

考点三 选填压轴题

核心例题 1 函数的性质综合

(多选题) 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$, 记 $g(x) = f'(x)$, 若 $f(x+2)$ 为偶函数, $g(x)$ 为奇函数, 则()。

- A. $f(x) = f(4-x)$
 B. $g(x) = -g(4-x)$
 C. $f(x) = -f(x+4)$
 D. $g(x) = g(x+4)$

【答案】 ABD

【解析】 A 选项: 因为 $f(x+2)$ 为偶函数, 所以 $f(2-x) = f(2+x)$, 则 $f(x) = f(4-x)$, 故 A 正确;

B 选项: 因为 $f(x) = f(4-x)$, 左、右两侧分别取导数可得 $f'(x) = -f'(4-x)$, 所以 $g(x) = -g(4-x)$, 故 B 正确;

C 选项: 令 $f(x) = \cos \pi x$, 则 $f(x+2) = \cos \pi(x+2) = \cos(\pi x + 2\pi) = \cos \pi x$ 为偶函数, $g(x) = f'(x) = -\sin \pi x$ 为奇函数, 满足题干, 当 $x=1$ 时, $f(1) = \cos \pi = -1$, $f(x+4) = \cos 5\pi = \cos \pi = -1$, 所以 $f(1) \neq -f(1+4)$, 即存在 $x=1$, 使得 $f(x) = -f(x+4)$ 不成立, 故 C 错误;

D 选项: 因为 $g(x) = -g(4-x)$, 又 $g(x)$ 为奇函数, 则 $g(x) = -g(-x)$, 所以 $-g(-x) = -g(4-x)$, 即 $g(-x) = g(4-x)$, 则 $g(x) = g(x+4)$, 故 D 正确。

综上所述, 选 ABD。

解题必备

1. 函数的对称性

(1) 轴对称: 若函数 $f(x)$ 关于直线 $x=a$ 对称, 则:

① $f(a+x) = f(a-x)$;

② $f(x) = f(2a-x)$;

③ $f(-x) = f(2a+x)$ 。

(2) 点对称: 若函数 $f(x)$ 关于直线 $(a, 0)$ 对称, 则:

① $f(a+x) = -f(a-x)$;

② $f(x) = -f(2a-x)$;

③ $f(-x) = -f(2a+x)$ 。

(3) 点对称: 若函数 $f(x)$ 关于直线 (a, b) 对称, 则:

① $f(a+x) = -f(a-x) + 2b$;

② $f(x) = -f(2a-x) + 2b$;

③ $f(-x) = -f(2a+x) + 2b$ 。

2. 函数的周期性

函数式满足关系 ($x \in \mathbf{R}$)	周期
$f(x+T) = f(x)$	T
$f(x+T) = -f(x)$	$2T$
$f(x+T) = \frac{1}{f(x)}$	$2T$
$f(x+T) = \frac{1-f(x)}{1+f(x)}$	$2T$
$f(x+T) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$	$4T$
$\begin{cases} f(a+x) = f(a-x) \\ f(b+x) = f(b-x) \end{cases}$	$2(b-a)$
$\begin{cases} f(a+x) = f(a-x) \\ f(x) \text{ 为偶函数} \end{cases}$	$2a$
$\begin{cases} f(a+x) = -f(a-x) \\ f(b+x) = -f(b-x) \end{cases}$	$2(b-a)$
$\begin{cases} f(a+x) = -f(a-x) \\ f(x) \text{ 为奇函数} \end{cases}$	$2a$
$\begin{cases} f(a+x) = f(a-x) \\ f(b+x) = -f(b-x) \end{cases}$	$4(b-a)$
$\begin{cases} f(a+x) = f(a-x) \\ f(x) \text{ 为奇函数} \end{cases}$	$4a$
$\begin{cases} f(a+x) = -f(a-x) \\ f(x) \text{ 为偶函数} \end{cases}$	$4a$



题型训练 · 练真题

- 1.1 (2021 · 新高考全国二 · 14 ·) 写出一个同时具有下列性质 ① ② ③ 的函数 $f(x)$: _____。
- ① $f(x_1 x_2) = f(x_1) f(x_2)$; ② 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$; ③ $f'(x)$ 是奇函数。

