高中数学精讲

（选择性必修二）

主编　朱华伟
编者　董正林　周峻民　林　健

清華大學出版社
北　京

内容简介

本书以最新的《高中数学课程标准》精神为指导，以学生数学认知能力为基础，以提升学生核心素养为宗旨，对标新高考，注重提升学生数学学习的质量，充分将新课标、新教材和新高考理念融入其中.

本书每章包括开头导言、内容提要、释疑解惑、精讲精练和参考答案五部分.开头导言，简明扼要地介绍该章的内容、方法和意义，并给出知识结构框图；内容提要，梳理基本概念、公式、定理，突出重点、难点和数学思想方法技巧；释疑解惑，解释学生学习过程中经常遇到的疑难问题，主要包括对概念、性质的解析，公式的理解和应用，定理的条件分析和使用，方法技巧的归纳总结，似是而非的论断的辨析等；精讲精练，精选具有典型性、新颖性、启迪性的例题，通过分析、求解和点评，介绍解题方法与技巧，并有针对性地配制相关性、发展性的练习；参考答案，给出所有练习题的详细解答，帮助读者自学以及自我评价. 此外，本书配套有《高中数学一课一练(选择性必修二)》(ISBN：9787302655954)，以强化巩固所学知识.

本书可供高中准备参加高考数学、大学自主招生的学生学习使用，也可供中学数学教师、数学爱好者、高等师范院校数学教育专业大学生、研究生及数学教师参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

高中数学精讲：选择性必修二 / 朱华伟主编. —北京：清华大学出版社，2024.3
ISBN 978-7-302-65594-7

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①朱… Ⅲ. ①中学数学课－高中－教学参考资料 Ⅳ. ①G634.603

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2024)第 021491 号

责任编辑：王　定
封面设计：周晓亮
版式设计：思创景点
责任校对：成凤进
责任印制：丛怀宇

出版发行：清华大学出版社
网　　址：https://www.tup.com.cn，https://www.wqxuetang.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-83470000　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：大厂回族自治县彩虹印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　　张**：14.5　　**字　　数**：325 千字
版　　次：2024 年 3 月第 1 版　　**印　　次**：2024 年 3 月第 1 次印刷
定　　价：59.80 元

产品编号：102848

前　言

课程是学校教育的载体,办好一所学校的落脚点在提升教育质量,提升教育质量的关键点在课程.我国实行的是国家、地方、学校三级课程管理体制,因此学校就有了一定的课程开发自主权,即校本课程.近年来,深圳中学竭尽所能创新开发、打磨完善了一系列高水平的校本课程,目前校本课程已开设有360余门,内容丰富、涵盖面广.同时,我一直鼓励并支持参与校本课程开发的教师,在经验成熟的基础上将教学实践成果化——编写校本教材.

校本课程基于学生差异因材施教,是适合本校学生的课程.20世纪90年代,中国人民大学附属中学、上海中学、华东师范大学二附中、武钢三中、黄冈中学等著名中学为学生开发和编写了具有相当难度和广度的数学学习资料,带动其在高考、竞赛等方面声名鹊起.近年来,深圳中学一直在学习、借鉴、吸取国内外著名中学课程建设的宝贵经验.在深圳中学,我一直倡导在国家数学课程的基础上,学生要学多点、学深点、学难点,要有更多、更好的适合深圳中学学生水平的数学校本课程,给每一位学生提供可充分发展的课程,科学合理地发展学生的智力.目前,深圳中学开设了数学分析、微积分、线性代数、解析几何与群论初步、射影几何、统计学、初等数论、离散数学、算法导论、博弈论、数理经济学原理、逻辑导论、AP微积分、AP统计学等大学先修课程,以及数学文化与数学史、数学思想方法、数学建模、数学问题选讲、数学竞赛、欧氏几何、强基计划数学等选修课;出版了《数学培优竞赛讲座》《数学培优竞赛一讲一练》丛书(三、四、五、六、七、八、九、高一、高二、高三年级,共20册,清华大学出版社).

我从2003年开始参加新课标湘教版高中数学教科书的研发工作,在这个过程中积极向张景中院士等前辈、老师学习,得到了很好的锻炼和提高,后来担任湘教版高中数学教科书的副主编,同时我个人也出版了一些高考备考、数学培优和数学竞赛方面的书籍,对新课标、新教材、新高考有较深入的学习和理解.因此,在深圳中学工作的数年来,我一直希望能够有机会借助自己多年积累的经验,带头开发一套适合所有深圳中学学生的数学校本教材.

