

第 3 章

一元积分学

专题 15 好用的定积分公式



孝哥说明

定积分难,难在公式之多、情况之复杂。经典例题 29 在一题之内,融合定积分四大常考公式,考生可用此题又快又好地掌握相关解题公式。

知识清单

- 奇偶性简化: $\int_{-l}^l f(x) dx = \int_0^l [f(x) + f(-x)] dx = \begin{cases} 0, & \text{当 } f(x) \text{ 为奇函数} \\ 2 \int_0^l f(x) dx, & \text{当 } f(x) \text{ 为偶函数} \end{cases}$
- 周期性简化: $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx$ 。
- 几何意义简化: $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{4} \pi a^2$ 。
- 华里士公式: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{当 } n \text{ 为偶数} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{2}{3} \cdot 1, & \text{当 } n \text{ 为奇数} \end{cases}$ 。
- 正弦简化公式: $\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$ 。

经典例题

29 已知 $\int_0^\pi x (\sin x + \cos^2 x)^2 dx = a \int_0^1 \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$, 求 a 。

解

方程左边:

$$\int_0^\pi x (\sin x + \cos^2 x)^2 dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi (\sin x + \cos^2 x)^2 dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi (\sin^2 x + \cos^4 x + 2 \sin x \cos^2 x) dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x + \cos^4 x) dx + \pi \int_0^\pi \sin x \cos^2 x dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x + \cos^4 x) dx - \pi \int_0^\pi \cos^2 x d(\cos x)$$

$$= \pi \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) - \pi \frac{\cos^3 x}{3} \Big|_0^\pi = \frac{7\pi^2}{16} + \frac{2\pi}{3}$$

【笔记】 $\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$

【笔记】周期函数 $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx$

【笔记】华里士公式

$$\text{方程右边: } \int_0^1 \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t \sin t}{\cos t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t dt = 1$$

【笔记】使用了代换 $x = \sin t$

$$\text{所以 } a = \frac{7\pi^2}{16} + \frac{2\pi}{3}.$$

30 设函数 $f(x) = \arctan e^x$ 。

(1) 证明 $f(-x) + f(x) = A$ 。

(2) 对于任意实数 a , 若 $g(x)$ 满足 $\int_{-a}^a f(x)g(x)dx = A \int_0^a g(x)dx$, 求 $g(x)$ 满足的条件。

(3) 计算积分 $\int_{-\pi}^{\pi} |x \sin^4 x| \arctan e^x dx$ 。

解

(1) $f(x) + f(-x) = \arctan e^x + \arctan e^{-x}$, 有 $(\arctan e^x + \arctan e^{-x})' = \frac{e^x}{1+e^{2x}} + \frac{-e^{-x}}{1+e^{-2x}} = 0$, 所以 $\arctan e^x + \arctan e^{-x} = A$ 。令 $x=0$, 可得 $A = \arctan 1 + \arctan 1 = \frac{\pi}{2}$ 。

(2) $\int_{-a}^a f(x)g(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)g(x)dx + \int_0^a f(x)g(x)dx$, 在 $\int_{-a}^0 f(x)g(x)dx$ 中, 令 $x=-t$, $\int_{-a}^0 f(x)g(x)dx = \int_a^0 f(-t)g(-t)d(-t) = \int_0^a f(-t)g(-t)dt = \int_0^a f(-x)g(-x)dx$, 所以 $\int_{-a}^a f(x)g(x)dx = \int_0^a [f(x)g(x) + f(-x)g(-x)]dx$ 。

又因为 $\int_{-a}^a f(x)g(x)dx = A \int_0^a g(x)dx$, 且 $f(-x) + f(x) = A$, $\int_0^a [f(x)g(x) + f(-x)g(-x)]dx = A \int_0^a g(x)dx = \int_0^a g(x)[f(-x) + f(x)]dx$ 。对任意实数 a 均成立, 所以 $f(x)g(x) + f(-x)g(-x) = g(x)[f(-x) + f(x)] \Rightarrow g(-x) = g(x)$, 所以 $g(x)$ 应为偶函数。

$$\begin{aligned} (3) \int_{-\pi}^{\pi} |x \sin^4 x| \arctan e^x dx &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} x \sin^4 x dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \sin^4 x dx \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi^3}{32}. \end{aligned}$$



解题心得

专题 16

变限积分函数

李白是独一无二的, 他的文字无处不弥漫着他生命与个性的独特气息。他的诗, 七分酿成了月光, 余下的三分啸成剑气, 绣口一吐, 就是半个盛唐。变限函数也是如此, 不仅独一无二, 而且无处不在, 如李白绣口一吐, 就是半本高数。

孝哥说明



知识清单

1. 变限积分求导公式: $\left(\int_{\phi(x)}^{\varphi(x)} f(t) dt\right)' = f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\phi(x)] \cdot \phi'(x)$ 。

2. 变限函数化为纯 t 公式

$$(1) \int_0^x f(x-t) dt = \int_0^x f(u) du。$$

$$(2) \int_0^x (x-t)f(t) dt = x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x tf(t) dt。$$

$$(3) \int_0^1 f(xt) dt = \frac{\int_0^x f(u) du}{x} \quad (x \neq 0)。$$

3. 积分中值定理: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则在 $[a, b]$ 上至少存在一个 ξ , 使得 $\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(\xi)$ 。

经典例题

31 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 点及某邻域内二阶导连续, 又设 $f(0)=f'(0)=0, f''(0) \neq 0$, 求极限 $I =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t) dt}{x \int_0^x f(x-t) dt}。$$

解 由于 $\int_0^x f(x-t) dt \xrightarrow{x-t=u} \int_x^0 f(u)(-du) = \int_0^x f(u) du$, 于是

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t) dt}{x \int_0^x f(x-t) dt} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x tf(t) dt}{x \int_0^x f(u) du}$$

【笔记】被积函数中不能含上限 x

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt + xf(x) - xf(x)}{\int_0^x f(u) du + xf(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{\int_0^x f(u) du + xf(x)}$$

【笔记】使用了一次洛必达法则

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2f(x) + xf'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{3f'(x) + xf''(x)}$$

【笔记】不能继续使用洛必达法则

【方法 1】利用导数定义求解。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{3f'(x) + xf''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f'(x)}{x}}{\frac{3f'(x)}{x} + f''(x)}$$

利用导数定义可知, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = f''(0)$ 。

所以, 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(0)}{3f''(0) + f''(0)} = \frac{1}{4}$ 。

【方法 2】利用拉格朗日公式求解。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{3f'(x) + xf''(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{3[f'(x) - f'(0)] + xf''(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(\xi)x}{3f''(\xi)x + xf''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(\xi)}{3f''(\xi) + f''(x)} = \frac{f''(0)}{3f''(0) + f''(0)} = \frac{1}{4}。 \end{aligned}$$

其中, ξ 位于 $0, x$ 之间。

32 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{kx}{n}\right) (x \geq 0)$ 。

(1) 求 $f(x)$ 的表达式。

(2) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是 x 的几阶无穷小?

