

第3章 z 变换及离散 时间傅里叶变换

3.1 引言

对信号与系统的分析不仅可以采用时域分析法,还可以采用变换域分析法。对于连续时间系统,变换域分析法是指采用拉普拉斯变换或连续傅里叶变换的求解法;对于离散系统,变换域分析法是指采用 z 变换和离散傅里叶变换的求解法。对于连续系统,拉普拉斯变换可以将微分方程转换为代数方程,而对于离散系统, z 变换则可以将差分方程转换为代数方程,从而使得求解变得更方便和快捷。对于离散时间信号与系统的分析, z 变换是一个非常重要的基础性数学工具。 z 变换的概念既可以从理想抽样信号的拉普拉斯变换引出,也可以独立对离散时间信号(序列)给出 z 变换定义。

本章内容包括序列 z 变换的定义、性质与应用, z 逆变换及其求解, z 变换、拉普拉斯变换和傅里叶变换之间的关系,离散时间傅里叶变换及其性质,频率响应及其几何确定方法等。

3.2 z 变换及典型序列 z 变换的定义与收敛域

霍尔维兹(Hurewicz)于1947年即开始研究并将 z 变换用于离散序列处理。1949—1952年,拉格兹尼(Ragazzini)、扎德荷(Zadeh)在霍尔维兹的基础上完善了 z 变换,使序列和离散系统的分析变得更方便,并简化了运算步骤。

从最初的简单应用到今天用于分析数字信号和数字系统的多方面, z 变换的产生过程表明,科学技术的发展是一个从简单到复杂,不断完善、逐步发展的过程,充分体现了人类不断超越、追求卓越、精益求精的科学精神。

3.2.1 z 变换的定义与收敛域

1. z 变换的定义

若序列为 $x(n)$,则幂级数

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (3-1)$$

称为序列 $x(n)$ 的 z 变换,其中 z 为变量,也可将 z 变换简单表示为

$$Z[x(n)] = X(z) \quad (3-2)$$

2. z 变换的收敛域

z 变换的定义式(3-1)右边为幂级数,只有当该幂级数收敛时,z 变换才有意义。对任意序列 $x(n)$,使 z 变换收敛的所有 z 取值的集合称为 $X(z)$ 的**收敛域**(Region of Convergence, ROC)。

按照级数理论,式(3-1)收敛的充分必要条件是幂级数满足绝对可加性,即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)z^{-n}| = M < \infty \quad (3-3)$$

根据级数知识,使式(3-3)具有绝对可加性,则 $|z|$ 的取值必须在一定范围内,该取值区间就是 z 变换的收敛域。序列 $x(n)$ 的形式不同,其 z 变换的收敛域也不相同。

3.2.2 典型序列 z 变换的收敛域

1. 有限长序列

有限长序列是指序列的长度(点数)是有限长,即序列在 $n_1 \leq n \leq n_2$ 的有限区间内具有定义,在此区间之外,序列取值均为零。因此,这类序列的 z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)z^{-n} \quad (3-4)$$

$X(z)$ 是有限项级数之和,若幂级数的每一项有界,其 z 变换就收敛,即

$$|x(n)z^{-n}| < \infty, \quad n_1 \leq n \leq n_2$$

由于 $x(n)$ 有界,故 $|z^{-n}|$ 也必须有限,即

$$|z^{-n}| < \infty, \quad n_1 \leq n \leq n_2$$

显然, $0 < |z| < \infty$ 的有限 z 平面都满足该条件,因此, $X(z)$ 的收敛域至少包含除 $z=0$ 之外的“有限 z 平面”,其区域如图 3-1(b)所示。

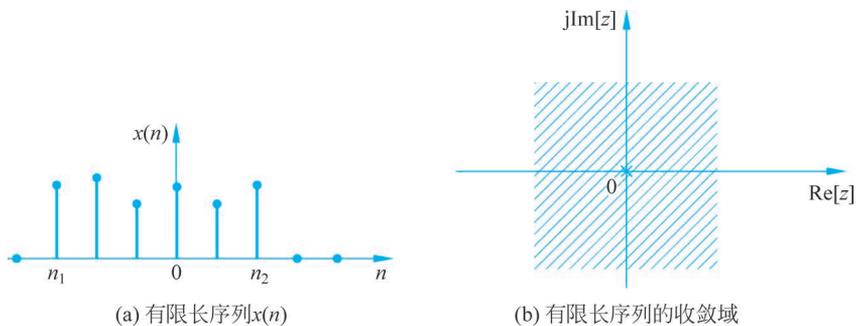


图 3-1 有限长序列及其收敛域 ($n_1 < 0, n_2 > 0$)

有限长序列的收敛域是否包含 0 和 ∞ ,与 n_1, n_2 的取值有关,当 $n_1 < 0, n_2 \leq 0$ 时,收敛域为 z 全平面;当 $n_1 \geq 0, n_2 > 0$ 时,收敛域为不包含坐标原点的 z 全平面;当 $n_1 < 0, n_2 > 0$ 时,收敛域既不包含原点 0,也不包含 ∞ 。收敛域的具体情况如下所示。

$$\begin{cases} n_1 < 0, n_2 \leq 0 \text{ 时, } 0 \leq |z| < \infty \\ n_1 \geq 0, n_2 > 0 \text{ 时, } 0 < |z| \leq \infty \\ n_1 < 0, n_2 > 0 \text{ 时, } 0 < |z| < \infty \end{cases} \quad (3-5)$$

求序列 z 变换通常要用到级数求和方法,下面举例来说明序列 z 变换及收敛域的求法。

【例 3-1】 求有限长序列收敛域示例。

已知序列 $x(n]=R_6(n)$, 求序列 $x(n)$ 的 z 变换及收敛域。

解: 这是序列长度为 1 的有限长度列, 根据 z 变换的定义可得

$$Z[R_6(n)] = \sum_{n=0}^5 z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + z^{-5} = \frac{1 - z^{-6}}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 0$$

根据收敛域的定义, z 取任何大于 0 的有限值均满足收敛条件, 因此, 矩形序列 $R_6(n)$ 的收敛域为有限 z 平面, 如图 3-2 所示。

2. 右边序列

右边序列是指序列的起点序号为某一有限值, 终点序号为无穷大的序列, 即当 $n \geq n_1$ 时, $x(n)$ 有值, $n < n_1$ 时, $x(n) = 0$, 其 z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=n_1}^{-1} x(n)z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (3-6)$$

式(3-6)右端第一项为有限长序列的 z 变换, 因此, 其收敛域为有限 z 平面; 第二项为 z 的负幂级数, 根据复变函数幂级数收敛知识可知, 存在一个收敛半径为 R_{x-} 的圆, 该级数在以坐标原点为圆心, 以 R_{x-} 为半径的圆之外的所有区域均绝对收敛, 由此可知, 对于式(3-6), 若第二项 $\sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$ 收敛, 则 $X(z)$ 收敛。 $X(z)$ 的收敛域为两项的交集(公共部分), 因此, R_{x-} 是右边序列收敛域的最小半径, 其收敛域为

$$R_{x-} < |z| < \infty$$

由此可得, 右边序列及其收敛域如图 3-3 所示。

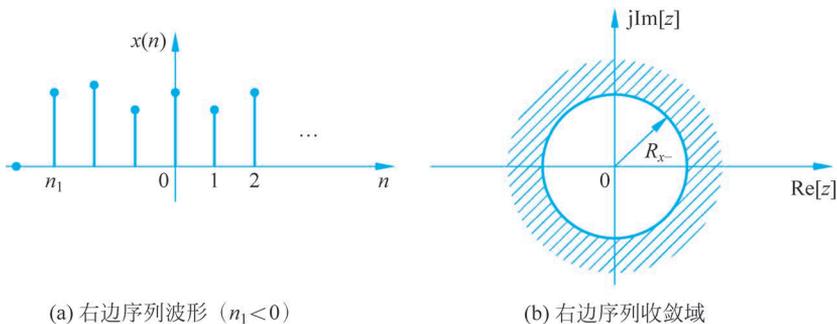


图 3-3 右边序列及其收敛域

有一类很重要的右边序列, 这就是因果序列。因果序列是指 $n_1 = 0$ 时的右边序列, 也就是说, 在 $n \geq 0$ 时序列 $x(n)$ 有定义, $n < 0$ 时, $x(n) = 0$ 。因果序列的 z 变换中没有 z 的正幂次项, 只有 z 的零幂项和负幂项, 因此, 收敛域包括 $|z| \rightarrow \infty$, 即

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}, \quad |z| > R_{x-} \quad (3-7)$$

因果序列及其收敛域如图 3-4 所示, z 变换在 $|z| \rightarrow \infty$ 处收敛是因果序列的特征之一。

【例 3-2】 右边序列收敛域示例。



视频讲解

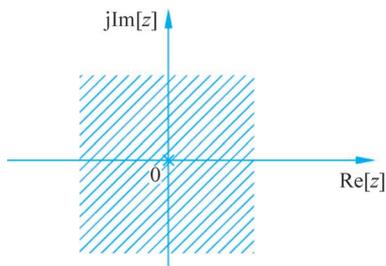


图 3-2 矩形序列 $R_6(n)$ 的收敛域

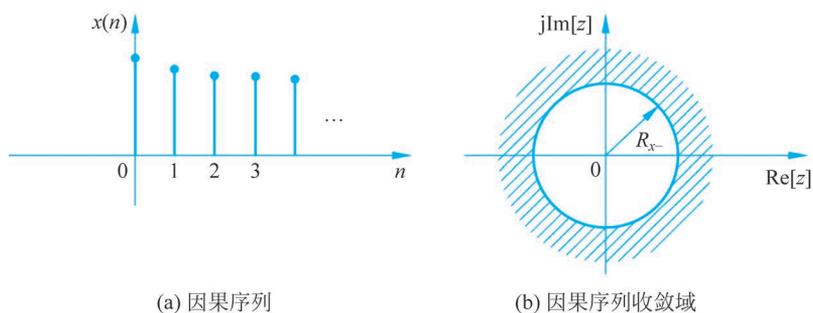


图 3-4 因果序列及其收敛域

已知 $x(n)=a^n u(n)$, 求序列 $x(n)$ 的 z 变换和收敛域。

解: 由于 $x(n)$ 是右边序列, 而且是因果序列, 根据 z 变换的定义可得

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

上式为无穷项等比级数求和, 根据级数求和公式可以很方便求出 z 变换及收敛域。根据级数求和过程可知, 当 $|az^{-1}| < 1$, 即 $|z| > |a|$ 时收敛, 如图 3-5 所示。

由于 $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$, $z=a$ 为 $X(z)$ 的极

点, 因此收敛域为极点所在圆 $|z|=|a|$ 的外部, 在收敛域之内 $X(z)$ 为解析函数。

一般来说, 右边序列 z 变换的收敛域在以最大模值极点长度为半径的圆的外部。

3. 左边序列

左边序列是指序列的起点序号为负无穷大, 终点序号为某一有限值的序列, 即序列在 $n \leq n_2$ 时, $x(n)$ 有定义值, 当 $n > n_2$ 时, $x(n)=0$, 其 z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^0 x(n) z^{-n} + \sum_{n=1}^{n_2} x(n) z^{-n} \quad (3-8)$$

式(3-8)第一项是正幂级数, 根据级数收敛定理, 存在某一收敛半径为 R_{x+} 的圆, 级数在以坐标原点为圆心, 以 R_{x+} 为半径的圆内所有区域均绝对收敛; 第二项是有限长序列的 z 变换, 收敛域为有限 z 平面 (若 $n_2 > 0$, 则不包含原点)。根据式(3-8), 收敛域应为两项收敛域的交集, 由此可得, 左边序列 z 变换的收敛域为

$$0 < |z| < R_{x+}$$

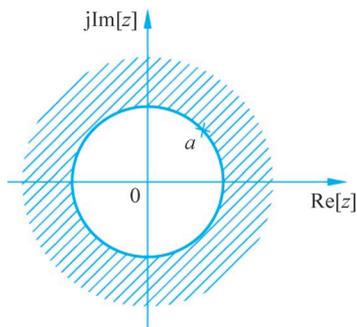
左边序列及其收敛域范围如图 3-6 所示, 若 $n_2 \leq 0$, 则式(3-8)右端没有第二项, 这时收敛域包括 $z=0$, 即 $|z| < R_{x+}$ 。

【例 3-3】 左边序列收敛域示例。

已知序列 $x(n)=-a^n u(-n-1)$, 求 $x(n)$ 的 z 变换及收敛域。

解: 序列 $x(n)$ 为左边序列, 根据 z 变换定义可得

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -a^n u(-n-1) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -a^n z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} -a^{-n} z^n = \frac{-a^{-1} z}{1-a^{-1} z}$$

图 3-5 序列 $a^n u(n)$ 的 z 变换的收敛域

视频讲解

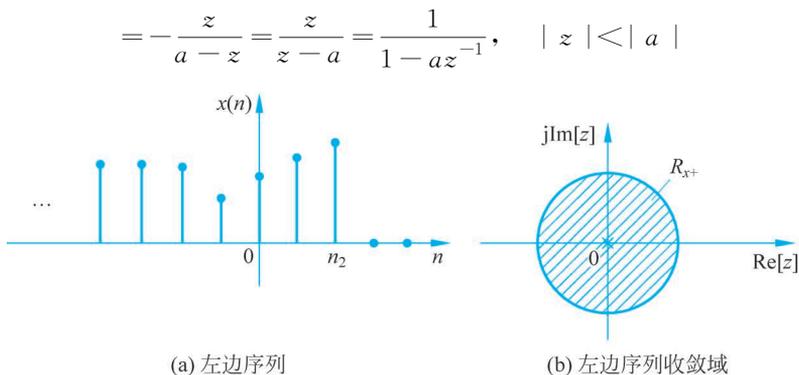


图 3-6 左边序列及其收敛域

在求 z 变换时必须进行无穷项等比级数求和,根据级数收敛性质可知,序列 $x(n)$ 的 z 变换 $X(z)$ 的收敛域为

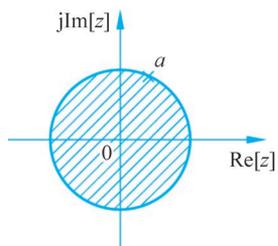
$$|a^{-1}z| < 1$$

即

$$|z| < |a|$$

该左边序列的收敛域如图 3-7 所示,同样,在收敛域范围内 $X(z)$ 是解析函数,因此,一般来说,左边序列 z 变换的收敛域在以其全部有限极点中模值最小的极点为半径的圆的内部。