众所周知,2022年全国高考数学创下了近些年的难度新高,以此为契机,我决定将这个酝酿多年的想法付诸实施.在2022年高考数学结束后的第二天,我组织深圳中学数学组十余位高三一线教师和骨干教师召开研讨会议,动员大家集思广益、群策群力,编写一套贴合新课标、适应新高考、匹配深圳中学学生水平的深圳中学数学校本教材,于是《高中数学精讲》《高中数学一课一练》丛书应运而生.如今呈现在各位读者面前的这套丛书,凝结了深圳中学数学教师多年来的教学经验、教育智慧和辛勤付出.

在本丛书的撰写过程中,我们以最新的《高中数学课程标准》精神为指导,以高中生数学认知能力为基础,以最新的《高中数学课程标准》知识脉络为主线,以提高学生核心素养为宗旨,对标新高考,注重提升学生数学学习的质量,充分将新课标、新教材和新高考理念融入其中.

《高中数学精讲》涵盖高中数学课程和新高考数学的所有内容,难度不超过高考数学,按章、节编写,每章开头简明扼要地介绍该章的内容、方法和意义,给出该章的知识结构框图,方便学生形成自己的知识结构.每节包括如下三个栏目.

内容提要:梳理每节中的基本概念、公式、定理,突出重点、难点和数学思想方法技巧,提供一个知识网络,授人以渔.

释疑解惑:通过精心设置的一系列问题与解答,解释学生数学学习过程中经常遇到的疑难问题,主要包括对概念、性质的解析,公式的理解和应用,定理的条件分析和使用要领,方法技巧的归纳总结,对某些似是而非的论断的辨析等,授业解惑.

典型例题:每节精讲具有典型性、新颖性、启迪性的例题,覆盖该节的知识方法技巧,遵循可接受性原则,按由浅入深、从易到难排序,通过分析、求解和点评,介绍与该例题有关的解题方法与技巧,帮助学生归纳解题规律,提高解题能力;每道例题后配有相关性、发展性的练习,帮助学生熟练演算技巧,巩固、拓展、深化对知识的理解和认知,培养分析问题、解决问题的能力,举一反三.

在书的后半部分,我们提供了所有练习题的详细解答,帮助学生自学及自我评价.

与《高中数学精讲》配套使用的是《高中数学一课一练》.

《高中数学一课一练》按章、节编写,涵盖新高考所有知识点,并增加多选题型.每节与《高中数学精讲》对应,精选习题循序渐进、拾级而上,遵循因材施教原则,习题设置兼顾多个层次的学习需求,分为A,B,C三层,适合分层教学,学生在实际使用中可以按需取舍.例如,数学基础较好的学生,可以在完成A组和B组习题的基础上努力尝试完成C组习题;数学基础较弱的学生,可以在完成A组习题的前提下努力尝试完成B组习题.书后附有所有习题的详细解答,《高中数学一课一练》与《高中数学精讲》配套使用,能更好地达到预期的学习效果.

本丛书包括《高中数学精讲》《高中数学一课一练》(必修一、必修二、选择性必修一、选择性必修二),共8册.

本丛书的编委会由深圳中学数学组的优秀中青年教师组成,他们是:洪建明、曾劲松、张红兵、董正林、黄文辉、张文涛、周峻民、许苏华、罗承成、邱际春、赵志伟、林健.在本丛书的编写过程中,我们力求精益求精,但其中难免存在一些疏漏与不足之处,敬请广大读者给予批评指正.

希望更多的同学喜欢数学,取得自己理想的成绩!