(3) 设曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴, 直线 $x=1$ 围成图形 D , 求 D 绕 y 轴旋转一周所得立体的体积。

解 (1) 当 $x=0$ 时, 显然 $f(x)=0$ 。

【笔记】 注意分类讨论, 简单情况写在最前面

当 $x \neq 0$ 时, 有 $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{x}{n} \cdot \ln\left(1 + \frac{kx}{n}\right) = \frac{1}{x} \int_0^x \ln(1+t) dt$ 。

【笔记】 下一步 x 作分母, 所以需要分类讨论, 可将 x 视为常数, $\frac{kx}{n} \rightarrow t, \frac{x}{n} \rightarrow dt$

又因为 $\int_0^x \ln(1+t) dt = \int_0^x \ln(1+t) d(t+1)$

【笔记】 重要技巧: $dt = d(t+1)$, 可简化后续积分

$= (1+t)\ln(1+t) \Big|_0^x - \int_0^x 1 \cdot dt = (1+x)\ln(1+x) - x$, 所以 $f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \ln(1+t) dt = \frac{(1+x)\ln(1+x) - x}{x}$ 。

综上所述, $f(x) = \begin{cases} \frac{(1+x)\ln(1+x) - x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 。

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)\ln(1+x) - x}{x^{k+1}}$

【笔记】 重要: k 阶无穷小的条件为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^k} = c (c \neq 0)$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) \left[x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \right] - x}{x^{k+1}}$

【笔记】 别漏项。将 $\ln(1+x)$ 试探性展开到二阶, 无结果再展开到三阶

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[x - \frac{1}{2}x^2 + x^2 + o(x^2) \right] - x}{x^{k+1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^{k+1}} = c$, 所以 $k+1=2 \Rightarrow k=1$, 故当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是

x 的一阶无穷小。

(3) 由 $dV = 2\pi x f(x) dx$ 可得

【笔记】 重要: 柱壳法, 微元 $dV = 2\pi r f(x) dx$, 本题中 $r=x$

$V = 2\pi \int_0^1 x f(x) dx = 2\pi \int_0^1 [(1+x)\ln(1+x) - x] dx$

$= 2\pi \left[\int_0^1 (1+x)\ln(1+x) dx - \int_0^1 x dx \right]$, 其中, $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$ 。

$\int_0^1 (1+x)\ln(1+x) dx = \int_1^2 u \ln u du$ **【笔记】** 重要: 此处换元 $1+x=u$ 可简化后续积分计算, 注意换元必换限

$= \int_1^2 \ln u d\left(\frac{u^2}{2}\right) = \frac{u^2}{2} \ln u \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{u^2}{2} \cdot \frac{1}{u} du = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$, 所以 $V = 2\pi \int_0^1 x f(x) dx = \left(4\ln 2 - \frac{5}{2}\right)\pi$ 。

33 设 $f(x)$ 连续, $\varphi(x) = \int_0^1 f(xt) dt$ 。

(1) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$ (A 为常数), 求 $\varphi'(x)$ 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。

(2) 若 $\int_0^1 f(xt)dt = f(x) - xe^{-x}$, 求 $f(x)$ 的表达式。

解

(1) 由题设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$ 知, $f(0) = 0, f'(0) = A$, 且有 $\varphi(0) = 0$ 。又

$$\varphi(x) = \int_0^1 f(xt)dt = \frac{\int_0^x f(u)du}{x} \quad (x \neq 0)$$

【笔记】 $u = xt$

$$\text{于是 } \varphi'(x) = \frac{xf(x) - \int_0^x f(u)du}{x^2} \quad (x \neq 0)。$$

$$\text{由导数定义, 有 } \varphi'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u)du}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \frac{A}{2}。$$

$$\text{所以 } \varphi'(x) = \begin{cases} \frac{xf(x) - \int_0^x f(u)du}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{A}{2}, & x = 0 \end{cases}。$$

$$\begin{aligned} \text{而 } \lim_{x \rightarrow 0} \varphi'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - \int_0^x f(u)du}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u)du}{x^2} \\ &= A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} = \varphi'(0), \text{ 从而知 } \varphi'(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 处连续。} \end{aligned}$$

$$(2) \int_0^1 f(xt)dt = f(x) - xe^{-x} \Rightarrow \frac{\int_0^x f(u)du}{x} = f(x) - xe^{-x} \quad \text{【笔记】} \int_0^1 f(xt)dt = \frac{\int_0^x f(u)du}{x}$$

$$\Rightarrow \int_0^x f(u)du = xf(x) - x^2 e^{-x}$$

【笔记】化为整式更好求导

$$\Rightarrow f(x) = f(x) + xf'(x) + (x^2 - 2x)e^{-x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = (2 - x)e^{-x}$$

$$\Rightarrow f(x) = \int f'(x)dx = \int (2 - x)e^{-x}dx = (x - 1)e^{-x} + C, \text{ 其中, } C \text{ 为任意常数。}$$

34

设函数 $f(x) = \int_0^1 |t^2 - x^2| dt$ 。

(1) 求 $f'(x)$, 并求 $f(x)$ 的最小值。

(2) 说明函数 $f(x)$ 是否存在拐点。

(3) 求积分 $\int_0^1 f(x)dx$ 。

解

(1) 当 $-1 < x < 1$ 时, 有

【笔记】 t^2 的最大值为 1, 所以按照 x^2 与 1 的关系讨论

$$f(x) = \int_0^{|x|} (x^2 - t^2)dt + \int_{|x|}^1 (t^2 - x^2)dt = \frac{4}{3}|x|^3 - x^2 + \frac{1}{3}$$

【笔记】当 $x^2 < 1$ 时, t^2 部分大于 x^2 , 部分小于 x^2 , 故按照 x^2 分段

$$\text{当 } |x| \geq 1 \text{ 时, } f(x) = \int_0^1 (x^2 - t^2)dt = x^2 - \frac{1}{3}。 \quad \text{【笔记】当 } x^2 \geq 1 \text{ 时, } t^2 \leq x^2 \text{ 恒成立, 故不需要分段}$$