- 1.2 (2022 · 新高考全国二 · 8 ·) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f(x+y) + f(x-y) = f(x) f(y)$, $f(1) = 1$, 则 $\sum_{k=1}^{22} f(k) =$ ()。
- A. -3 B. -2 C. 0 D. 1

- 1.3 (2022 · 新高考全国一 · 12 ·) (多选题) 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$, 记 $g(x) = f'(x)$, 若 $f\left(\frac{3}{2} - 2x\right)$, $g(2+x)$ 均为偶函数, 则 ()。
- A. $f(0) = 0$ B. $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$
- C. $f(-1) = f(4)$ D. $g(-1) = g(2)$



题型训练 · 提素养

- 1.4 () (多选题) 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且满足 $f(x) = f(2-x)$, $f(x) = -f(x+2)$, 当 $x \in (0, 1]$ 时, $f(x) = x \ln x$, 则 ()。
- A. $f(x)$ 是周期为 2 的函数
- B. $f(2022) = 0$
- C. $f(x)$ 的值域是 $[-e, e]$
- D. 方程 $|ef(x)| = 1$ 在区间 $\left[0, \frac{2023}{2}\right]$ 内恰有 1011 个实数解

- 1.5 () 已知函数 $f(x), g(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$, $f(x)$ 为偶函数且 $f(x) + f(x+2) = 3$, $g(x) + g(10-x) = 2$, 则 $\sum_{i=1}^9 [f(i) + g(i)] =$ ()。
- A. 21 B. 22 C. $\frac{45}{2}$ D. $\frac{47}{2}$

- 1.6 () (多选题) 已知函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$, 且 $f(x+1) + g(x-2) = 3$, $f(x-1) - g(-x) = 1$, 若 $g(2x-1)$ 为偶函数, 则 ()。
- A. 函数 $g(x)$ 的图像关于直线 $x = -\frac{1}{2}$ 对称
- B. $g(0) = 1$
- C. 函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(1, 2)$ 对称
- D. $\sum_{k=1}^{2023} g(k) = 2023$



题型训练 · 战高考

- 1.7 () (多选题) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(x+2)$ 为奇函数, $f(2x+1)$ 为偶函数, 则 ()。
- A. $f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称
- B. $f(x)$ 的图像关于点 $(1, 0)$ 对称
- C. $f(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称
- D. $f(x)$ 的图像关于点 $(2, 0)$ 对称
- 1.8 () 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, $f(1-2x)$ 为偶函数, 且 $f(-1) = 1$, 则 $|f(-10)| + |f(-9)| + \dots + |f(0)| + |f(1)| + \dots + |f(9)| + |f(10)| =$ ()。
- A. 10 B. 20 C. 15 D. 5

1.9 () (多选题) 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$, 满足 $f(x) + f(2-x) = 2$, 则下列结论正确的是()。

- A. $f(x)$ 的图像关于 $x=1$ 对称
 B. $f(x+4) = f(x)$
 C. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上单调递增, 则 $f(x)$ 在区间 $[2021, 2022]$ 上单调递增
 D. 若函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上的解析式为 $f(x) = \ln x + 1$, 则 $f(x)$ 在区间 $(2, 3)$ 上的解析式为 $f(x) = \ln(x-1) + 1$

核心例题 2 导数性质综合

() 已知关于 x 的不等式 $e^x - mx - \ln x - \ln(m+1) \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 则 m 的取值范围是()。

- A. $(-1, 1]$ B. $(-1, e-1]$
 C. $(e-1, 1]$ D. $(1, e]$

【答案】B

【解析】由 $e^x - mx - \ln x - \ln(m+1) \geq 0$ 得 $e^x - mx \geq \ln[(m+1)x]$, 即 $e^x + x \geq \ln[(m+1)x] + (m+1)x = e^{\ln[(m+1)x]} + \ln[(m+1)x]$ 。构造 $f(x) = e^x + x$, 即 $f(x) \geq f(\ln[(m+1)x])$, 因为 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $x \geq \ln[(m+1)x]$, $e^x \geq (m+1)x$, 则 $m+1 \leq \frac{e^x}{x}$ 。令

