

第5章

随机信号统计特性分析



视频讲解

5.1 随机信号的基本概念

随机信号是指取值随机变化的信号。它与数学中的随机过程这一概念相同。对于随机信号而言,它包含多个样本,且每一个样本在不同时刻的取值是随机变化的,如图 5.1.1 所示。图 5.1.1 中每一幅子图表示一个样本,随机信号是多个样本的集合。在图 5.1.1 中,多个样本在同一时刻的观测值随机变化,某一时刻的观测值可用一个随机变量来描述。这样,随机信号也可以看成多个随机变量的集合。

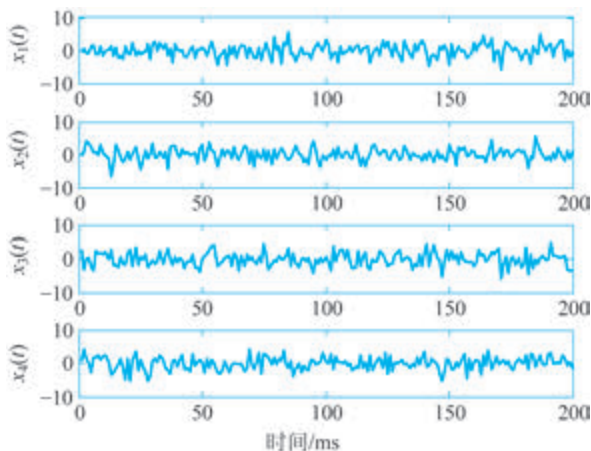


图 5.1.1 随机信号示意图

雷达、电台、导航、声呐、光谱探测仪等电子系统接收的信号、系统电路产生的热噪声都是随机信号。图 5.1.2 给出了雷达接收机的噪声示意图,可见,噪声具有明显的随机特性。严格来讲,图 5.1.2 中的噪声取值是噪声这个随机信号的一个样本。

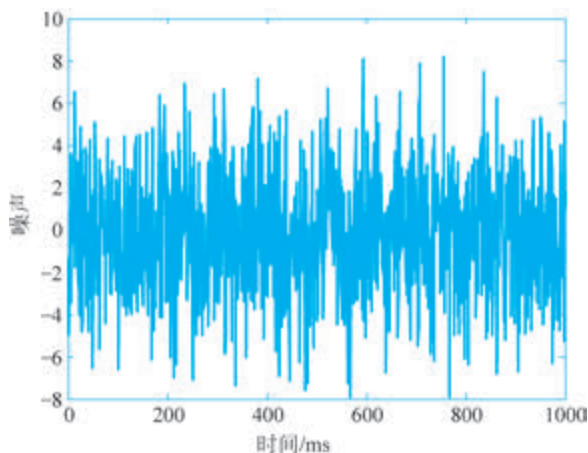


图 5.1.2 雷达接收机的噪声示意图

随机信号由幅度和相位组成,其幅度或相位随机变化。随机信号在时域和频域都具有较强的随机性,但从统计的角度看,通常都有规律可循。随机信号的时域观测值和观

测值分布分别如图 5.1.3 和图 5.1.4 所示。在图 5.1.3 和图 5.1.4 中,虽然在取值上随机信号起伏剧烈,呈现出很强的随机性,但从统计的角度看,随机信号的观测值统计直方图服从高斯分布。

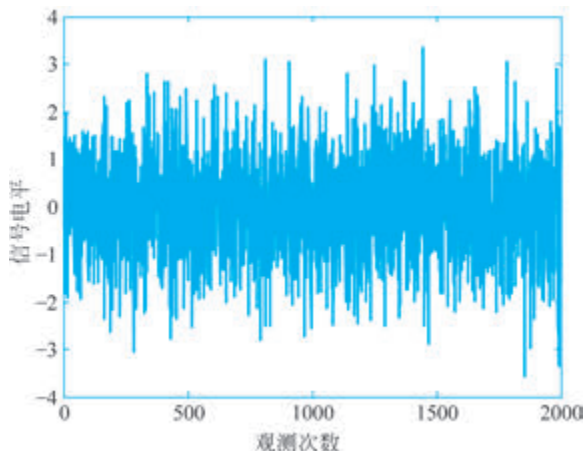


图 5.1.3 随机信号的时域观测值

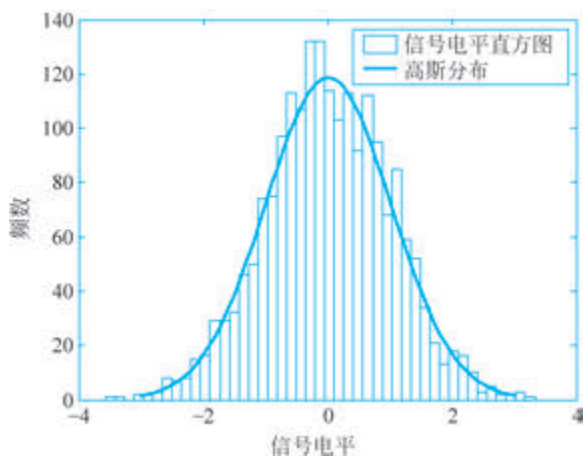


图 5.1.4 随机信号的观测值分布

随机信号呈现出的规律性即为随机信号的统计特性。随机信号的统计特性分析是随机信号处理的基础。以雷达为例,雷达回波统计特性分析是雷达信号处理和数据处理的基础。有效利用雷达回波统计特性,可显著提高雷达目标检测概率、识别概率和跟踪精度,具体内容将在后文介绍。在理论上,随机信号的统计特性需要足够多的样本。在实际中,通常选择一个样本数量较多的样本来代替随机信号,进而开展统计特性分析。

本章以雷达目标探测为背景,以雷达接收到的目标和海面反射回波作为典型的随机信号,分析和讲解随机信号在时域和频域的一些统计特性。典型的雷达回波统计特性包括幅度、相位、相关性、多普勒谱、功率谱等。其中,幅度、相位主要描述雷达回波的起伏特性,具体包括幅度分布、幅度起伏度、相位分布、相位变化率。雷达回波的相关性包括

时间相关性和空间相关性。其中,时间相关性主要描述雷达不同时刻观测信号之间的相关性;空间相关性主要描述空间不同位置物体的雷达回波之间的相关性。时间相关性和空间相关性均可通过自相关函数、互相关函数、协方差函数、相关系数等特征参数来表示。雷达回波的多普勒谱和功率谱描述了雷达回波的频域特性。分析和掌握雷达回波频域特性是雷达频域信号处理的基础。雷达回波的多普勒谱主要描述雷达回波幅度在各个频率上的分布情况,雷达回波的功率谱则描述雷达回波功率在各个频率上的分布情况。

下面结合雷达实测回波数据,介绍随机信号统计特性分析相关的理论及其应用情况。

5.2 雷达试验与随机信号获取

为了分析雷达回波的统计特性,需要先开展雷达探测试验,录取实测数据。为此,本节将介绍雷达试验场景和录取的实测数据。本章使用的实测数据包括两个雷达系统在两种不同场景下分别录取的两批数据。一批数据是国防科技大学电子科学学院新体制雷达与电子对抗团队采用临空雷达录取的无人机探测数据;另一批数据是加拿大麦克马斯特大学采用 IPIX 雷达录取的海杂波数据。下面分别对这两个雷达系统的试验场景和录取的实测数据进行介绍。

5.2.1 无人机探测与信号获取

1. 无人机探测场景

探测无人机的试验雷达是一部兼具自动搜索和跟踪功能的 X 波段雷达,试验采用的数据包括固定翼无人机、旋翼无人机。雷达系统和无人机如图 5.2.1 所示。



图 5.2.1 雷达系统与无人机

雷达系统包括天线和控制方舱两部分。其中,天线部分最上面的弧形天线是搜索天线,下方大的圆形天线是跟踪天线。搜索天线搜索到目标后将目标信息传给跟踪天线。搜索天线和跟踪天线中间的两个小圆形天线是辅助天线,主要用于抗干扰。雷达发射机和接收机挂载在天线背面。控制方舱车里装配有雷达信号处理机、显示器和电源。雷达工作参数如表 5.2.1 所示。

表 5.2.1 雷达工作参数

雷达工作参数	取 值
雷达发射峰值功率	1.8kW
脉冲宽度	5 μ s
脉冲重复频率	800Hz
载频	9.5GHz
波形	线性调频信号
带宽	5MHz
天线最大增益	40dB
跟踪波束宽度	0.8°

试验采用多型无人机作为雷达目标,包括“开拓者”复合材质固定翼无人机、“双子星”泡沫固定翼无人机、大疆“精灵 3”旋翼无人机、大疆“M600 Pro”旋翼无人机。本章采用的数据为雷达探测“双子星”泡沫固定翼无人机和大疆“精灵 3”旋翼无人机的数据。“双子星”泡沫固定翼无人机机身主要由泡沫制作而成,螺旋桨由木头制作而成,电机和电池装载在机腹里面。无人机尺寸为 1.2m $\times$ 1.5m $\times$ 0.4m,无人机图片如图 5.2.2(a)所示。在试验开始前,应预先规划好无人机的飞行航线。试验开始后,无人机按照规划的飞行航线,在距离雷达 3~7km 之间多次往返飞行,飞行高度为 400m,飞行速度在 25m/s 左右。无人机的飞行航线如图 5.2.2(b)所示。

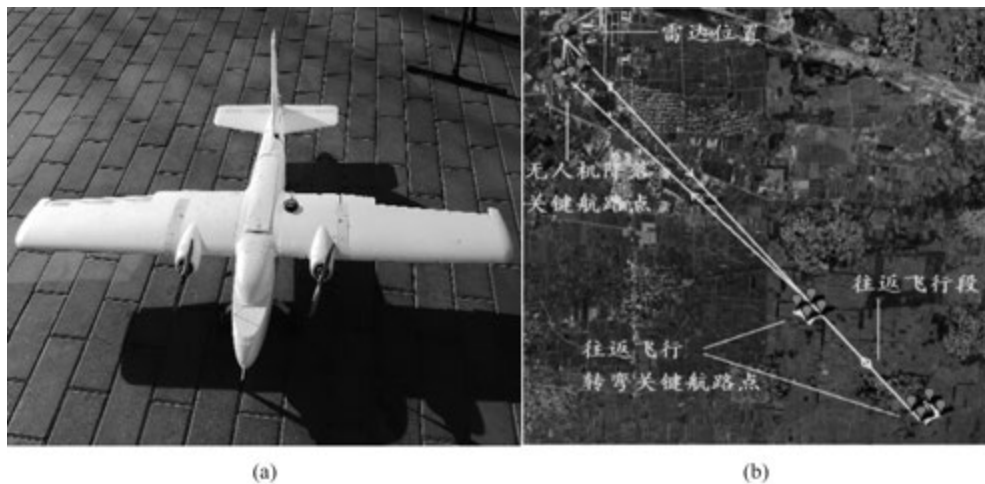


图 5.2.2 无人机与飞行航线

试验过程中,首先根据预先设定的无人机飞行航线和雷达相对位置,调整雷达波束,使雷达波束大致朝向无人机航线方向。然后根据雷达显示屏回波强度判断雷达波束是否对准无人机。当判断无人机在主波束内时,按下数据采集开关,采集并存储雷达接收信号数据。当无人机飞行时,全程记录并实时反馈自身位置和速度,以备后续数据分析时使用。

2. 雷达实测信号

雷达探测固定翼无人机时的回波幅度和相位分别如图 5.2.3 和图 5.2.4 所示。图 5.2.3 中,横轴表示采样点数,在实际中对应于距离,纵轴表示脉冲数。图 5.2.3 的中间若隐若现的亮线为无人机回波。无人机目标位于第 250~255 个采样点,其他采样点对应的信号为杂波和噪声的叠加信号。无人机回波幅度随机起伏。在有些脉冲回波中,无人机回波较弱,被杂波淹没。图 5.2.4 表明,无人机回波相位与杂波相位在 $[-\pi, \pi]$ 区间随机变化,二者的相位在相位二维图中无显著差异。

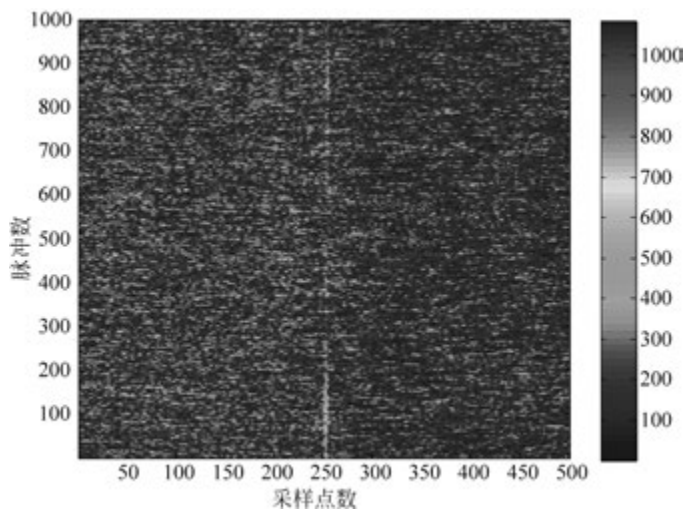


图 5.2.3 固定翼无人机回波幅度

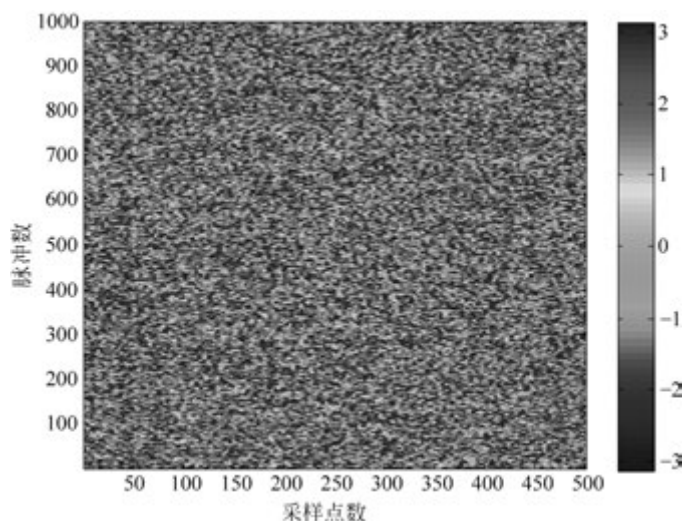


图 5.2.4 固定翼无人机回波相位

图 5.2.5 和图 5.2.6 分别为雷达第 139 和第 269 个脉冲回波幅度和相位随距离变化的曲线。从图中可以看出,无人机回波幅度和相位具有较强的随机起伏特性。但是,在