朱华伟

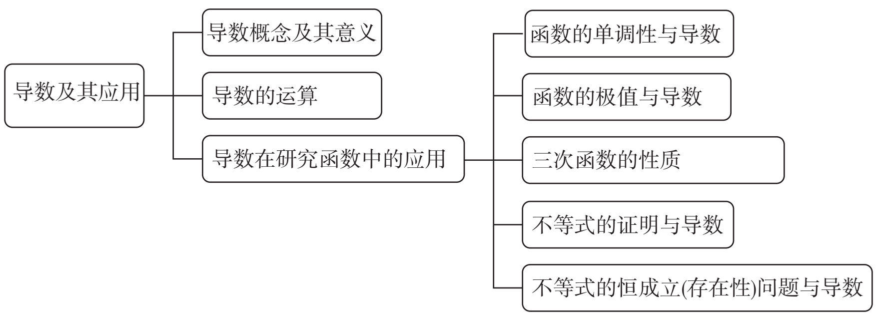
2023年6月

目　　录

第1章　导数及其应用

本章内容包括三个部分：导数概念及其意义，导数的运算法则，导数在函数中的应用. 第一部分主要内容包括：平均变化率，瞬时变化率，导数的几何意义（切线的斜率）；第二部分主要内容包括：基本初等函数的导函数，导数的四则运算法则，复合函数的导数；第三部分主要内容包括：函数的单调性与导数，函数的极值与导数，三次函数的性质，不等式的证明与导数，不等式的恒成立（存在性）问题与导数.

本章知识结构框图如下.



1.1　导数的概念及其意义

一、内容提要

1. 函数的平均变化率

一般地，对于函数 $y=f(x)$，我们把 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内的平均变化率. 这一概念的物理背景可以理解为平均速度——某运动物体的位移函数为 $s=f(t)$，则在时间段 $[a,b]$ 内的平均速度为 $\bar{v}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. 这一概念的几何意义可以理解为曲线的割线的斜率——设 $A(a,f(a))$，$B(b,f(b))$ 为曲线 $y=f(x)$ 上的两点，则直线 AB 的斜率为 $k_{AB}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

2. 瞬时变化率与导数

一般地，若函数 $y=f(x)$ 的平均变化率 $\dfrac{f(u+d)-f(u)}{d}$ 在 d 趋近于 0 时有确定的极限

值,则称这个值为函数 $f(x)$在 $x=u$ 处的瞬时变化率.

物理上,运动物体的位移函数 $s(t)$关于 t 的瞬时变化率就是物体运动的瞬时速度;运动物体的(瞬时)速度函数 $v(t)$关于 t 的瞬时变化率就是物体运动的加速度.

函数的瞬时变化率,数学上就叫作函数的导数(或微商).

设函数 $f(x)$在包含 x_0 的某个区间上有定义,在 d 趋近于 0 时,若比值 $\dfrac{f(x_0+d)-f(x_0)}{d}$趋近于一个确定的极限值,则称此极限值为函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处的导数,记作 $f'(x_0)$. 即 $f'(x_0)=\lim\limits_{d\to 0}\dfrac{f(x_0+d)-f(x_0)}{d}$.

3. 导数的几何意义

函数 $f(x)$在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$等于曲线 $y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线的斜率.

二、释疑解惑

【问题 1-1】根据定义可知,函数 $y=f(x)$在一个闭区间内的平均变化率总是存在的,但对于定义域内的任意一点,是否都存在导数(瞬时变化率)?

答:不一定. 函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处是否存在导数,取决于它的平均变化率 $\dfrac{f(x_0+d)-f(x_0)}{d}$在 d 趋近于 0 时是否为一个确定的极限值. 比如,$f(x)=x^{\frac{1}{3}}$在 $x=0$ 处的导数是不存在的.

【问题 1-2】如何理解导数概念中的“d 趋近于 0”?

答:d 不能简单理解为区间的长度. 在导数定义的表达式中,d 可以为正,也可以为负,但不能为 0.“d 趋近于 0”实际上包含了 d 从“大于 0”和“小于 0”两个方向趋近于 0,且要求从这两个方向趋近于 0 时极限值相等. 比如,$f(x)=|x|$在 $x=0$ 处的导数就不存在.

【问题 1-3】函数 $y=f(x)$“在某一点处的导数”与函数 $y=f(x)$的“导函数”有什么区别和联系?

答:若 $y=f(x)$在定义域内任意一点 x 处的导数都存在,则其导数值 $f'(x)$也是自变量 x 的函数,我们把 $f'(x)$叫作 $y=f(x)$的导函数.

同理,如果 $f'(x)$在定义域内任意一点 x 处的导数都存在,则其导数叫作 $f(x)$的二阶导数,记作 $f''(x)$. 类似地,可以定义三阶导数 $f'''(x)$等.

【问题 1-4】曲线 $y=f(x)$“在点 $P(x_0,f(x_0))$处的切线”与“过点 $P(x_0,f(x_0))$的切线”有什么不同?