$h(x) = \frac{e^x}{x}$, 则 $h'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 则 $h(x)_{\min} = h(1) = e$, $m+1 \leq e$, 即 $m \leq e-1$ 。又 $m+1 > 0$, 即 $m > -1$, 所以 m 的取值范围是 $(-1, e-1]$ 。故选 B。

解题必备

指对同构的常用形式

(1) 积型: $ae^a \leq b \ln b$

① 构造形式为 $ae^a \leq \ln b e^{\ln b}$, 构造函数 $f(x) = xe^x$;

② 构造形式为 $e^a \ln e^a \leq b \ln b$, 构造函数 $f(x) = x \ln x$;

③ 构造形式为 $a + \ln a \leq \ln b + \ln(\ln b)$, 构造函数 $f(x) = x + \ln x$ 。

(2) 商型: $\frac{e^a}{a} \leq \frac{b}{\ln b}$

① 构造形式为 $\frac{e^a}{a} \leq \frac{e^{\ln b}}{\ln b}$, 构造函数 $f(x) = \frac{e^x}{x}$;

② 构造形式为 $\frac{e^a}{\ln e^a} \leq \frac{b}{\ln b}$, 构造函数 $f(x) = \frac{x}{\ln x}$;

③ 构造形式为 $a - \ln a \leq \ln b - \ln(\ln b)$, 构造函数 $f(x) = x - \ln x$ 。



题型训练 · 练真题

2.1 (2023 · 新课标全国乙 · 16 ·) 设 $a \in (0, 1)$, 若函数 $f(x) = a^x + (1+a)^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 a 的取值范围是_____。

2.2 (2021 · 新高考全国二 · 16 ·) 已知函数 $f(x) = |e^x - 1|$, $x_1 < 0, x_2 > 0$, 函数 $f(x)$ 的图像在点 $A(x_1, f(x_1))$ 和点 $B(x_2, f(x_2))$ 的两条切线互相垂直, 且分别交 y 轴于 M, N 两点, 则 $\frac{|AM|}{|BN|}$ 取值范围是_____。

- 2.3 (2022 · 新课标全国乙 · 16 ·) 已知 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 分别是函数 $f(x)=2a^x - ex^2$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$) 的极小值点和极大值点。若 $x_1<x_2$, 则 a 的取值范围是_____。

题型训练 · 提素养

- 2.4 () 已知函数 $f(x)=xe^{2x}-1$, 不等式 $f(x)\geq mx+\ln x$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是()。
- A. $(-\infty, 2]$ B. $[0, 2]$
C. $(-\infty, e^2-1]$ D. $[0, e^2-1]$

- 2.5 () (多选题) 已知函数 $f(x)=x(\ln x - ax)$, 则()。
- A. 当 $a\leq 0$ 或 $a=\frac{1}{e}$ 时, $f(x)$ 有且仅有一个零点
B. 当 $a\leq 0$ 或 $a=\frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 有且仅有一个极值点
C. 若 $f(x)$ 为单调递减函数, 则 $a>\frac{1}{2}$
D. 若 $f(x)$ 与 x 轴相切, 则 $a=\frac{1}{e}$

- 2.6 () (多选题) 利用“ $\ln x \leq x-1$ ”可得到许多与 n ($n\geq 2$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$) 有关的结论, 则正确的是()。
- A. $\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$
B. $\ln n > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$
C. $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right) > e$
D. $\left(\frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{2}{n}\right)^n + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^n < \frac{e}{e-1}$

题型训练 · 战高考

- 2.7 () 若函数 $f(x)=a^x - x(\ln x - 1)$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$) 存在极大值点, 则 a 的取值范围是_____。

- 2.8 () 已知函数 $f(x)=xe^x - x - \ln x - a$, 若 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 存在零点, 则实数 a 值可以是()。
- A. -1 B. 0 C. $\frac{1}{e}$ D. e