观察本例 z 变换 $X(z)$ 可发现,解析式与例 3-2 完全相同,即一个左边序列和一个右边序列的 z 变换的解析表达式 $X(z)$ 完全相同。这说明,对于 z 变换仅仅给定解析式 $X(z)$,其信息并不充分,仅依据 $X(z)$ 的解析表达式并不能确定该 z 变换对应于哪一个序列。通常情况下,在给定序列 z 变换解析表达式的同时,应给出其收敛域才能唯一确定所对应的序列。

图 3-7 序列 $-a^n u(-n-1)$ 的 z 变换的收敛域

4. 双边序列

双边序列是指序列的起点序号为负无穷大,终点序号为正无穷大的序列,即 n 为任意整数, $x(n)$ 皆有数值的序列。双边序列可以视为一个右边序列和一个左边序列之和,即

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)z^{-n} \quad (3-9)$$

显然,式(3-9)的收敛域是右边序列与左边序列收敛域的交集。等式右边第一项为右边序列,收敛域为 $|z| > R_{x-}$,第二项为左边序列,收敛域为 $|z| < R_{x+}$,因此双边序列收敛域为

$$R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

该不等式确定了 z 平面的一个环状区域,并具有如下特点:

- (1) 当 $R_{x-} > R_{x+}$ 时,式(3-9)两项收敛域无交集,则不存在公共收敛域;
- (2) 当 $R_{x-} < R_{x+}$ 时,式(3-9)两项收敛域有交集,为环状收敛域。

双边序列及其收敛域如图 3-8 所示,双边序列的收敛域为一个环状区域。

【例 3-4】 双边序列收敛域示例。

已知序列如下:

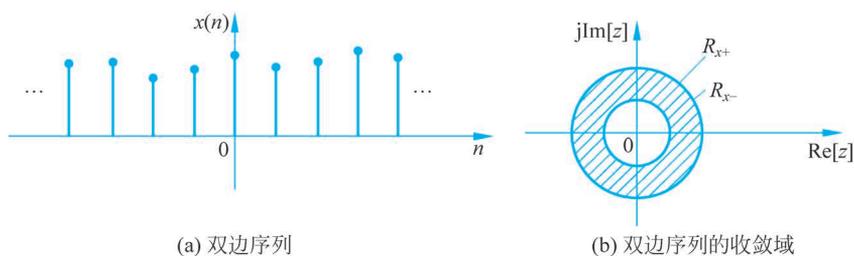


图 3-8 双边序列及其收敛域

$$(1) x(n) = a^{|n|}$$

$$(2) x(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ -b^n, & n < 0 \end{cases}$$

求上述序列的 z 变换与收敛域。

解: (1) 序列 $x(n)$ 是一个双边序列, 根据 z 变换定义, 可得

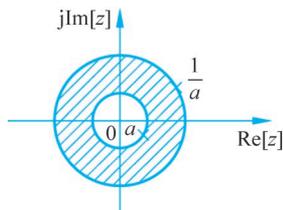
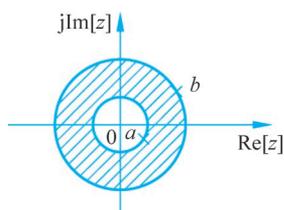
$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{|n|} z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} \\ &= \frac{az}{1-az} + \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z(1-a^2)}{(z-a)(1-az)}, \quad |a| < |z| < \left| \frac{1}{a} \right| \end{aligned}$$

如果 $|a| > 1$, 则 $X(z)$ 无公共收敛区域; 如果 $|a| < 1$, 则 z 变换的解析表达式有收敛域为 $|a| < |z| < \left| \frac{1}{a} \right|$ 的公共环状区域, 该序列 z 变换的收敛区域如图 3-9 所示。

(2) 序列 $x(n)$ 是一个双边序列, 根据 z 变换定义, 可得

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} b^n z^{-n} \\ &= \frac{1}{1-az^{-1}} + \frac{1}{1-bz^{-1}} = \frac{z}{z-a} + \frac{z}{z-b} \\ &= \frac{2z^2 - z(a+b)}{(z-a)(z-b)}, \quad |a| < |z| < |b| \end{aligned}$$

如果 $|a| > |b|$, 则 $X(z)$ 无公共收敛区域; 如果 $|a| < |b|$, 则上式为 z 变换的解析表达式, 其收敛域为 $|a| < |z| < |b|$ 的环状区域, 该双边序列的收敛域如图 3-10 所示。

图 3-9 序列 $a^{|n|}$ 的收敛域图 3-10 双边序列 $x(n)$ 的收敛域

对于右边序列, 其 z 变换的收敛域在以其模值最大的极点为半径的圆之外, 而左边序列 z 变换的收敛域在以其模值最小的极点为半径的圆之内, 双边序列 z 变换收敛域为环状区域。

3.3 z 逆变换

z 变换是指已知序列 $x(n)$ 求 z 变换解析表达式及收敛域,而 z 逆变换是指已知序列 z 变换的解析表达式 $X(z)$ 及收敛域,求序列 $x(n)$,称为 z 逆变换或 z 反变换。 z 逆变换可表示为

$$x(n) = Z^{-1}[X(z)] \quad (3-10)$$

根据 z 变换及其逆变换的概念可知,式(3-10)实质上是求 $X(z)$ 的幂级数展开式。 z 逆变换的求解方法主要包括围线积分法(留数法)、部分分式展开法和长除法三种。



视频讲解

3.3.1 围线积分法(留数法)

在复变函数中,留数定理是计算解析函数沿封闭曲线路径积分的一个有力工具,在 z 逆变换的计算中,围线积分法是求 z 逆变换的基本方法。根据复变函数理论,若函数 $X(z)$ 在环状区域 $0 \leq R_{x-} < |z| < R_{x+} \leq \infty$ 是解析的,则在该区域内 $X(z)$ 可以展开为罗伦级数,即

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^{-n} \quad |, \quad R_{x-} < |z| < R_{x+} \quad (3-11)$$

式中

$$C_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3-12)$$

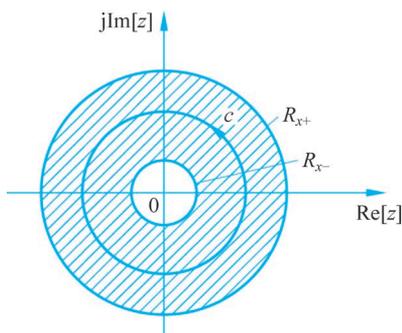


图 3-11 围线积分封闭曲线选取

其中,积分曲线 c 是 $X(z)$ 收敛域(又称为解析域)内包含坐标原点的一条逆时针方向的简单封闭曲线,封闭曲线 c 简称为围线 c ,如图 3-11 所示。

而序列 $x(n)$ 的 z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \quad (3-13)$$

比较式(3-11)与式(3-13)可知, $x(n)$ 实际上是罗伦级数的系数 C_n ,即

$$x(n) = C_n$$

因此

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz, \quad c \in (R_{x-}, R_{x+}) \quad (3-14)$$

这就是基于围线积分求解 z 逆变换的基本公式。

【例 3-5】 证明 z 逆变换的围线积分公式(3-14)。

证: (1) 先对式(3-12)右端进行推导。

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_c \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) z^{-m} \right] z^{n-1} dz \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \oint_c z^{(n-m)-1} dz \end{aligned} \quad (3-15)$$

该式计算的关键在于积分项 $\oint_c z^{(n-m)-1} dz$ 的计算。

(2) 应用柯西-古萨定理(柯西积分定理)计算围线积分。

对于式(3-15)中的围线积分项,取围线 c 为圆环内半径为 a 的圆,令

$$z = a e^{j\varphi}, R_{x-} < a < R_{x+}$$

根据柯西积分定理可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \oint_c z^{k-1} dz &= \oint_c (a e^{j\varphi})^{k-1} d[a e^{j\varphi}] \frac{1}{2\pi j} \oint_c a^{k-1} e^{j(k-1)\varphi} d[a e^{j\varphi}] \\ &= \frac{a^k}{2\pi j} \int_{-\pi}^{\pi} e^{jk\varphi} d\varphi = \begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & k \neq 0, k \text{ 为整数} \end{cases} \end{aligned}$$

即

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_c z^{k-1} dz = \delta(k) \quad (3-16)$$

将式(3-16)的结论应用到式(3-15)的积分计算,则可以得出,当 $n=m$ 时,其积分值等于 $2\pi j$,对于其他情况,积分值均为 0。因此,根据柯西积分公式,式(3-15)可化简为

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \oint_c z^{(n-m)-1} dz = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \delta(n-m) = x(n)$$

即

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz, \quad c \in (R_{x-}, R_{x+}) \quad (3-17)$$

采用围线积分法计算 z 逆变换时,如果直接计算围线积分,不仅计算量大,而且运算较复杂,一般采用留数定理进行计算可以大幅降低运算复杂度。

若被积函数 $X(z)z^{n-1}$ 沿封闭围线 c 连续,并且在围线 c 内有 N 个极点(用 z_k 表示),在围线 c 之外有 M 个极点(用 z_m 表示),根据留数定理,则有

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz = \sum_k \text{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_k} \quad (3-18)$$

或

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz = - \sum_m \text{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_m} \quad (3-19)$$

式(3-18)中, $\oint_c \sum_k \text{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_k}$ 表示函数 $X(z)z^{n-1}$ 在围线 c 之内的极点 $z=z_k$ 的留数。式(3-18)表明,函数 $X(z)z^{n-1}$ 沿围线 c 逆时针方向的积分等于 $X(z)z^{n-1}$ 在围线 c 内各极点的留数之和。

式(3-19)应用的条件是被积函数 $X(z)z^{n-1}$ 分母 z 的阶次高于分子 z 的阶次二阶及以上。式(3-19)表明,函数 $X(z)z^{n-1}$ 沿围线 c 顺时针方向的积分等于 $X(z)z^{n-1}$ 在围线 c 外各极点的留数之和。

根据积分理论有

$$\oint_c X(z) dz = - \oint_c X(z) dz \quad (3-20)$$

(封闭曲线积分方向:等式左边逆时针方向,右边顺时针方向)

由式(3-18)和式(3-19)可得

$$\sum_k \text{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_k} = - \sum_m \text{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_m} \quad (3-21)$$

将式(3-18)、式(3-21)分别代入式(3-14),可得

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz = \sum_k \text{Res}[X(z) z^{n-1}]_{z=z_k} \quad (3-22)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz = - \sum_m \text{Res}[X(z) z^{n-1}]_{z=z_m} \quad (3-23)$$

应用式(3-23)进行计算,要求被积函数 $X(z)z^{n-1}$ 分母 z 的阶次比分子高二阶及以上。

式(3-22)和式(3-23)均可用于留数计算,但在计算的复杂度上有差别,应根据被积函数 $X(z)z^{n-1}$ 的具体情况进行合理选择。

若 n 大于某一数值时,被积函数 $X(z)z^{n-1}$ 在围线 c 的外部有多重极点,这时选围线 c 之内的极点求留数相对简单。若 n 小于某一数值时,被积函数 $X(z)z^{n-1}$ 在围线 c 之内(如 $z=0$ 处)有多重极点,则选围线 c 之外的极点计算留数较简单。

对于被积函数 $X(z)z^{n-1}$ 在任意极点处的留数,应先判断是单极点还是重极点,然后采用下述方法求解。

(1) 若 z_i 是 $X(z)z^{n-1}$ 的单极点,则有

$$\text{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_i} = [(z - z_i)x(z)z^{n-1}]_{z=z_i} \quad (3-24)$$

(2) 若 z_i 是 $X(z)z^{n-1}$ 的 m 重极点,则有

$$\text{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_i} = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_i)^m x(z)z^{n-1}]_{z=z_i} \quad (3-25)$$

【例 3-6】 z 逆变换示例。

已知 $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$, 按下列要求计算 $X(z)$ 的 z 逆变换。

(1) 收敛域 $|z| > a, a > 0$;

(2) 收敛域 $|z| < |a|$ 。

解: (1) 根据 z 逆变换定义有

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{1}{1-az^{-1}} z^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{z^n}{z-a} dz$$

由于收敛域 $|z| > a, a > 0$, 说明 $X(z)$ 对应的序列 $x(n)$ 为因果序列, 如图 3-12(a) 所示, 选收敛域 $|z| > a$ 的任一封闭曲线作围线, 根据留数定理, 可得

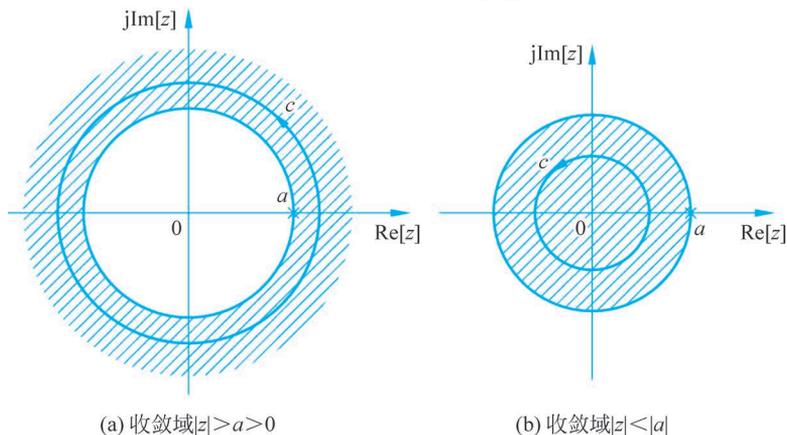


图 3-12 $X(z)$ 的收敛域

① $n \geq 0$ 时, 围线 c 内只有一个极点 $z = a$ 。

$$x(n) = \text{Res} \left[\frac{z^n}{z-a} \right]_{z=a} = \left[(z-a) \frac{z^n}{z-a} \right]_{z=a} = a^n$$

② $n < 0$ 时, 由于 $x(n)$ 为因果序列, 故 $x(n) = 0$ 。

因此, 可得

$$x(n) = a^n u(n)$$

(2) 根据 z 逆变换定义有

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{1}{1-az^{-1}} z^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{z^n}{z-a} dz$$

① 当 $n \geq 0$ 时, 唯一的极点 $z = a$ 为单极点, 如图 3-12(b) 所示, 该极点不在以 a 为半径的圆的内部, 即围线内无极点, 因此有

$$x(n) = 0$$

② 当 $n \leq 0$ 时, 极点 $z = 0$ 为 n 阶极点, 在围线 c 之内, n 阶极点计算留数较复杂, 选围线 c 外部极点求留数, 因此可得

$$x(n) = -\text{Res} \left[\frac{z^n}{z-a} \right]_{z=a} = -a^n, \quad n < 0$$

综上所述, $X(z)$ 的逆变换如下:

$$x(n) = -a^n u(-n-1)$$

【例 3-7】 求 z 逆变换示例。

已知 $X(z)$ 如下:

$$X(z) = -\frac{1}{(1-3z^{-1})\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}, \quad \frac{1}{3} < |z| < 3$$