则

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \frac{1}{3}, & x \leq -1 \\ -\frac{4}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}, & -1 < x < 0 \\ \frac{4}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}, & 0 \leq x < 1 \\ x^2 - \frac{1}{3}, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < -1 \\ -4x^2 - 2x, & -1 < x < 0 \\ 4x^2 - 2x, & 0 < x < 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$$

【笔记】公式法求解导数,但请注意无 $x=0, x=\pm 1$

由导数的定义可知, $f'(-1) = -2, f'(0) = 0, f'(1) = 2$ 。

【笔记】注意分段点处用导数定义式

故

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq -1 \\ -4x^2 - 2x, & -1 < x < 0 \\ 4x^2 - 2x, & 0 \leq x < 1 \\ 2x, & x \geq 1 \end{cases}$$

由于 $f(x)$ 是偶函数, 所以只需求它在 $[0, +\infty)$ 上的最小值。

令 $f'(x) = 0$, 即 $4x^2 - 2x = 0$, 得 $x = 0$ 或 $x = \frac{1}{2}$ 。又因为 $f(0) = \frac{1}{3}, f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$, 所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ 。

【笔记】可直接利用偶函数, 只讨论 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 的表达式

$$(2) \text{ 由公式法可得 } f''(x) = \begin{cases} 2, & x < -1 \\ -8x - 2, & -1 < x < 0 \\ 8x - 2, & 0 < x < 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}.$$

由导数定义可知 $f''(0) = -2, f''(-1), f''(1)$ 均不存在。

① 先考察二阶导不存在的点是否为拐点。

因为二阶导 $f''(x)$ 在 $x = -1$ 左右两侧均大于零, 所以 $x = -1$ 不是函数 $f(x)$ 的拐点。

同理可知, $x = 1$ 也不是拐点。

② 再考察二阶导为 0 的点是否为拐点。

令

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -8x - 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4} \\ 8x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

容易验证, 二阶导 $f''(x)$ 在 $x = \frac{1}{4}, x = -\frac{1}{4}$ 左右两侧均异号, 所以 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{4}, x = -\frac{1}{4}$ 处存

在拐点。

$$(3) \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(\frac{4}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3} \right) dx = \frac{1}{3}.$$

35 已知函数 $f(t) = \int_1^{t^2} dx \int_{\sqrt{x}}^t \sin \frac{x}{y} dy$, 则 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) =$ _____。

解

【方法 1】 交换次序后直接积分。

【笔记】原累次积分无法进行积分,所以交换次序

交换积分次序有 $f(t) = \int_1^t dy \int_1^{y^2} \sin \frac{x}{y} dx$, 从而

$$f(t) = \int_1^t dy \int_1^{y^2} \sin \frac{x}{y} dx = \int_1^t y \left(\cos \frac{1}{y} - \cos y \right) dy$$

【笔记】此时已经成为变限函数,可用变限求导公式

由变限积分求导数公式,得 $f'(t) = t \left(\cos \frac{1}{t} - \cos t \right)$, 故 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \cos \frac{2}{\pi}$ 。

【方法 2】 交换次序后用整体法。

交换积分次序后有 $f(t) = \int_1^t dy \int_1^{y^2} \sin \frac{x}{y} dx = \int_1^t g(y) dy$, 其中, $g(y) = \int_1^{y^2} \sin \frac{x}{y} dx$ 。

所以 $f'(t) = g(t) = \int_1^{t^2} \sin \frac{x}{t} dx$, 故 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_1^{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \sin \frac{\pi x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \cos \frac{2}{\pi}$ 。



解题心得

专题 17 分部积分



孝哥说明

分部积分是积分夜空中最亮的星,命题人对此一往情深,套路还固定,十分有良心。本题融合 4 道真题,总结了分部积分的核心考法,并加入一个十分有用但易忽略的小技巧,帮助同学们既能统筹全局,又能狠抓细节。

知识清单

1. 需使用分部积分的几种情况

- (1) 对变限积分函数再积分,用分部积分。
- (2) 对形如 xf' 的函数积分,用分部积分。
- (3) 对含对数或反三角的函数积分,用分部积分。
- (4) 对形如 $xe^x, x \sin x, x \cos x$ 的函数积分,用分部积分。

2. 函数平均值公式: $\bar{f} = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$ 。

经典例题

36 计算下列积分。

(1) 计算 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$, 其中, $f(x) = \int_1^x \frac{\arcsin\sqrt{t} + \ln t}{t} dt$ 。

(2) 设 $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t} dt$, 计算 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的平均值。

解

$$\begin{aligned} (1) \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx &= \int_0^1 2f(x) d\sqrt{x} \quad \text{【笔记】变限函数再积分, 用分部积分: 变限留在 } d \text{ 前, 其他凑至 } d \text{ 后} \\ &= 2f(x) \sqrt{x} \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 \sqrt{x} f'(x) dx \quad \text{【笔记】变限 } f(x) = \int_a^x g(t) dt \text{ 必有 } f(a) = 0 \\ &= -2 \int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x} + \ln x}{\sqrt{x}} dx \end{aligned}$$

第一个积分:

$$\begin{aligned} -2 \int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx &= -4 \int_0^1 \arcsin \sqrt{x} d\sqrt{x} \quad \text{【笔记】反三角用分部积分, 反三角放在 } d \text{ 前, 其他凑至 } d \text{ 后} \\ &= -4 \int_0^1 \arcsin t dt = -4t \arcsin t \Big|_0^1 + 4 \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt \quad \text{【笔记】第一个等号用了代换 } \sqrt{x} = t \\ &= -2\pi - 2 \int_0^1 \frac{d(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}} = -2\pi - 4\sqrt{1-t^2} \Big|_0^1 = 4 - 2\pi \quad \text{【笔记】此处用到 } \int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + c \end{aligned}$$

第二个积分:

$$\begin{aligned} -2 \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx &= -4 \int_0^1 \ln x d\sqrt{x} \quad \text{【笔记】含对数的积分, 用分部积分: } \ln \text{ 放在 } d \text{ 前, 其他凑至 } d \text{ 后} \\ &= -4\sqrt{x} \ln x \Big|_{0^+}^1 + 4 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 4\sqrt{x} \ln x + 8\sqrt{x} \Big|_0^1 = 0 + 8 = 8 \quad \text{【笔记】} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\sigma \ln x = 0 (\sigma > 0) \end{aligned}$$

所以, 原式 $= 12 - 2\pi$ 。

【笔记】证明 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\sigma \ln x = 0 (\sigma > 0)$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\sigma \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-\sigma}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\sigma x^{-\sigma-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\sigma}{-\sigma} = 0 (\sigma > 0)$