第 139 个脉冲回波中,无人机回波相对较强。

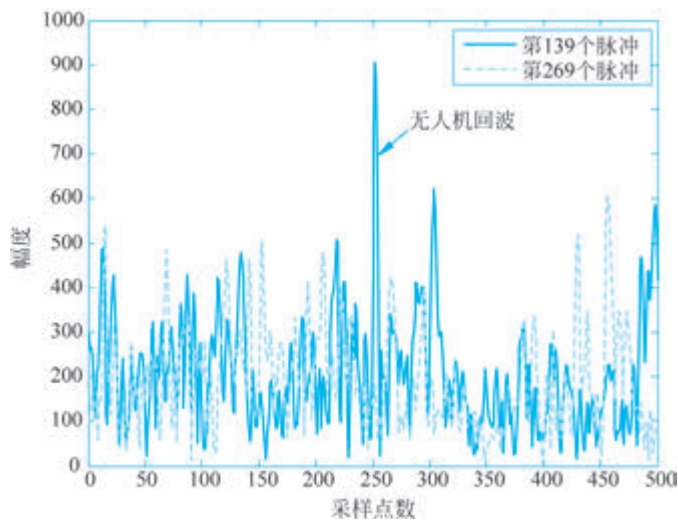


图 5.2.5 幅度随距离变化的曲线

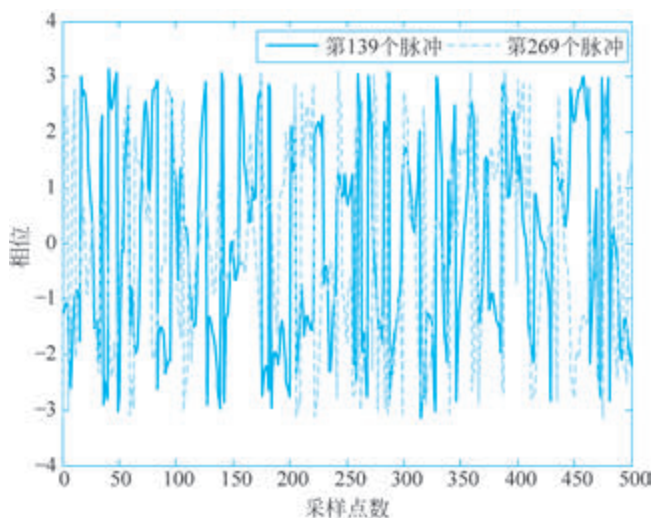


图 5.2.6 相位随距离变化的曲线

图 5.2.7 和图 5.2.8 分别为雷达探测旋翼无人机时的回波幅度和相位。从图 5.2.7 中可以看出,无人机位于第 175 个距离单元附近,旋翼无人机回波明显较杂波强,但无人机回波幅度起伏变化。从图 5.2.8 中可以看出,无人机回波相位随时间和距离单元缓慢变化;杂波相位随着距离单元和脉冲数均随机起伏变化,无人机回波相位与杂波相位具有显著差异。这些特性可为无人机检测和识别提供重要信息。

5.2.2 雷达海面目标探测与信号获取

雷达探测海上目标时,除了接收目标回波外,还会接收到海面反射的回波,即海杂波。

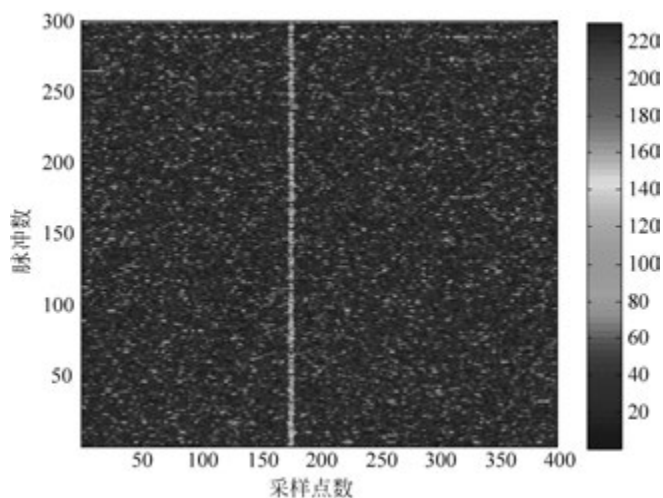


图 5.2.7 旋翼无人机回波幅度

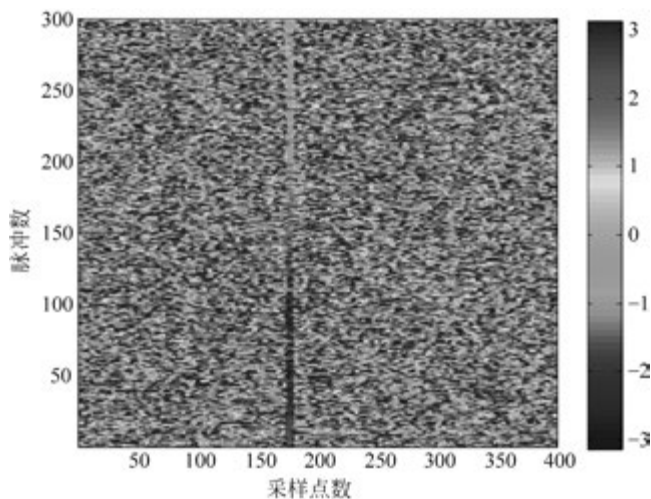


图 5.2.8 旋翼无人机回波相位

海杂波是一类经典的随机信号,与地杂波的特性不同。分析海杂波特性,可为海杂波背景下的雷达目标检测、识别与跟踪提供重要支撑。在分析海杂波特性之前,先介绍加拿大麦克马斯特大学 IPIX 雷达的海上目标探测试验场景与实测数据。

IPIX 雷达 (Ice Multiparameter Imaging X-Band Radar) 由加拿大麦克马斯特大学 Haykin 教授团队研制。雷达系统如图 5.2.9 所示。

1993 年,麦克马斯特大学利用该雷达系统在加拿大东海岸新斯科舍省达特茅斯附近 30m 高的悬崖上对大西洋进行观测获得了大批海杂波观测数据。这些数



图 5.2.9 IPIX 雷达系统

据在国际上被学者广泛使用。本书主要结合 1993 年的海杂波数据进行分析。

IPIX 雷达工作参数如表 5.2.2 所示。

表 5.2.2 IPIX 雷达工作参数

参 数	取 值
工作频率	9.39GHz
脉冲重复频率	1kHz
脉冲宽度	200ns
采样率	10MHz
雷达高度	30m
天线最大增益	45.7dB
半功率波束宽度	0.9°

当雷达工作在扫描模式时,对四周进行 360°扫描,观测得到的海杂波和地杂波如图 5.2.10 所示。从二维图中可以看出,无论是地杂波还是海杂波,都呈现出较强的随机起伏特性;地杂波明显比海杂波强;近区海杂波比远区海杂波强。



图 5.2.10 雷达扫描模式下的实测海杂波和地杂波

当雷达工作在凝视模式时,对距离为 2574~2769m 的海面持续观测 131.072s,海面平均浪高为 2.1m,观测得到的海杂波数据存储在 131072×14 的数组中(行代表观测时间,列代表观测距离),经预处理后的海杂波强度如图 5.2.11 所示,图中杂波强度单位为 dBW。从图 5.2.11 中可以看出,无论是单个距离单元的多次观测信号,还是某个时刻多个距离单元的观测信号,都呈现出较强的随机起伏特性。所以,海杂波是典型的随机信号。

接下来,本章将以雷达探测无人机回波与杂波、雷达探测海上目标时接收的海杂波为对象,分析随机信号的统计特性。这些统计特性主要包括幅度分布、相位分布、均值、方差、自相关函数、互相关函数、多普勒谱和功率谱等。

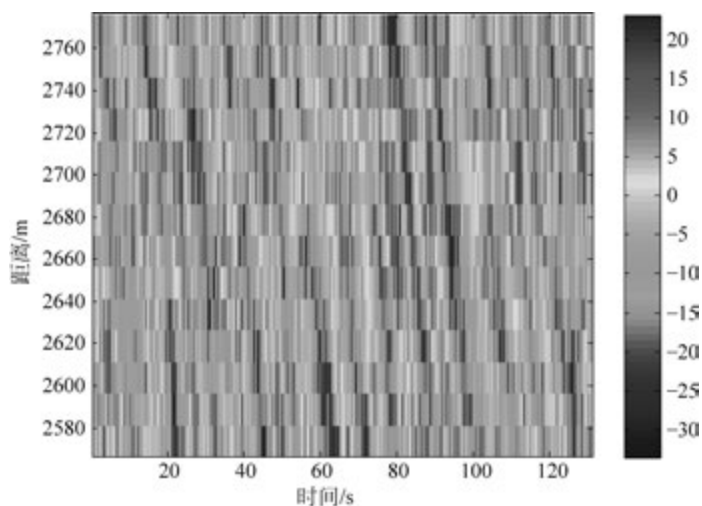


图 5.2.11 雷达凝视模式下的海杂波强度



视频讲解

5.3 随机信号的幅度特性

雷达回波可表示为

$$x = A \cos \varphi \quad (5.3.1)$$

式中, A 为幅度; φ 为瞬时相位, $\varphi = 2\pi f_0 t + \varphi_0$, f_0 为回波载频, t 为时间, φ_0 为回波初始相位。

随机信号的幅度和相位蕴含着丰富的信息。以雷达探测无人机回波为例, 雷达接收信号的幅度分布和相位分布蕴含着无人机的大小、形状、速度、距离等信息。雷达接收信号的幅度和相位对雷达检测和识别无人机具有很强的指导作用。图 5.3.1 和图 5.3.2

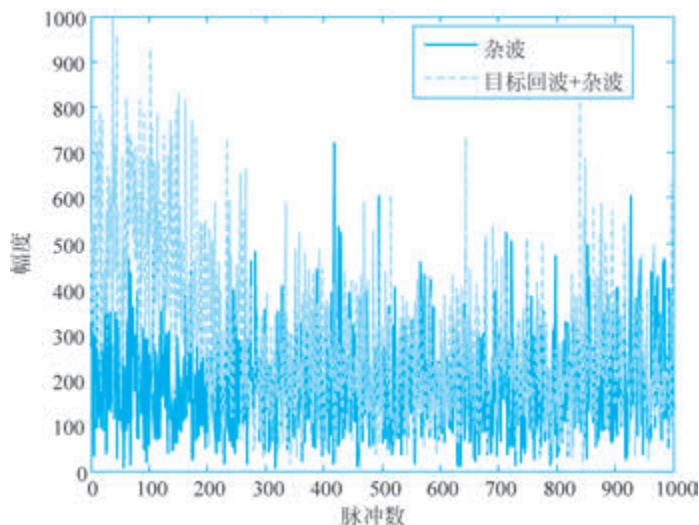


图 5.3.1 雷达接收信号幅度起伏

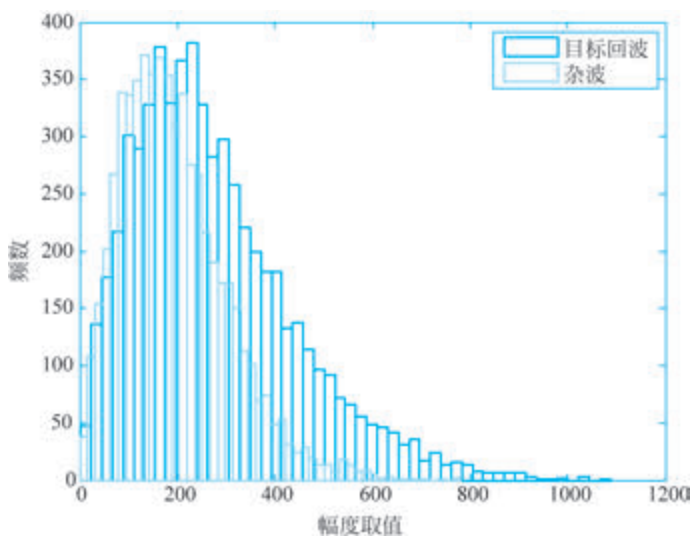


图 5.3.2 雷达接收信号幅度分布

分别给出了无人机存在和不存在情况下雷达接收信号幅度及其统计分布情况。当无人机存在时,雷达接收信号是无人机目标回波与杂波的混合信号;当无人机不存在时,雷达接收信号为杂波。

从图 5.3.1 中可以看出,雷达接收信号呈现出较强的随机起伏特性。目标回波+杂波的平均幅度略高于纯杂波的平均幅度。这一现象在图 5.3.2 中的直方图中表现得更加明显。从图 5.3.2 中可以看出,无人机存在和不存在时,雷达接收信号的幅度分布、幅度平均值均不一样。这些统计特性可用于雷达无人机检测与识别。

IPIX 雷达探测海面目标接收到的随机信号及其统计特性如图 5.3.3 和图 5.3.4 所示。图 5.3.3 表明,雷达接收信号具有较强的随机起伏特性,且有目标、无目标时,雷达接收信号的幅度分布不同、均值也不同。

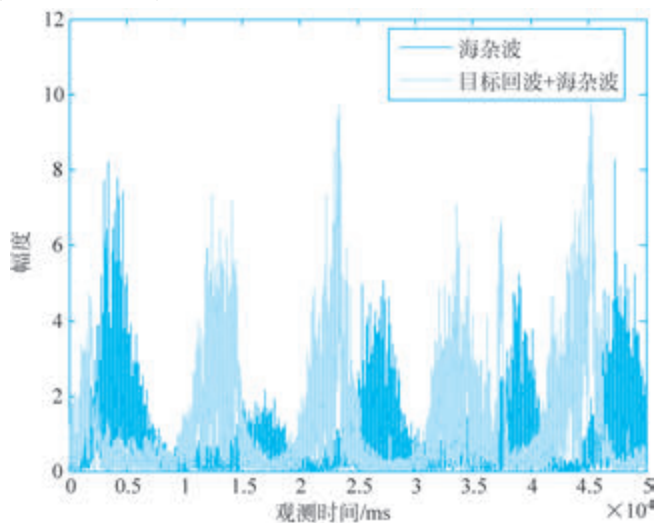


图 5.3.3 IPIX 雷达信号幅度起伏

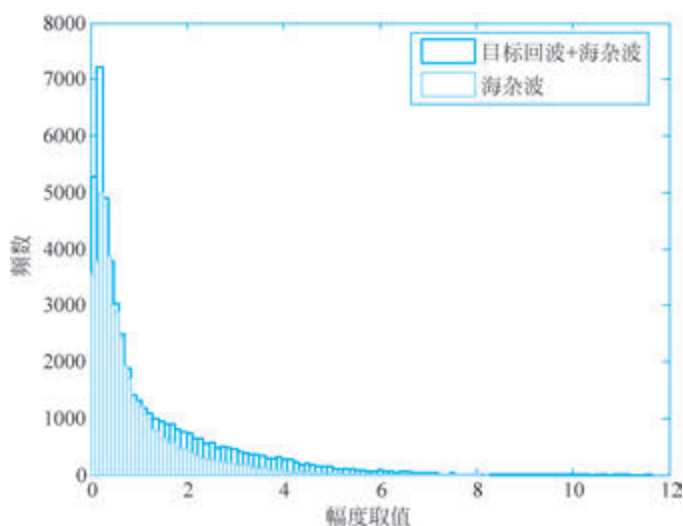


图 5.3.4 IPIX 雷达信号幅度分布

在有目标、无目标时,雷达回波幅度分布具有一定差异,且通常情况下,两者具有一定的重合度。假定雷达以接收信号幅度作为判断有无目标的指标,为了将雷达虚警率控制在较低的水平,需要根据雷达海杂波幅度分布来确定门限值,如图 5.3.5 所示。由此可见,雷达海杂波幅度对雷达检测至关重要。

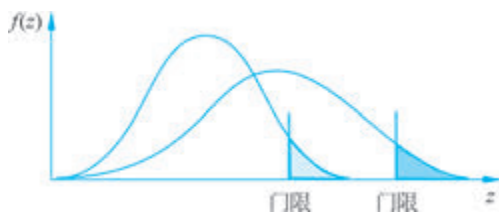


图 5.3.5 雷达海杂波幅度分布与判决门限(阴影部分的面积为虚警率)

5.3.1 经典幅度分布

在实际中,对随机信号的幅度分布进行分析时,通常用一些经典分布来拟合随机信号的幅度分布。常用的经典分布包括高斯分布、瑞利分布、对数正态分布、韦布尔分布、指数分布等。下面进行一一介绍。

高斯分布的概率密度函数可表示为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (5.3.2)$$

式中, μ 、 σ^2 分别为均值和方差。

瑞利分布的概率密度函数可表示为

$$f(x|b) = \frac{x}{b^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right), \quad x \geq 0 \quad (5.3.3)$$

式中, b 为瑞利分布关键参数。

对数正态分布的概率密度函数可表示为

$$f(x|\beta, \epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon x}} \exp\left[-\frac{(\ln x - \beta)^2}{2\epsilon^2}\right], \quad x \geq 0 \quad (5.3.4)$$