- 2.9 () (多选题) 已知 O 为坐标原点, 曲线 $y=\ln x$ 在点 $P(x_1, y_1)$ 处的切线与曲线 $y=e^x$ 相切于点 $Q(x_2, y_2)$, 则()。
- A. $x_1y_2=1$
B. $\frac{x_1+1}{x_1-1} + x_2 = 0$
C. $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 的最大值为 0
D. 当 $x_2 < 0$ 时, $x_1 + x_2 > e^2 - 2$

核心例题 3 比较大小

- () 已知 $a=\frac{1}{11}$, $b=\sqrt{\frac{1}{10}}$, $c=\ln \frac{11}{10}$, 则()。
- A. $a>b>c$ B. $b>c>a$
C. $c>b>a$ D. $b>a>c$

【答案】 B

【解析】 令 $f(x)=x - \ln(x+1)$, $0<x<1$, 则 $f'(x)=1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 则 $f(x) > f(0)=0$, 即 $x > \ln(x+1)$ 。令 $g(x)=\ln(x+1) - 1 + \frac{1}{x+1}$,

$$0 < x < 1, \text{ 则 } g'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} =$$

$$\frac{x}{(x+1)^2} > 0, \text{ 所以 } g(x) \text{ 在 } (0, 1) \text{ 上单调递增,}$$

$$\text{则 } g(x) > g(0) = 0, \text{ 即 } \ln(x+1) > 1 - \frac{1}{x+1}.$$

$$\text{又当 } 0 < x < 1 \text{ 时, } \sqrt{x} > x, \text{ 所以当 } 0 < x < 1$$

$$\text{时, } \sqrt{x} > x > \ln(x+1) > 1 - \frac{1}{x+1}, \text{ 则当 } x =$$

$$\frac{1}{10} \text{ 时, } \sqrt{\frac{1}{10}} > \frac{1}{10} > \ln \frac{11}{10} > \frac{1}{11}, \text{ 即 } b > c > a. \text{ 故}$$

选 B。

解题必备

1. 常见的导数不等式

$$(1) e^x \geq x + 1; (2) e^{x-1} \geq x; (3) \ln(x+1) \leq x; (4) \ln x \leq x - 1; (5) \ln x \geq \frac{1}{x} - 1.$$

2. 常见函数的麦克劳林展开式

$$(1) e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1};$$

$$(2) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2});$$

$$(3) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n});$$

$$(4) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1});$$

$$(5) \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n);$$

$$(6) (1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + o(x^2).$$



题型训练 · 练真题

3.1 (2022 · 新课标全国甲 · 12 ·) 已知

$$a = \frac{31}{32}, b = \cos \frac{1}{4}, c = 4 \sin \frac{1}{4}, \text{ 则 } ().$$

- A. $c > b > a$ B. $b > a > c$
C. $a > b > c$ D. $a > c > b$

3.2 (2022 · 新高考全国一 · 7 ·) 设 $a =$

$$0.1e^{0.1}, b = \frac{1}{9}, c = -\ln 0.9, \text{ 则 } ().$$

- A. $a < b < c$ B. $c < b < a$
C. $c < a < b$ D. $a < c < b$

3.3 (2021 · 新课标全国乙 · 12 ·) 设

$$a = 2\ln 1.01, b = \ln 1.02, c = \sqrt{1.04} - 1, \text{ 则 } ().$$

- A. $a < b < c$ B. $b < c < a$
C. $b < a < c$ D. $c < a < b$



题型训练 · 提素养

3.4 (多选题) 当 $1 < x_1 < x_2$ 时, 不等

$$\text{式 } x_2 e^{x_1} - x_1 e^{x_2} < 0 \text{ 成立. 若 } b > e^a > e, \text{ 则}$$

- ().
A. $e^b > b e^{e-1}$ B. $e^{a+b} < b e^a$
C. $a e^b < b \ln a$ D. $ab > e^a \ln b$