(2) $\bar{f} = \frac{\int_0^\pi f(x) dx}{\pi}$, $f(0) = \int_0^0 \frac{\sin t}{\pi - t} dt = 0$ 【笔记】平均值公式 $\bar{f} = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x) dx &= \int_0^\pi f(x) d(x - \pi) \quad \text{【笔记】重要技巧 } dx = d(x - \pi), \text{ 这一步可简化后续计算} \\ &= f(x)(x - \pi) \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\sin x}{\pi - x} (\pi - x) dx \\ &= \int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = 2 \end{aligned}$$

所以, $\bar{f} = \frac{\int_0^\pi f(x) dx}{\pi} = \frac{2}{\pi}$ 。

37 设 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx \, (n=1, 2, 3, \dots)$ 。

(1) 求 I_n 的递推关系, 并求 $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x \, dx$ 。

(2) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n I_n$ 。

(3) (仅数学一和数学三) 试证: 对任意的常数 $\lambda > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n}{n^\lambda}$ 级数收敛。

解 (1) 因为 $(I_n + I_{n+2}) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x (1 + \tan^2 x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \sec^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, d \tan x \stackrel{\tan x = t}{=} \int_0^1 t^n \, dt = \frac{1}{(n+1)}$, 所以 $I_{n+2} = \frac{1}{(n+1)} - I_n$ 。

$I_5 = \frac{1}{4} - I_3 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - I_1\right) = I_1 - \frac{1}{4}$, $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx = -\ln \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \ln 2$,

$I_5 = \frac{2 \ln 2 - 1}{4}$ 。

(2) $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{(n+1)}$ 且 I_n 单调递减 $\Rightarrow I_n > \frac{1}{2(n+1)}$, $I_{n+2} < \frac{1}{2(n+1)}$, 所以 $\frac{1}{2(n+1)} < I_n < \frac{1}{2(n-1)}$, 由夹逼定理可知: $\lim_{n \rightarrow \infty} n I_n = \frac{1}{2}$ 。

(3) $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{(n+1)}$, $I_{n+2} > 0$, 所以 $I_n < \frac{1}{(n+1)}$, 所以 $\frac{I_n}{n^\lambda} < \frac{1}{n^\lambda(n+1)} < \frac{1}{n^{\lambda+1}}$ 。由于 $\lambda + 1 > 1$, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda+1}}$ 收敛, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n}{n^\lambda}$ 也收敛。



解题心得

专题 18 定积分几何应用



孝哥说明

柱壳法与圆盘法是两大基本方法, 复杂旋转体考虑大体积减小体积。本专题融合了深受命题人喜爱的 $\ln x$ 函数及其切线方程、方程根的个数、形心坐标等。小白不可绕行。

知识清单

1. 重要模型

曲线 $y = \ln x$ 过原点的切线为 $y = \frac{x}{e}$, 对函数 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} - k$:

(1) 若 $k > 0$, 则函数 $f(x)$ 无零点。

(2) 若 $k = 0$, 则函数 $f(x)$ 有且仅有一个零点。

(3) 若 $k < 0$, 则函数 $f(x)$ 有两个零点。

2. 定积分的几何应用微分法(不要死记硬背, 学会画图推导)

(1) 体积微元: $dV = \pi r^2 \cdot dx$ (圆盘), $dV = 2\pi r \cdot y \cdot dx$ (柱壳)。

(2) 弧长微元(仅数学一和数学二): $ds = \sqrt{1+y'^2} dx$, $ds = \sqrt{r^2+r'^2} d\theta$ (极坐标)。

(3) 表面积微元(仅数学一和数学二): $dS = 2\pi y \cdot \sqrt{1+y'^2} dx$ 。

3. 形心坐标公式

$$\bar{x} = \frac{\int_D x dx dy}{\int_D dx dy} \text{ (平面)}; \bar{x} = \frac{\int_D x dS}{\int_D dS} \text{ (曲面)}; \bar{x} = \frac{\int_D x dV}{\int_D dV} \text{ (立体)}。 \text{ (曲面曲线、立体图形仅数学一)}$$

4. 几类极坐标曲线

(1) 心形线: $r = a(1 + \cos\theta)$ 。

(2) 阿基米德螺旋线: $r = a\theta$ 。

(3) 对数螺旋线: $r = e^\theta$ 。

(4) 双纽线: $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$; 极坐标形式: $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ 。

(5) 三叶玫瑰线: $r = \sin 3\theta$ 。更一般地, $r = \sin n\theta$ (n 为正整数), 表示玫瑰线。

经典例题

38

设 $f(x) = \ln x$, 直线 L 为曲线 $y = f(x)$ 过原点的切线, 其函数表达式记为 $g(x)$, 曲线 $f(x)$ 、直线 L 和 x 轴围成的图形记为 D 。

(1) 方程 $f(x) = g(x) - \int_0^\pi \sqrt{1 - \cos 2x} dx$ 有几个不同的实根?

(2) 求图形 D 分别绕 x 轴、直线 $x = e$ 旋转一周所得立体的体积。

(3) 求图形 D 的形心坐标。

解

(1) 求解过程如下。

【解题模板】 求解切线方程。

设切点的横坐标为 x_0 , 则曲线 $y = \ln x$ 在点 $(x_0, \ln x_0)$ 处的切线方程是

$$y = \ln x_0 + \frac{1}{x_0}(x - x_0)$$

由该切线过原点知 $\ln x_0 - 1 = 0$, 从而 $x_0 = e$, 所以该切线的方程为 $y = \frac{1}{e}x$, 故 $g(x) = \frac{x}{e}$ 。

判定方程 $F(x) = f(x) - g(x) + \int_0^\pi \sqrt{1 - \cos 2x} dx = 0$ 的根等价于判定函数 $F(x)$ 图像与 x 轴的交点个数。

$$F(x) = \ln x - \frac{x}{e} + \int_0^\pi \sqrt{1 - \cos 2x} dx$$

其中, $\int_0^\pi \sqrt{1 - \cos 2x} dx$ 是定积分, 为常数, 且被积函数 $\sqrt{1 - \cos 2x}$ 在 $(0, \pi)$ 非负, 故

$$\int_0^\pi \sqrt{1 - \cos 2x} dx > 0。 \text{ 为简化计算, 令 } \int_0^\pi \sqrt{1 - \cos 2x} dx = k > 0,$$