求 $X(z)$ 的逆变换。

解: 根据已知条件对 $X(z)$ 进行如下形式的化简:

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-3)\left(z-\frac{1}{3}\right)}$$

采用围线积分计算 z 逆变换:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{z^2}{(3-z)\left(z-\frac{1}{3}\right)} z^{n-1} dz$$

曲线 c 为如图 3-13 所示 $X(z)$ 的收敛域内的封闭曲线。

(1) 当 $n \geq -1$ 时, 被积函数如下:

$$X(z) z^{n-1} = \frac{z^2}{(3-z)\left(z-\frac{1}{3}\right)} z^{n-1} = \frac{z^{n+1}}{(3-z)\left(z-\frac{1}{3}\right)}$$

在围线 c 内, 上式仅有 $z = 1/3$ 一个一阶极点, 故采用围线 c 之内的极点计算留数较方便, 根据式 (3-22) 及式 (3-24) 可得

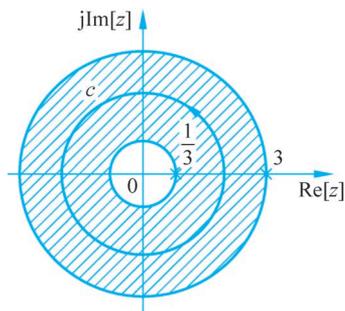


图 3-13 $X(z)$ 收敛域及围线

$$x(n) = \operatorname{Res} \left[\frac{z^{n+1}}{(3-z)\left(z - \frac{1}{3}\right)} \right]_{z=\frac{1}{3}} = \left[\left(z - \frac{1}{3}\right) \frac{z^{n+1}}{(3-z)\left(z - \frac{1}{3}\right)} \right]_{z=\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{3}\right)^n, \quad n \geq -1$$

即

$$x(n) = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n+1)$$

(2) 当 $n \leq -2$ 时, 被积函数如下:

$$X(z)z^{n-1} = \frac{z^{n+1}}{(3-z)\left(z - \frac{1}{3}\right)}$$

在围线 c 之外, 上式仅有 $z=3$ 一个一阶极点, 在围线 c 之内有 $z=1/3$ 的一阶极点以及 $z=0$ 的 $(n+1)$ 阶极点, 故采用围线 c 外部的极点求留数, 根据式(3-23)及式(3-24)可得

$$x(n) = -\operatorname{Res} \left[\frac{z^{n+1}}{(3-z)\left(z - \frac{1}{3}\right)} \right]_{z=3} = - \left[(z-3) \frac{z^{n+1}}{(3-z)\left(z - \frac{1}{3}\right)} \right]_{z=3}$$

$$= \frac{1}{8} \times 3^{n+2}, \quad n \leq -2$$

结合 $n \geq -1$ 以及 $n \leq -2$ 的情况, 可得

$$x(n) = \begin{cases} 3^{-n}/8, & n \geq -1 \\ 3^{n+2}/8, & n \leq -2 \end{cases}$$

即

$$x(n) = \frac{3^{-n}}{8} u(n+1) + \frac{3^{n+2}}{8} u(-n-2)$$

需要指出的是, 同一解析函数 $X(z)$, 由于收敛域不同, 其逆变换的结果不同。如本章习题第3题第(3)小题, 虽然其解析函数与本例题相同, 但由于收敛域不同, 故逆变换的结果 $x(n)$ 也不同。

3.3.2 部分分式展开法

1. 部分分式展开法的原理

在求 $X(z)$ 的逆变换时, 一般 $X(z)$ 的分子与分母均为含有 z 的有理多项式, 可表示为

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (3-26)$$

$X(z)$ 为既约分式, $A(z)$ 、 $B(z)$ 均为实系数多项式, 因此, 可将其展开为如下形式部分分式:

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = X_1(z) + X_2(z) + \cdots + X_k(z) \quad (3-27)$$

一般情况下, 各部分分式 $X_i(z)$ 均为一阶或二级分式, 可根据表 3-1 常用序列的 z 变换表求每一个部分分式 $X_i(z)$ 的 z 逆变换, 然后将各逆变换合并相加, 就得到了序列 $x(n)$, 即

$$x(n) = Z^{-1}[X(z)] = Z^{-1}[X_1(z)] + Z^{-1}[X_2(z)] + \cdots + Z^{-1}[X_k(z)] \quad (3-28)$$

采用部分分式法求 z 逆变换, 应注意以下两点:

- (1) 部分分式的每一项都为—阶或二阶分式, 通过表 3-1 可直接得到 $X_i(z)$ 的逆变换;
- (2) 对部分分式的每一项, 应注意其收敛域。

若 $X(z)$ 可表示为如下形式:

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})} \quad (3-29)$$

式中, d_k 为 $X(z)$ 的极点。

- (1) 如果 $M < N$, 且无重极点时, 则 $X(z)$ 可展开为如下部分分式之和:

$$X(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} \quad (3-30)$$

系数 A_k 可通过留数定理求解。

$$A_k = (1 - d_k z^{-1}) X(z) \Big|_{z=z_k} = (z - d_k) \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=z_k} = \text{Res} \left[\frac{X(z)}{z} \right] \Big|_{z=d_k} \quad (3-31)$$

$$k = 1, 2, \dots, N$$

- (2) 若 $M \geq N$, 且有一个 m 阶重极点, 则 $X(z)$ 可展为如下部分分式之和:

$$X(z) = \sum_{k=1}^{M-m} \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^m \frac{B_k}{(1 - d_i z^{-1})^k} + \sum_{n=0}^{M-N} C_n z^{-n} \quad (3-32)$$

式中, 系数 A_k 为单极点项系数; B_k 为重极点项系数; C_n 为整式项系数, 当 $M \geq N$ 时才有整式项, $M = N$ 时只有 C_0 项; d_k 是 $X(z)$ 的单极点 ($k = 1, 2, \dots, N - m$); d_i 为 $X(z)$ 的一个 m 阶极点。各系数的求解方法如下。

- (1) 求系数 A_k ($k = 1, 2, \dots, N - m$) 可通过留数定理, 即式(3-31)求解。

- (2) 求系数 B_k 的公式如下:

$$B_k = \frac{1}{(-d_i)^{m-k}} \frac{1}{(m-k)!} \left\{ \frac{d^{m-k}}{d(z^{-1})^{m-k}} [(1 - d_i z^{-1})^m X(z)] \right\}_{z=d_i} \quad (3-33)$$

$$k = 1, 2, \dots, m$$

或

$$B_k = \frac{1}{(m-k)!} \left\{ \frac{d^{m-k}}{dz^{m-k}} \left[(z - d_i)^m \frac{X(z)}{z^k} \right] \right\}_{z=d_i}, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (3-34)$$

$X(z)$ 展为部分分式之后, 结合收敛域求各部分分式的逆变换, 再求和即可得到 $X(z)$ 的逆变换。

根据代数式运算习惯, 一般将 $X(z)$ 转换为 z 的正幂次方再求部分分式比较方便, 然后根据系数 A_k 或 B_k 的求解方法, 将 $X(z)$ 表示为 $\frac{X(z)}{z}$ (m 重极点时表示为 $\frac{X(z)}{z^k}, k = 1, 2, \dots, m$) 的形式, 再展开为部分分式, 并求各部分分式的系数。

2. 部分分式展开举例

【例 3-8】 采用部分分式展开法求 z 逆变换示例。

已知 $X(z)$ 的解析式如下:

$$X(z) = \frac{1}{(1-2z^{-1})(1-0.5z^{-1})}, \quad |z| > 2$$

试采用部分分式展开法求 $X(z)$ 的逆变换。

解：先将 $X(z)$ 化简为如下正幂次方的形式：

$$X(z) = \frac{1}{(1-2z^{-1})(1-0.5z^{-1})} = \frac{z^2}{(z-2)(z-0.5)}$$

将上式表示为如下 $\frac{X(z)}{z}$ 的形式：

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{(z-2)(z-0.5)}$$

将上式展开为如下部分分式形式：

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{(z-2)(z-0.5)} = \frac{A_1}{z-2} + \frac{A_2}{z-0.5}$$

根据式(3-31)求系数,得

$$A_1 = \left[(z-2) \frac{X(z)}{z} \right]_{z=2} = \frac{4}{3}$$

$$A_2 = \left[(z-0.5) \frac{X(z)}{z} \right]_{z=0.5} = -\frac{1}{3}$$

因此,可得

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{z-2} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{z-0.5}$$

即

$$X(z) = \frac{4}{3} \times \frac{z}{z-2} - \frac{1}{3} \times \frac{z}{z-0.5}$$

根据收敛域可知,序列为因果序列,查表 3-1 可得

$$x(n) = \begin{cases} \frac{4}{3} \times 2^n - \frac{1}{3} \times (0.5)^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

也可以表示为

$$x(n) = \left[\frac{4}{3} \times 2^n - \frac{1}{3} \times (0.5)^n \right] u(n)$$

本例 $x(n)$ 为右边序列,部分分式展开法同样可以用于左边序列和双边序列,但计算中应注意解析函数的 $X(z)$ 的极点与右边序列以及左边序列的对应关系。

3. MATLAB 实现部分分式展开

MATLAB 提供了可用于部分分式展开的函数 `residuez`, 该函数的调用格式如下:

```
[r,p,k] = residuez(b,a)
```

b 、 a 分别是 $X(z)$ 的分子与分母的系数向量; r 、 p 、 k 用于存储输出数据,其中, r 表示 $X(z)$ 各部分分式项的留数, p 表示 $X(z)$ 的部分分式各对应项的极点, k 表示常数项和整式。

【例 3-9】 用 MATLAB 实现部分分式展开,求 z 逆变换示例。

已知 $X(z)$ 的解析式如下:

$$X(z) = \frac{10.8 - 1.16z^{-1} - 4z^{-2} - 0.6z^{-2}}{1 - 0.8z^{-1} + 0.12z^{-2}}, \quad |z| > 0.6$$

试采用 MATLAB 实现部分分式展开,求 $X(z)$ 的逆变换。

解: 用 MATLAB 进行部分分式展开的代码如下:

```
clc;clear all;close all;
b = [10.8,1.16,-4,0.6];
a = [1,-0.8,0.12];
[r,p,k] = residuez(b,a)
```

程序计算结果如下:

```
r =
    6.6000
    4.2000
p =
    0.6000
    0.2000
k = 0.0000  5.0000
```

根据程序输出结果,可得 $X(z)$ 的部分分式如下:

$$X(z) = \frac{6.6}{1 - 0.6z^{-1}} + \frac{4.2}{1 - 0.2z^{-1}} + 5z^{-1}$$

查表 3-1 可得 $X(z)$ 的逆变换,即序列 $x(n)$ 如下:

$$x(n) = 6.6 \times 0.6^n u(n) + 4.2 \times 0.2^n u(n) + 5\delta(n-1)$$

为了应用和查阅方便,现将常用序列的 z 变换进行总结,如表 3-1 所示。

表 3-1 常用序列的 z 变换表

序号	序列	z 变换	收敛域
1	$\delta(n)$	1	z 全平面
2	$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z > 1$
3	$u(-n-1)$	$\frac{z}{1-z}$	$ z < 1$
4	$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z > a $
5	$a^n u(-n-1)$	$\frac{-1}{1-az^{-1}}$	$ z < a $
6	$R_N(n)$	$\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$	$ z > 0$
7	$nu(n)$	$\frac{z^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z > 1$
8	$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z > a $
9	$na^n u(-n-1)$	$\frac{-az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z < a $
10	$e^{jn\omega_0} u(n)$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega_0} z^{-1}}$	$ z > 1$
11	$(n+1)a^n u(n)$	$\frac{1}{(1-az^{-1})^2}$	$ z > a $

续表

序号	序列	z 变换	收敛域
12	$\sin(n\omega_0)u(n)$	$\frac{z^{-1}\sin\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$ z >1$
13	$\cos(n\omega_0)u(n)$	$\frac{1-z^{-1}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$ z >1$
14	$\sin(n\omega_0+\theta)u(n)$	$\frac{\sin\theta+z^{-1}\sin(\omega_0-\theta)}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$ z >1$
15	$e^{-an}\sin(n\omega_0)u(n)$	$\frac{z^{-1}e^{-a}\sin\omega_0}{1-2z^{-1}e^{-a}\cos\omega_0+z^{-2}e^{-2a}}$	$ z >e^{-a}$
16	$e^{-an}\cos(n\omega_0)u(n)$	$\frac{1-z^{-1}e^{-a}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}e^{-a}\cos\omega_0+z^{-2}e^{-2a}}$	$ z >e^{-a}$

3.3.3 长除法

1. 长除法原理

长除法又称为幂级数展开法,根据 z 变换的定义, $x(n)$ 的 z 变换是 z^{-1} 的幂级数,即

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \cdots + x(-1)z + x(0)z^0 + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots \quad (3-35)$$

因此,如果能在给定的收敛域内,将 $X(z)$ 展开为幂级数形式,则该幂级数的系数就是序列 $x(n)$ 。由于 $X(z)$ 的分子与分母均为有理式,且分子和分母都是关于 z (或 z^{-1}) 的有理多项式,因此,可直接采用分子多项式除以分母多项式得到幂级数的展开式,从而求出序列 $x(n)$ 。

由于需要依据 $X(z)$ 的解析表达式及收敛域才能唯一地确定序列 $x(n)$,因此,采用长除法求 z 逆变换时,必须结合收敛域先判断序列类型,然后用长除法将 $X(z)$ 展为 z^{-1} 的幂级数。

(1) 若 $X(z)$ 的收敛域为 $|z|>R_{x-}$,则 $x(n)$ 为右边序列或因果序列,因此,应将 $X(z)$ 展开为 z 的负幂级数,即 $X(z)$ 的分子、分母均按 z 的降幂(z^{-1} 升幂)排列。

(2) 若 $X(z)$ 的收敛域是 $|z|<R_{x+}$,则 $x(n)$ 为左边序列,因此,应将 $X(z)$ 展开为 z 的正幂级数,即 $X(z)$ 的分子与分母均按 z 的升幂排列。

(3) 若 $X(z)$ 的收敛域是 $R_{x-}<|z|<R_{x+}$,则 $x(n)$ 为双边序列,则应将 $X(z)$ 分解为对应左边序列和右边序列的部分分式,然后分别按左边序列和右边序列进行长除法运算。