3.5 (多选题) e 是自然对数的底数,

$$m, n \in \mathbf{R}, \text{ 已知 } m e^m + \ln n > n \ln n + m, \text{ 则下}$$

列结论一定正确的是()。

- A. 若 $m > 0$, 则 $m - n > 0$
 B. 若 $m > 0$, 则 $e^m - n > 0$
 C. 若 $m < 0$, 则 $m + \ln n < 0$
 D. 若 $m < 0$, 则 $e^m + n > 2$

- 3.6 () (多选题) 已知 m, n 关于 x 方程 $|\log_a x| = k (a > 0, a \neq 1)$ 的两个根, 且 $m < n < 2m$, 则()。

- A. $2 < m + n < \frac{3\sqrt{2}}{2}$
 B. $\log_n(m+1) - 1 < m^{m+1} - m^n$
 C. $n^{m+1} < (m+1)^n$
 D. $(m+4)^{n+1} < (n+1)^{m+4}$



题型训练 · 战高考

- 3.7 () 设 $a = \frac{1}{7}, b = \ln \frac{9}{7}, c = \sin \frac{1}{7}$, 则()。

- A. $c < a < b$ B. $c < b < a$
 C. $a < b < c$ D. $b < c < a$

- 3.8 () 已知 $a = e^{0.1} - 1, b = \sin 0.1, c = \ln 1.1$, 则()

- A. $a < b < c$ B. $b < c < a$
 C. $c < a < b$ D. $c < b < a$

- 3.9 () 设 $a = \frac{1}{3}, b = \frac{4}{3} \ln \frac{4}{3}, c = 2 \ln \left(\sin \frac{1}{6} + \cos \frac{1}{6} \right)$, 则()。

- A. $b < a < c$ B. $c < a < b$
 C. $a < c < b$ D. $b < c < a$

核心例题 4 立体几何小题综合

() 已知圆锥内切球(与圆锥侧面、底面均相切的球)的半径为 2, 当该圆锥的表面积最小时, 其外接球的表面积为()。

- A. 81π B. 96π C. 108π D. 126π

【答案】A

【解析】如图 3.1 所示, 设圆锥的顶点为 S , 底面圆的圆心为 B , 内切球圆心为 O , 则 $OB = OC = 2, AB = AC$, 因为 $SB \perp AB, OC \perp SA$, 所以 $\triangle ABS \sim \triangle OCS$, 则 $\frac{SO}{SA} = \frac{OC}{AB} = \frac{SC}{SB}$ 。

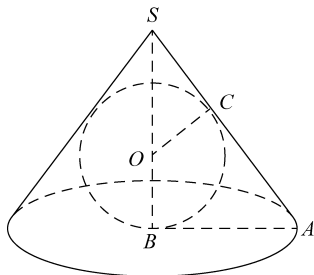


图 3.1

设 $AB = AC = r (r > 2), SA = l$, 故 $\frac{SB-2}{l} =$

$\frac{2}{r} = \frac{l-r}{SB}$, 由 $\frac{SB-2}{l} = \frac{2}{r}$ 得 $SB = \frac{2l}{r} + 2$, 由

$\frac{2}{r} = \frac{l-r}{SB}$ 得 $SB = \frac{lr-r^2}{2}$, 则 $\frac{2l}{r} + 2 = \frac{lr-r^2}{2}$, 所

以 $4l + 4r = lr^2 - r^3, r^3 + 4r = l(r^2 - 4)$, 解得

$l = \frac{4r+r^3}{r^2-4}$, 所以圆锥的表面积为 $\pi rl +$

$\pi r^2 = \frac{2\pi r^4}{r^2-4}$ 。

令 $f(r) = \frac{2r^4}{r^2-4}, f'(r) = \frac{8r^3(r^2-4) - 4r^5}{(r^2-4)^2} =$

$\frac{4r^5 - 32r^3}{(r^2-4)^2} = \frac{4r^3(r^2-8)}{(r^2-4)^2}$, 当 $r \in (2\sqrt{2}, +\infty)$ 时,