【笔记】此处无须计算积分

即 $F(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k (k > 0)$ 。

【解题步骤 1】 首先利用零点定理说明零点的存在性。

其导数 $F'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e}$, 令 $F'(x) = 0$, 解得唯一驻点 $x = e$,

$$\text{即 } \begin{cases} F'(x) > 0, & 0 < x < e \\ F'(x) < 0, & e < x < +\infty \end{cases}.$$

所以 $x = e$ 是最大值点, 最大值为 $F(e) = \ln e - \frac{e}{e} + k = k > 0$ 。

$$\text{又因为 } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x - \frac{x}{e} + k \right) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x - \frac{x}{e} + k \right) = -\infty \end{cases}, \text{由连续函数的介值定理知, 在 } (0, e) \text{ 与 } (e, +\infty) \text{ 各}$$

有 1 个零点(不相同)。

【解题步骤 2】 再利用单调性(或凹凸性或罗尔定理反证)说明零点的至多性。

下面分别用 3 种方法说明零点的至多性。

【方法 1】 利用单调性说明至多 2 个零点。

因为 $F(x)$ 在区间 $(0, e)$ 上有 $F'(x) > 0$, 在区间 $(e, +\infty)$ 上有 $F'(x) < 0$, 所有 $F(x)$ 在上述两个区间上单调, 故在区间 $(0, e)$ 与 $(e, +\infty)$ 上各最多存在 1 个零点。

【方法 2】 利用凹凸性说明。

$$F(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k (k > 0), \text{ 所以 } F'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e}, \text{ 进而有 } F''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

函数的二阶导恒小于 0(不变号), 所以曲线 $y = F(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 为凸曲线, 最多穿过 x 轴 2 次。故 $F(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上最多存在 2 个零点。

【方法 3】 罗尔定理反证。

$$F(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k (k > 0), \text{ 所以 } F'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e}, \text{ 进而有 } F''(x) = -\frac{1}{x^2} \neq 0.$$

若 $F(x)$ 存在 3 个不同的零点, 即 $F(a) = F(b) = F(c) = 0$ 。

则由罗尔定理, 至少存在一个 $\xi_1 \in (a, b)$ 使得 $F'(\xi_1) = 0$ 。

至少存在一个 $\xi_2 \in (b, c)$ 使得 $F'(\xi_2) = 0$ 。

又因为 $F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$ 。由罗尔定理, 至少存在一个 $\xi_3 \in (\xi_1, \xi_2)$, 使得 $F''(\xi_3) = 0$, 这与 $F''(x) = -\frac{1}{x^2} \neq 0$ 矛盾。所以 $F(x)$ 至多有 2 个零点。

【笔记】 罗尔定理反证: 若 $F^{(n)}(x) \neq 0$, 则 $F(x)$ 最多有 n 个零点

【解题步骤 3】 综合至少与至多说明零点个数。

综上, $F(x)$ 在 $(0, e)$ 与 $(e, +\infty)$ 各有且仅有 1 个零点。

故方程 $\ln x = \frac{x}{e} - \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$ 在 $(0, +\infty)$ 有且仅有 2 个不同实根。

(2) 切线 $y = \frac{x}{e}$ 与 x 轴及直线 $x = e$ 所围成的三角形绕直线 $x = e$ 旋转所得的圆锥体积为 $V_1 = \frac{1}{3} \pi e^2$, 如图 3-1 所示。

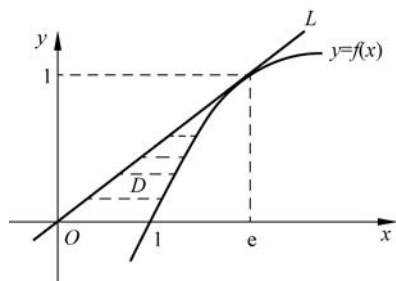


图 3-1

曲线 $y = \ln x$ 与 x 轴及直线 $x = e$ 所围成的图形绕直线 $x = e$ 旋转所得的旋转体体积为

$$V_2 = \int_0^1 \pi(e - e^y)^2 dy$$

因此 D 绕直线 $x = e$ 旋转所得的圆锥体积为

$$V = V_1 - V_2 = \frac{1}{3} \pi e^2 - \int_0^1 \pi(e - e^y)^2 dy = \frac{\pi}{6} (5e^2 - 12e + 3)$$

同理可得, 图形 D 绕 x 轴旋转所得的圆锥体积为

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 1^2 \cdot e - \int_1^e \pi(\ln x)^2 dx = \frac{\pi(6 - 2e)}{3}$$

(3) 设形心坐标为 $(\bar{x}, \bar{y})$, 则有

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (e^y - ey) dy = \frac{1}{2} e - 1 \\ \bar{x} &= \frac{\iint_D x d\sigma}{\iint_D d\sigma} = \frac{\int_0^1 dy \int_{ey}^{e^y} x dx}{\int_0^1 dy \int_{ey}^{e^y} dx} = \frac{\frac{e^2 - 3}{12}}{\frac{e - 2}{2}} = \frac{e^2 - 3}{6(e - 2)} \\ \bar{y} &= \frac{\iint_D y d\sigma}{\iint_D d\sigma} = \frac{\int_0^1 dy \int_{ey}^{e^y} y dx}{\int_0^1 dy \int_{ey}^{e^y} dx} = \frac{\frac{3 - e}{3}}{\frac{e - 2}{2}} = \frac{2(3 - e)}{3(e - 2)} \end{aligned}$$

所以形心坐标为 $\left(\frac{e^2 - 3}{6(e - 2)}, \frac{2(3 - e)}{3(e - 2)} \right)$ 。

39 对数螺线 $r = e^\theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$), 在点 $(e^{\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2})$ 处的切线为 L 。

(1) 求切线 L 的直角坐标方程(仅数学一和数学二)。

(2) 求对数螺线、极轴、直线 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 围成图形的面积。

(3) 求此段对数螺线的弧长(仅数学一和数学二)。

解 (1) 求切线方程的主要问题是求其斜率 $k = y'_x$, 而 y'_x 可由 $r = e^\theta$ 的参数方程

$$\begin{cases} x = r \cos \theta = e^\theta \cos \theta \\ y = r \sin \theta = e^\theta \sin \theta \end{cases}$$

求得, 即 $y'_x = \frac{y'_\theta}{x'_\theta} = \frac{e^\theta \sin \theta + e^\theta \cos \theta}{e^\theta \cos \theta - e^\theta \sin \theta} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\cos \theta - \sin \theta}$, 所以 $y'_x|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -1$ 。

又由参数方程可知, 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, $x = 0, y = e^{\frac{\pi}{2}}$, 所以切线的方程为 $y - e^{\frac{\pi}{2}} = -(x - 0)$, 即 $x + y = e^{\frac{\pi}{2}}$ 。