答:“曲线 $y=f(x)$在点 $P(x_0,f(x_0))$处的切线”是指点 P 为切点,此时切线的斜率 $k=f'(x_0)$.“曲线 $y=f(x)$过点 $P(x_0,f(x_0))$的切线”是指点 P 可能为切点,也可能不为切点.

三、典型例题

【例 1-1】设函数 $f(x)=x$,$g(x)=\sqrt{x}$,$h(x)=x^3$,当自变量 x 从 0 变到 1 时,它们的平

均变化率分别记为 m_1, m_2, m_3，则 m_1, m_2, m_3 之间的大小关系为________（用“$>$”“$<$”“$=$”连接）；三个函数中，在 $x=1$ 处的瞬时变化率最大的是________.

分析 根据平均变化率和瞬时变化率的概念，逐一进行计算和比较即可.

【答案】 $m_1=m_2=m_3$；$h(x)$.

【解析】（1）由题意，$m_1=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=1$，$m_2=\dfrac{g(1)-g(0)}{1-0}=1$，$m_3=\dfrac{h(1)-h(0)}{1-0}=1$，

故 $m_1=m_2=m_3$.

（2）由题意，$f'(1)=\lim\limits_{d\to 0}\dfrac{f(1+d)-f(1)}{d}=\lim\limits_{d\to 0}\dfrac{(1+d)-1}{d}=1$.

$$g'(1)=\lim_{d\to 0}\frac{g(1+d)-g(1)}{d}=\lim_{d\to 0}\frac{\sqrt{1+d}-1}{d}=\lim_{d\to 0}\frac{(\sqrt{1+d}-1)(\sqrt{1+d}+1)}{d(\sqrt{1+d}+1)}$$

$$=\lim_{d\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+d}+1}=\frac{1}{2}.$$

$$h'(1)=\lim_{d\to 0}\frac{h(1+d)-h(1)}{d}=\lim_{d\to 0}\frac{(1+d)^3-1}{d}=\lim_{d\to 0}(d^2+3d+3)=3.$$

故三个函数中，在 $x=1$ 处的瞬时变化率最大的是 $h(x)$.

点评 在计算函数在某点处的导数（瞬时变化率）时，要注意对平均变化率的表达式进行适当的代数变形，以方便确定 $d\to 0$ 时的极限值. 比如，在例 1-1 中，计算 $g'(1)$ 时，使用了分子有理化的化简手段.

【练习 1-1】 如图 1-1 所示，向一个圆台形的容器匀速倒水（即任意相等时间间隔内所倒的水体积相等）. 记容器内水面的高度 h 随时间 t 变化的函数为 $h=f(t)$，定义域为 D，设 $t_0\in D$，k_1，k_2 分别表示 $f(t)$ 在区间 $[t_0-\Delta t, t_0]$，$[t_0, t_0+\Delta t]$（$\Delta t>0$）上的平均变化率，则（　　）.

A. $k_1>k_2$　　B. $k_1<k_2$　　C. $k_1=k_2$　　D. 无法确定

【练习 1-2】 降低室内微生物密度的有效方法是定时给室内注入新鲜空气，即开窗通风换气. 在某室内，空气中微生物密度（c）随开窗通风换气时间（t）的关系如图 1-2 所示，则下列时间段内，空气中微生物密度变化的平均速度最快的是（　　）.

A. $[5,10]$　　B. $[5,15]$　　C. $[5,20]$　　D. $[5,35]$

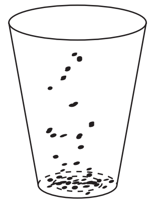


图 1-1

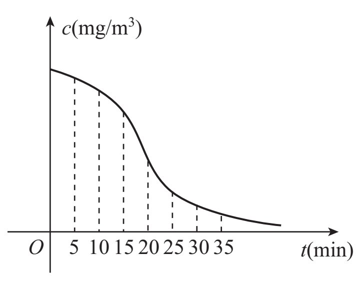


图 1-2

【例 1-2】已知 $f(x)$ 为可导函数，且 $f'(2)=4$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2-h)-f(2+h)}{h}=$________.

分析 解题的关键在于对平均变化率的理解——函数值的变化 $f(b)-f(a)$ 除以相应的自变量的变化 $b-a$. 此例中，函数值的变化 $f(2-h)-f(2+h)$ 对应的自变量的变化为 $(2-h)-(2+h)=-2h$.

【答案】-8.

