n)$, 故选项 A 错误。

由 $(n-1)S^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$, 故选项 B 错误。

由于 $\bar{X} \sim N\left(0, \frac{1}{n}\right)$, 故 $\sqrt{n}\bar{X} \sim N(0, 1)$, $(n-1)S^2 \sim \chi^2(n-1)$, 所以 $\frac{\sqrt{n}\bar{X}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{n-1}}} = \frac{\sqrt{n}\bar{X}}{S} \sim$

$t(n-1)$, 故选项 C 错误。

例题 2 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 为来自总体 $N(\mu, 1)$ 的简单随机样本, 记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 则下列结论中不正确的是()。

A. $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ 服从 χ^2 分布

B. $2(X_n - X_1)^2$ 服从 χ^2 分布

C. $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 服从 χ^2 分布

D. $n(\bar{X} - \mu)^2$ 服从 χ^2 分布

答案 B

解 $X \sim N(\mu, 1), X_i - \mu \sim N(0, 1)$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n)$, 选项 A 正确;

$\Rightarrow (n-1)S^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$, 选项 C 正确;

$\Rightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{1}{n}\right), \sqrt{n}(\bar{X} - \mu) \sim N(0, 1), n(\bar{X} - \mu)^2 \sim \chi^2(1)$, 选项 D 正确;

$\Rightarrow (X_n - X_1) \sim N(0, 2), \frac{(X_n - X_1)^2}{2} \sim \chi^2(1)$, 选项 B 错误, 故选 B。

例题 3 设 $X_1, X_2, \dots, X_9$ 是来自正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, $Y_1 = \frac{1}{6}(X_1 + X_2 + \dots + X_6)$, $Y_2 = \frac{1}{3}(X_7 + X_8 + X_9)$, $S^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=7}^9 (X_i - Y_2)^2$, $Z = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S}$ 则统计量 Z 服从()。

A. 自由度为 3 的 t 分布

B. 自由度为 2 的 t 分布

C. 自由度为 3 的卡方分布

D. 自由度为 2 的卡方分布

答案 B

解 由题设知 $Y_1 \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{6}\right), Y_2 \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{3}\right)$, 所以 $Y_1 - Y_2 \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{2}\right)$, 即 $\frac{Y_1 - Y_2}{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}} \sim N(0, 1)$ 。此外 $\frac{2S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=7}^9 (X_i - Y_2)^2 \sim \chi^2(2)$, 并且 $\frac{2S^2}{\sigma^2}$ 与 Y_1, Y_2 都相互独立, 所以 $\frac{Y_1 - Y_2}{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}}$ 与 $\frac{2S^2}{\sigma^2}$ 相互独立, 于

是由 t 分布定义知 $Z = \frac{Y_1 - Y_2}{S} = \frac{\frac{Y_1 - Y_2}{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{\frac{2S^2}{\sigma^2} \times \frac{1}{2}}} \sim t(2)$ 。故选 B。

技巧专题 19 离散点估计

例题 1 设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中, $\theta (0 < \theta < \frac{1}{2})$ 是未知参数。利用总体 X 的如下样本值: 3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3, 若 a 为 θ 的矩估计值, b 为 θ 的最大似然估计值, 则 $ab =$ _____。

答案 $\frac{7-\sqrt{13}}{48}$

解 $EX = 0 \times \theta^2 + 1 \times 2\theta(1-\theta) + 2\theta^2 + 3 \times (1-2\theta) = 3 - 4\theta, \theta = \frac{1}{4}(3 - EX)$ 。

θ 的矩估计量为 $\hat{\theta} = \frac{1}{4}(3 - \bar{X})$, 根据给定的样本观察值, $\bar{X} = \frac{1}{8} \times (3 + 1 + 3 + 0 + 3 + 1 + 2 + 3) = 2$, 因此 θ 的矩估计值 $\hat{\theta} = \frac{1}{4}(3 - \bar{X}) = \frac{1}{4}$ 。

对于给定的样本值, 似然函数为 $L(\theta) = 4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4$, $\ln L(\theta) = \ln 4 + 6\ln \theta + 2\ln(1-\theta) + 4\ln(1-2\theta)$, $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{6}{\theta} - \frac{2}{1-\theta} - \frac{8}{1-2\theta} = \frac{24\theta^2 - 28\theta + 6}{\theta(1-\theta)(1-2\theta)}$ 。

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = 0$, 得方程 $12\theta^2 - 14\theta + 3 = 0$, 解得 $\theta = \frac{7-\sqrt{13}}{12}$ ($\theta = \frac{7+\sqrt{13}}{12} > \frac{1}{2}$), 不合题意。于是 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta} = \frac{7-\sqrt{13}}{12}$, 所以 $ab = \frac{7-\sqrt{13}}{48}$ 。

技巧专题 20 无驻点的似然估计

例题 1 设总体 X 的概率密度为 $f(x; a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 则 ()。