$f'(r) > 0$; 当 $r \in (2, 2\sqrt{2})$ 时, $f'(r) < 0$, 故

$f(r) = \frac{2r^4}{r^2-4}$ 在 $r \in (2, 2\sqrt{2})$ 上单调递减, 在

$r \in (2\sqrt{2}, +\infty)$ 上单调递增, 则 $f(r) = \frac{2r^4}{r^2-4}$

在 $r = 2\sqrt{2}$ 时取得最小值, $f(r)_{\min} = f(2\sqrt{2}) =$

$$\frac{2 \times 64}{8-4} = 32, \text{ 此时 } l = \frac{4r+r^3}{r^2-4} = \frac{8\sqrt{2}+16\sqrt{2}}{4} =$$

$$6\sqrt{2}, SB = \frac{2l}{r} + 2 = \frac{12\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} + 2 = 8.$$

如图 3.2 所示, 设圆锥的外接球球心为 M , 连接 MA , 设 $SM = MA = R$, 则 $MB = 8 - R$, 由勾股定理得 $MB^2 + AB^2 = MA^2$, 即 $(8-R)^2 +$

$(2\sqrt{2})^2 = R^2$, 解得 $R = \frac{9}{2}$, 则其外接球的表面

积为 $4\pi R^2 = 81\pi$. 故选 A.

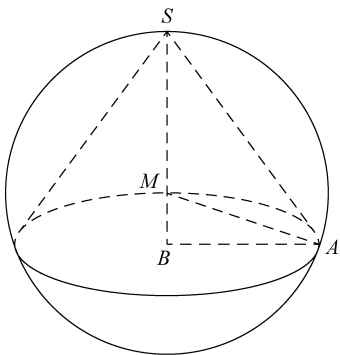


图 3.2

解题必备

1. 墙角模型(图 3.3)

适用范围: 3 组或 3 条棱两两垂直;

推导过程: 可在长方体中画出该图且各顶点与长方体的顶点重合直接用公式 $(2R)^2 = a^2 + b^2 + c^2$, 即 $2R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, 求出 R .

【补充】图 3.3(a) 为阳马, 图 3.3(b) 和图 3.3(d) 为鳖臑.

2. 麻花模型(图 3.4)

适用范围: 对棱相等相等的三棱锥; 对棱相

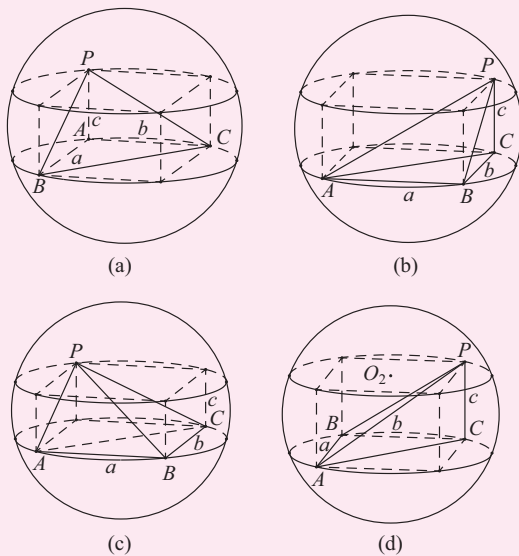


图 3.3

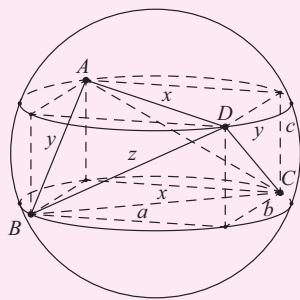


图 3.4

等指四面体的三组对棱分别对应相等, 且这三组对棱构成长方体的三组对面的对角线。

推导过程: 三棱锥(即四面体)中, 已知三组对棱分别相等 ($AB = CD, AD = BC, AC = BD$)。

第一步: 画出一个长方体, 标出三组互为异面直线的对棱;

第二步: 设出长方体的长宽高分别为 $a, b, c, AD = BC = x, AB = CD = y, AC = BD = z$, 列方程组

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = x^2 \\ b^2 + c^2 = y^2 \\ c^2 + a^2 = z^2 \end{cases} \Rightarrow (2R)^2 = a^2 + b^2 + c^2 =$$