【解析】方法 1：

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2+h)}{h}=-2\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2+h)}{-2h}=-2f'(2)=-2\times 4=-8.$$

方法 2：

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2+h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(2)-f(2+h)}{h}$$
$$=-\left[\lim_{h\to 0}\frac{f(2)-f(2-h)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\right]$$
$$=-2f'(2)=-2\times 4=-8.$$

点评 此处用到极限的两个运算法则.

若 $\lim\limits_{d\to 0}f(x)$，$\lim\limits_{d\to 0}g(x)$ 存在，则

① $\lim\limits_{d\to 0}(cf(x))=c\lim\limits_{d\to 0}f(x)$，其中 c 为常数；

② $\lim\limits_{d\to 0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{d\to 0}f(x)\pm\lim\limits_{d\to 0}g(x)$.

对此，同学们简单了解即可.

【练习 1-3】已知函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数为 $f'(x_0)$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$(　　).

A. $2f'(x_0)$　　B. $-2f'(x_0)$　　C. $-\dfrac{1}{2}f'(x_0)$　　D. $\dfrac{1}{2}f'(x_0)$

【练习 1-4】已知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处可导，若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(2)-f(2+\Delta x)}{\Delta x}=\dfrac{1}{2}$，则 $f'(2)=$(　　).

A. 0　　B. 2　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $-\dfrac{1}{2}$

【例 1-3】如图 1-3 所示，现有一倒放圆锥形容器，该容器深 24 m，底面直径为 6 m，水以 $5\pi\ \mathrm{m^3/s}$ 的速度流入，则当水流入时间为 1s 时，水面上升的速度为________ m/s.

分析 先建立起水面高度 h 与水流入时间 t 的函数关系式，然后再研究函数 $h(t)$ 在 $t=1$ 时的瞬时变化率.

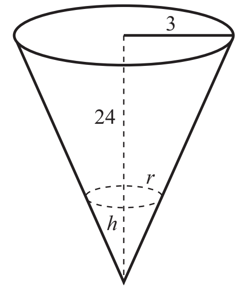


图 1-3

【答案】$\dfrac{4\sqrt[3]{15}}{3}$.

【解析】设注入水后水面高度为 h，水面所在圆的半径为 r，

易知 $\dfrac{h}{24}=\dfrac{r}{3}$，即 $r=\dfrac{h}{8}$.

由水的体积关系可得$\frac{1}{3}\pi r^2 h=v_{水流}\cdot t=5\pi\cdot t$，即 $h=4\sqrt[3]{15t}$.

设 $h(t)=4\sqrt[3]{15t}$，

则 $h'(1)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{h(1+\Delta t)-h(1)}{\Delta t}$

$$=4\sqrt[3]{15}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\Delta t}-1}{\Delta t}$$

$$=4\sqrt[3]{15}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{(\sqrt[3]{1+\Delta t})^2+\sqrt[3]{1+\Delta t}+1}$$

$$=\frac{4\sqrt[3]{15}}{3}.$$

点评 与例 1-1 类似，例 1-2 在计算 $h'(1)$ 时用到了分子有理化的变形手段（立方差公式）. 在后面学习了常见函数的求导公式后，此题导数的计算有更快捷的方法.

【练习 1-5】中国跳水队是中国体育奥运冠军团队. 自 1984 年以来，中国跳水队已经累计为我国赢得了四十多枚奥运金牌. 在一次高台跳水比赛中，若某运动员在跳水过程中重心相对于水面的高度 h（单位：m）与起跳后的时间 t（单位：s）存在函数关系 $h(t)=10-5t^2+5t$，则该运动员在起跳后 1 s 时的瞬时速度为（　　）.

A. 10 m/s　　B. -10 m/s　　C. 5 m/s　　D. -5 m/s

【练习 1-6】某铁球在 0 ℃时，半径为 1 dm. 当温度在很小的范围内变化时，由于热胀冷缩，铁球的半径会发生变化，且当温度为 t ℃时，铁球的半径为 $(1+at)$ dm，其中 a 为常数，则在 $t=0$ 时，铁球体积对温度的瞬时变化率为（　　）.

A. 0　　B. πa　　C. $\frac{4}{3}\pi a$　　D. $4\pi a$

【例 1-4】函数 $f(x)=\frac{1}{x}+2x$ 的图像在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为________.