式中, β, ϵ 分别为对数正态分布的形状参数和尺度参数。

韦布尔分布的概率密度函数可表示为

$$f(x) = \frac{p}{q} \left(\frac{x}{q}\right)^{p-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{q}\right)^p\right], \quad x \geq 0 \quad (5.3.5)$$

式中, p, q 分别为韦布尔分布的形状参数和尺度参数。

指数分布的概率密度函数可表示为

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right), \quad x \geq 0 \quad (5.3.6)$$

式中, λ 为指数分布关键参数。

随机信号的幅度分布除了用概率密度函数(PDF)描述之外,还可用累积分布函数(CDF)描述。累积分布函数 $F(x)$ 是概率密度函数 $f(x)$ 的积分,概率密度函数 $f(x)$ 是累积分布函数 $F(x)$ 的微分。

CDF 与 PDF 之间的关系可表示为

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du \quad (5.3.7)$$

$$f(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x} \quad (5.3.8)$$

各种分布函数的 PDF 和 CDF 如表 5.3.1 所示。

表 5.3.1 分布函数

分布函数	PDF	CDF	自变量范围
高斯分布	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$	$\int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du$	$-\infty < x < \infty$
瑞利分布	$\frac{x}{b^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right)$	$1 - e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$	$x \geq 0$
对数正态分布	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon x}} \exp\left[-\frac{(\ln x - \beta)^2}{2\epsilon^2}\right]$	$\frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\ln x - \beta}{\epsilon\sqrt{2}}\right)\right]$	$x \geq 0$
韦布尔分布	$\frac{p}{q} \left(\frac{x}{q}\right)^{p-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{q}\right)^p\right]$	$1 - e^{-(x/q)^p}$	$x \geq 0$
指数分布	$\frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)$	$1 - e^{-x/\lambda}$	$x \geq 0$

对于一些经典分布,其累积分布函数难以解析表达,此时,可采用数值积分的方式来求取。

5.3.2 雷达接收信号的幅度分布

下面结合雷达实测数据分析雷达接收信号的幅度分布。

雷达探测无人机时,雷达接收的无人机回波存在明显的起伏现象。图 5.3.6 和图 5.3.7 分别给出了固定翼无人机回波、旋翼无人机回波幅度分布情况。

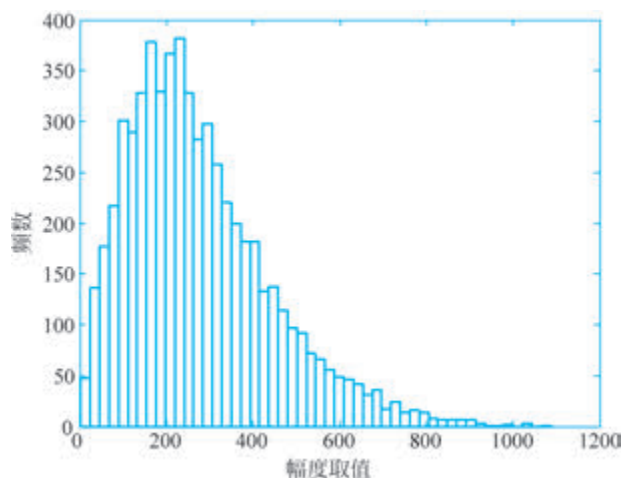


图 5.3.6 固定翼无人机回波幅度分布

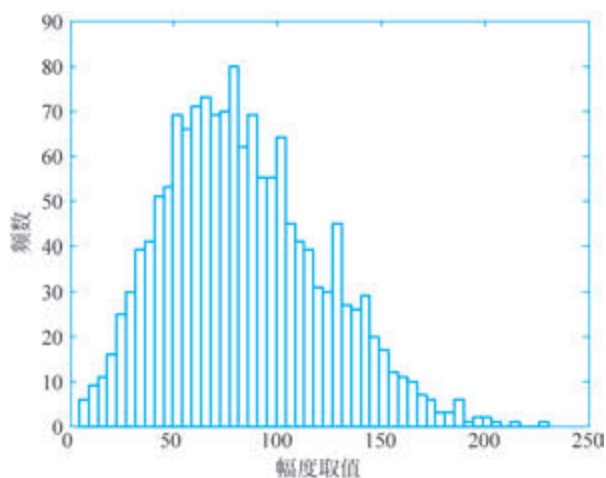


图 5.3.7 旋翼无人机回波幅度分布

从图 5.3.6 和图 5.3.7 中可以看出,固定翼无人机回波幅度分布与旋翼无人机回波幅度分布明显不同,且二者的幅度均值也不同。这对于后续无人机检测与识别具有一定的参考价值。

另外,雷达探测海面目标时,雷达接收到的海杂波幅度分布如图 5.3.8 和图 5.3.9 所示。其中,图 5.3.8 为高海况下海杂波幅度分布,图 5.3.9 为低海况下海杂波幅度分

布。从图 5.3.8 和图 5.3.9 中可以看出,高海况、低海况下的海杂波幅度分布不同,幅度均值也不同。具体服从哪种分布,需要采用 5.3.1 节中的一些典型分布对实测信号进行拟合,然后根据拟合效果来判断实测信号的分布。具体拟合方法将在第 8 章介绍。

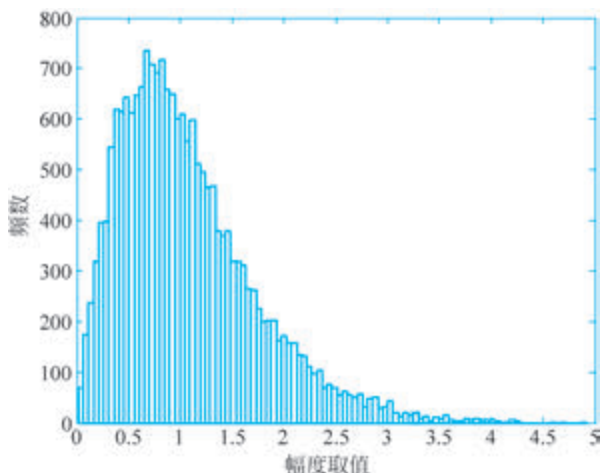


图 5.3.8 高海况下海杂波幅度分布

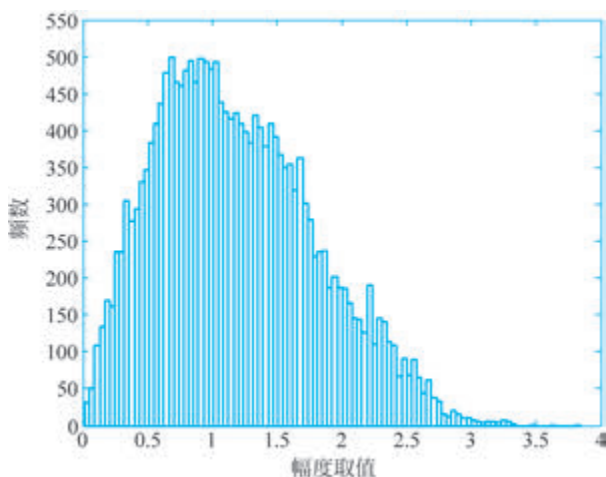


图 5.3.9 低海况下海杂波幅度分布

5.3.3 幅度均值

除了幅度分布,幅度均值、方差也是描述随机信号幅度特性的重要特征参数。随机信号的幅度均值、方差均可用于随机信号的检测或者识别。

下面以雷达探测无人机为背景,介绍雷达接收信号的幅度均值及其应用。

无人机通常由复合材质制作而成,其对雷达电磁波的反射能力较弱。当无人机距离雷达较远时,无人机回波将被杂波淹没。随着无人机离雷达距离越来越近,无人机回波

功率会逐渐提高,无人机回波峰值功率与杂波平均功率的比值(简称信杂比)也逐渐提高,但是无人机回波会出现起伏,如图 5.3.10 所示。这样,即使在中、高信杂比下,无人机回波可能因为起伏,在某些时刻被地杂波淹没。此时,对雷达多次观测回波的幅度取均值,可从雷达回波中凸显出目标信号,用于判断是否存在无人机。

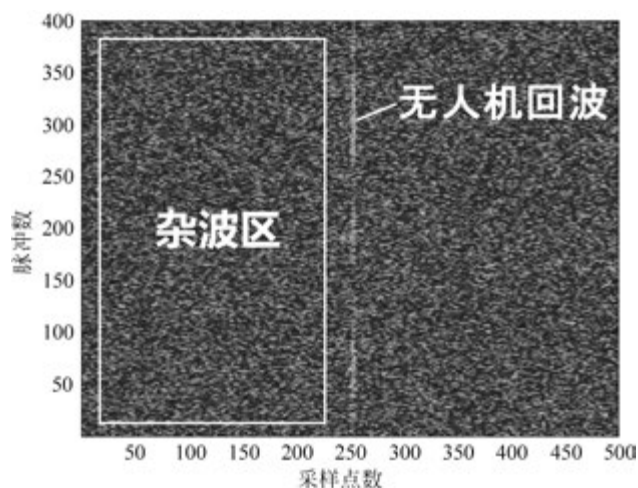


图 5.3.10 雷达接收信号幅度

设雷达回波为 $x_{mn} = A_{mn} e^{j\varphi_{mn}}$, m 表示第 m 个脉冲, n 表示第 n 个采样点。则回波幅度均值可计算为

$$A_m = E(A_{mn}) \quad (5.3.9)$$

回波相位均值可计算为

$$\varphi_m = E(\varphi_{mn}) \quad (5.3.10)$$

对雷达多次观测得到的回波幅度做均值运算,得到幅度均值如图 5.3.11 所示。

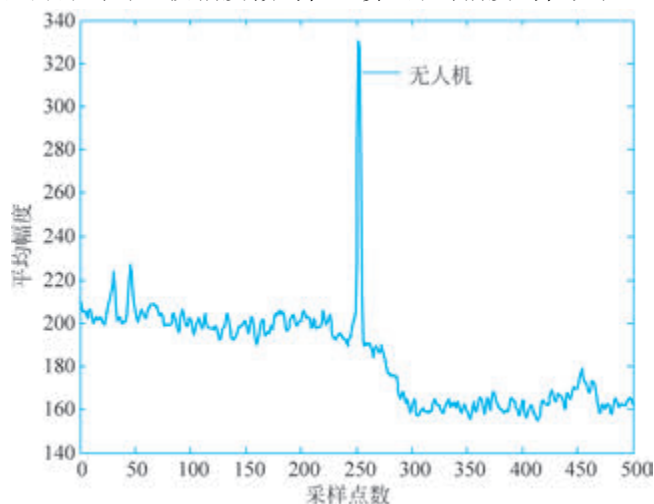


图 5.3.11 雷达回波幅度均值

从原始的二维雷达回波幅度图中可以看出,无人机回波若隐若现。某些脉冲回波中,无人机回波完全被杂波淹没。但是,经过多个脉冲回波幅度求均值后,无人机所在位置的回波信号凸显,无人机信号较易发现。但总体上,信噪比不高。

随机信号的幅度均值除了可以用于判断信号是否存在,还可以用于判断雷达是否受到噪声压制干扰。当未受到噪声压制干扰时,雷达接收信号幅度或功率主要由杂波和接收机热噪声决定。当雷达受到噪声压制干扰时,干扰强度将显著提高。为此,通过对多次观测信号幅度或功率求均值,若均值超过一定值,则判断雷达受到噪声压制干扰,如图 5.3.12 所示。

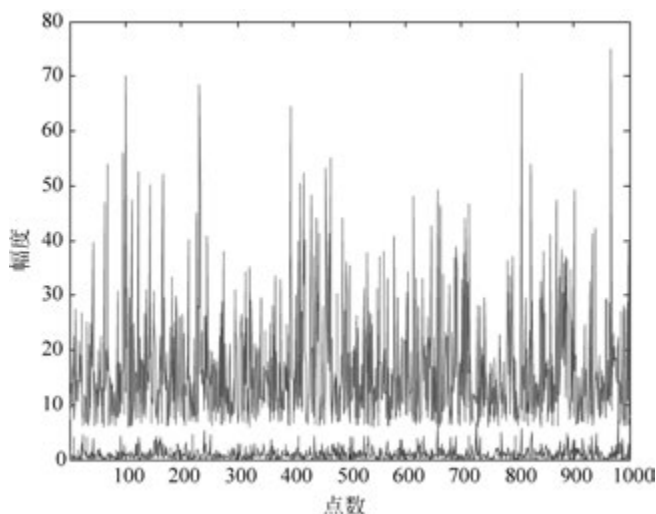


图 5.3.12 雷达受干扰前后的接收信号幅度(蓝线为干扰前,红线为干扰后)



彩图

5.3.4 幅度方差

幅度方差主要描述随机信号在其均值附近的起伏剧烈程度。通常情况下,像飞机、导弹这类动态目标,其回波起伏剧烈程度较地杂波起伏更加剧烈。为此,在雷达探测无人机时,中、高信杂比条件下,可通过统计雷达接收信号的幅度、相位方差来判断接收信号中是否含有无人机信号。

雷达接收信号幅度方差可表示为

$$D(A) = E[(A - m_A)^2] = E(A^2) - m_A^2 \quad (5.3.11)$$

雷达接收信号相位方差可表示为

$$D(\varphi) = E[(\varphi - m_\varphi)^2] = E(\varphi^2) - m_\varphi^2 \quad (5.3.12)$$

以雷达探测固定翼无人机接收信号为例,采用式(5.1.11)、式(5.3.12)计算得到雷达接收信号幅度方差如图 5.3.13 所示。从图中可以看出,无人机回波的方差明显高于杂波方差。利用无人机回波的方差可以发现无人机信号的存在。

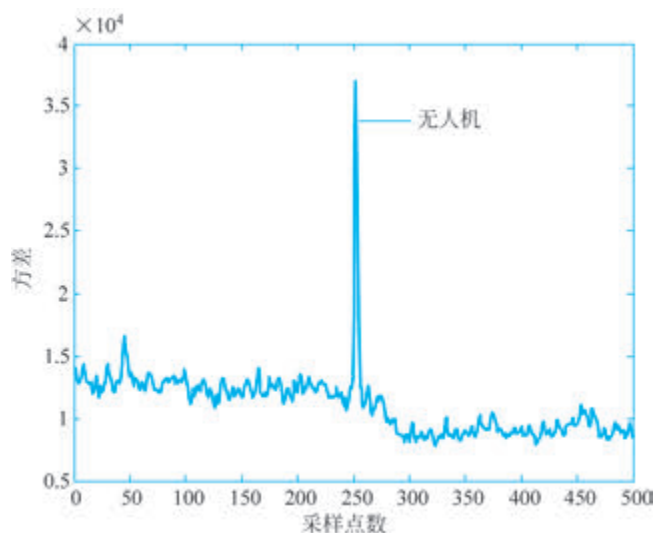


图 5.3.13 雷达接收信号幅度方差

5.4 随机信号的相位特性

在信号处理中,随机信号的相位特性是理解信号行为和进行信号处理的关键因素之一。相位在信号处理中具有重要的物理意义。例如,在通信系统中,相位调制(PSK)是一种常见的调制方式,它通过改变信号的相位来传输信息;在雷达信号处理中,目标的相位信息可以用于目标的定位和识别。此外,相位信息在音频信号处理中也非常重要。本章将详细介绍随机信号的相位特性及其分析方法。

5.4.1 相位分布

随机信号的相位是一个随机变量,其统计特性可以通过概率密度函数(PDF)来描述。对于一个平稳随机信号,相位的 PDF 通常假设为均匀分布,即

$$f(\varphi) = \frac{1}{2\pi}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (5.4.1)$$