(2) $dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{1}{2} (e^\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} e^{2\theta} d\theta, A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} e^{2\theta} d\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} e^{2\theta} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} (e^\pi - 1)$ 。

(3) $ds = \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta = \sqrt{2} \cdot e^\theta d\theta, s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} \cdot e^\theta d\theta = \sqrt{2} \cdot e^\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2} (e^{\frac{\pi}{2}} - 1)$ 。

40 已知 $f(x)$ 是微分方程 $x^2 f''(x) + f(x) = x^3 \arcsin x$ 满足条件 $f(1) = f'(1) = 0$ 的特解, 则 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的平均值为_____。

解 问题等价于求积分 $\int_0^1 f(x) dx$ 的值。

对原方程左右两边积分可得 $\int_0^1 x^2 f''(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^3 \arcsin x dx$ 。①

其中, $\int_0^1 x^3 \arcsin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin^3 t \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t d\left(\frac{\sin^4 t}{4}\right) = t \cdot \frac{\sin^4 t}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt = \frac{5\pi}{64}$,

$\int_0^1 x^2 f''(x) dx = \left[x^2 f'(x) - 2x f(x) + 2 \int_0^x f(t) dt \right] \Big|_0^1 = 2 \int_0^1 f(x) dx, (f(1) = f'(1) = 0)$

所以式①可化为 $3 \int_0^1 f(x) dx = \frac{5\pi}{64}$, 即 $\int_0^1 f(x) dx = \frac{5\pi}{192}$ 。

41 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续周期函数。

(1) 求证 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$, 并求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x |\cos t| dt}{x}$ 的值。

(2) 求证 $\int_0^x f(t) dt = \varphi(x) + kx$ 并求 k , 其中 $\varphi(x)$ 是以 T 为周期的周期函数。

证 对任意 $x > T$, 存在自然数 n 使得 $nT \leq x < (n+1)T$ 。设 $x = nT + y, 0 \leq y < T$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $n \rightarrow \infty$ 。

$$\begin{aligned} (1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT + y} \int_0^{nT+y} f(t) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT + y} \left(\int_0^{nT} f(t) dt + \int_{nT}^{nT+y} f(t) dt \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT + y} \left(n \int_0^T f(t) dt + \int_{nT}^{nT+y} f(t) dt \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{T + \frac{y}{n}} \left(\int_0^T f(t) dt + \frac{1}{n} \int_{nT}^{nT+y} f(t) dt \right) = \frac{\int_0^T f(t) dt}{T}. \end{aligned}$$

因为 $|\cos t|$ 是以 π 为周期的周期函数, 所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x |\cos t| dt}{x} = \frac{\int_0^\pi |\cos t| dt}{\pi} = \frac{2}{\pi}$ 。

(2) 问题等价于求证存在 k 使得 $\varphi(x) = \int_0^x f(t) dt - kx$ 是以 T 为周期的周期函数。

$$\begin{aligned} \varphi(x+T) &= \int_0^{x+T} f(t) dt - k(x+T) = \int_0^x f(t) dt - kx + \int_x^{x+T} f(t) dt - kT, \text{ 又因为 } \int_x^{x+T} f(t) dt = \\ &= \int_0^T f(t) dt, \text{ 所以 } k = \frac{\int_0^T f(t) dt}{T} \text{ 时, 有 } \varphi(x+T) = \int_0^x f(t) dt - kx = \varphi(x), \text{ 所以命题得证, 且 } k = \\ &= \frac{\int_0^T f(t) dt}{T}. \end{aligned}$$

42 (仅数学一和数学二) 在平面上, 有一条从点 $(a, 0)$ 向 x 轴正方向的射线, 线密度为 ρ 。在点 $(0, h)$ 处 (其中 $h > 0$) 有一个质量为 m 的质点。则射线对该质点的引力为_____。

解 在 x 轴的 x 处取一小段 dx , 其质量为 ρdx , 到质点的距离为 $\sqrt{h^2 + x^2}$, 这一小段与质点的

引力是 $dF = \frac{Gm\rho dx}{h^2 + x^2}$ (其中 G 为引力常数), 则有 $dF_x = dF \cdot \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}}, dF_y = dF \cdot \frac{h}{\sqrt{h^2 + x^2}}$,

$$\begin{aligned}
 F_x &= \int_a^{+\infty} dF_x = \int_a^{+\infty} \frac{Gm\rho x dx}{(h^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Gm\rho}{2} \int_a^{+\infty} \frac{d(x^2 + h^2)}{(h^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 &= -Gm\rho(h^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \Big|_a^{+\infty} = \frac{Gm\rho}{\sqrt{h^2 + a^2}}.
 \end{aligned}$$

类似有

$$\begin{aligned}
 F_y &= \int_a^{+\infty} dF_y = \int_a^{+\infty} \frac{Gm\rho h dx}{(h^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_{\arctan \frac{a}{h}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{Gm\rho h^2 \sec^2 t dt}{h^3 \sec^3 t} \\
 &= \frac{Gm\rho}{h} \int_{\arctan \frac{a}{h}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = \frac{Gm\rho}{h} \left(1 - \sin \left(\arctan \frac{a}{h} \right) \right).
 \end{aligned}$$

所求引力向量为 $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$ 。



解题心得

专题 19 有理函数积分

有理函数积分在许多场合作为“绿叶”考查。近年来,命题人有将有理积分作为“红花”的趋势。瑕点函数法与待定系数法是两大方法,两者犹如大炮与步枪。战端开启后,先用炮兵火力压制,继而步兵冲锋。当然,有时仅炮兵足矣。

考哥说明



知识清单

- 分母一次方: $\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln |x-a| + C$ 。
- 分母二次方
 - $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C, \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$ 。
 - $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C, \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$ 。

经典例题

43 求不定积分 $\int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)} dx$ 。

解 设 $\frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$ 。

(1) 两边同乘以 $(x-1)^2$ 且令 $x=1$, 可得 $B=3$ 。

【笔记】快速求得平方因子的系数

(2) 两边同乘以 x 且令 $x \rightarrow \infty$, 可得 $A+C=0$ 。

【笔记】利用同阶/同阶无穷大得出方程

(3) 两边分别令 $x=0, x=-1$, 可得
$$\begin{cases} -A+B+D=6 \\ -\frac{A}{2}+\frac{B}{4}-C+D=\frac{3}{4} \end{cases}$$