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{2};$$

$$\text{【补充】 } V_{A-BCD} = abc - \frac{1}{6}abc \cdot 4 = \frac{1}{3}abc;$$

第三步: 根据墙角模型, $2R = \sqrt{a^2+b^2+c^2} =$

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{2}}, R^2 = \frac{x^2+y^2+z^2}{8}, R =$$

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{8}}, \text{ 求出 } R.$$

3. 垂面模型(图 3.5)

适用范围: 有一条棱垂直于底面的棱锥;

推导过程: 第一步: 将 ABC 画在小圆面上, A 为小圆直径的一个端点, 作小圆的直径 AD , 连接 PD , 则 PD 必过球心 O ;

第二步: O_1 为 ABC 的外心, 所以 $OO_1 \perp$ 平面 ABC , 算出小圆 O_1 的半径 $O_1D = r$,

(三角形的外接圆直径算法: 利用正弦定

$$\text{理 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r) OO_1 = \frac{1}{2}PA;$$

第三步: 利用勾股定理求三棱锥的外接球

$$\text{半径: (1) } (2R)^2 = PA^2 + (2r)^2 \Leftrightarrow 2R =$$

$$\sqrt{PA^2 + (2r)^2}; (2) R^2 = r^2 + OO_1^2 \Leftrightarrow$$

$$R = \sqrt{r^2 + OO_1^2}.$$

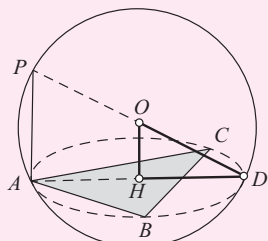


图 3.5

$$\text{【补充】 } R^2 = r^2 + \frac{h^2}{4}.$$

4. 切瓜模型(图 3.6)

适用范围: 有两个平面互相垂直的棱锥;

推导过程: 分别在两个互相垂直的平面上取外心 O_1, O_2 , 过两个外心作两个垂面的垂线, 两条垂线的交点即为球心 O , 取 BC 的中点为 E , 连接 OO_1, OO_2, O_2E, O_1E 为矩形, 由勾股定理可得 $|OC|^2 =$

$$|O_2C|^2 + |OO_2|^2 = |O_2C|^2 + |O_1C|^2 -$$

$$|CE|^2, \text{ 所以 } R^2 = r_1^2 + r_2^2 - \frac{l^2}{4}.$$

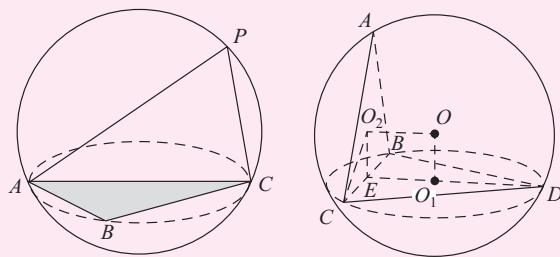


图 3.6

$$\text{【补充】 } R^2 = r_1^2 + r_2^2 - \frac{l^2}{4}.$$

5. 斗笠模型(图 3.7)

适用范围: 顶点的投影在底面的外心上的棱锥;