这意味着在任何给定的时间点,相位在 $[-\pi, \pi]$ 或 $[0, 2\pi]$ 区间内是均匀分布的。

图 5.4.1 给出了 IPIX 雷达实测海杂波的相位统计分布情况。从图中可以看出,海杂波相位分布近似服从 $[-\pi, \pi]$ 上的均匀分布。

图 5.4.2 和图 5.4.3 分别给出了雷达探测无人机时接收到的无人机回波相位统计分布情况和地杂波相位统计分布情况。从图中可以看出,固定翼无人机回波相位分布和地杂波相位分布都近似服从均匀分布。

另外,图 5.4.4 和图 5.4.5 给出了 IPIX 雷达探测海面目标时,高海况、低海况下接收到的海杂波相位分布情况。从图中可以看出,高海况、低海况下,海杂波相位分布也近似服从均匀分布。

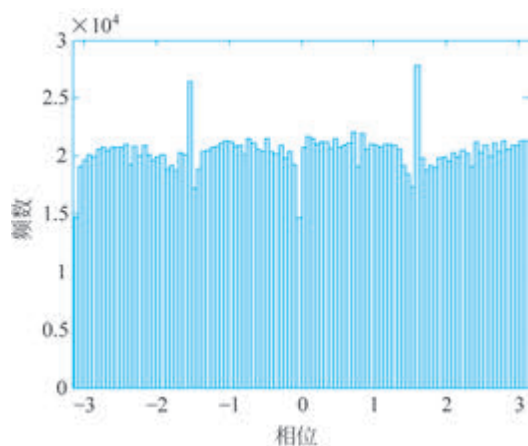


图 5.4.1 海杂波相位分布

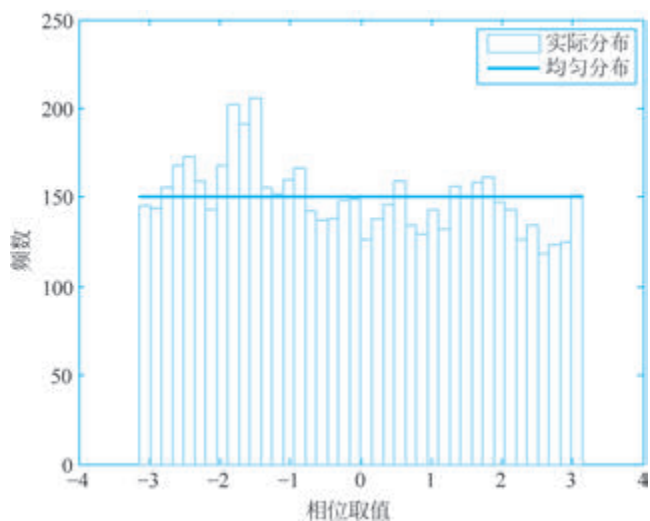


图 5.4.2 固定翼无人机回波相位分布

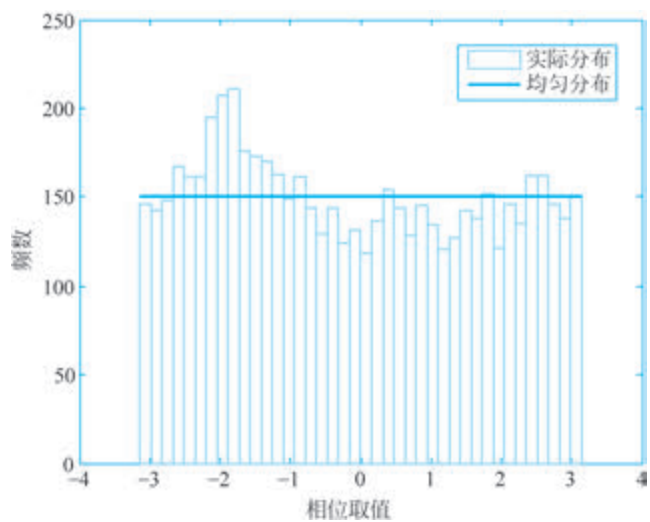


图 5.4.3 地杂波相位分布

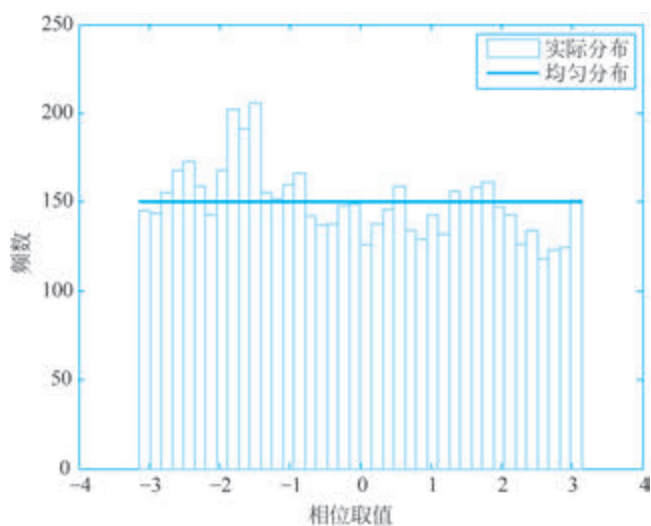


图 5.4.4 高海况下海杂波相位分布

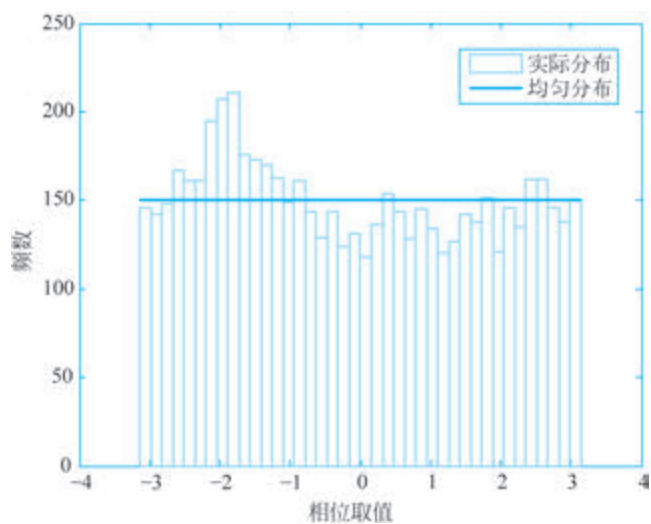


图 5.4.5 低海况下海杂波相位分布

5.4.2 相位均值与方差

相位均值反映了相位的平均位置。对于电子信息系统,在没有任何先验信息和历史经验的情况下,通常认为其接收到的随机信号相位服从 $[0, 2\pi]$ 上的均匀分布。对于在 $[0, 2\pi]$ 上均匀分布的随机相位,相位均值为

$$E(\varphi) = \int_0^{2\pi} \varphi \frac{1}{2\pi} d\varphi = \pi \quad (5.4.2)$$

所以,从统计意义上讲,均匀分布的随机相位的平均位置在取值区间的中点。
均匀分布的相位方差为

$$D(\varphi) = E\{[\varphi - E(\varphi)]^2\} = \int_0^{2\pi} (\varphi - \pi) \frac{1}{2\pi} d\varphi = \frac{\pi^2}{3} \quad (5.4.3)$$

方差越大,说明相位值在均值周围的起伏剧烈程度越大,即相位的随机性更强;反之,方差越小,相位的随机性相对较弱。

在实际应用中,相位的估计通常通过信号的实部和虚部来实现。给定一个复信号 $x(t)$,其相位可估计为

$$\hat{\varphi} = \arctan \frac{\text{Im}[x(t)]}{\text{Re}[x(t)]} \quad (5.4.4)$$

式中, $\text{Re}[x(t)]$ 和 $\text{Im}[x(t)]$ 分别表示信号的实部和虚部。

5.5 随机信号的平稳性



视频讲解

随机信号的平稳性对于随机信号的统计特性分析至关重要。随机信号分为平稳随机信号和非平稳随机信号两类。严格地说,实际中我们遇到的随机信号大多为非平稳随机信号。但是,为了便于分析,我们通常假定随机信号平稳或者在一段时间内平稳。本书只考虑平稳随机信号。

平稳随机信号分为严格平稳随机信号和广义平稳随机信号。

5.5.1 严格平稳随机信号

若随机信号的任意 N 维分布只与时间差有关,与具体时间无关,即当时间平移 c 时,其任意 N 维概率密度函数不变,则称该随机信号是严格平稳随机信号。

根据上述定义,严格平稳随机信号的 N 维概率密度函数应满足

$$f_X(x_1, x_2, \dots, x_N, t_1 + c, t_2 + c, \dots, t_N + c) = f_X(x_1, x_2, \dots, x_N, t_1, t_2, \dots, t_N) \quad (5.5.1)$$

该条件是随机信号严格平稳的充要条件。

严格平稳随机信号的一维概率密度函数满足

$$f_X(x, t) = f_X(x) \quad (5.5.2)$$

即严格平稳随机信号的一维概率密度函数与时间 t 无关。所以,严格平稳随机信号的均值、方差与时间无关。

严格平稳随机信号的二维概率密度函数满足

$$f_X(x_1, x_2, t_1, t_2) = f_X(x_1, x_2, \tau) \quad (5.5.3)$$

即严格平稳随机信号的二维概率密度函数只与时间差 τ 有关。所以,严格平稳随机信号的自相关函数只与时间差 τ 有关。

对于离散型随机信号来说,严格平稳的定义与连续型随机信号的定义类似,只是时间由连续时间变为了离散时间。

5.5.2 广义平稳随机信号

广义平稳随机信号的均值为常数,自相关函数只与时间差有关,即

$$m_X(t) = c \quad (5.5.4)$$

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(\tau), \quad \tau = t_1 - t_2 \quad (5.5.5)$$

上述两个条件是广义平稳随机信号的定义,也是判断随机信号广义平稳的充要条件。

对于离散型随机信号来说,广义平稳的定义与连续型随机信号的定义类似,只是时间由连续时间变为了离散时间。

对于高斯随机信号,其任意 N 维分布都只由它的一阶、二阶矩来确定,所以,广义平稳的高斯随机信号一定是严格平稳的。

例 5.1 随机信号 $X(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$, 其中, ω_0 是已知常数, A 、 B 为统计独立的随机变量,且分别以概率 $2/3$ 、 $1/3$ 取值 -1 、 2 。试判断该随机信号的平稳性。

解: $E(A) = E(B) = 0, E(A^2) = E(B^2) = 2, E(AB) = 0$

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] \\ &= E[(A \cos \omega_0 t_1 + B \sin \omega_0 t_1)(A \cos \omega_0 t_2 + B \sin \omega_0 t_2)] \\ &= E(A^2) \cos \omega_0 t_1 \cos \omega_0 t_2 + E(B^2) \sin \omega_0 t_1 \sin \omega_0 t_2 \\ &= 2 \cos \omega_0(t_1 - t_2) \end{aligned}$$

由于 $X(t)$ 的均值为常数,自相关函数只与时间差有关,因此, $X(t)$ 是广义平稳随机信号。本书后面只涉及广义平稳随机信号,下文中提到的平稳随机信号均指广义平稳随机信号。



视频讲解

5.6 随机信号的相关性



随机信号的相关性描述了不同时刻观测信号之间的相关程度。利用随机信号的相关性,可以实现信号的估计与检测,具体内容将在第 8 章和第 9 章中介绍。

随机信号的相关性可以用自相关函数、互相关函数、协方差函数、相关系数等特征参数来描述。下面分别对这些参数进行介绍。



视频讲解

5.6.1 自相关函数

随机信号的自相关函数是随机信号的重要统计特性。有效利用随机信号的自相关函数可以实现随机信号的增强或抑制。下面以雷达探测无人机为例,介绍随机信号自相关函数的定义、性质及其应用。

当无人机距离雷达较远时,无人机回波较弱,会被地杂波淹没,对雷达多次观测信号采用取均值、求方差等方法将难以使无人机回波凸显。此时,需要对雷达回波进行针对性地处理,增强无人机回波或者抑制地杂波,以提高雷达信杂比。这样,才能有利于雷达检测无人机。

自相关函数是雷达接收信号的一个重要特征。根据雷达接收信号的自相关函数特性,对信号进行适当处理,可有效提高雷达信杂比。

1. 自相关函数的定义

对于连续型随机信号,自相关函数的定义为

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X^*(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (5.6.1)$$

对于离散型随机信号,自相关函数的定义为

$$R_X(n_1, n_2) = E[X_i(n_1)X_j^*(n_2)] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i(n_1)x_j(n_2)p_{ij}(n_1, n_2) \quad (5.6.2)$$

通常情况下,假定随机信号是平稳的,自相关函数只与时间差有关。

在实际工程中,自相关函数可根据接收信号计算为

$$R_X(m) = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} X(n+m)X^*(n) \quad (5.6.3)$$

式中, $X(n+m)$ 为实信号或者复信号,表示第 $n+m$ 时刻的观测信号; N 为总的观测次数。

自相关函数的最大值并不能反映信号的相关性,该相关性主要由其随时间变化的趋势反映出来。为此,可将自相关函数用其最大值归一化,归一化后的自相关函数可表示为

$$\hat{R}_X(m) = \frac{R_X(m)}{\max[R_X(m)]} \quad (5.6.4)$$

基于雷达实测数据,利用上述方法分别计算得到雷达无人机回波+地杂波、地杂波、海面目标+海杂波、海杂波的自相关函数,如图 5.6.1 和图 5.6.2 所示。

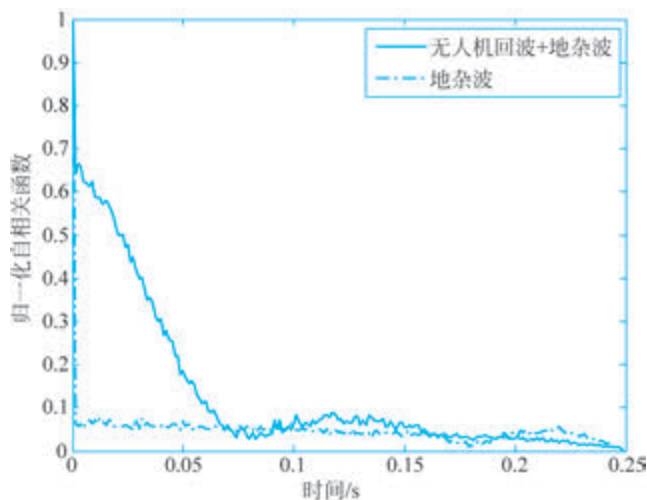


图 5.6.1 无人机回波、地杂波自相关函数

从图 5.6.1 中可以看出,无人机回波+地杂波的相关性较强,地杂波的相关性较弱。无人机回波+地杂波的自相关函数具有一定宽度,说明该随机信号内部有一个相对稳定的信号分量,即无人机回波。图 5.6.2 表明,海面目标+海杂波的相关性比海杂波的相关性强。由此可见,目标的存在会改变雷达接收信号的相关性。从整体上看,雷达接收信号的自相关函数随着时间的增大而呈现递减的趋势,最后趋近于一个较小的值。

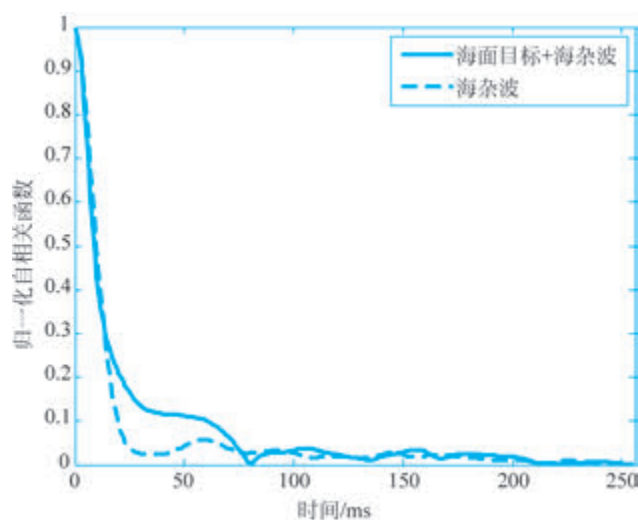


图 5.6.2 海面目标、海杂波自相关函数

2. 自相关函数的性质

(1) 平稳随机信号的自相关函数是偶函数,即

$$R_X(\tau) = R_X(-\tau) \quad (5.6.5)$$

(2) $R_X(\tau)$ 在 $\tau=0$ 时取得最大值,且 $R_X(0) = \sigma_X^2 + m_X^2$, 其中, m_X 、 σ_X^2 分别为随机信号 $X(t)$ 的均值和方差。