2. 长除法举例

【例 3-10】 用长除法求 z 逆变换(右边序列)示例。

已知 $X(z)$ 的解析表达式及收敛域如下:

$$X(z) = \frac{2z^{-1}}{(1-2z^{-1})^2}, \quad |z|>2$$

求 $X(z)$ 的逆变换。

解: 根据收敛域 $|z|>2$ 可知, $x(n)$ 是因果序列。

$X(z)$ 的分子和分母按 z 的降幂(即 z^{-1} 的升幂)排列,将原式化简为如下正幂次形式:

$$X(z) = \frac{2z}{(z-2)^2} = \frac{2z}{z^2-4z+4}, \quad |z|>2$$

按如下形式进行长除法运算：

$$\begin{array}{r}
 2z^{-1} + 8z^{-2} + 24z^{-3} + 64z^{-4} + \dots \\
 z^2 - 4z + 4 \overline{) 2z} \\
 \hline
 2z - 8 + 8z^{-1} \\
 \hline
 8 - 8z^{-1} \\
 \hline
 8 - 32z^{-1} + 32z^{-1} \\
 \hline
 24z^{-1} - 32z^{-2} \\
 \hline
 24z^{-1} - 96z^{-2} + 96z^{-3} \\
 \hline
 44z^{-2} - 96z^{-3} \\
 \hline
 64z^{-2} - 256z^{-3} + 256z^{-4} \\
 \hline
 160z^{-3} - 256z^{-4} \\
 \hline
 \vdots
 \end{array}$$

根据长除法的运算结果,可得

$$X(z) = 2z^{-1} + 2 \times 2^2 z^{-2} + 3 \times 2^3 z^{-3} + 4 \times 2^4 z^{-4} + \dots$$

即

$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \times 2^n z^{-n}$$

因此可得

$$x(n) = n \times 2^n u(n-1)$$

3. MATLAB 实现长除法

MATLAB 提供了实现多项式除法的函数 deconv, 该函数的调用格式如下:

```
xn = deconv(b, a)
```

b、a 分别是 $X(z)$ 的分子与分母的系数向量; xn 表示 $X(z)$ 分子除以分母的系数向量, 向量从常数项开始, 按 z^{-1} 的幂级数依次排列。例 3-10 所列问题也可以用多项式长除法 deconv 函数来求解该题。

【例 3-11】 用 MATLAB 实现长除法求 z 逆变换示例。

解: 为便于对照, 采用与例 3-10 相同的函数 $X(z)$ 求 z 逆变换。

MATLAB 实现长除法求解例 3-10 的代码如下:

```

clc;clear all;close all;
b = [0,2];
a = [1, -4,4];
k = 6; % 输出  $z^{-1}$  的系数的长度,本例输出 6 项系数
m = length(a);
n = length(b);
b = [b, zeros(1, m - n - 1 + k)] % 根据输出系数的长度对 b 末端补零
xn = deconv(b, a)

```

程序运行结果如下:

```
xn =    0         2         8        24        64       160
```

根据运算结果可得

$$x(n) = n \times 2^n u(n-1)$$

MATLAB 的运算结果与例 3-10 直接用长除法的结果相同。

3.4 z 变换的性质和定理

对于离散信号与系统分析, z 变换具有重要的意义。 z 变换具有一系列重要性质, 这些性质在求 z 变换和逆变换, 进行离散系统分析, 求解线性卷积及差分方程时能起到降低运算复杂度和简化运算的作用。

1. 线性特性

线性特性是指序列 z 变换满足叠加性和齐次性。

若

$$\begin{aligned} Z[x(n)] &= X(z), \quad R_{x-} < |z| < R_{x+} \\ Z[y(n)] &= Y(z), \quad R_{y-} < |z| < R_{y+} \end{aligned}$$

则有

$$Z[ax(n) + by(n)] = aX(z) + bY(z), \quad R_- < |z| < R_+ \quad (3-36)$$

式中, a 、 b 为任意常数。

序列经线性组合(加权求和)后, 其 z 变换的收敛域一般为各序列收敛域的交集, 即

$$R_- = \max(R_{x-}, R_{y-}), \quad R_+ = \min(R_{x+}, R_{y+})$$

序列经线性组合后的收敛域为

$$\max(R_{x-}, R_{y-}) = R_- < |z| < R_+ = \min(R_{x+}, R_{y+})$$

线性特性是应用非常广泛的 z 变换特性之一, 线性特性的加权求和可以推广到两个以上序列的线性组合。若线性组合表达式中存在零极点对消, 则收敛域有可能扩大。

【例 3-12】 线性特性的应用示例。

已知 $x(n) = \sin(\omega n)u(n)$, 求序列 $x(n)$ 的 z 变换。

解: 根据 z 变换表可得

$$Z[a^n u(n)] = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

因此有

$$Z[e^{j\omega n} u(n)] = \frac{1}{1 - e^{j\omega} z^{-1}}, \quad |z| > 1$$

$$Z[e^{-j\omega n} u(n)] = \frac{1}{1 - e^{-j\omega} z^{-1}}, \quad |z| > 1$$

由欧拉公式有

$$\sin(\omega n) = \frac{e^{j\omega n} - e^{-j\omega n}}{2j}$$

根据线性特性可得

$$\begin{aligned} Z[\sin(\omega n)u(n)] &= \frac{1}{2j} \{ Z[e^{j\omega n} u(n)] - Z[e^{-j\omega n} u(n)] \} = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{1 - e^{j\omega} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j\omega} z^{-1}} \right) \\ &= \frac{z^{-1} \sin \omega}{1 - 2z^{-1} \cos \omega + z^{-2}}, \quad |z| > 1 \end{aligned}$$



视频讲解

2. 序列的移位

序列移位特性揭示了序列 $x(n)$ 移位以后,其 z 变换和原序列 $x(n)$ 的 z 变换之间的关系。若序列的 z 变换为

$$Z[x(n)] = X(z), \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

则

$$Z[x(n-m)] = z^{-m} X(z), \quad R_{x-} < |z| < R_{x+} \quad (3-37)$$

式中, m 为任意整数, m 为正则表示右移,即延迟, m 为负则表示左移,即超前。

【例 3-13】 移位特性的证明。

证: 根据 z 变换的定义,有

$$Z[x(n-m)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-m)z^{-n} = z^{-m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-(k+m)} = z^{-m} X(z)$$

序列移位对收敛域的影响: 移位特性表明,一般情况下,序列移位之后其收敛域并不会发生变化,但下列情况下可能发生例外:

(1) 对于单边序列在 $z=0$ 或 ∞ 处可能发生例外,以 $\delta(n)$ 为例, $Z[\delta(n)] = 1$ 在 z 全平面收敛,而 $Z[\delta(n-1)] = z^{-1}$,它在 $z=0$ 处不收敛, $Z[\delta(n+1)] = z$,在 z 趋于 ∞ 时不收敛。

(2) 对于双边序列,其收敛域为环状区域,并不包括 $z=0$ 和 $z=\infty$,因此,序列移位之后,其 z 变换的收敛域不变。

3. 共轭序列

序列 $x(n)$ 为复数序列,则其共轭序列为 $x^*(n)$ 。

若

$$Z[x(n)] = X(z), \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

则

$$Z[x^*(n)] = X^*(z^*), \quad R_{x-} < |z| < R_{x+} \quad (3-38)$$

【例 3-14】 共轭序列特性的证明。

证: 根据 z 变换定义可得共轭序列的 z 变换如下:

$$\begin{aligned} Z[x^*(n)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n)(z^*)^{-n}]^* \\ &= \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(z^*)^{-n} \right]^* \\ &= X^*(z^*), \quad R_{x-} < |z| < R_{x+} \end{aligned}$$

4. 翻转序列

若

$$Z[x(n)] = X(z), \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

则

$$Z[x(-n)] = X\left(\frac{1}{z}\right), \quad \frac{1}{R_{x+}} < |z| < \frac{1}{R_{x-}} \quad (3-39)$$

【例 3-15】 翻转序列特性的证明。

证: 根据 z 变换定义,有

$$Z[x(-n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(z^{-1})^{-n} = X\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$R_{x-} < |z^{-1}| < R_{x+}$$

序列翻转后,在分析序列 z 变换收敛域时应注意自变量的对应关系,翻转序列的 z 变换与原序列的 z 变换的自变量存在倒数关系,因此,极点也为倒数关系,根据此关系即可确定翻转序列 z 变换的收敛域。

5. z 域尺度变换

z 域尺度变换又称为乘以实指数序列。若序列 $x(n)$ 乘以指数序列 a^n (a 是复常数),则进行 z 变换时, z 变量将发生尺度变换。

若

$$X(z) = Z[x(n)], \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

则

$$Z[a^n x(n)] = X\left(\frac{z}{a}\right), \quad |a| R_{x-} < |z| < |a| R_{x+} \quad (3-40)$$

【例 3-16】 z 域尺度变换特性的证明。

证: 根据 z 变换定义,有

$$Z[a^n x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = X\left(\frac{z}{a}\right), \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

如果 $z = z_k$ 是 $X(z)$ 的极点,则 $X\left(\frac{z}{a}\right)$ 的极点为 $z = az_k$ 。该尺度变换的几何意义如下。

- (1) 若 a 为实数,则表示零极点在 z 平面沿径向放大或缩小。
- (2) 若 a 为复数且 $|a| = 1$,表示零极点位置以坐标原点为中心,旋转了 $\arg(a)$ 角度。
- (3) 若 a 为任意复数,则表示零极点既有幅值上的缩放,又有 $\arg(a)$ 角度的旋转。

6. 序列的线性加权(z 域导数)

若已知

$$X(z) = Z[x(n)], \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

则

$$Z[nx(n)] = -z \frac{d}{dz} X(z), \quad R_{x-} < |z| < R_{x+} \quad (3-41)$$

【例 3-17】 序列线性加权特性的证明。

证: 根据 z 变换定义,有

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

上式两边关于 z 求导数,可得

$$\frac{dX(z)}{dz} = \frac{d}{dz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

序列 $x(n)$ 的值为常数,因此有

$$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{d}{dz} (z^{-n}) = -z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n) z^{-n} = -z^{-1} Z[nx(n)]$$

于是,可得

$$Z[nx(n)] = -z \frac{dX(z)}{dz}, \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

该特性表明, 序列的线性加权(乘 n)的 z 变换等于原序列的 z 变换求导再乘以 $(-z)$ 。若对序列的线性加权性质继续进行推导, 可得到如下更一般的结论:

$$\begin{aligned} Z[n^2x(n)] &= Z[n \times nx(n)] = -z \frac{d}{dz} Z[nx(n)] \\ &= -z \frac{d}{dz} \left[-z \frac{d}{dz} X(z) \right] = z^2 \frac{d^2}{dz^2} X(z) + z \frac{d}{dz} X(z) \end{aligned}$$

以此类推, 可得

$$Z[n^m x(n)] = \left(-z \frac{d}{dz} \right)^m X(z)$$

式中, $\left(-z \frac{d}{dz} \right)^m$ 表示 m 阶导数, 公式如下:

$$\left(-z \frac{d}{dz} \right)^m = -z \frac{d}{dz} \left\{ -z \frac{d}{dz} \left[-z \frac{d}{dz} \cdots \left(-z \frac{d}{dz} X(z) \right) \right] \cdots \right\} \quad (3-42)$$

7. 初值定理

对于因果序列 $x(n)$

$$x(n) = 0, \quad n < 0$$

有

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) \quad (3-43)$$

【例 3-18】 初值定理的证明。

证: 由于 $x(n)$ 是因果序列, 根据 z 变换的定义可得

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)u(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots$$

对上式取极限, 可得

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

8. 终值定理

若 $x(n)$ 为因果序列, $X(z) = Z[x(n)]$, $X(z)$ 的全部极点位于单位圆之内, 单位圆 $|z| = 1$ 上最多可以有 $z=1$ 一个一极点, 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)X(z)] \quad (3-44)$$

9. 时域卷积定理

若 $y(n)$ 为 $x(n)$ 与 $h(n)$ 的卷积, 即

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

且

$$X(z) = Z[x(n)], \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$H(z) = Z[h(n)], \quad R_{h-} < |z| < R_{h+}$$

则有

$$Y(z) = Z[y(n)] = H(z)X(z),$$

$$\max[R_{x-}, R_{h-}] < |z| < \min[R_{x+}, R_{h+}] \quad (3-45)$$

时域卷积定理将时域的卷积运算转换为 z 域和普通乘积运算, 该性质具有广泛的应用。应用中应注意收敛域是 $X(z)$ 和 $H(z)$ 收敛域的交集, 若存在零极点对消, 则收敛域可能扩大。

【例 3-19】 时域卷积定理的证明。

证:

$$\begin{aligned} Z[x(n) * h(n)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n) * h(n)] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) h(n-m) z^{-n} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n-m) z^{-n} \right] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n-m) z^{-(n-m)} z^{-m} \right] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} [x(m) z^{-m}] H(z) \\ &= H(z) X(z), \quad \max[R_{x-}, R_{h-}] < |z| < \min[R_{x+}, R_{h+}] \end{aligned}$$

对于离散线性时不变(移不变)系统, 时域卷积定理为卷积计算提供了一种新思路, 若计算 $y(n) = x(n) * h(n)$ 较复杂, 则可以通过计算 $X(z)H(z)$ 的逆变换来求 $y(n)$ 。

【例 3-20】 时域卷积定理的应用。

已知序列 $x(n]$ 和 $h(n]$ 如下:

$$x(n) = a^{n-1} [a u(n) - b u(n-1)], \quad h(n) = b^n u(n)$$

求 $y(n) = x(n) * h(n)$ 。

解: 根据常用序列的 z 变换可得

$$X(z) = Z[X(n)] = \frac{z}{z-a} - \frac{b}{z-a} = \frac{z-b}{z-a}, \quad |z| > |a|$$

$$H(z) = Z[h(n)] = \frac{z}{z-b}, \quad |z| > |b|$$

因此有

$$Y(z) = Z[y(n)] = X(z)H(z) = \frac{z-b}{z-a} \frac{z}{z-b} = \frac{z}{z-a}, \quad |z| > a$$