【笔记】赋值特殊数, 得出方程

解得 $A=-2, C=2, D=1$ 。则 $\frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = -\frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{2x+1}{x^2+x+1}$, 于是

$$\int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)} dx = \int \left(-\frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{2x+1}{x^2+x+1} \right) dx = -2\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + \int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} = -2\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + \ln(x^2+x+1) + C。$$


解题心得

专题 20

反常积分审敛



孝哥说明

反常积分从诞生的那一天开始便是众多考生的噩梦。反常积分的计算不难, 难在积分审敛。本专题汇总了 4 类核心考法。掌握这 4 类考法的考生, 在考场之上必能“心诗飞逸九重天”。

知识清单

1. 高低阶审敛法

(1) 被积函数无穷小时:

设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上非负连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^p}} = l$ 。

① 当 $0 \leq l < +\infty$, 且 $p > 1$ 时, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛。

② 当 $0 < l \leq +\infty$, 且 $p \leq 1$ 时, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 发散。

(2) 被积函数无穷大时:

设 $f(x)$ 在 $(a, b]$ 上非负连续, $x=a$ 为瑕点, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{\frac{1}{(x-a)^p}} = l$ 。

① 当 $0 \leq l < +\infty$, 且 $p < 1$ 时, $\int_a^b f(x) dx$ 收敛。

② 当 $0 < l \leq +\infty$, 且 $p \geq 1$ 时, $\int_a^b f(x) dx$ 发散。

2. 两类重要的参比积分: $\begin{cases} \int_0^1 \frac{1}{x^p} dx, & \begin{cases} 0 < p < 1 \text{ 时, 收敛} \\ p \geq 1 \text{ 时, 发散} \end{cases} \\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx, & \begin{cases} p > 1 \text{ 时, 收敛} \\ p \leq 1 \text{ 时, 发散} \end{cases} \end{cases}$ 。

3. 反常积分 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^m \ln^n x} dx$ 的敛散性 ($m, n > 0$): $\begin{cases} m > 1, & \text{必收敛} \\ m = 1, & \begin{cases} n > 1, & \text{收敛} \\ n \leq 1, & \text{发散} \end{cases} \\ m < 1, & \text{必发散} \end{cases}$ 。

经典例题

44 设 m, n 是正整数, 则反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[2m]{\ln^2(1+x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 的敛散性()。

- A. 仅与 m 的取值有关 B. 仅与 n 的取值有关
C. 与 m, n 取值都有关 D. 与 m, n 取值都无关

解 C。

原积分应为 $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[2m]{\ln^2(1+x)}}{\sqrt[n]{x}} dx = \int_0^1 \frac{\sqrt[2m]{\ln^2(1+x)}}{\sqrt[n]{x}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt[2m]{\ln^2(1+x)}}{\sqrt[n]{x}} dx = I_1 + I_2$ 。

(1) 讨论积分 $I_1 = \int_0^1 \frac{\sqrt[2m]{\ln^2(1+x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 的敛散性。 $x \rightarrow 0^+$ 时, $\frac{\sqrt[2m]{\ln^2(1+x)}}{\sqrt[n]{x}} \sim \frac{1}{x^{\frac{3}{n}-\frac{1}{m}}}$ 。

显然, 当 $\frac{3}{n} - \frac{1}{m} \geq 1$, 该反常积分发散; 当 $0 < \frac{3}{n} - \frac{1}{m} < 1$, 该反常积分收敛。

当 $\frac{3}{n} - \frac{1}{m} \leq 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[\ln^2(1+x)]^{\frac{2}{m}}}{x^{\frac{3}{n}}}$ 存在, 此时 $I_1 = \int_0^1 \frac{\sqrt[2m]{\ln^2(1+x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 实际上不是反常积分, 所以

由判别条件有: 当 $\frac{3}{n} - \frac{1}{m} \geq 1$ 时, 该反常积分发散; 当 $\frac{3}{n} - \frac{1}{m} < 1$ 时, 该反常积分收敛。

将判别条件用于本题, 可得

① 当 $n=1, m$ 取任意值时, 有 $\frac{3}{n} - \frac{1}{m} \geq 1$, 此时反常积分发散 (补充: 此时有 $\frac{3}{n} = 3, \frac{1}{m} \leq 1$)。

② 当 $n=2, m=2, 3, 4, \dots$ 时, 满足 $\frac{3}{n} - \frac{1}{m} \geq 1$, 此时反常积分发散。

但 $n=2, m=1$ 时, $\frac{3}{n} - \frac{1}{m} = 0.5 < 1$, 此时反常积分收敛。

$n=3, 4, 5, \dots$ 时, m 取任意值, 均满足 $\frac{3}{n} - \frac{1}{m} < 1$, 此时反常积分收敛。

(2) 讨论积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt[2m]{\ln^2(1+x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 的敛散性。

$x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{\sqrt[2m]{\ln^2(1+x)}}{\sqrt[n]{x}} = \frac{[\ln(1+x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{3}{n}}}$, 当 $\frac{3}{n} > 1$ 时, 即 $n=1, 2$ 时, 有 $\frac{\sqrt[2m]{\ln^2(1+x)}}{\sqrt[n]{x}} = \frac{[\ln(1+x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{3}{n}}} \ll \frac{x^{0.1}}{x^{\frac{3}{n}}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{n}-0.1}}, \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{n}-0.1}} dx$ 收敛(说明: $\frac{3}{n}-0.1 > 1.4 > 1$), 故 $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt[2m]{\ln^2(1+x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 收敛。

$0 < \frac{3}{n} \leq 1$ 时, 即 $n=3, 4, \dots$ 时, 有 $\frac{\sqrt[2m]{\ln^2(1+x)}}{\sqrt[n]{x}} = \frac{[\ln(1+x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{3}{n}}} \gg \frac{1}{x}, \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ 发散, 故 $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt[2m]{\ln^2(1+x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 发散。

综上, 仅当 $n=2, m=1$ 时, I_1, I_2 均收敛, 此时反常积分收敛。在其他情况下 I_1, I_2 至少有一个发散, 反常积分发散。反常积分的敛散性与 m, n 均有关, 故选 C。

45 关于反常积分, 下列说法正确的有()个。

(1) 设 m, n 是正整数, 则反常积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt[2m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 的收敛性与 m, n 取值均无关

(2) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1 < x < e \\ \frac{1}{x \ln^{\alpha+1} x}, & x \geq e \end{cases}$, 若反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 则 $0 < \alpha < 2$

(3) 反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x(\ln x)^k}{2+x^2} dx$ ($k \in (-\infty, +\infty)$) 的敛散性与 k 无关