(3) 如果平稳随机信号不含有周期分量,那么 $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_X(\tau) = m_X^2$ 。

(4) 如果平稳随机信号含有周期分量,则其自相关函数也含有周期分量。

图 5.6.3 所示为自相关函数性质(1)~(3)的示意图。

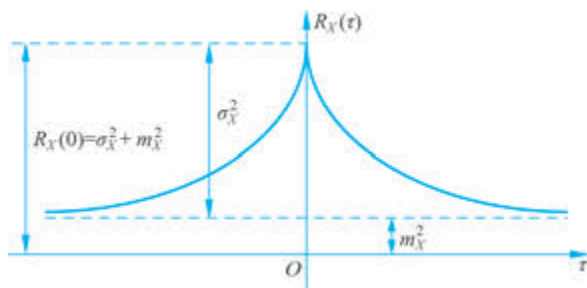


图 5.6.3 自相关函数性质(1)~(3)的示意图

对于性质(4),图 5.6.4 和图 5.6.5 分别给出了含有周期分量的随机信号及其自相关函数。其中,随机信号 $X(t) = \sin 2\pi f_0 t + n(t)$ 包含有周期分量——正弦信号, $f_0 = 10\text{Hz}$, $n(t) \sim \mathcal{N}(0, 0.01)$ 。从图 5.6.5 中可以看到,该随机信号的自相关函数也具有明显的周期性。

3. 自相关函数的应用: 信杂比提升

假定雷达多次观测信号为 $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_N]^T$, $x_i = s_i + c_i$, 其中, s_i 为第 i 次

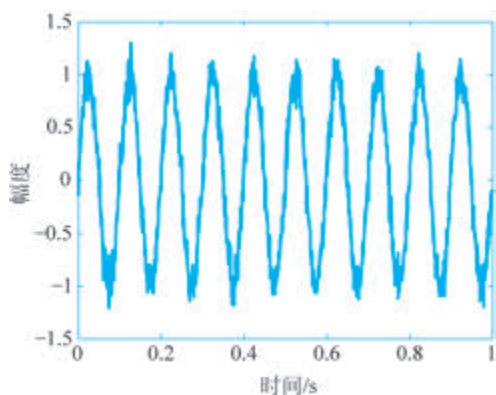


图 5.6.4 含有周期分量的随机信号

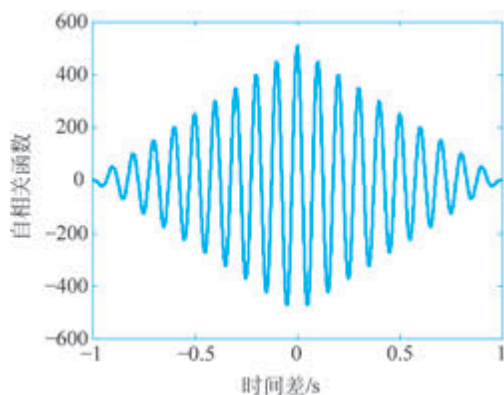


图 5.6.5 随机信号的自相关函数

观测得到的无人机回波, c_i 为第 i 次观测得到的杂波, 记 $\mathbf{s} = [s_1 \ s_2 \ \cdots \ s_N]^T$, $\mathbf{c} = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_N]^T$ 。

对 N 次观测信号进行加权, 加权系数组成的矢量为 $\mathbf{w} = [w_1 \ w_2 \ \cdots \ w_N]^T$, 其中, $w_1, w_2, \dots, w_N$ 之间可相等, 也可不相等, $\mathbf{w}^H \mathbf{w} = 1$ 。加权后的输出信号可表示为

$$\mathbf{y} = \mathbf{w}^H \mathbf{x} \quad (5.6.6)$$

加权后, 目标回波功率可表示为

$$P_s = E(|\mathbf{w}^H \mathbf{s}|^2) = E(\mathbf{w}^H \mathbf{s} \mathbf{s}^H \mathbf{w}) = \mathbf{w}^H E(\mathbf{s} \mathbf{s}^H) \mathbf{w} = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_s \mathbf{w} \quad (5.6.7)$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_s &= E(\mathbf{s} \mathbf{s}^H) \\ &= \begin{bmatrix} E[s(1)s^*(1)] & E[s(1)s^*(2)] & \cdots & E[s(1)s^*(N)] \\ E[s(2)s^*(1)] & E[s(2)s^*(2)] & \cdots & E[s(2)s^*(N)] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ E[s(N)s^*(1)] & E[s(N)s^*(2)] & \cdots & E[s(N)s^*(N)] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R_s(1,1) & R_s(1,2) & \cdots & R_s(1,N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_s(N,1) & R_s(N,2) & \cdots & R_s(N,N) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.6.8)$$

为目标回波自相关矩阵。式中, $R(i, j) = E[s(i)s^*(j)]$ 为目标回波自相关函数。

同理, 加权后, 杂波平均功率可表示为

$$P_c = E(|\mathbf{w}^H \mathbf{c}|^2) = E(\mathbf{w}^H \mathbf{c} \mathbf{c}^H \mathbf{w}) = \mathbf{w}^H E(\mathbf{c} \mathbf{c}^H) \mathbf{w} = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_c \mathbf{w} \quad (5.6.9)$$

根据式(5.6.7)、式(5.6.9)可得, 加权后的输出信杂比可表示为

$$\text{SCR} = \frac{\mathbf{w}^H \mathbf{R}_s \mathbf{w}}{\mathbf{w}^H \mathbf{R}_c \mathbf{w}} \quad (5.6.10)$$

当 $\mathbf{R}_s$ 已知时, 为了使输出信杂比最大, 需使 $\epsilon = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_c \mathbf{w}$ 最小。 $\mathbf{R}_c$ 的特征方程为

$$\mathbf{R}_c \mathbf{w} = \lambda_i \mathbf{w} \quad (5.6.11)$$

将式(5.6.11)代入 $\mathbf{w}^H \mathbf{R}_c \mathbf{w}$, 可得

$$\varepsilon = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_c \mathbf{w} = \lambda_i \mathbf{w}^H \mathbf{w} = \lambda_i \quad (5.6.12)$$

当 λ_i 为 $\mathbf{R}_c$ 的最小特征值时, $\varepsilon = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_c \mathbf{w}$ 取到最小值。所以, 为了使 $\varepsilon = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_c \mathbf{w}$ 最小, 加权矢量应为 $\mathbf{R}_c$ 最小特征值对应的特征向量。在实际中, $\mathbf{R}_c$ 未知, 因此需要对其进行估计。 $\mathbf{R}_c$ 通常由下式估计得到:

$$\hat{\mathbf{R}}_c = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathbf{c}^i (\mathbf{c}^i)^H \quad (5.6.13)$$

式中, $\mathbf{c}^i$ 为雷达观测到的邻近距离单元杂波矢量; L 为邻近距离单元数量。由式(5.6.13)可知, 在估计 $\mathbf{R}_c$ 时, 使用到了杂波的自相关函数。最后, 利用自相关函数的特征向量对信号加权, 使输出信杂比最大。

自相关函数也可用于描述雷达观测目标信号或杂波的时间相关性。通过时间相关性分析, 可为雷达相关积累脉冲数的选择提供重要参考。



视频讲解

5.6.2 互相关函数

互相关函数主要描述两个不同的随机信号之间的相关性。随机信号的互相关函数在雷达信号接收和雷达目标测距中广泛应用。

对于连续型随机信号, 互相关函数可表示为

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{XY}(x, y, t_1, t_2) dx dy \quad (5.6.14)$$

对于离散型随机信号, 互相关函数可表示为

$$R_{XY}(n_1, n_2) = E[X(n_1)Y(n_2)] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i(n_1) y_j(n_2) p_{ij}(n_1, n_2) \quad (5.6.15)$$

若互相关函数为 0, 则表示两个随机信号相互正交。

在实际工程中, 两个随机信号的互相关函数可表示为

$$R_{XY}(m) = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} X(n+m) Y^*(n) \quad (5.6.16)$$

式中, $X(n+m)$ 、 $Y^*(n)$ 为复信号; N 为总的观测次数。

案例 5.1 假定雷达发射信号为 $X(t)$, 发射信号在空间中传播, 经过目标反射后被雷达接收, 雷达接收信号的时间与发射信号的时间间隔为 T 。则雷达接收信号可表示为

$$Y(t) = aX(t-T) + n(t) \quad (5.6.17)$$

式中, a 为信号经空间传播衰减和目标反射导致的衰减系数; $n(t)$ 为噪声。

假定雷达发射信号和接收信号都是平稳随机信号, 噪声与雷达发射信号不相关。雷达接收信号后, 将发射信号与接收信号做互相关运算, 得到互相关函数为

$$\begin{aligned} R_{YX}(\tau) &= E[Y(t+\tau)X(t)] = E\{[aX(t-T+\tau) + n(t+\tau)]X(t)\} \\ &= E[n(t+\tau)X(t)] \end{aligned} \quad (5.6.18)$$

从式(5.6.18)可以看出, 当 $\tau = T$ 时, $R_{YX}(\tau)$ 达到最大值。因此, 通过遍历时间差 τ , 搜寻发射信号和接收信号互相关函数最大值所对应的时间差 τ_0 , 即可获得目标回波延

时 T 。在此基础上,即可估计得到目标与雷达之间的距离 $R = \frac{1}{2}cT$ 。

下面通过仿真来分析互相关函数在雷达目标测距中的应用。

仿真场景: 雷达发射简单脉冲信号,脉冲宽度为 10 个采样点,雷达接收机热噪声服从零均值高斯分布。目标延时为 100 个采样点,信噪比为 10dB。雷达发射信号、热噪声、目标、接收信号幅度如图 5.6.6 所示。将雷达接收信号与发射信号进行互相关运算,得到互相关函数如图 5.6.7 所示。从图 5.6.7 中可以看出,最大值的位置在第 100 点,对应于目标延时。由此可见,通过搜索雷达接收信号与发射信号互相关函数的最大值,可得到目标位置。

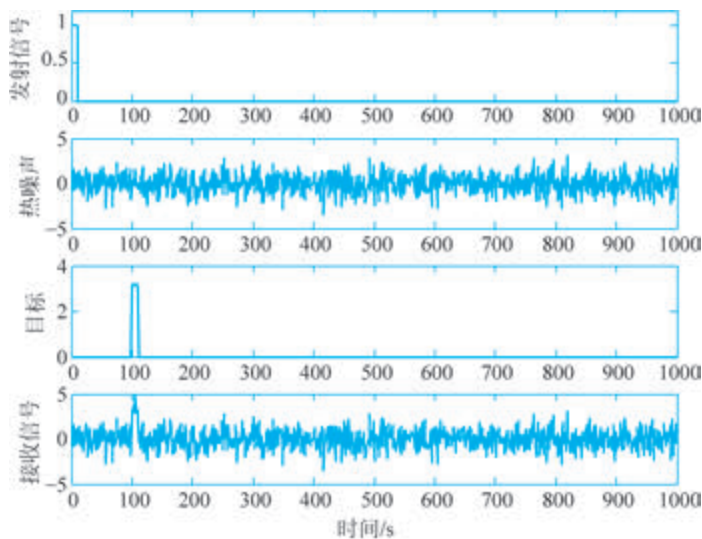


图 5.6.6 雷达各类信号幅度

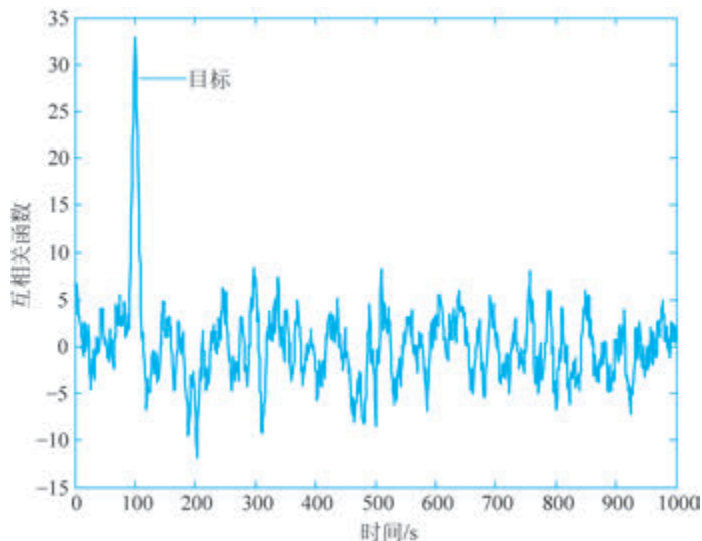


图 5.6.7 互相关函数

5.6.3 协方差函数

协方差函数与自相关函数类似,也用于描述随机信号不同时刻观测值之间的相关性。

连续型随机信号的协方差函数为

$$\begin{aligned} K_X(t_1, t_2) &= E\{[X(t_1) - m_X(t_1)][X(t_2) - m_X(t_2)]\} \\ &= R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2) \end{aligned} \quad (5.6.19)$$

离散型随机信号的协方差函数为

$$K_X(n_1, n_2) = R_X(n_1, n_2) - m_X(n_1)m_X(n_2) \quad (5.6.20)$$

从定义可以看出,协方差函数与自相关函数之间的区别在于协方差函数去掉了均值。所以,当 $E(X)=0$ 时, $K_X(n_1, n_2) = R_X(n_1, n_2)$ 。此时,协方差函数与自相关函数相同。当 $n_1 = n_2$ 时, $K_X(n_1, n_1) = E[X^2(n_1)] - m_X^2(n_1) = \sigma_X^2$, 此时,协方差与方差相同。

当雷达信号建模为零均值的随机信号时,协方差函数和自相关函数相同,主要用于杂波或干扰的抑制以及信杂比的提升。

5.6.4 相关系数

随机信号 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的相关系数为

$$\rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (5.6.21)$$

式中, μ_X, μ_Y 分别为 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 均值; σ_X^2, σ_Y^2 分别为 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的方差。

相关系数具有如下性质:

- (1) 相关系数 $\rho_{XY} = 0$, 表示 X 和 Y 不相关。
- (2) $|\rho_{XY}| \leq 1$ 。
- (3) 当 $|\rho_{XY}| = 1$ 时, X 和 Y 线性相关, 即 $Y = aX + b$ 。

特别说明,在计算相关系数时,两个随机信号可以是同一个信号,也可以是不同的信号。同一信号的相关系数称为自相关系数,不同信号的相关系数称为互相关系数。

例 5.2 随机信号 $X(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$, 其中, A, ω_0 为固定值, φ 服从 $[0, 2\pi]$ 上的均匀分布。计算随机信号 $X(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$ 的自相关系数。

解: $E[X(t_1)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A \sin(\omega_0 t_1 + \varphi) d\varphi = 0, E[X(t_2)] = 0$

$$\begin{aligned} \text{var}[X(t_1)] &= A^2 E[\sin^2(\omega_0 t_1 + \varphi)] \\ &= A^2 E\left\{\frac{1}{2} \times [1 - \cos(2\omega_0 t_1 + 2\varphi)]\right\} \\ &= \frac{A^2}{2} \\ \text{var}[X(t_2)] &= \frac{A^2}{2} \end{aligned}$$