① a 的极大似然估计 $\hat{a} = \min(x_1, x_2, \dots, x_n)$

② b 的极大似然估计 $\hat{b} = \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$

A. ①与②均正确

B. ①错误②正确

C. ①正确②错误

D. ①与②均错误

答案 A

解 $L(a, b) = \frac{1}{(b-a)^n}$, $\ln L(a, b) = -n \ln(b-a)$, 此函数为单调函数, 所以这种方法不适用。因此, 应按定义求出使似然函数 L 到最大值的 a 和 b 。由于 $L(a, b) = \frac{1}{(b-a)^n}$, a 的取值范围为 $(-\infty, \min(x_1, x_2, \dots, x_n)]$, b 的取值范围为 $[\max(x_1, x_2, \dots, x_n), +\infty)$, 故只要选取 $\hat{a} = \min(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\hat{b} = \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 就能使 $L(a, b)$ 在 $\hat{a}, \hat{b}$ 处达到最大值, 它们就是 a 和 b 的极大似然估计, 故选 A。

技巧专题 21 中心极限定理

例题 1 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 其中 $P(X=0)=P(X=1)=\frac{1}{2}$, $\Phi(x)$ 表

示标准正态分布函数, 则利用中心极限定理可得 $P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 55\right)$ 的近似值为()。

A. $1-\Phi(1)$ B. $\Phi(1)$ C. $1-\Phi(2)$ D. $\Phi(2)$

答案 B

解 由题意 $EX=\frac{1}{2}, DX=\frac{1}{4}, E\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right)=100EX=50, D\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right)=100DX=25$ 。由中心极限定

理知 $\sum_{i=1}^{100} X_i \sim N(50, 25)$, 有 $P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 55\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 50}{5} \leq \frac{55 - 50}{5}\right) = \Phi(1)$, 故选 B。

技巧专题 22 置信区间(仅数学一)

例题 1 假定机床加工轴的平均椭圆度服从正态分布, 现从一台机床加工的轴中随机抽取 200 根, 测量其椭圆度。由测量值计算平均值 $\bar{x}=0.081\text{mm}$, 标准差 $S=0.025\text{mm}$, 给定置信度为 0.95, 此机床加工的轴的平均椭圆度的置信度为 0.95 的置信区间为_____。

(提示: $Z_{0.025}=1.96$ 。)

答案 (0.078, 0.084)

解 依题意, 设 $n=200, 1-\alpha=0.95$, 故 $\frac{\alpha}{2}=0.025$, 查标准正态分布表得 $Z_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$ 。于是置信下限为 $\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} \times Z_{\frac{\alpha}{2}} = 0.081 - 1.96 \times \frac{0.025}{\sqrt{200}} = 0.078$, 置信上限为 $\bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} \times Z_{\frac{\alpha}{2}} = 0.081 + 1.96 \times \frac{0.025}{\sqrt{200}} = 0.084$, 故此机床所加工的轴的平均椭圆度的置信区间是 (0.078, 0.084)。

技巧专题 23 假设检验(仅数学一)

例题 1 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 据此样本检测, 假设 $H_0: \mu=\mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$, 则()。

A. 如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下拒绝 H_0 , 那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必拒绝 H_0 B. 如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下拒绝 H_0 , 那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必接受 H_0 C. 如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下接受 H_0 , 那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必拒绝 H_0 D. 如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下接受 H_0 , 那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必接受 H_0

答案 D

解 统计量 $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$, 在检验水平 $\alpha=0.05$ 下接受域为 $\left| \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right| < \mu_{0.025}$, 解得接受域区间为

$\left(\bar{X} - \mu_{0.025} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \mu_{0.025} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, 在检验水平 $\alpha=0.01$ 下接受域区间为 $\left(\bar{X} - \mu_{0.005} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \mu_{0.005} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ 。

由于 $\mu_{0.025} < \mu_{0.005}, \alpha=0.01$ 下接受域区间包含了 $\alpha=0.05$ 下接受域区间, 故选 D。

例题 2 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 其中参数 μ 和 σ^2 未知, 记

$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, Q^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, 则假设 $H_0: \mu = 0$ 的 t 检验使用统计量 $t =$ _____。

答案 $\frac{\bar{X}}{Q} \sqrt{n(n-1)}$

解 该题是属于正态总体方差未知的关于期望值 μ 的假设检验问题, 据此应该选取 t 检验的统计量

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{X}}{\sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}}, \text{ 经过化简得 } t = \frac{\bar{X}}{Q} \sqrt{n(n-1)}。$$

例题 3 设 $X_1, X_2, \dots, X_{16}$ 是来自总体 $N(\mu, 4)$ 的简单随机样本, 考虑假设检验问题 $H_0: \mu \leq 10, H_1:$

$\mu > 10$ 。 $\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数, 若该检验问题的拒绝域为 $W = \{\bar{X} \geq 11\}$, 其中 $\bar{X} = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} X_i$, 则 $\mu = 11.5$ 时, 该检验犯第二类错误的概率为()。

A. $1 - \Phi(0.5)$

B. $1 - \Phi(1)$

C. $1 - \Phi(1.5)$

D. $1 - \Phi(2)$

答案 B

解 所求概率为 $P\{\bar{X} < 11\}, \bar{X} \sim N\left(11.5, \frac{1}{4}\right), P\{\bar{X} < 11\} = P\left\{\frac{\bar{X} - 11.5}{\frac{1}{2}} \leq \frac{11 - 11.5}{\frac{1}{2}}\right\} = 1 - \Phi(1)$, 故

选 B。