对 $Y(z)$ 求逆变换得

$$y(n) = x(n) * h(n) = Z^{-1}[Y(z)] = a^n u(n)$$

$X(z)H(z)$ 的乘法运算产生了约分, 即 $X(z)$ 的分子项 $(z-b)$ 与 $H(z)$ 的分母 $(z-b)$ 约分, 如图 3-14 所示的 $H(z)$ 的极点 $(z=b)$ 与 $X(z)$ 的零点 $(z=b)$ 发生零极点对消, 这时可能使收敛域扩大。若 $|b| > |a|$, 则 $Y(z)$ 的收敛域比 $X(z)$ 与 $H(z)$ 收敛域的交集范围要大。

10. 时域乘积定理(z 域复卷积定理)

若

$$y(n) = x(n) h(n)$$

$$X(z) = Z[x(n)], \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

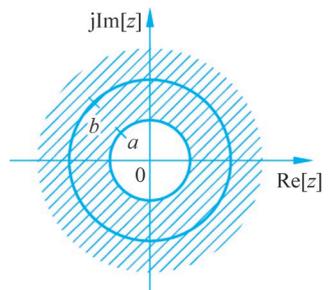


图 3-14 例 3-20 序列 z 变换的收敛域

$$H(z) = Z[h(n)], \quad R_{h-} < |z| < R_{h+}$$

则有

$$\begin{aligned} Y(z) &= Z[y(n)] = Z[x(n)h(n)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X\left(\frac{z}{v}\right) H(v) v^{-1} dv \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v) H\left(\frac{z}{v}\right) v^{-1} dv, \quad R_{x-} R_{h-} < |z| < R_{x+} R_{h+} \end{aligned} \quad (3-46)$$

式中, c 是 v 平面(复平面)内积分乘积项 $X\left(\frac{z}{v}\right)$ 与 $H(v)$ 收敛域交集之内包含原点的逆时针简单闭曲线。 v 平面收敛域为

$$\max\left[R_{h-}, \frac{|z|}{R_{x+}}\right] < |v| < \min\left[R_{h+}, \frac{|z|}{R_{x-}}\right] \quad (3-47)$$

【例 3-21】 时域相乘性质的应用示例。

已知序列 $x(n)$ 及 $h(n)$ 如下:

$$x(n) = a^n u(n), \quad h(n) = b^{n-1} u(n-1)$$

$$y(n) = x(n)h(n)$$

求 $Y(z) = Z[x(n)h(n)]$ 。

解:

$$X(z) = Z[x(n)] = Z[a^n u(n)] = \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a|$$

$$H(z) = Z[h(n)] = z[b^{n-1} u(n-1)] = \frac{1}{z-b}, \quad |z| > |b|$$

利用复卷积公式(3-46), 有

$$\begin{aligned} Y(z) &= Z[x(n)h(n)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{v}{v-a} \frac{1}{\frac{z}{v}-b} \frac{dv}{v} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{v}{(v-a)(v-bv)} dv, \quad |z| > |ab| \end{aligned}$$

收敛域为 $|v| > |a|$ 与 $\left|\frac{z}{v}\right| > |b|$ 的交集, 即 $|a| < |v| < \left|\frac{z}{b}\right|$, 因此, 围线仅包含极点 $v=0$, 如图 3-15 所示。

根据留数定理可得

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{v}{(v-a)(z-bv)} dv \\ &= \text{Res}\left[\frac{v}{(v-a)(z-bv)}\right]_{v=0} \\ &= \frac{z}{z-ab}, \quad |z| > |ab| \end{aligned}$$

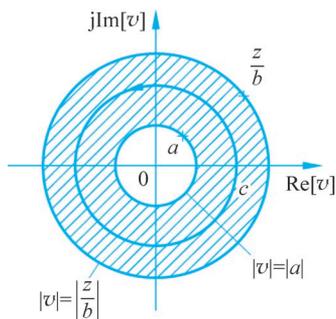


图 3-15 v 平面收敛域

11. 帕塞瓦尔定理

若

$$X(z) = Z[x(n)], \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$H(z) = Z[h(n)], \quad R_{h-} < |z| < R_{h+}$$

且

$$R_{x-} R_{h-} < 1 < R_{x+} R_{h+}$$

则

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)h^*(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v)H^*\left(\frac{1}{v^*}\right)v^{-1}dv \quad (3-48)$$

式中,围线 c 应在 $X(v)$ 和 $H^*\left(\frac{1}{v^*}\right)$ 收敛域的交集范围之内:

$$\max\left[R_{h-}, \frac{1}{R_{x+}}\right] < |v| < \min\left[R_{h+}, \frac{1}{R_{x-}}\right]$$

若 $h(n)$ 为实序列,则有

$$h(n) = h^*(n)$$

若 $X(z)$ 、 $H(z)$ 均在单位圆上收敛,则围线 c 可选为单位圆,即

$$v = e^{j\omega}$$

于是,式(3-48)可简化为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)h^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega})d\omega \quad (3-49)$$

若 $h(n) = x(n)$,则可得到

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (3-50)$$

帕塞瓦尔定理是能量守恒定理在数字信号处理领域的表现形式,该定理可以由复卷积定理导出。式(3-50)表明时域序列的能量与频域中的能量是守恒的。

12. 累加序列特性

对于因果序列 $x(n)$,即

$$x(n) = 0, \quad n < 0, \quad X(z) = Z[x(n)], \quad |z| > R_{x-}$$

令

$$y(n) = \sum_{m=0}^n x(m)$$

则

$$Y(z) = Z\left[\sum_{m=0}^n x(m)\right] = \frac{z}{z-1}X(z), \quad |z| > \max[R_{x-}, 1] \quad (3-51)$$

为方便使用和查阅,现将 z 变换的主要性质进行归纳总结,如表 3-2 所示。

表 3-2 z 变换的主要性质

序号	序列	z 变换	收敛域
1	$x(n)$	$X(z)$	$R_{x-} < z < R_{x+}$
2	$h(n)$	$H(z)$	$R_{h-} < z < R_{h+}$
3	$ax(n) + bh(n)$	$aX(z) + bH(z)$	$\max[R_{x-}, R_{h-}] < z < \min[R_{x+}, R_{h+}]$
4	$x(n-m)$	$z^{-m}X(z)$	$R_{x-} < z < R_{x+}$
5	$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	$R_{x-} < z < R_{x+}$
6	$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$R_{x-} < z^{-1} < R_{x+}$

续表

序号	序列	z 变换	收敛域
7	$x^*(-n)$	$X^*(1/z^*)$	$R_{x-} < z^{-1} < R_{x+}$
8	$a^n x(n)$	$X\left(\frac{z}{a}\right)$	$R_{x-} < \left \frac{z}{a}\right < R_{x+}$
9	初值定理	$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$	$ z > R_{x-}$
10	终值定理	$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)X(z)]$	$ z > \max[R_{x-}, 1]$
11	$n^m x(n)$	$\left(-z \frac{d}{dz}\right)^m X(z)$	$R_{x-} < z < R_{x+}$
12	$x(n) * h(n)$	$X(z)H(z)$	$\max[R_{x-}, R_{h-}] \leq z \leq \min[R_{x+}, R_{h+}]$
13	$\text{Re}[x(n)]$	$\frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]$	$R_{x-} < z < R_{x+}$
14	$\text{jIm}[x(n)]$	$\frac{1}{2j}[X(z) - X^*(z^*)]$	$R_{x-} < z < R_{x+}$
15	$x(n)h(n)$	$\frac{1}{2\pi j} \oint_c X\left(\frac{z}{v}\right)H(v)v^{-1}dv$	$R_{x-}R_{h-} < z < [R_{x+}R_{h+}]$
16	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)h^*(n)$	$\frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v)H^*\left(\frac{1}{v^*}\right)v^{-1}dv$	$R_{x-}R_{h-} < z < R_{x+}R_{h+}$
17	$\sum_{k=0}^n x(k)$	$\frac{z}{z-1}X(z)$	$ z > \max[R_{x-}, 1]$

3.5 z 变换与拉普拉斯变换、傅里叶变换之间的关系

拉普拉斯(Laplace)变换、z 变换和傅里叶变换是信号分析与处理的重要基础理论,本节将讨论离散信号的 z 变换与连续时间信号的拉普拉斯变换以及傅里叶变换之间的关系。

3.5.1 z 变换与拉普拉斯变换的关系

设连续时间信号 $x_a(t)$ 经理想抽样后的信号为 $\hat{x}_a(t)$, $x_a(t)$ 和 $\hat{x}_a(t)$ 的拉普拉斯变换分别表示如下:

$$x_a(s) = L[x_a(t)]$$

$$\hat{X}_a(s) = L[\hat{x}_a(t)]$$

因此

$$\hat{X}_a(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}_a(t) e^{-st} dt$$

根据连续时间信号抽样数学模型,可得

$$\begin{aligned} \hat{X}_a(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \delta(t-nT) e^{-st} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_a(nT) \delta(t-nT) e^{-st} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) e^{-nsT} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-nsT} \end{aligned}$$

而抽样序列 $x(n)$ 的 z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

由此可得,当 $z=e^{sT}$ 时,抽样序列的 z 变换等于其理想抽样信号的拉普拉斯变换。

$$X(z)|_{z=e^{sT}} = X(e^{sT}) = \hat{X}_a(s) \quad (3-52)$$

这说明 z 变换与拉普拉斯变换的关系就是 s 平面到 z 平面的映射关系,即

$$\begin{aligned} z &= e^{sT} \\ s &= \frac{1}{T} \ln z \end{aligned} \quad (3-53)$$

将 s 平面用直角坐标表示, z 平面用极坐标表示,有

$$\begin{cases} s = \sigma + j\Omega \\ z = re^{j\omega} \end{cases}$$

代入 $z=e^{sT}$ 可得

$$z = re^{j\omega} = e^{(\sigma+j\Omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\Omega T}$$

因此有

$$\begin{cases} r = e^{\sigma T} \\ \omega = \Omega T \end{cases} \quad (3-54)$$

上式说明 z 的模(r)只与 s 的实部 σ 相对应, z 的相角 ω 只与 s 的虚部 Ω 相对应。根据式(3-53)、式(3-54)可进一步分析 s 平面到 z 平面之间的映射关系, r 与 σ 的关系如表 3-3 所示。

表 3-3 r 与 σ 的区域映射关系表

s 复平面	z 复平面
$\sigma=0$ (s 平面虚轴)	$r=1$ (z 平面单位圆上)
$\sigma<0$ (s 左半平面)	$r<1$ (z 平面单位圆内部)
$\sigma>0$ (s 右半平面)	$r>1$ (z 平面单位圆外部)

由表 3-3 以及 $z=e^{sT}$ 可得 s 平面与 z 平面的几何映射关系如图 3-16 所示。

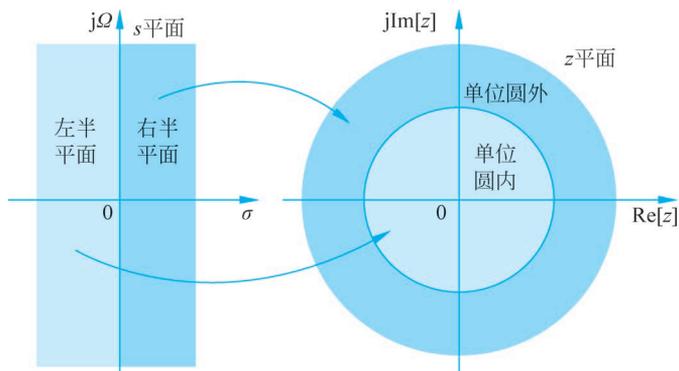


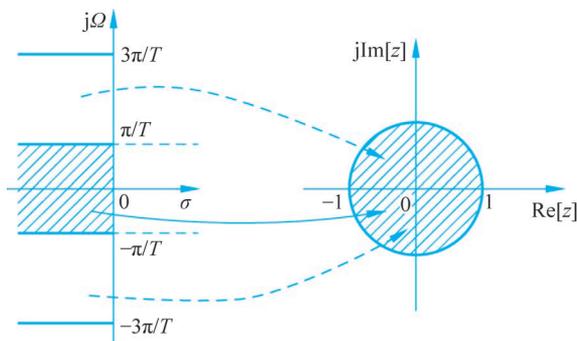
图 3-16 s 平面与 z 平面的几何映射关系

ω 与 Ω 的映射关系如表 3-4 所示。

表 3-4 ω 与 Ω 的映射关系表

s 复平面	z 复平面
$\Omega=0$ (s 平面实轴)	$\omega=0$ (正实轴)
$\Omega=\Omega_0$ (平行于实轴的直线)	$\omega=\Omega_0 T$ (辐角为 $\omega=\Omega_0 T$ 射线)
Ω 由 $-\pi/T \sim \pi/T$	ω 由 $-\pi \sim \pi$

根据 $\omega=\Omega T$ 及表 3-4 可得出,当 Ω 由 $-\pi/T$ 变化到 π/T , ω 由 $-\pi$ 变化到 π ,如图 3-17 所示, s 平面高度为 $2\pi/T$ 的水平带状区域映射为 z 平面的一周,覆盖整个 z 复平面,进一步分析可以得出, s 平面高度为 $2\pi/T$ 的条状区中左半部分(阴影线部分)映射到 z 平面单位圆内部,条状区中的右半部分映射到单位圆的外部。根据映射关系,在 s 平面 Ω 每增加 $2\pi/T$,则又是一个新的高度为 $2\pi/T$ 的条状区,又重新映射一次整个 z 平面(ω 又一次从 0 到 2π)。因此,从 s 复平面到 z 复平面的映射关系是多值映射关系。

图 3-17 s 平面与 z 平面的多值映射关系

根据 s 平面与 z 平面之间的映射关系已得出抽样序列 $x(n)$ 的 z 变换 $X(z)$ 和连续时间信号 $x_a(t)$ 的拉普拉斯变换 $X_a(s)$ 之间的关系。对于时域抽样,抽样信号频谱与原信号频谱的关系为

$$\hat{X}_a(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(s - jk\Omega_s)$$

将上式代入式(3-52),可得 $X(z)$ 与 $X_a(s)$ 的关系为

$$X(z) \Big|_{z=e^{sT}} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(s - jk\Omega_s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(s - j\frac{2\pi k}{T}\right) \quad (3-55)$$

因此可得,当 $z=e^{sT}$ 时,抽样序列的 z 变换等于其理想抽样信号的拉普拉斯变换,同时,连续时间信号经抽样以后,频谱将以 $\frac{2\pi}{T}$ 为周期产生周期延拓。