所以,有

$$\begin{aligned}
 \rho_{XY} &= \frac{E[X(t_1)X(t_2)]}{A^2/2} \\
 &= 2 \times E[\sin(\omega_0 t_1 + \varphi) \sin(\omega_0 t_2 + \varphi)] \\
 &= 2 \times E\left\{\frac{1}{2} \times [\cos\omega_0(t_1 - t_2) - \cos(\omega_0 t_1 + \omega_0 t_2 + 2\varphi)]\right\} \\
 &= \cos\omega_0(t_1 - t_2)
 \end{aligned}$$

下面通过仿真来分析上述推导结果。仿真参数设置如下: $t_1=1, t_2=[0,2], A=1, \varphi \sim U[0,2\pi], \omega_0=20$ 。仿真得到某时刻 $X(t_1)$ 和 $X(t_2)$ 的样本分别如图 5.6.8 和图 5.6.9 所示。 $X(t_1)$ 和 $X(t_2)$ 的相关系数如图 5.6.10 所示。

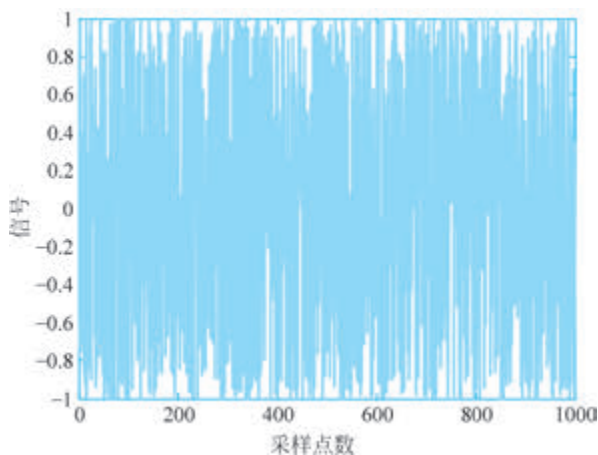


图 5.6.8 随机信号样本 $X(t_1)$

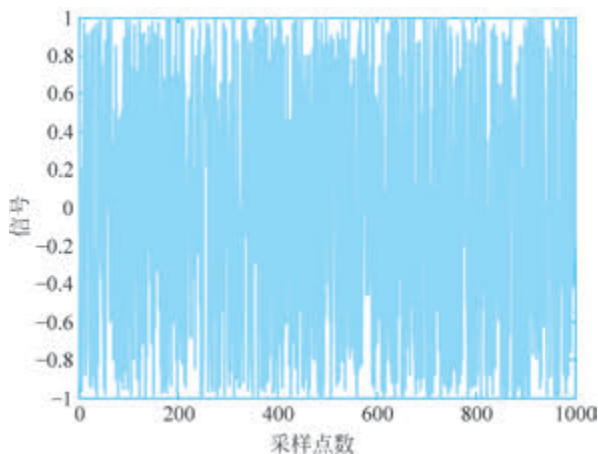
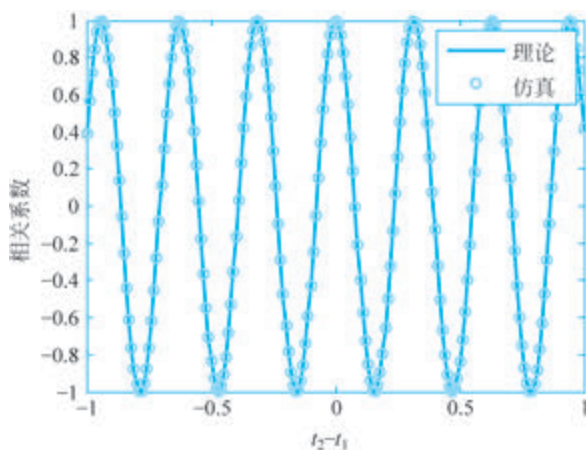


图 5.6.9 随机信号样本 $X(t_2)$

在实际中无法获取无限多样本,需用有限样本来估计相关系数。


 图 5.6.10 $X(t_1)$ 和 $X(t_2)$ 的相关系数

设雷达观测到 N 个样本信号, 分别为 $x_1, x_2, \dots, x_N$, 则该信号的均值为 $\hat{\mu}_X = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$, 方差为 $\hat{D}_X = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \mu_X)^2$ 。

协方差估计为

$$\hat{K}_X(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} (X_i - \mu_X)(X_{i+k} - \mu_X) \quad (5.6.22)$$

相关系数为

$$\hat{\rho}_X(k) = \frac{\hat{K}_X(k)}{D_X} \quad (5.6.23)$$



视频讲解

5.7 随机信号多普勒谱

当确定信号满足绝对可积条件 $\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)| dt < \infty$ 时, 其经过傅里叶变换后, 可得到信号的频谱。确定信号的频谱是固定的。如果随机信号也满足绝对可积条件, 则也可进行傅里叶变换, 只是随机信号经过傅里叶变换后的幅度谱是随机变化的。在此, 我们称随机信号经过傅里叶变换后的谱为多普勒谱。通常情况下, 多普勒谱是一个复数, 我们主要关注它的幅度。

随机信号的多普勒谱可表示为

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (5.7.1)$$

由于随机信号时域幅度变化的随机性, 随机信号的多普勒谱也随机变化。在中、高信杂比下, 多普勒谱能够大致反映强信号分量的频率位置, 但多普勒谱的幅度随机变化。但在低信杂比下, 弱信号多普勒谱被淹没在杂波谱中, 弱信号的频域统计特性较难分析。

在实际中, 随机信号的观测时间是有限的, 且随机信号经采样后以离散形式存在。所以, 随机信号的多普勒谱计算为

$$X(k) = \sum_{n=1}^N x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (5.7.2)$$

随机信号的多普勒谱描述了随机信号功率在频域上的分布情况。由于随机信号的随机性,这个分布情况是随机变化的。但是,通过多次观测统计平均后,随机信号的多普勒谱仍然有规律可循。然而在实际中,我们很少去统计平均多普勒谱,而更倾向于统计功率谱,这个概念将在 5.8 节详细讲解。

下面介绍典型信号的多普勒谱。

对于随机信号 $X(t) = A_1 \sin(2\pi f_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(2\pi f_2 t + \varphi_2) + n$, 其时域图和多普勒谱图分别如图 5.7.1 和图 5.7.2 所示。其中, $f_1 = 100$, $f_2 = 300$, $A_1 = 1$, $A_2 = 2$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi/4$, $n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ 。

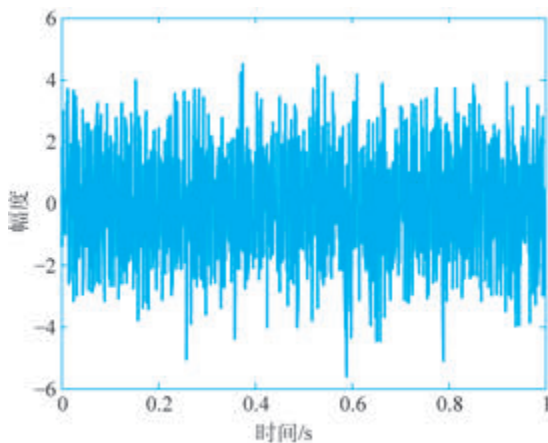


图 5.7.1 信号时域图

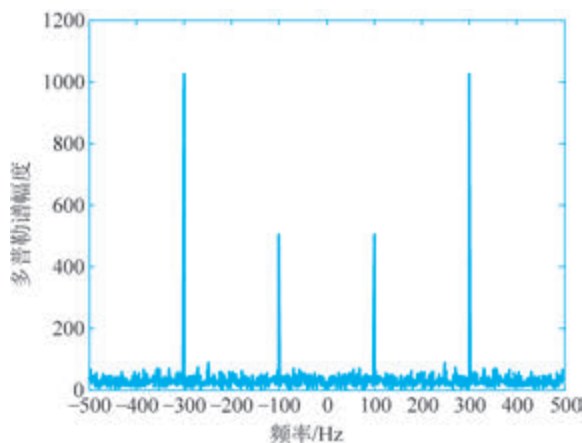


图 5.7.2 信号多普勒谱幅度

从图 5.7.1 可以看出,随机信号在时域呈现出较强的起伏,很难发现确定信号。图 5.7.2 表明,随机信号的多普勒谱反映出信号中存在 2 个频率分量的信号,且这两个

信号的幅度比大约为 1 : 2。可见, 当在时域难以发现信号时, 有时可在频域借助多普勒谱来发现信号。

下面以海杂波背景下雷达目标探测数据为例, 分析雷达海杂波、目标回波+海杂波的多普勒谱特性。

图 5.7.3 所示为 IPIX 雷达实测海杂波, 横轴表示距离单元, 纵轴表示观测时间, 对应的数据文件为 19931107135603_starea.cdf。其中, 在第 9 个距离单元漂浮着一个泡沫金属球目标。图 5.7.4 中, 实线表示第一个距离单元对应的海杂波多普勒谱, 虚线表示第 9 个距离单元目标回波+海杂波多普勒谱。从图中可以看出, 海杂波多普勒谱起伏较剧烈, 具有一定宽度, 主要集中在 $-100 \sim 50 \text{ Hz}$ 范围内, 由于海面的运动, 海杂波多普勒谱中心频率约为 -25 Hz ; 目标回波+海杂波多普勒谱起伏也较剧烈, 幅度较海杂波多普勒谱幅度略高, 谱宽较海杂波多普勒谱宽大, 目标回波+海杂波多普勒谱中心频率在零频附近。

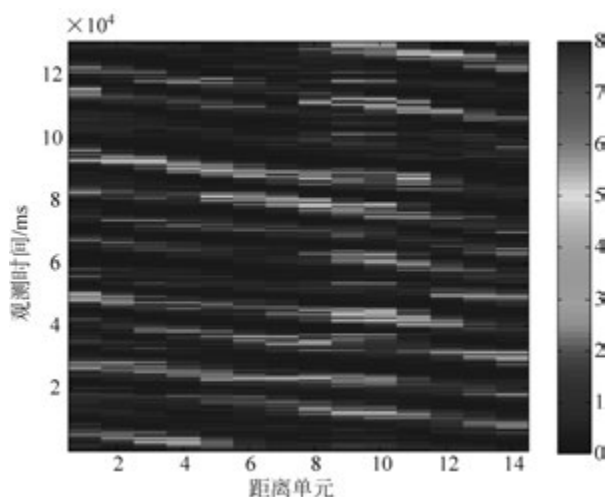


图 5.7.3 雷达实测海杂波

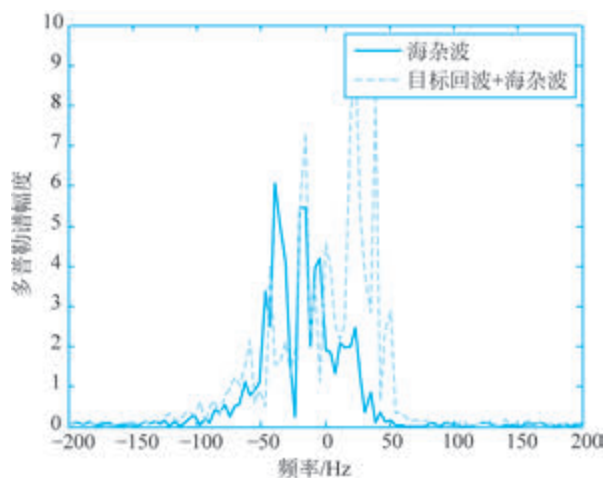


图 5.7.4 雷达回波多普勒谱

图 5.7.5~图 5.7.7 分别给出了雷达探测无人机时接收信号时域图、距离-多普勒谱和无人机回波多普勒谱。其中,图 5.7.6 是根据雷达接收信号在纵向做快速傅里叶变换(FFT)之后得到的。图 5.7.7 是距离-多普勒谱图中第 251 个采样点对应的多普勒谱。

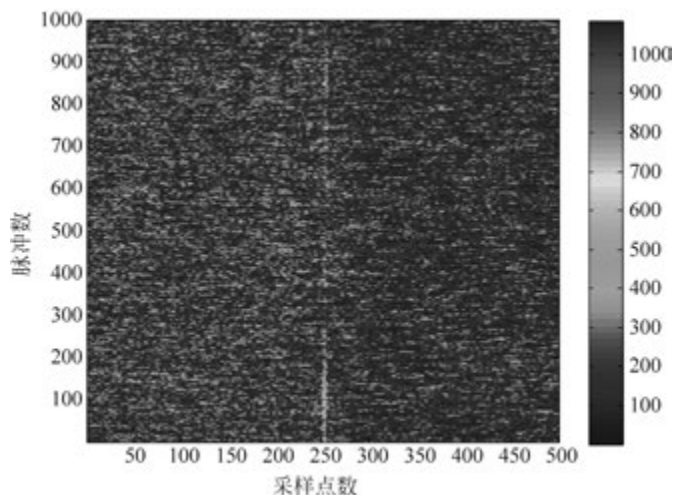


图 5.7.5 雷达接收信号时域图

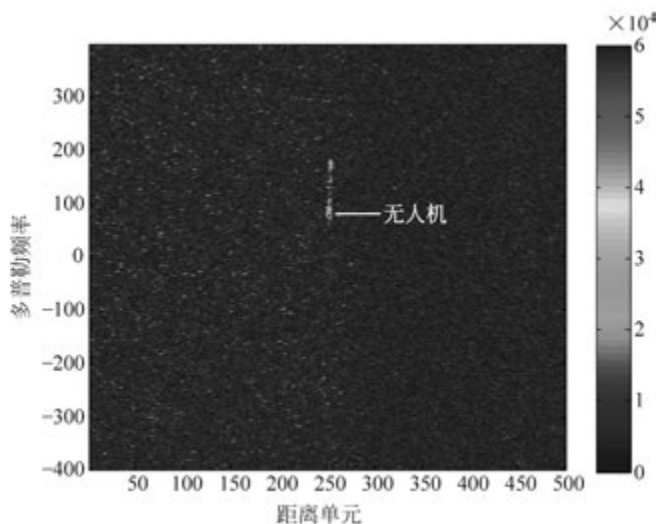


图 5.7.6 雷达接收信号距离-多普勒谱

从图 5.7.5 中可以看出,在时域上,无人机所在位置(第 250 个采样点附近)的信号时强时弱,表现出随机起伏特性。经过对单个距离单元的多个脉冲回波进行 FFT 处理后,得到雷达接收信号的距离-多普勒图,从图 5.7.6 中可以看出,无人机在距离-多普勒图上清晰可见。将无人机对应采样点位置的多普勒谱单独作图,结果如图 5.7.7 所示。从图中可以明显看出无人机回波多普勒谱。可见,从频域发现无人机较从时域发现无人机容易。

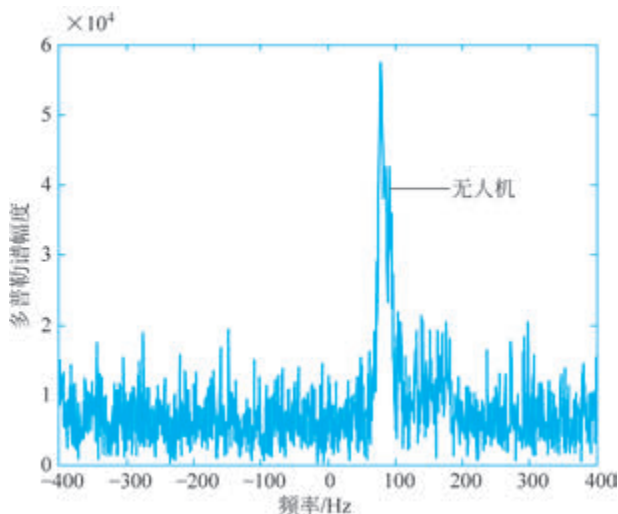


图 5.7.7 无人机回波多普勒谱幅度



视频讲解

5.8 随机信号功率谱

如果对随机信号的多普勒谱进行统计平均,那么得到的平均多普勒谱不仅能够描述随机信号在各个频点的幅度取值,且其稳定性较单次的多普勒谱好。根据帕塞瓦尔定理,有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (5.8.1)$$