(4) 设 m, n 均为正数, 若反常积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^n x \cos^m x}$ 收敛, 则 $m < 1$, 且 $n < 1$

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

解 D。

说法(1)对。 $x=0$ 与 $x=1$ 都是瑕点, 应写成

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[2m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[2m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[2m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$$

对于第一个积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[2m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$, 由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}} = 1$, 显然, 当 $0 < \frac{1}{n} - \frac{2}{m} < 1$ 时, 则

该反常积分收敛。

【笔记】对无穷大的被积函数 $\frac{1}{(x-x_0)^p}, 0 < p < 1$ 时对应的反常积分收敛

当 $\frac{1}{n} - \frac{2}{m} \leq 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}}$ 存在, 此时 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[2m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 实际上不是反常积分, 故收敛。

不论 m, n 是什么正整数, $\frac{1}{n} - \frac{2}{m} < 1$ 总成立, 故 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 总收敛。

对第二个积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{\frac{1}{(1-x)^{0.5}}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} [\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}} (1-x)^{0.5} = 0$, 说明 $\frac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}} \ll \frac{1}{(1-x)^{0.5}}$, 而积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{(1-x)^{0.5}} dx$ 收敛, 所以 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 收敛。

【笔记】对无穷大的被积函数 $\frac{1}{(x-x_0)^p}$, $0 < p < 1$ 时对应的反常积分收敛, 故 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{(1-x)^{0.5}} dx$ 收敛

【笔记】证明 $\lim_{x \rightarrow 1^-} [\ln(1-x)](1-x)^{0.5} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} [\ln(1-x)](1-x)^{0.5} = \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{0.5} \ln t = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln t}{t^{-0.5}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^{-1}}{-0.5 t^{-1.5}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^{0.5}}{-0.5} = 0$$

同理可证 $\lim_{x \rightarrow 1^-} [\ln(1-x)]^n (1-x)^{0.5} = 0 (n=2, 3, \dots)$

说法(2)对。 $\int_1^{+\infty} f(x) dx = \int_1^e f(x) dx + \int_e^{+\infty} f(x) dx$ 。

由 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛可知, $\int_1^e f(x) dx$ 与 $\int_e^{+\infty} f(x) dx$ 均收敛。

$\int_1^e f(x) dx = \int_1^e \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}} dx$, $x=1$ 是瑕点, 因为 $\int_1^e \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}} dx$ 收敛, 所以 $\alpha-1 < 1 \Rightarrow \alpha < 2$ 。

$\int_e^{+\infty} f(x) dx = \int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^{\alpha+1} x} dx = -\frac{1}{\alpha} (\ln x)^{-\alpha} \Big|_e^{+\infty}$, 要使其收敛, 则 $\alpha > 0$ 。

所以, $0 < \alpha < 2$ 。

说法(3)对。无论 k 取何值, 反常积分总发散。

反常积分有一个奇点 $x=+\infty$, 两个瑕点 $x=0$ 和 $x=1$, 将反常积分化为

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{x(\ln x)^k}{2+x^2} dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x(\ln x)^k}{2+x^2} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x(\ln x)^k}{2+x^2} dx + \int_1^2 \frac{x(\ln x)^k}{2+x^2} dx + \int_2^{+\infty} \frac{x(\ln x)^k}{2+x^2} dx \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \end{aligned}$$

① 对 $I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x(\ln x)^k}{2+x^2} dx$, 因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x(\ln x)^k}{2+x^2}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\frac{3}{2}}(\ln x)^k}{2+x^2} = 0 (k \in (-\infty, +\infty))$ 并且

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ 收敛, 所以 $\int_0^1 \frac{x(\ln x)^k}{2+x^2} dx$ 对于 $k \in (-\infty, +\infty)$ 均收敛。

② 对 $I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x(\ln x)^k}{2+x^2} dx$ 与 $I_3 = \int_1^2 \frac{x(\ln x)^k}{2+x^2} dx$, 当 $x \rightarrow 1$ 时, 有 $\ln x = \ln(1+x-1) \sim x-1$,

$\frac{x(\ln x)^k}{2+x^2} \sim \frac{1}{3} \cdot (x-1)^k$, 若 $k > 0$, 则两个积分收敛。

当 $k < 0$ 时, 有 $\frac{x(\ln x)^k}{2+x^2} \sim \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(x-1)^{-k}}$, 此时若有 $0 < -k < 1$, 即 $-1 < k < 0$, 则两个积分收敛;

此时若有 $-k \geq 1$, 即 $k \leq -1$, 则两个积分发散。

③ 对 $I_4 = \int_2^{+\infty} \frac{x(\ln x)^k}{2+x^2} dx$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{x(\ln x)^k}{2+x^2} \sim \frac{(\ln x)^k}{x}$, 所以 $\int_2^{+\infty} \frac{x(\ln x)^k}{2+x^2} dx$ 与

$\int_2^{+\infty} \frac{(\ln x)^k}{x} dx$ 的敛散性相同。又

$$\int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^k}{x} dx = \begin{cases} \left. \frac{(\ln x)^{k+1}}{k+1} \right|_2^{+\infty} = 0, & k < -1 \\ \left. \frac{(\ln x)^{k+1}}{k+1} \right|_2^{+\infty} = +\infty, & k > -1 \\ \ln \ln x \Big|_2^{+\infty} = +\infty, & k = -1 \end{cases}$$

所以反常积分 I_4 在 $k < -1$ 时收敛, 在 $k \geq -1$ 时发散。

综上, 无论 k 取何值, 反常积分总发散。

说法(4)对。 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^n x \cos^m x} = \int_0^1 \frac{dx}{\sin^n x \cos^m x} + \int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^n x \cos^m x}$ 。

① 对于积分 $I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sin^n x \cos^m x}$, 被积函数为 $f(x) = \frac{1}{\sin^n x \cos^m x}$ 。

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)^p} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\sin^n x \cos^m x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^p} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^p}{\sin^n x} = c$, 可取 $p = n$, 当 $p = n < 1$ 时, 积分 I_1

收敛。

② 对于积分 $I_2 = \int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^n x \cos^m x}$, 被积函数为 $f(x) = \frac{1}{\sin^n x \cos^m x}$ 。

当 $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$ 时, 有

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{f(x)}{\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} - x}\right)^p} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{1}{\sin^n x \cos^m x}}{\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} - x}\right)^p} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^p}{\cos^m x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^p}{\sin^m \left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = c$$

可取 $p = m$, 当 $p = m < 1$ 时, 积分 I_2 收敛。所以说法(4)正确。

综上所述, 4 种说法均正确, 故选 D。



解题心得