3.5.2 z 变换与傅里叶变换的关系

由于傅里叶变换是虚轴上的拉普拉斯变换,因此,对于连续时间信号的傅里叶变换,根据式(3-56),以 $s=j\Omega$ 代入可得

$$X(z) \Big|_{z=e^{j\Omega T}} = X(e^{j\Omega T}) = \hat{X}_a(j\Omega)$$

由于

$$z = e^{j\Omega T}$$

因此有

$$|z| = |e^{j\Omega T}| = 1$$

将 $s = j\Omega$ 及 $z = e^{j\Omega T}$ 代入式(3-52), 可得

$$X(z) \Big|_{z=e^{j\Omega T}} = X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a \left(j\Omega - j \frac{2\pi}{T} k \right) \quad (3-56)$$

连续时间信号采样之后的频谱 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 是原信号的频谱 $X_a(j\Omega)$ 的周期延拓, 体现在 z 平面上就是在单位圆上循环出现, 即 $X_a(j\Omega)$ 是 Ω 的周期函数。

由于

$$\omega = \Omega T$$

用数字频率 ω 表示 z 平面单位圆, 即

$$z = e^{j\omega}$$

根据上述关系, 可得

$$X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}) \quad (3-57)$$

这说明, 序列在单位圆上的 z 变换就是离散时间傅里叶变换。

3.6 离散时间傅里叶变换及性质

傅里叶分析法是信号分析的基本方法, 傅里叶变换是傅里叶分析的核心, 通过它可以信号从时间域变换到频率域。离散时间傅里叶变换, 即序列的傅里叶变换(DTFT)对于研究离散时间系统, 进行系统的频域分析, 分析信号的频谱结构及变化规律是非常重要的基础和工具。



视频讲解

3.6.1 离散时间傅里叶变换

离散时间非周期信号及其频谱之间的关系, 可用离散时间傅里叶变换来表示, 其正逆变换的表达式如下。

正变换:

$$\text{DTFT}[x(n)] = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \quad (3-58)$$

逆变换:

$$x(n) = \text{IDTFT}[X(e^{j\omega})] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (3-59)$$

式(3-59)的积分区间也可以是 $(0, 2\pi)$ 或其他任何一个周期。

式(3-58)级数的收敛条件为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n) e^{-j\omega n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$$

也就是说, 若序列 $x(n)$ 绝对可和, 则它的傅里叶变换一定存在且连续。由于 $x(n)$ 是离散序列, 故频域 $X(e^{j\omega})$ 是 ω 的周期函数, 式(3-58)就是周期函数 $X(e^{j\omega})$ 的傅里叶级数展开式, 而 $x(n)$ 则是傅里叶级数的系数, 由式(3-59)确定。

根据序列 z 变换和傅里叶变换之间的关系可知, 如果序列的 z 变换在单位圆上收敛,

那么离散时间傅里叶变换就是序列 z 变换在单位圆上的值,因而可表示为

$$X(e^{j\omega}) = X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \quad (3-60)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} X(z) z^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (3-61)$$

3.6.2 DTFT 的对称性

1. 序列对称性的概念

序列的共轭对称性和共轭反对称性是信号处理中两个重要的基本概念。如果序列 $x(n)$ 经过共轭和翻转运算之后,其值与序列 $x(n)$ 的值相等,则称 $x(n)$ 为**共轭对称序列**。

共轭对称序列一般用 $x_e(n)$ 表示,根据共轭对称序列的概念,其数学定义如下:

$$x_e(n) = x_e^*(-n) \quad (3-62)$$

对于实序列而言,则为 $x_e(n) = x_e(-n)$,即 $x_e(n)$ 为偶对称序列。

如果序列 $x(n)$ 经过共轭和翻转运算之后,其值与序列 $x(n)$ 的值符号相反,则称 $x(n)$ 为**共轭反对称序列**。

共轭反对称序列一般用 $x_o(n)$ 表示,共轭反对称序列满足如下关系:

$$x_o(n) = -x_o^*(-n) \quad (3-63)$$

对于实序列而言,则为 $x_o(n) = -x_o(-n)$,即 $x_o(n)$ 为奇对称序列。

共轭对称性概念也可进一步用于对序列的实部和虚部进行分析,可得如下结论。

1) 共轭对称序列的实部偶对称、虚部奇对称

【例 3-22】 已知序列 $x_e(n)$ 为共轭对称序列,即

$$x_e(n) = x_e^*(-n)$$

试证明序列 $x_e(n)$ 的实部偶对称,虚部奇对称。

证: 由于序列可在复数范围取值,因此 $x_e(n)$ 可表示为

$$x_e(n) = \operatorname{Re}[x_e(n)] + j\operatorname{Im}[x_e(n)]$$

$x_e(n)$ 取翻转和共轭运算,可得

$$x_e^*(-n) = \operatorname{Re}[x_e^*(-n)] - j\operatorname{Im}[x_e^*(-n)]$$

由于 $x_e(n)$ 为共轭对称序列,根据共轭对称性序列的定义可得

$$\operatorname{Re}[x_e(n)] = \operatorname{Re}[x_e^*(-n)]$$

$$\operatorname{Im}[x_e(n)] = -\operatorname{Im}[x_e^*(-n)]$$

上面两式表明,共轭对称序列的实部偶对称、虚部奇对称。

2) 共轭反对称序列的实部奇对称,虚部偶对称

由于 $x_o(n)$ 为共轭反对称序列,因此可以表示为

$$x_o(n) = \operatorname{Re}[x_o(n)] + j\operatorname{Im}[x_o(n)]$$

对 $x_o(n)$ 进行翻转和共轭运算之后为

$$x_o^*(-n) = \operatorname{Re}[x_o^*(-n)] - j\operatorname{Im}[x_o^*(-n)]$$

根据共轭反对称序列的定义可得

$$\operatorname{Re}[x_o(n)] = -\operatorname{Re}[x_o^*(-n)]$$

$$\operatorname{Im}[x_o(n)] = \operatorname{Im}[x_o^*(-n)]$$

这表明,共轭反对称序列的实部奇对称,虚部偶对称。

3) 任一序列均可分解为共轭对称分量和反对称分量之和

【例 3-23】 共轭对称性相关结论证明示例。

证明如下结论成立:

任一序列 $x(n)$ 都能表示为一个共轭对称序列与一个共轭反对称序列之和。

证: 本题待证明的结论可表示为如下形式:

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

其中, $x_e(n)$ 为共轭对称序列, $x_o(n)$ 为共轭反对称序列。

因此,依据原序列 $x(n)$,可按如下方式构建共轭对称序列 $x_e(n)$ 和共轭反对称序列 $x_o(n)$

$$\begin{cases} x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)] \\ x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)] \end{cases}$$

以上两式相加即

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

因此,任一序列 $x(n)$ 都能表示为一个共轭对称序列与一个共轭反对称序列之和。若为实数序列,则 $x(n)$ 可表示为偶对称序列与奇对称序列之和。

2. DTFT 对称性的应用

序列对称性的概念也可以应用到离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$,类似地,序列 $x(n)$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 也可分解为共轭对称分量与共轭反对称分量之和,即

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega}) \quad (3-64)$$

式中

$$\begin{cases} X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{j\omega})] \\ X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{j\omega})] \end{cases} \quad (3-65)$$

$X_e(e^{j\omega})$ 是共轭对称的,即 $X_e(e^{j\omega}) = X_e^*(e^{-j\omega})$;

$X_o(e^{j\omega})$ 是共轭反对称的,即 $X_o(e^{j\omega}) = -X_o^*(e^{-j\omega})$ 。

同样,如果 $x(n)$ 的傅里叶变换函数 $X(e^{j\omega})$ 是实函数,并满足共轭对称性,则称为频率的偶函数,即 $X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega})$,如果 $X(e^{j\omega}) = -X(e^{-j\omega})$,则称为频率的奇函数。

上述关于共轭对称性的结论对于加深理解傅里叶变换具有积极意义,这些性质通常可由 z 变换的相关性质将 $z = e^{j\omega}$ 直接代入即可得出结论,也可根据傅里叶变换及序列的共轭对称性的定义推出结论。

应用共轭对称性原理还可以得出下列结论。

(1) 序列实部的傅里叶变换等于离散时间傅里叶变换的共轭对称分量,即

$$\operatorname{DTFT}\{\operatorname{Re}[x(n)]\} = X_e(e^{j\omega})$$

(2) 序列虚部乘以复数 j 的傅里叶变换等于离散时间傅里叶变换的共轭反对称分量,即

$$\operatorname{DTFT}\{j\operatorname{Im}[x(n)]\} = X_o(e^{j\omega})$$

(3) 序列的共轭对称分量和共轭反对称分量的傅里叶变换分别等于离散时间傅里叶变换的实部和虚部乘以 j , 即

$$\begin{cases} \text{DTFT}[x_e(n)] = \text{Re}[X(e^{j\omega})] \\ \text{DTFT}[x_o(n)] = j\text{Im}[X(e^{j\omega})] \end{cases}$$

(4) 若 $x(n)$ 是实数序列, 则其傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 满足共轭对称性, 即

$$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \quad (3-66)$$

【例 3-24】 实数离散时间傅里叶变换共轭对称性证明。

已知序列 $x(n)$ 是实数序列, 试证明:

$$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$$

证: 因为 $x(n)$ 是实数序列, 则有

$$x(n) = x^*(n)$$

对上式进行 DTFT, 可得

$$\text{DTFT}[x(n)] = \text{DTFT}[x^*(n)]$$

而

$$\text{DTFT}[x(n)] = X(e^{j\omega})$$

$$\text{DTFT}[x^*(n)] = X^*(e^{-j\omega})$$

因此

$$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$$

由此还可以进一步得出以下结论:

$$\begin{cases} \text{Re}[X(e^{j\omega})] = \text{Re}[X(e^{-j\omega})] \\ \text{Im}[X(e^{j\omega})] = -\text{Im}[X(e^{-j\omega})] \end{cases}$$

因此, 实数离散时间傅里叶变换的实部是 ω 的偶函数, 而虚部是 ω 的奇函数。

由于

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| \exp\{j\arg[X(e^{j\omega})]\} \quad (3-67)$$

$$\arg[X(e^{j\omega})] = \frac{\text{Re}[X(e^{j\omega})]}{\text{Im}[X(e^{j\omega})]}$$

因此, 对实序列

$$\begin{cases} |X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})| & \omega \text{ 的偶函数} \\ \arg[X(e^{j\omega})] = -\arg[X(e^{-j\omega})] & \omega \text{ 的奇函数} \end{cases} \quad (3-68)$$

离散时间傅里叶变换的所有性质, 均可通过 z 变换的性质推导得出。

3.6.3 离散时间傅里叶变换的性质

离散时间傅里叶变换即序列在单位圆上的 z 变换, 因此离散时间傅里叶变换的特性一般都与 z 变换的性质具有对应关系, 或者可由 z 变换推导得出。现将离散时间傅里叶变换的常用性质进行总结, 如表 3-5 所示, 其中性质 1~11 与 z 变换具有对应关系, 性质 12~16 是离散时间傅里叶变换的对称特性, 合理使用这些性质对于简化傅里叶变换的运算和推导某些结论具有积极作用。

表 3-5 离散时间傅里叶变换的主要性质

序号	序列	傅里叶变换性质
1	$x(n), h(n)$	$X(e^{j\omega}), H(e^{j\omega})$
2	$ax(n) + bh(n)$	$aX(e^{j\omega}) + bH(e^{j\omega})$
3	$x(n-m)$	$e^{-j\omega m} X(e^{j\omega})$
4	$x^*(n)$	$X^*(e^{-j\omega})$
5	$x(-n)$	$X(e^{-j\omega})$
6	$x^*(-n)$	$X^*(e^{j\omega})$
7	$a^n x(n)$	$X\left(\frac{e^{j\omega}}{a}\right)$
8	$nx(n)$	$j \frac{d[X(e^{j\omega})]}{d\omega}$
9	$e^{jn\omega_0} x(n)$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
10	$x(n) * h(n)$	$X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega})$
11	$x(n)h(n)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) H(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$
12	$\text{Re}[x(n)]$	$X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})]$
13	$j\text{Im}[x(n)]$	$X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})]$
14	$x_e(n)$	$\text{Re}[X(e^{j\omega})]$
15	$x_o(n)$	$j\text{Im}[X(e^{j\omega})]$
16	$x(n) \in \mathbf{R}$	$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$
17	帕塞瓦尔定理	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)h^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) H^*(e^{j\omega}) d\omega$
18	帕塞瓦尔公式	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$

3.7 离散系统的频域分析

3.7.1 系统函数

线性时不变系统的特性可以用它的单位抽样响应 $h(n)$ 来完全描述, 系统的输入/输出具有如下关系:

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

对上式两端取 z 变换, 得

$$Y(z) = X(z)H(z)$$

即

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$H(z)$ 称为离散线性时不变系统的**系统函数**, $H(z)$ 也是单位抽样响应 $h(n)$ 的 z 变换, 即

$$H(z) = Z[h(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} \quad (3-69)$$

若取 $z = e^{j\omega}$, 则可得出 z 平面单位圆上的系统函数就是系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$, 即

$$H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} \quad (3-70)$$

式(3-70)表明,系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 等于系统函数在单位圆上的值,即等于单位抽样响应的 z 变换在单位圆上的值。

3.7.2 因果稳定系统

由于离散线性时不变系统稳定的充分必要条件是 $h(n)$ 满足绝对可加性,即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

根据收敛域的定义可知,满足 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)z^{-n}| < \infty$ 的所有 z 值的集合称为 $H(z)$ 的收敛域。因此,若系统函数 $H(z)$ 的收敛域包括单位圆,则系统 $H(z)$ 一定是稳定的,反之亦然。

对于因果系统,其单位抽样响应为因果序列,而因果系统的收敛域是半径为 R_x 的圆的外部,即收敛域为 $|z| > R_x$,收敛域包括 z 平面的 ∞ 处。

根据上述分析可知,对于因果稳定系统,其收敛域必然包括从单位圆到无穷远的整个 z 平面,即,因果稳定系统的系统函数 $H(z)$ 的全部极点均在单位圆内。

3.7.3 系统函数和差分方程

1. 系统函数和差分方程的关系

离散线性时不变系统可以用系统函数进行描述,也可以用常系数线性差分方程进行描述。系统函数和差分方程用于描述同一个系统时,参数之间存在着内在联系。设线性常系数差分方程的一般形式如下:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-m)$$

设系统初始状态为零,对上式进行 z 变换,可得

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-m} X(z)$$

根据系统函数的定义,有

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (3-71)$$

系统函数分子与分母多项式的系数与差分方程具有对应关系,即系统函数分子多项式的各系数就是差分方程输入项的各系数,系统函数分母多项式的各系数就是差分方程输出项的各系数。