式中, $|X(\omega)|^2$ 称为能量谱。能量谱存在的条件是 $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt < \infty$ 。

由于多普勒谱的随机性,随机信号通常不满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$ 或者 $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt < \infty$ 的条件,不能进行傅里叶变换或者不能采用帕塞瓦尔定理,因此,随机信号的多普勒谱和能量谱不存在。为此,需要寻找能够较稳定描述随机信号在频域的幅度或功率统计规律的参量。

5.8.1 功率谱定义

随机信号不满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$ 或者 $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt < \infty$ 条件的原因有两个:一个是信号随机起伏,另一个是时间的积分区间无穷大。如果能够将时间因素去掉,那么对随机信号进行频域特性分析的问题就会迎刃而解。

对于随机信号 $x(t)$,虽然通常不满足绝对可积和能量有限的条件,但是其平均功率是有限的,即

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (5.8.2)$$

随机信号虽然不满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$, 但是在有限时间 T 内, $\int_{-T}^T |x(t)| dt < \infty$ 是满足的。因此, 可以定义一个随机信号样本在有限时间内的傅里叶变换为

$$X_{Ti}(\omega) = \int_{-T}^T x_i(t) e^{-j\omega t} dt \quad (5.8.3)$$

那么, 这个样本信号的平均功率可表示为

$$\begin{aligned} P &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x_i(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} |X_{Ti}(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X_{Ti}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X_{Ti}(f)|^2 df \end{aligned} \quad (5.8.4)$$

式中, $\omega = 2\pi f$ 。如果记 $G(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X_{Ti}(f)|^2$, 可以看到, $G(f)$ 表示随机信号 $x_i(t)$ 在各个频点的功率取值。因此, 可以称 $G(f)$ 为随机信号 $x_T(t)$ 的多普勒功率谱密度, 简称为功率谱密度或功率谱。

值得注意的是, $x_i(t)$ 是随机信号的一个样本。随着样本的变化, 样本信号的功率谱会随之变化。考虑到随机信号是样本的集合, 所以, 随机信号的功率谱应该是各种样本的功率谱的集合。但这样定义的话, 随机信号的功率谱就不能较好地描述随机信号在各个频点的功率取值。

为此, 随机信号的功率谱定义为各样本信号的功率谱的统计平均, 表示为

$$G(\omega) = E \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X_{Ti}(\omega)|^2 \right] \quad (5.8.5)$$

或者

$$G(f) = E \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X_{Ti}(f)|^2 \right] \quad (5.8.6)$$

对于离散型随机信号, 功率谱可表示为

$$G_X(k) = E \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} |X(k)|^2 \right], \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (5.8.7)$$

式中, $X(k) = \sum_{n=1}^N x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$, $k = 1, 2, \dots, N$ 。从式(5.8.7)可以看到, 功率谱在形式上与多普勒谱是平方的关系。另外, 功率谱在多普勒谱平方的基础上进行了求均值运算。正是取均值, 降低了随机信号在各频点的功率分布的随机性, 使得随机信号的频域分布统计规律更加明显。

对于平稳随机信号, 如果其自相关函数满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau R_X(\tau)| d\tau < \infty \quad (5.8.8)$$

那么, 随机信号的自相关函数和功率谱是傅里叶变换对的关系, 即

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (5.8.9)$$

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (5.8.10)$$

这一结果称为维纳-辛钦定理。

5.8.2 功率谱估计

在获取观测信号后,计算功率谱时,可采用两种方法:自相关函数法和周期图法。

1) 自相关函数法

随机信号的自相关函数与功率谱是傅里叶变换对的关系。因此,可通过先求随机信号的自相关函数,再求自相关函数的傅里叶变换,来获得随机信号的功率谱。具体计算方法为

$$R_x(m) = \frac{1}{N-m} \sum_{n=1}^{N-m} x(n+m)x(n) \quad (5.8.11)$$

$$G(k) = \sum_{m=1}^N R(m) e^{-j\frac{2\pi}{N}km}, \quad k=1,2,\dots,N \quad (5.8.12)$$

2) 周期图法

周期图法采用功率谱的定义来进行计算。先求随机信号的多普勒谱,然后再求功率谱。具体计算方法为

$$X(k) = \sum_{n=1}^N x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k=1,2,\dots,N \quad (5.8.13)$$

$$G_X(k) = \frac{1}{N} |X(k)|^2 \quad (5.8.14)$$

需要注意的是,此时并没有取均值运算,主要原因是观测样本有限。在观测样本足够多的情况下,可以对上式取平均,估计得到随机信号的功率谱;或者在 N 较大的情况下,无须取均值。

结合 IPIX 雷达海杂波实测数据,采用两种不同的方法估计得到的海杂波功率谱如图 5.8.1 所示。从图 5.8.1 中可以看出,两种不同的方法得到的功率谱不一样,但两种方法估计得到的功率谱中心频率相同。自相关函数法估计得到的功率谱更平滑。

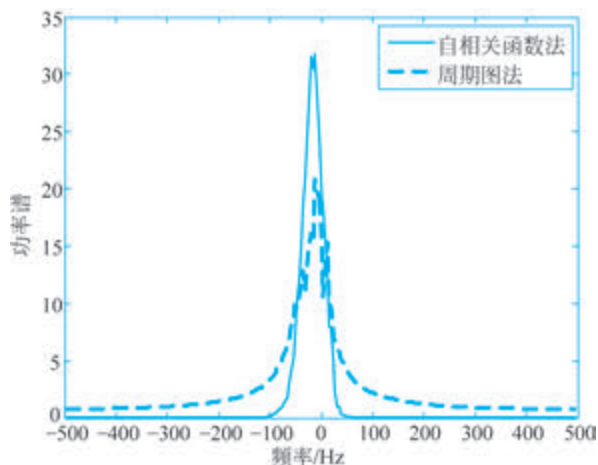


图 5.8.1 估计得到的海杂波功率谱

5.9 典型随机信号

在实际中经常会遇到一些典型的随机信号,如白噪声、色噪声、高斯噪声等。本节将对这些随机信号进行介绍。

5.9.1 白噪声

白噪声这一名称源于光学领域,类比白光包含所有可见光频率成分且强度均匀的特性,白噪声在功率谱上具有平坦性,它在整个频率轴上均匀分布能量。从数学定义来看,白噪声是一种广义平稳随机信号,其功率谱在整个频率区间内为常数。理论上,白噪声的平均功率是无限的。实际上,在电子信息系统中工作频带是有限的,在有限带宽内,我们通常认为系统噪声的功率谱是均匀的或变化较小,噪声可近似认为是白噪声,且它的平均功率有限。

在实际物理系统中,白噪声可用于描述许多随机干扰现象。例如,电子器件中电子热运动产生的热噪声,在一定的频率范围内可近似看作白噪声;自然界中的大气噪声、宇宙噪声等,在特定频段内也呈现出类似白噪声的特性。尽管严格意义上的白噪声并不存在(因其总能量无限大),但在有限带宽范围内,许多随机信号可被视为白噪声进行分析,极大地简化了理论研究和工程设计的过程。

对于白噪声 $N(t)$,其均值为

$$\mu_n = E[N(t)] = 0 \quad (5.9.1)$$

白噪声不包含直流分量,其均值为0。这一特性使得白噪声在信号处理中常被视为纯粹的随机干扰,不影响信号的直流特性。

白噪声的自相关函数为

$$R_N(n_1, n_2) = \sigma_n^2 \delta(n_1 - n_2) \quad (5.9.2)$$

式中, σ_n^2 表示白噪声的平均功率; $\delta(\cdot)$ 为单位冲激函数。式(5.9.2)表明,白噪声在不同时刻的取值完全不相关或正交。

白噪声的相关系数为

$$\rho_n(n) = \delta(n) \quad (5.9.3)$$

白噪声的功率谱在整个频率轴上为常数,即

$$G_n(\omega) = \sigma_n^2 \quad (5.9.4)$$

式中, σ_n^2 与电子信息系统的工作参数、工作环境有关。

5.9.2 色噪声

色噪声作为与白噪声相对的概念,在实际工程和自然现象中广泛存在。相较于白噪声在全频段均匀分布能量的特性,色噪声的功率谱随频率变化而变化,是一种功率谱不均匀的随机信号,其能量并非均匀分布于整个频率轴,而是在某些频段集中,在某些频段减弱。色噪声的频谱特性较为复杂,如同色彩斑斓的光谱蕴含不同频率成分,故而得名。

色噪声是典型的随机信号。在实际系统中,色噪声往往由多种物理机制共同作用产生,如电子电路中的闪烁噪声、自然界的海洋环境噪声等,都呈现出色噪声的特性。这些



视频讲解

噪声的存在会对信号处理和系统性能产生显著影响,因此准确理解和分析色噪声具有重要的理论和现实意义。

在实际情况中,色噪声的均值可能为零,也可能为非零常数,这取决于噪声的产生机制和物理背景。例如,在某些受环境因素影响的传感器测量噪声中,由于环境温度、压力等因素的偏移,色噪声的均值可能不为零,从而给测量结果带来系统性偏差。

与白噪声仅在 $n=0$ 时刻相关不同,色噪声在多个时刻之间存在一定的相关性。由于自相关函数与功率谱之间是傅里叶变换对的关系,且色噪声功率谱随频率变化而变化,所以,其自相关函数不是冲激函数,而是一个具有一定时间延展的函数,这意味着色噪声在一定的时间间隔内存在相关性。这种相关性对色噪声的预测和滤波有重要作用。

色噪声的功率谱不再是常数,而是频率的函数,具有一定的频率选择性。典型的色噪声包括粉红噪声、蓝噪声、布朗噪声。

(1) 粉红噪声的功率谱与频率成反比,即 $G(\omega) \propto \frac{1}{\omega}$,在低频段具有较高能量,常用于在音频测试、建筑声学等领域进行自然噪声环境的模拟。

(2) 蓝噪声的功率谱与频率成正比,即 $G(\omega) \propto \omega$,高频成分能量相对较高,在图像处理中的抖动算法等领域有应用。

(3) 布朗噪声的功率谱与频率的平方成反比,即 $G(\omega) \propto \frac{1}{\omega^2}$,能量主要集中在低频区域,在物理系统中,如布朗运动产生的噪声近似符合该特性。

色噪声的幅度可能服从正态分布,也可能服从其他分布。

5.9.3 高斯噪声

高斯噪声分为高斯白噪声和高斯色噪声两种。下面对它们进行一一介绍。

1. 高斯白噪声

高斯白噪声的幅度服从高斯分布。任意两次不同的观测噪声之间不相关。多个时刻观测的白噪声服从多维联合高斯分布,其联合概率密度函数可表示为

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \det^{1/2}(\mathbf{C})} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{m})^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m}) \right] \quad (5.9.5)$$

式中, $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_N]^T$; $\mathbf{m} = [m_1 \ m_2 \ \cdots \ m_N]^T$, m_i 为第 i 次观测的白噪声均值; $\mathbf{C} =$

$$\begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma^2 \end{bmatrix}, \sigma^2 \text{ 为白噪声方差,白噪声协方差矩阵对角线上的元素相等,非对角线上的元素为 } 0.$$

对于高斯白噪声,多次观测噪声之间不相关等价于它们之间相互独立。

以二维独立联合高斯分布白噪声为例,其 PDF 为

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp \left[-\frac{(x_1 - m_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x_2 - m_2)^2}{2\sigma_2^2} \right] \quad (5.9.6)$$

二维联合高斯分布白噪声 PDF 示意如图 5.9.1 所示。其中, $m_1=1, m_2=2, \sigma_1=1, \sigma_2=2$ 。

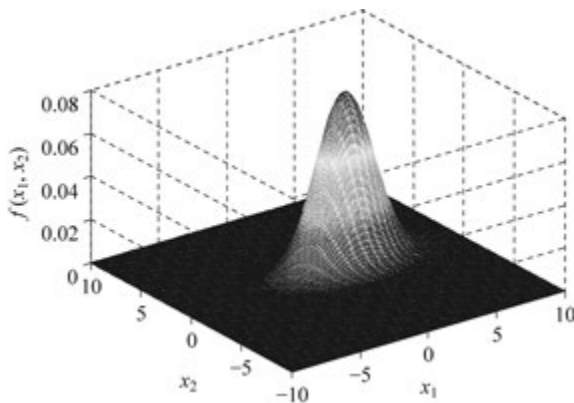


图 5.9.1 二维联合高斯分布白噪声 PDF 示意图

2. 高斯色噪声

高斯色噪声的幅度服从高斯分布。两次不同的观测噪声之间具有一定的相关性,且通常情况下,两次观测时间间隔越小,两次观测噪声的相关性越强。多个时刻观测的色噪声也服从多维联合高斯分布,其联合概率密度函数可表示为

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \det^{1/2}(\mathbf{C})} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{m})^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m}) \right]$$

式中, $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_N]^T$; $\mathbf{m} = [m_1 \ m_2 \ \cdots \ m_N]^T$, m_i 为第 i 次观测的色噪声均值; $\mathbf{C} =$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{N1} & c_{N2} & \cdots & c_{NN} \end{bmatrix}, c_{ij} = \text{cov}(x_i, x_j), \text{通常情况下}, c_{ij} \neq 0。$$

以二维联合高斯分布色噪声为例,其 PDF 示意如图 5.9.2 所示。其中, $m_1=1, m_2=2, c_{11}=1, c_{22}=4, c_{12}=c_{21}=r\sigma_1\sigma_2=1$ 为相关系数。

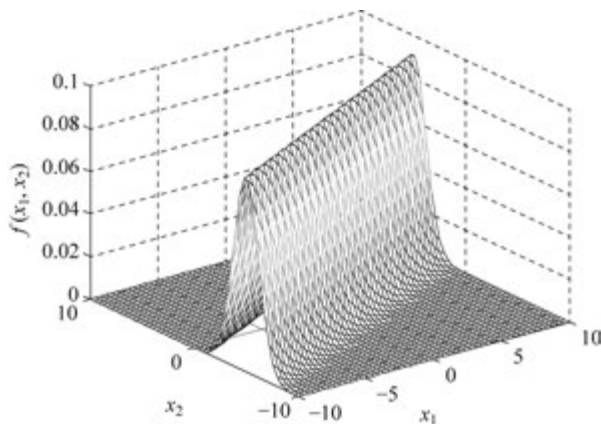


图 5.9.2 二维联合高斯分布色噪声 PDF 示意图

5.10 典型随机信号的建模仿真

5.10.1 白噪声建模仿真

白噪声可能服从均匀分布、高斯分布、对数正态分布、韦布尔分布等。下面结合 MATLAB 简单介绍各种分布白噪声的产生方法。

1) 均匀分布白噪声

利用 `rand()` 函数产生服从 $(0,1)$ 均匀分布的随机数,具体用法为 `rand(m,n)`。其中, m 、 n 分别表示产生随机数的行数和列数。

为了产生 (a,b) 范围内均匀分布的随机数,可采用 $a + (b-a) \times \text{rand}(m,n)$ 来表示。

2) 高斯分布白噪声

高斯分布白噪声可利用 `randn()` 函数来产生。`randn()` 函数产生均值为 0、方差为 1 的高斯分布随机数。均值为 μ 、方差为 σ^2 的高斯白噪声可由下式产生:

$$x = \mu + \sigma \times \text{randn}(m,n) \quad (5.10.1)$$

3) 对数正态分布白噪声

对数正态分布白噪声可利用 `lognrnd()` 函数来产生,具体产生方法为

$$x = \text{lognrnd}(\mu, \sigma, m, n) \quad (5.10.2)$$

式中, μ 为 $\ln x$ 的均值; σ 为 $\ln x$ 的标准方差; m 、 n 分别表示产生随机数的行数和列数。

4) 韦布尔分布白噪声

韦布尔分布白噪声可利用 `wblrnd()` 函数来产生,具体产生方法为

$$x = \text{wblrnd}(p, q, m, n) \quad (5.10.3)$$

式中, p 、 q 分别为韦布尔分布的形状参数和尺度参数。

以上方法产生的白噪声只是在幅度上对其分布进行了建模。各个分布下,不同的两次观测噪声之间不相关。所以,上述方法只能产生不相关的、幅度服从相应分布的噪声。为了产生幅度服从特定分布,且具有一定相关性的色噪声,需对上述方法产生的白噪声进行相应处理。