推导过程: 取底面的外心 O_1 , 连接顶点与外心, 该线为空间几何体的高 h , 在 h 上取一点作为球心 O , 根据勾股定理得 $R^2 =$

$$(h-R)^2 + r^2 \Leftrightarrow R = \frac{r^2 + h^2}{2h}.$$

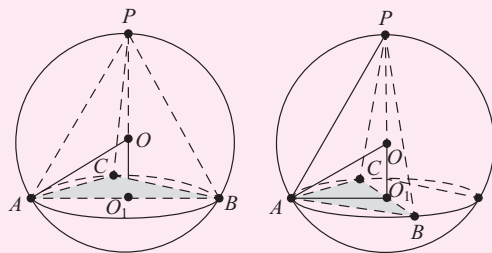


图 3.7

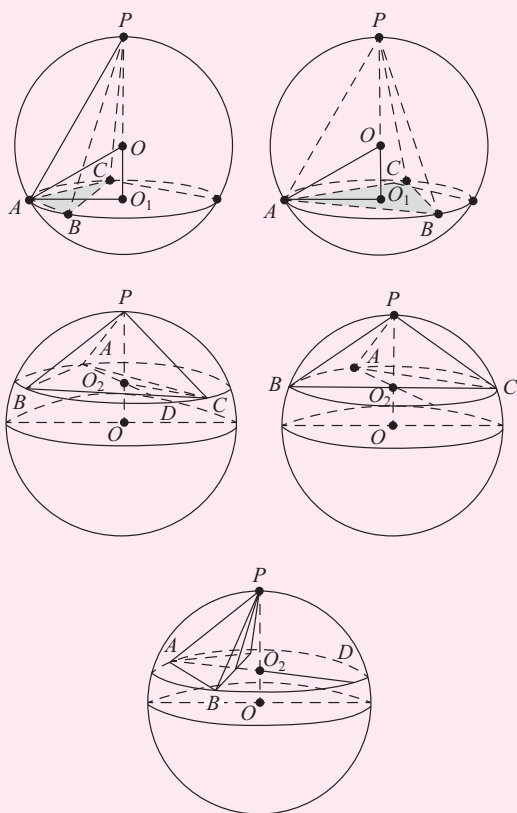


图 3.7(续)

【补充】 $R = \frac{r^2 + h^2}{2h}$ 。

6. 矩形模型(图 3.8)

适用范围：两个直角三角形的斜边为同一边，则该边为球的直径；

推导过程：图 3.8 中 $\text{Rt}\triangle PAB$ 和 $\text{Rt}\triangle QAB$ ，其中 $\angle APB = \angle AQB = 90^\circ$ ，求外接圆半径取斜边 AB 的中点 O ，连接 OP, OQ ，则 $OP = \frac{1}{2}AB = OA = OB = OQ$ ，所以 O 点即为球心，然后在 $\triangle POQ$ 中解出半径 R 。

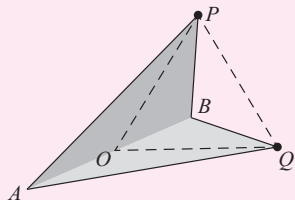


图 3.8

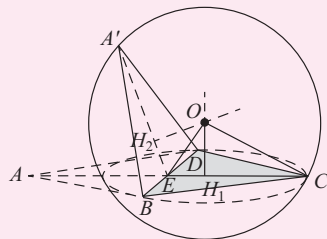
【补充】 $R^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2$ (l 为斜边长度)。

7. 折叠模型(图 3.9)

适用范围：两个全等三角形或等腰三角形拼在一起，或菱形折叠；

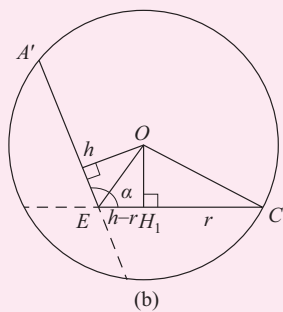
推导过程：两个全等的三角形或者等腰拼在一起，或者菱形折叠，设折叠的二面角 $\angle A'EC = \alpha$ ， $CE = A'E = h$ ，如图 3.9(a) 所示作其二面角剖面图如图 3.9(b) 所示， H_1 和 H_2 分别为 $\triangle BCD, \triangle A'BD$ 外心，分别过这两个外心作这两个平面的垂线且垂线相交于球心 O ， $CH_1 = r = \frac{BD}{2\sin\angle BCD}$ ，

$EH_1 = h - r$ ， $OH_1 = (h - r) \tan \frac{\alpha}{2}$ ，由勾股定理可得 $R^2 = OC^2 = OH_1^2 + CH_1^2 = r^2 + (h - r)^2 \tan^2 \frac{\alpha}{2}$ 。



(a)

作二面角剖面图



(b)

图 3.9

【补充】 $R^2 = r^2 + (h - r)^2 \tan^2 \frac{\alpha}{2}$ 。