$H(z)$ 分子与分母均为 z^{-1} 的多项式,因而可以对式(3-71)的分子、分母进行因式分解,即

$$H(z) = K \frac{\prod_{m=1}^M (1 - c_m z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})} \quad (3-72)$$

式中, c_m 和 d_k 分别表示系统函数 $H(z)$ 的零点和极点, 式(3-72)表明, 除了增益常数 K , $H(z)$ 完全由系统函数的零极点确定。

2. 系统函数的分类

1) IIR 系统

若离散系统的单位抽样响应 $h(n)$ 为无限长序列, 则该系统称为无限长单位冲激响应系统, 简称为 IIR 系统。若离散系统的单位抽样响应 $h(n)$ 为有限长序列, 则该系统称为有限长单位冲激响应系统, 简称为 FIR 系统。

IIR 系统和 FIR 系统可以根据系统函数进行分类, 设系统函数的一般表达式如下:

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

一般可归一化为 $a_0 = 1$, 即分子与分母均除以 a_0 即可, 因而 $H(z)$ 也可以表示为如下形式:

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (3-73)$$

若系统函数 $H(z)$ 的分母多项式中至少有一个系数 $a_k \neq 0$, 则系统在有限 z 平面存在极点, 该系统称为 IIR 系统。IIR 系统又可分为以下两种情况。

(1) 系统函数 $H(z)$ 的分子为常数, 此时系统仅有极点而无零点, 该系统称为全极点系统, 或称为自回归系统(AR 系统)。

(2) 系统函数 $H(z)$ 既存在极点, 也存在零点, 则称为零极点系统, 又称为自回归滑动平均系统(ARMA 系统)。

2) FIR 系统

若系统函数 $H(z)$ 的分母多项式中所有 $a_k = 0 (k=1, 2, \dots, N)$, 则系统函数 $H(z)$ 不存在极点, 仅存在零点, 该系统称为 FIR 系统, 或称为全零点系统, 又称为滑动平均系统(MA 系统)。

3) 递归型与非递归型结构

IIR 系统与 FIR 系统反应在数字滤波器的结构上, 分别对应于递归型结构与非递归型结构两种形式。由于 IIR 系统至少有一个 $a_k \neq 0$, 故其差分方程表达式为

$$y(n) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m) + \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

因此, IIR 系统的输出不仅与输入 $x(n)$ 及其延时有关, 还与输出的延时 $y(n-k)$ 有关。由于存在 $a_k \neq 0$, 系统结构上需将 $y(n-k)$ 与对应系数 a_k 相乘, 逆向反馈至输入端求和。这种结构上具有反馈回路的系统称为递归型结构。

对于全零点系统, 由于所有系数 $a_k = 0$, 系统在结构上无反馈回路, 故这种结构称为非

递归型结构。因此, FIR 系统的输出仅与各输入及其延时有关, 而与输出无关。

若无特殊情况, FIR 系统一般采用非递归型结构。若基于特殊考虑, FIR 系统也可以采用递归型结构, 即通过零点与极点对消的办法, 采用含有递归结构的硬件电路。

3.7.4 频率响应的特点

对于离散线性时不变系统, 频率响应具有重要的意义。频率特性包括幅频特性和相频特性, 系统的频率特性指系统的输入为简谐信号时, 其稳态输出的幅值特性和相位特性。

虽然频率响应是针对简谐信号定义的, 但由于任何信号都可分解为简谐信号的线性组合, 因此线性时不变系统的频率特性对系统的分析和设计具有重要意义。为了研究离散线性系统对输入信号的处理作用, 应先研究线性系统对复指数或复正弦的稳态响应。

设 LSI 系统的单位抽样响应用 $h(n)$ 表示, 输入序列 $x(n)$ 为频率 ω 的复指数序列, 即

$$x(n) = e^{j\omega n}, \quad -\infty < n < \infty$$

则系统的输出为

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) e^{j\omega(n-m)} = e^{j\omega n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) e^{-j\omega m}$$

即

$$y(n) = e^{j\omega n} H(e^{j\omega}) \quad (3-74)$$

这说明, 与线性连续系统一样, 对于离散线性时不变系统, 若输入为复指数序列或正弦序列, 则输出 $y(n)$ 也是同频率的复指数序列, 并受到一个复值函数 $H(e^{j\omega})$ 的调制。因此, 输入信号 $e^{j\omega n}$ 也被称为系统的特征函数。

根据离散时间傅里叶变换的定义可知, 系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 等于单位抽样序列 $h(n)$ 的傅里叶变换, 它描述了复指数序列通过离散线性时不变系统后, 复振幅和相位的变化关系。

设系统的输入信号为

$$x(n) = \cos(\omega_0 n + \phi) = \frac{e^{j(\omega_0 n + \phi)} + e^{-j(\omega_0 n + \phi)}}{2} = \frac{e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} + e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n}}{2}$$

根据式(3-74)及线性特性, 可得系统的输出为

$$y(n) = \frac{1}{2} [H(e^{j\omega_0}) e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} + H(e^{-j\omega_0}) e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n}] \quad (3-75)$$

由于 $h(n)$ 是实序列, 因而 $H(e^{j\omega})$ 具有共轭对称性, 且 $H(e^{j\omega})$ 的幅值为偶对称, 相位为奇对称。

$$H(e^{j\omega}) = H^*(e^{-j\omega})$$

即

$$\begin{cases} |H(e^{j\omega})| = |H(e^{-j\omega})| \\ \arg |H(e^{j\omega})| = -\arg |H(e^{-j\omega})| \end{cases}$$

因此, 式(3-75)可化简为

$$y(n) = |H(e^{j\omega_0})| \cos\{\omega_0 n + \phi + \arg[H(e^{j\omega_0})]\}$$

由于

$$H(e^{j\omega_0}) = |H(e^{j\omega_0})| e^{j\arg |H(e^{j\omega_0})|}$$

因此可得, $H(e^{j\omega})$ 是周期为 2π 的周期函数, 根据线性时不变系统输入/输出的关系可知

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

对上式进行离散时间傅里叶变换, 可得

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \quad (3-76)$$

因此, 对于线性时不变(LTI)系统, 其输出序列的傅里叶变换等于输入序列的傅里叶变换与系统频率响应的乘积。

对式(3-76)求逆变换, 可得输出序列为

$$y(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega \quad (3-77)$$

【例 3-25】 系统频域分析示例。

设系统差分方程如下:

$$y(n) + \frac{1}{2}y(n-1) = x(n) + \frac{1}{2}x(n-1)$$

若该系统为因果系统, 试完成下列计算与分析:

- (1) 判定系统是否为稳定系统;
- (2) 求系统的单位抽样响应;
- (3) 当输入 $x(n) = e^{j\pi n}$ 时, 求系统的输出 $y(n)$ 。

解: (1) 对差分方程进行 z 变换, 可得

$$Y(z) + \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) = X(z) + \frac{1}{2}z^{-1}X(z)$$

系统函数如下:

$$H(z) = \frac{1 + 0.5z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}} = -1 + \frac{2}{1 - 0.5z^{-1}}$$

系统仅有一个极点 $z = 0.5$, 在单位圆内, 因此, 本系统是稳定系统。由于系统是因果系统, 所以收敛域为

$$|z| > 0.5$$

- (2) 求单位抽样响应 $h(n)$ 。

对系统函数进行 z 逆变换, 可得

$$h(n) = Z^{-1}[H(z)] = Z^{-1}\left(-1 + \frac{2}{1 - 0.5z^{-1}}\right) = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \delta(n)$$

- (3) 求响应 $y(n)$ 。

先求频率响应, 即

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1 + 0.5e^{-j\pi}}{1 - 0.5e^{-j\pi}}$$

根据式(3-74)可知, 当输入 $x(n) = e^{j\pi n}$ 时, 系统的响应为

$$y(n) = x(n)H(e^{j\omega}) = e^{j\pi n}H(e^{j\omega}) = e^{j\pi n} \frac{1 + 0.5e^{-j\pi}}{1 - 0.5e^{-j\pi}} = \frac{1}{3}e^{j\pi n}$$

3.7.5 频率响应的几何确定法

频率响应的几何确定法是指根据系统函数在 z 平面的零极点位置分布信息, 用代数和

几何方法,以直观的方式定性或定量地分析系统的频率响应。线性时不变离散系统的系统函数 $H(z)$ 完全可以由其 z 平面上的零极点确定,而 $H(z)$ 在单位圆上的 z 变换就是系统的频率响应,因此,系统函数 $H(z)$ 的频率响应在理论上完全可以根据系统函数的零极点确定。

根据式(3-72)可得

$$H(z) = k \frac{\prod_{m=1}^M (1 - c_m z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})} = k z^{N-M} \frac{\prod_{m=1}^M (z - c_m)}{\prod_{k=1}^N (z - d_k)}$$

k 为实数,用 $z = e^{j\omega}$ 代入,得系统的频率响应为

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= k \frac{\prod_{m=1}^M (1 - c_m e^{-j\omega})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k e^{-j\omega})} = k e^{j(N-M)\omega} \frac{\prod_{m=1}^M (e^{j\omega} - c_m)}{\prod_{k=1}^N (e^{j\omega} - d_k)} \\ &= |H(e^{j\omega})| e^{j\arg[H(e^{j\omega})]} \end{aligned} \quad (3-78)$$

其幅值为

$$|H(e^{j\omega})| = |k| \frac{\prod_{m=1}^M |e^{j\omega} - c_m|}{\prod_{k=1}^N |e^{j\omega} - d_k|} \quad (3-79)$$

其相角为

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \arg[K] + \sum_{m=1}^M \arg[e^{j\omega} - c_m] - \sum_{k=1}^N \arg[e^{j\omega} - d_k] + (N - M)\omega \quad (3-80)$$

根据式(3-79),在 z 平面上绘出系统函数 $H(z)$ 的零极点图,如图 3-18(a)所示,用 $z = c_m (m=1, 2, \dots, M)$ 表示 $H(z)$ 的零点,用 $z = d_k (k=1, 2, \dots, N)$ 表示 $H(z)$ 的极点,为具有代表性,图中已绘出 c_1 和 c_2 两个零点及 d_1 和 d_2 两个极点。

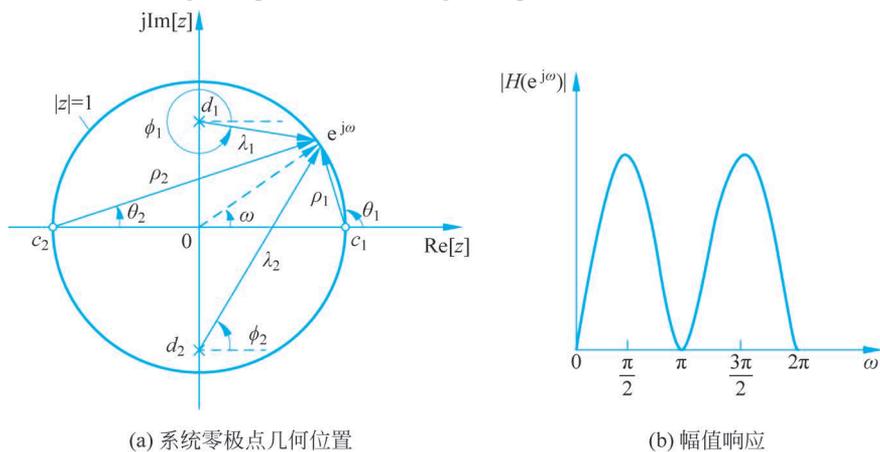


图 3-18 频率响应的几何分析法

图 3-18(a)中,由原点指向 c_m 或 d_k 的向量分别用 \mathbf{c}_m 和 \mathbf{d}_k 表示; $e^{j\omega} - c_m$ 则是由零点 c_m 指向单位圆上 $e^{j\omega}$ 点的向量,用 \mathbf{C}_m 表示,称为零点向量,即

$$e^{j\omega} - c_m = \mathbf{C}_m$$

$e^{j\omega} - d_k$ 则是由极点 d_k 指向 $e^{j\omega}$ 点的向量,用 \mathbf{D}_k 表示,称为极点向量,即

$$e^{j\omega} - d_k = \mathbf{D}_k$$

设向量 $\mathbf{C}_m = \rho_m e^{j\alpha_m}$, 其模为 ρ_m , 相角为 α_m ; 向量 $\mathbf{D}_k = \lambda_k e^{j\beta_k}$, 其模为 λ_k , 相角为 β_k , 则式(3-79)所表示的幅值响应可简化为

$$|H(e^{j\omega})| = |k| \frac{\prod_{m=1}^M |\rho_m|}{\prod_{k=1}^N |\lambda_k|} \quad (3-81)$$

即幅值响应等于各零点向量的长度之积除以各极点向量的长度之积,再乘以常数 $|k|$ 。

式(3-80)所表示的相位响应为

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \arg[k] + \sum_{m=1}^M \alpha_m - \sum_{k=1}^N \beta_k + (N - M)\omega \quad (3-82)$$

式(3-82)表明,相位响应等于常数 k 的相角 $\arg[k]$, 加上各零点向量相角之和,减去各极点向量相角之和,再加上线性相移 $(N - M)\omega$ 。

$e^{j(N-M)\omega}$ 仅产生 $(N - M)$ 位的相移,对幅值响应无任何影响,这是因为在极点处的极点和零点至单位圆的距离恒为 1,故对幅值响应没有影响,仅对输出的相位产生影响。

因此,根据式(3-81)可求系统的幅值响应,根据式(3-82)可求系统的相位响应。

通过上面分析可进一步得出, ω 在 $0 \sim 2\pi$ 范围变化过程中,若 $e^{j\omega}$ 移动到零点或极点附近,当 $e^{j\omega}$ 的位置与零点和极点在同一直线上时,零向量或极向量长度最短,这些位置的零极点将对 $|H(e^{j\omega})|$ 的值产生最大的影响,具体结论如下:

(1) 单位圆附近的零点位置对幅值响应 $|H(e^{j\omega})|$ 的谷点(极小值)的深度和位置具有显著影响,若零点在单位圆上,则 $|H(e^{j\omega})|$ 的最小值为零,即为传输零点。