5.10.2 高斯色噪声建模仿真

在实际中,各种电子信息系统多次观测的背景信号具有一定的相关性。为此,在仿真评估时,通常要产生具有一定相关性的信号。下面以高斯色噪声为例,介绍其建模仿真方法。

高斯色噪声的建模仿真思路是先产生一组高斯白噪声,然后根据相关性要求,对高斯白噪声进行适当的加权处理,即可得到具有特定相关性的高斯色噪声。

假定要产生高斯色噪声,多次观测噪声的均值为 μ ,协方差矩阵为

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{N1} & c_{N2} & \cdots & c_{NN} \end{bmatrix} \quad (5.10.4)$$

式中, $c_{ij} \neq 0$ 。

首先产生均值为 0、各次观测之间不相关的高斯白噪声 U 。然后, 对 U 做如下线性变换:

$$X = AU + \mu \quad (5.10.5)$$

此时, X 的均值为 μ , 协方差矩阵为

$$C_X = E[(X - \mu)(X - \mu)^T] = AUU^T A^T = AA^T \quad (5.10.6)$$

为了使 $C_X = C$, 则需 $AA^T = C$ 。

由于 $c_{ij} = c_{ji}$, C 为对称的正定矩阵。根据矩阵分解定理, C 可分解为 $C = AA^T$, 其中, A 为下三角矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} \quad (5.10.7)$$

在已知 C 的情况下, 可根据 C 中各元素的取值求得 A 的各元素取值。最终求解结果为

$$\begin{cases} a_{jj} = (c_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk}^2)^{1/2} \\ a_{ij} = a_{jj}^{-1} (c_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} a_{ik} a_{jk}) \end{cases}, \quad i = j+1, \dots, N \quad (5.10.8)$$

将式(5.10.8)中的求解结果代入式(5.10.7)中, 即可得到均值为 μ 、协方差为 C 的高斯色噪声。

仿真示例 下面产生一个相关高斯色噪声 $X(n)$, 使它的自相关函数为

$$R_X(m) = \frac{\sigma^2}{1-a^2} a^{|m|} \quad (5.10.9)$$

式中, a, σ 为常数, $|a| < 1$ 。

首先对信号进行建模。

由已知条件可知, 高斯色噪声的均值为

$$\mu_X = \sqrt{R_X(\infty)} = 0 \quad (5.10.10)$$

该噪声的协方差矩阵为

$$C_X = R_X - \mu_X \mu_X^T = R_X \quad (5.10.11)$$

所以, 有

$$C_X = \begin{bmatrix} R_X(0) & R_X(1) & \cdots & R_X(N-1) \\ R_X(1) & R_X(0) & \cdots & R_X(N-2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_X(N-1) & R_X(N-2) & \cdots & R_X(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & a & \cdots & a^{N-1} \\ a & 1 & \cdots & a^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{N-1} & a^{N-2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (5.10.12)$$

令 $\mathbf{C}_X = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$, 对 $\mathbf{C}_X$ 做 Cholesky 矩阵分解, 可得

$$\mathbf{A} = \frac{\sigma}{\sqrt{1-a^2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a & \sqrt{1-a^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a^N & a^{N-1}\sqrt{1-a^2} & \cdots & \sqrt{1-a^2} \end{bmatrix} \quad (5.10.13)$$

所以, 协方差矩阵为 $\mathbf{C}_X$ 的高斯色噪声可由下式得到

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{U} \quad (5.10.14)$$

式中, $\mathbf{U} = [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_N]^T$ 为高斯白噪声。

仿真分析 仿真参数设置: 假定 $a=0.8, \sigma=2, N=10000$, 高斯白噪声、高斯色噪声分别如图 5.10.1 和图 5.10.2 所示。

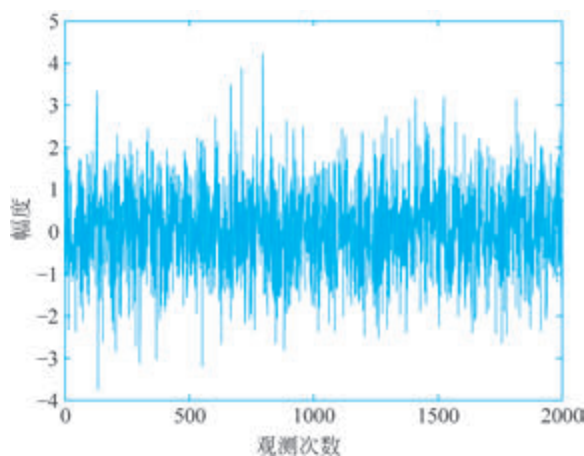


图 5.10.1 高斯白噪声

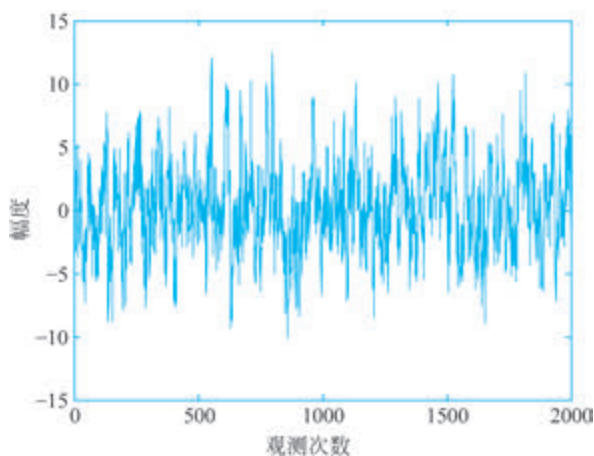


图 5.10.2 高斯色噪声

从图 5.10.1 和图 5.10.2 可以看出, 高斯白噪声起伏更剧烈, 相邻时刻的相关性较差, 高斯色噪声相邻时刻的相关性较强。对高斯白噪声进行线性加权后, 只会影响噪声的相关性, 不会对噪声的幅度分布产生影响, 噪声仍服从高斯分布, 如图 5.10.3 所示。

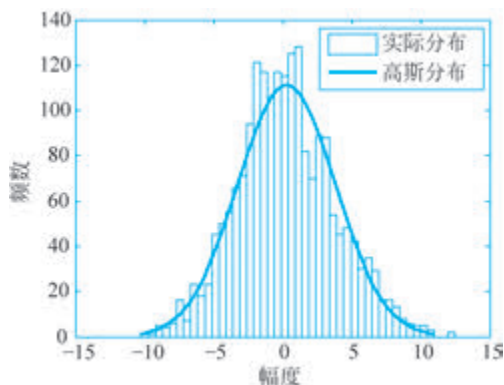


图 5.10.3 高斯分布拟合结果

高斯白噪声的自相关函数理论上是单位冲激函数, 仿真产生的高斯白噪声自相关函数近似于单位冲激函数, 如图 5.10.4 所示。另外, 由图 5.10.5 可见, 仿真产生的高斯色噪声自相关函数与理论值吻合较好。这证明了上述建模仿真的正确性。

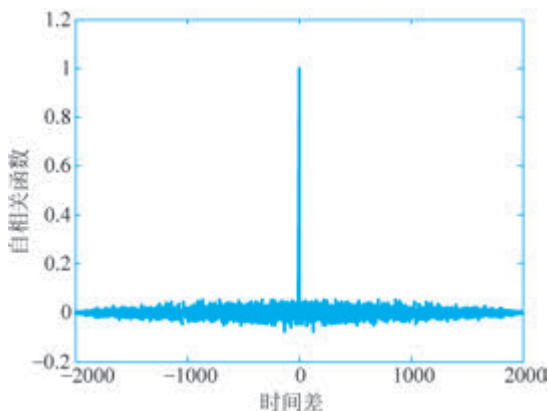


图 5.10.4 高斯白噪声自相关函数

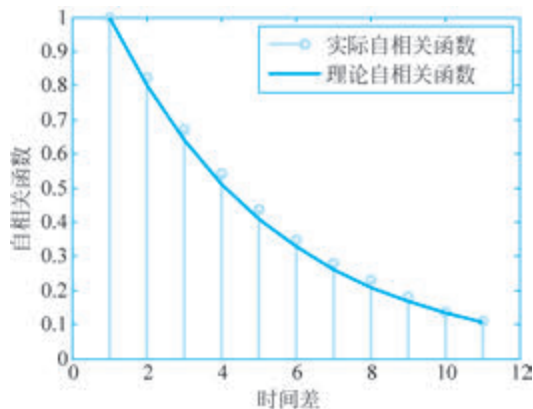
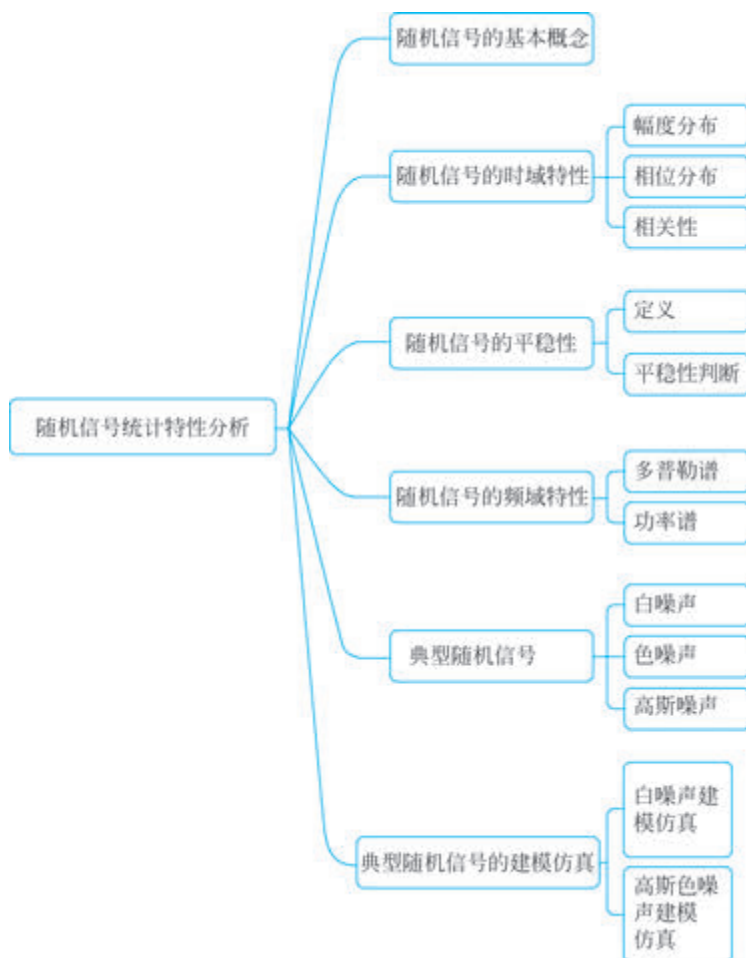


图 5.10.5 高斯色噪声自相关函数

5.11 本章知识框架



5.12 实验：海杂波与无人机回波特性分析

5.12.1 实验背景

雷达对海上无人机进行探测时,除了接收到无人机回波外,还会接收到海面反射回来的海杂波。通常情况下,海杂波幅度较强,无人机回波幅度较弱,海杂波会淹没无人机回波,导致雷达难以利用回波幅度来判断是否存在无人机。雷达接收信号除了幅度大小特征外,还有幅度分布、相位分布、多普勒谱等很多特征。如果能够发现无人机回波与海杂波的某个或者某些特征具有明显差异,则可利用这些特征来实现无人机的检测。所以,分析海杂波和无人机回波的特性对雷达检测无人机具有重要的指导意义。

5.12.2 实验目的

了解雷达检测无人机的应用需求,理解雷达回波特性与无人机检测之间的关系。掌握随机信号幅度分布、时域数字特征、相关性、频域特征计算等理论与方法,运用这些理论和方法分析雷达接收的海杂波和无人机回波特性。培养学生数学推导、编程、数据处理和撰写报告的能力,提升学生提炼问题、分析问题、解决问题的能力。

5.12.3 实验内容

- (1) 分析海杂波和无人机回波幅度分布、相位分布;
- (2) 分析海杂波和无人机回波幅度、相位的均值、方差、各阶矩;
- (3) 分析海杂波和无人机回波自相关函数;
- (4) 分析海杂波和无人机回波多普勒谱和功率谱;
- (5) 分析海杂波和无人机回波的极化特性以及其他特性。

5.12.4 实验原理

海杂波和无人机回波是复信号。复信号的幅度和相位都是典型的随机信号。随机信号的分布、均值、方差、自相关函数、多普勒谱和功率谱等概念和计算方法已经在本章理论部分进行了讲解。在计算和分析过程中,可参考前面的理论部分内容,此处不再赘述。

海杂波和无人机回波的极化特性和其他特性可参考文献。大家也可自行查阅其他文献来选取相应的特征量进行分析。

5.12.5 实验步骤

- (1) 读取雷达回波数据;
- (2) 提取海杂波和无人机回波的幅度、相位,分析各自的分布;
- (3) 对比分析海杂波和无人机回波的幅度分布差异、相位分布差异;
- (4) 分析海杂波和无人机回波幅度、相位的均值、方差、各阶矩;
- (5) 分析海杂波和无人机回波的自相关函数;
- (6) 分析海杂波和无人机回波的频域特性;
- (7) 分析海杂波和无人机回波的极化特性和其他特性。

5.13 习题

1. 现有随机信号 $X(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$, 其中, ω_0 为常数, A 和 B 是独立的高斯随机变量。已知 $E(A) = E(B) = 0$, $E(A^2) = E(B^2) = \sigma^2$, 求 $X(t)$ 的一维和二维概率密度函数。

2. 已知随机信号 $X(t) = \cos \omega t$, 其中, ω 在 $[\omega_1, \omega_2]$ 区间内均匀分布。求:

- (1) $X(t)$ 的均值;

(2) $X(t)$ 的自相关函数。

3. 已知平稳随机信号 $X(t)$ 的功率谱为 $G_X(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega^4 + 3\omega^2 + 2}$, 求 $X(t)$ 的均方值 $E[X^2(t)]$ 。

4. 已知平稳随机信号 $X(t)$ 的自相关函数为 $R_X(\tau) = 4e^{-|\tau|} \cos \pi t + \cos 3\pi t$, 试求功率谱 $G_X(\omega)$ 。

5. 雷达对接收信号采用一次对消或二次对消处理来滤除静止地物杂波, 对消原理框图如图 5.13.1 和图 5.13.2 所示。雷达接收信号功率谱为 $G_{X(\omega)}$, 试推导一次对消、二次对消输出信号功率谱, 并采用仿真进行检验。



图 5.13.1 一次对消原理框图

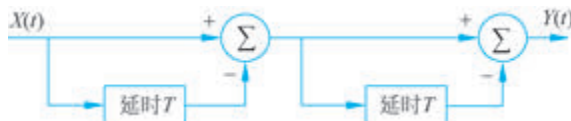


图 5.13.2 二次对消原理框图