(2) 在单位圆内且靠近单位圆的极点对幅值响应峰值的大小和位置具有显著影响。

(3) 若极点在单位圆外,则系统不稳定;零点可在单位圆外,对系统稳定无影响。

(4) 根据零极点位置对频率响应产生的影响进行分析,适当地控制系统零极点分布,能较好地改善数字滤波器的频率响应,以达到设计目标。

【例 3-26】 频率响应几何确定法的实验验证。

已知离散系统函数如下:

$$H(z) = 1 - z^{-N}$$

若 $N = 8$, 根据系统零极点位置,分析系统频率响应的峰值和谷点。

解: 系统函数 $H(z)$ 形式如下:

$$H(z) = 1 - z^{-N} = \frac{z^N - 1}{z^N}$$

由于 $N = 8$, 系统函数 $H(z)$ 有 8 个零点和 8 个极点,分别由如下零点方程和极点方程确定。

(1) 零点方程。

$$z^N - 1 = 0$$

系统的零点为

$$z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

系统函数的 8 个零点等间隔分布在 z 平面单位圆上。

(2) 极点方程如下：

$$z^N = 0$$

极点为

$$z_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

系统全部极点均在坐标原点,坐标原点的零极点对方幅值响应不产生影响。

用 MATLAB 分析系统频率响应,程序代码如下:

```
clc;clear all;close all;
b = [1,0,0,0,0,0,0,0,-1];
a = 1;subplot(1,3,1);
zplane(b,a);title('零极点分布');
[H,w] = freqz(b,a);subplot(1,3,2);
plot(w/pi,abs(H));title('幅值响应');
axis([0,1,0,2]);
xlabel('ω/pi');ylabel('|H(ejω)|');
subplot(1,3,3);
plot(w/pi,angle(H));title('相位响应');
axis([0,1,-2,2]);xlabel('ω/pi');
ylabel('arg(H(ejω))');
```

程序运行结果如图 3-19 所示。

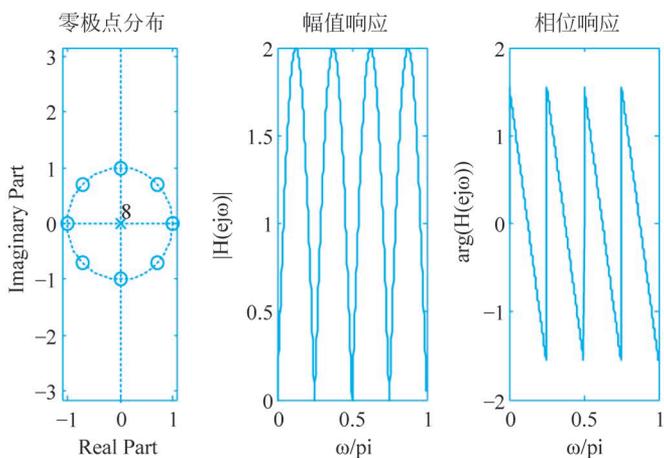


图 3-19 系统函数的零极点与频率响应

图 3-19 绘出了系统函数 $H(z)$ 的零极点位置分布图以及在 $[0, \pi]$ 区间上的频率响应和相位响应, $[0, \pi]$ 区间对应于零极点图中上半平面的零极点。系统函数全部 8 个零点等间隔分布在 z 平面单位圆上,其中第一个零点在正实轴上,每隔 $\frac{\pi}{4}$ 出现一个零点。理论上,在单位圆上零点位置对应的频率处,频率响应的幅值响应为零,根据幅值响应曲线,其幅值响应的谷点位置准确地出现在 $\omega = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$ 频率点,与零极点图中系统函数的零点位置完全

一致,频率响应的峰值等间隔出现相邻两零点的中间位置。系统有一个8重极点,极点位置在 z 平面的坐标原点。

【例 3-27】 根据差分方程分析离散系统示例。

已知离散系统的差分方程如下:

$$y(n] = x(n] + ay(n-1) \quad |a| < 1, a \text{ 为实数}$$

求该系统的频率响应。

解: 对差分方程进行 z 变换,可得

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

根据 $H(z)$ 可得系统的零极点分布如图 3-20(a)所示,由 $|a| < 1$ 可知极点在单位圆内,系统稳定。根据系统函数及其收敛域可知,该系统为因果稳定系统,其单位抽样响应为

$$h(n] = a^n u(n]$$

以 $a=0.8$ 为例,该系统的单位抽样响应如图 3-20(b)所示。

根据系统函数 $H(z)$,可得系统的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = H(z)_{|z=e^{j\omega}} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = \frac{1}{(1 - a\cos\omega) + j a\sin\omega}$$

幅值响应为

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a\cos\omega}}$$

相位响应为

$$\arg[H(e^{j\omega})] = -\arctan\left(\frac{a\sin\omega}{1 - a\cos\omega}\right)$$

当 $0 < a < 1$ 时,系统具有低通特性;当 $-1 < a < 0$,系统具有高通特性。根据幅值响应和相位响应的解析式,可以绘出系统的频率特性,本题以 $a=0.8$ 为例,用 MATLAB 绘出的幅值响应和相位响应如图 3-20(c)和图 3-20(d)所示。

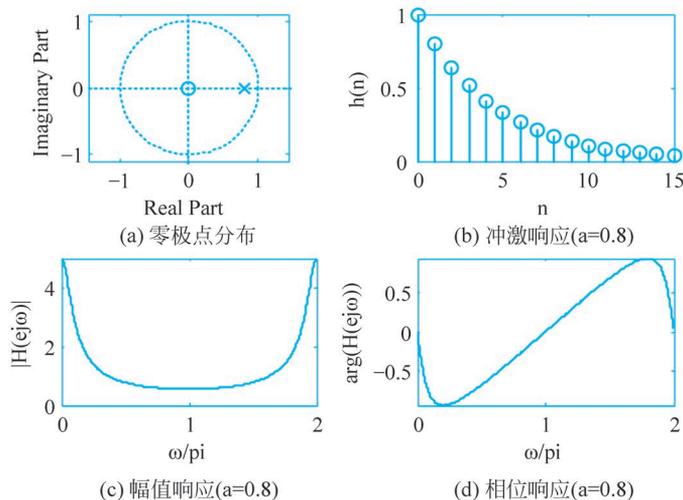


图 3-20 一阶系统的特性

习题

1. 求下列序列的 z 变换、收敛域及零极点分布图。

$$(1) x(n) = \delta(n+1) \qquad (2) x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

$$(3) x(n) = -\left(\frac{1}{3}\right)^n u(-n-1) \qquad (4) x(n) = \frac{1}{n}, \quad n \geq 1$$

2. 如图 3-21 所示, 三个子图分别给出了 $X(z)$ 的极点位置与收敛域, 其中阴影部分表示 $X(z)$ 的收敛域, 试根据极点分布位置分别指出图 3-21(a)~图 3-21(c) 所示 $X(z)$ 对应的序列是什么序列。

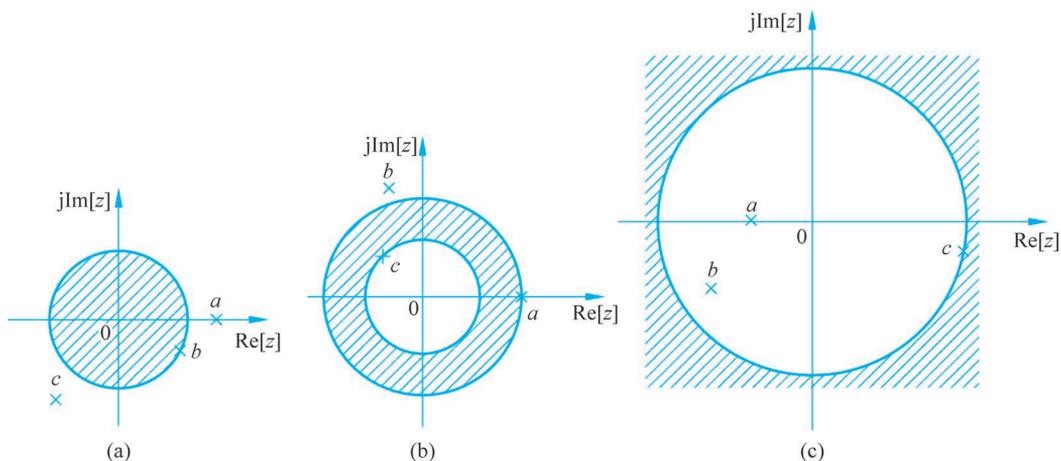


图 3-21 $X(z)$ 的极点与收敛域

3. 求下列解析函数 $X(z)$ 的 z 逆变换。

$$(1) X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2} \qquad (2) X(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{9}z^{-2}}, \quad |z| > \frac{1}{3}$$

$$(3) X(z) = \frac{-1}{(1 - 3z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}, \quad |z| > 3$$

4. 已知序列 $x(n)$ 的 z 变换如下:

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{9}z^{-2}}{\left(1 + \frac{1}{9}z^{-2}\right)\left(1 + \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2}\right)}$$

- (1) $X(z)$ 可能有多少个不同的收敛域?
- (2) 判断每一个收敛域所对应的序列 $x(n)$ 的类型。

5. 已知 $X(z) = \frac{-3z^{-1}}{2 - 5z^{-1} + 2z^{-2}}$, 绘出系统的零极点图; 若 $X(z)$ 具有如下三种收敛

域,指出哪一个是左边序列,哪一个是右边序列,哪一个为双边序列,并求相应的序列 $x(n)$ 。

$$(1) |z| > 2 \quad (2) |z| < \frac{1}{2} \quad (3) \frac{1}{2} < |z| < 2$$

6. 已知 $X(z)$ 的解析表达式及收敛域如下:

$$X(z) = \frac{z^2}{(3-z)\left(z - \frac{1}{3}\right)}, \quad \frac{1}{3} < |z| < 3$$

试采用长除法求 $X(z)$ 的逆变换。

7. 已知 $X(z) = \frac{1+2z^{-1}}{1+z^{-1}-6z^{-2}}$, 试用 MATLAB 展开为部分分式, 并求序列 $x(n)$ 。

8. 已知序列 $x(n] = nb^n u(n)$, 根据 z 变换的性质求 $X(z)$ 。

9. 若 $x(n]$ 为因果序列, 根据初值定理则有 $x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$; 如果序列 $x(n]$ 为逆因果序列, 即 $n > 0$ 时 $x(n) = 0$, 应如何求序列的初值 $x(0)$?

10. 证明终值定理(z 变换性质 8)。

11. 已知因果序列的 z 变换为 $X(z) = \frac{1}{1-0.25z^{-2}}$, 求该序列的初值 $x(0)$ 和终值 $x(\infty)$ 。

12. 已知 $x(n]$ 的 z 变换的收敛域包括单位圆, 其 z 变换如下:

$$X(z) = \frac{\frac{5}{6} - \frac{7}{6}z^{-1}}{1 - \frac{5}{2}z^{-1} + z^{-2}}$$

求该序列的 $x(0)$ 。

13. 试证明时域相乘性质(z 域复卷积定理)。

14. 试证明帕塞瓦尔定理(z 变换性质 11)。

15. 序列 $x(n]$ 的频谱用 $X(e^{j\omega})$ 表示, 求以下序列的频谱。

$$(1) x(n) = \delta(n - n_0)$$

$$(2) x(n) = e^{-an} u(n)$$

$$(3) x(n) = 0.5^n R_8(n)$$

$$(4) x(n) = \cos(\omega_0 n) u(n)$$

16. 设 $X(e^{j\omega})$ 是如图 3-22 所示序列 $x(n]$ 的傅里叶变换, 试根据 DTFT 性质完成下列计算:

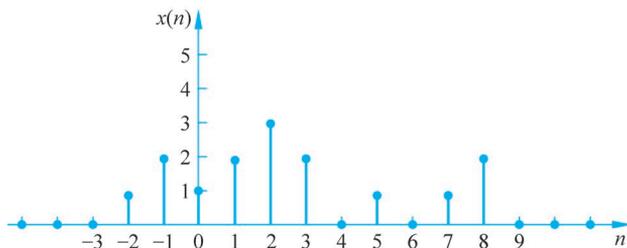


图 3-22 序列 $x(n]$ 的波形

$$(1) X(e^{j0})$$

$$(2) \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega$$

$$(3) \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

$$(4) \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \right|^2 d\omega$$

17. 求 $x(n]=R_N(n)$ 的傅里叶变换,并以 $N=4$ 为例,给出其幅值谱和相位谱。

18. 已知 $X(e^{j\omega})=DTFT[x(n)]$,试用 $X(e^{j\omega})$ 表示 $y(n)=\frac{x(n)+x^*(-n)}{2}$ 的傅里叶变换。

19. 某因果稳定系统的结构如图 3-23 所示。

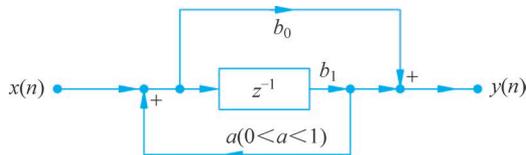


图 3-23 系统结构图

(1) 根据系统的结构图判断系统阶数;

(2) 求系统的差分方程和系统函数;

(3) 分析系统是否稳定系统。

20. 已知离散线性时不变系统的差分方程如下,该系统为因果系统。

$$y(n) = y(n-1) + y(n-2) + x(n-1)$$

(1) 求该系统的系统函数 $H(z)$ 及收敛域,并给出其零极点图;

(2) 绘出系统的结构图;

(3) 求系统的单位抽样响应 $h(n)$;

(4) 若该系统为因果系统,其是否为稳定系统?

21. 已知系统函数如下:

$$H(z) = \frac{1 + 0.5z^{-1} + 1.5z^{-2} + 0.5z^{-3} + z^{-4}}{1 - 1.1z^{-1} + 1.5z^{-2} - 0.7z^{-3} + 0.3z^{-4}}$$

试判断该系统的稳定性。

22. 已知系统的差分方程如下:

$$y(n) = x(n) + ax(n-1) + a^2x(n-2) + \cdots + a^{N-1}x(n-N+1) = \sum_{k=0}^{N-1} a^k x(n-k)$$

a 为常数,且 $0 < a < 1$,试求解下列问题:

(1) 给出系统的结构图;

(2) 求解系统的零极点,以 $N=6$ 为例绘出系统的零极点分布图;

(3) 求系统的单位抽样 $h(n)$,以 $N=6$ 为例绘出 $h(n)$ 的波形;

(4) 以 $N=6, a=0.8$ 为例,求系统的频率响应曲线,并分析峰值和谷点位置。

23. 现有一个输入为 $x(n)$ 和输出为 $y(n)$ 的离散线性时不变系统,已知该系统是稳定系统,系统差分方程如下:

$$H(z) = \frac{1.5 + 0.98z^{-1} - 2.608z^{-2} + 1.2z^{-3} - 0.144z^{-4}}{1 + 1.4z^{-1} - 0.6z^{-2} - 0.072z^{-3}}, \quad |z| > 0.6$$

试用 MATLAB 完成如下任务:

(1) 绘出系统的零极点图;

(2) 分析系统的稳定性。