分析 根据定义，计算出 $f'(1)$. 也就知道了切线的斜率，然后用点斜式方程写出切线方程即可.

【答案】$y=x+2$.

【解析】$f'(1)=\lim\limits_{d\to 0}\frac{f(1+d)-f(1)}{d}=\lim\limits_{d\to 0}\frac{\frac{1}{1+d}+2(1+d)-3}{d}=\lim\limits_{d\to 0}\left(2-\frac{1}{1+d}\right)=1$，

即函数 $f(x)=\frac{1}{x}+2x$ 在点 $(1,f(1))$ 处切线的斜率为 1.

故切线方程为 $y-f(1)=f'(1)(x-1)$，即 $y=x+2$.

点评 关键在于理解导数的几何意义：函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ 等于曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率.

【练习 1-7】若曲线 $y=x^2$ 在点 P 处的切线斜率为 1,则点 P 的坐标为________.

【练习 1-8】在微积分中“以直代曲”是最基本,最朴素的思想方法.中国古代科学家刘徽创立的“割圆术”,用圆的外切正 n 边形和内接正 n 边形“内外夹逼”的办法求出了圆周率 π 的精度较高的近似值,事实上就是用“以直代曲”的思想进行近似计算的,它是我国最优秀的传统科学文化之一.借用“以直代曲”的方法,在切点附近、可以用函数图像的切线代替在切点附近的曲线来“近似计算”,则用函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$“近似计算”$\sqrt[2022]{\mathrm{e}}$ 的值为________(已知 $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$,且结果用分数表示).

1.2　导数的运算

一、内容提要

1．常见幂函数的导数

(1) 常数函数的导数为 0，即 $c'=0$；(2) $x'=1$；(3) $(x^2)'=2x$；

(4) $(x^3)'=3x^2$；(5) $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$；(6) $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

2．一些基本初等函数的导数

(1) $c'=0$；(2) $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}(\alpha\neq 0)$；

(3) $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$；(4) $(a^x)'=a^x\ln a(a>0,a\neq 1)$；

(5) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$；(6) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}(a>0,a\neq 1)$；

(7) $(\sin x)'=\cos x$；(8) $(\cos x)'=-\sin x$；(9) $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

3．函数的和差积商求导法则

(1) $(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$；

(2) $(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$，特别地，若 c 为常数，则有 $(cf(x))'=cf'(x)$；

(3) $\left(\dfrac{g(x)}{f(x)}\right)'=\dfrac{f(x)g'(x)-f'(x)g(x)}{(f(x))^2}$.

4．简单复合函数的求导

对于函数 $y=F(x)=f(g(x))$，可设 $u=g(x)$，则 $y=f(u)$，即函数 $y=F(x)=f(g(x))$ 为函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的复合函数，则 $F'(x)=f'(u)\cdot g'(x)$.

二、释疑解惑

【问题 1-5】两函数的积的求导公式是如何推导的？

答：在用定义推导两函数的积 $f(x)g(x)$ 的导数时，有一个重要的变形——将 $f(x+d)g(x+d)-f(x)g(x)$ 变为 $f(x+d)g(x+d)-f(x+d)g(x)+f(x+d)g(x)-f(x)g(x)$.

为何要这样添项？我们可以这样思考：$(f(x)g(x))'$ 应该与 $f'(x)$，$g'(x)$ 有一些联系，故应将 $f(x+d)g(x+d)-f(x)g(x)$ 变形出 $f(x+d)-f(x)$，$g(x+d)-g(x)$ 的结构来，这就有了上述添项、分组分解的操作.

【问题 1-6】两函数的商的求导公式是如何推导的，蕴含了什么样的数学思想？

答：在推导两函数的商 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 的求导公式时，首先利用导数定义推导了 $\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)'=$

$\dfrac{-f'(x)}{(f(x))^2}$,然后将$\dfrac{g(x)}{f(x)}$变形为 $g(x)\cdot\dfrac{1}{f(x)}$,再运用两个函数的积的求导法则即可.这个过程蕴含了化归转化的数学思想.

【问题 1-7】如何求一个复合函数的导数?

答:第一步,引入中间变量 u,将复合函数进行拆解:$u=g(x)$,$y=f(u)$;

第二步,分别求导:u'_x,y'_u;

第三步,将 u'_x 和 y'_u 相乘,并注意将乘式中的变量 u 还原成关于 x 的表达式,从而得到最终结果.

三、典型例题

【例 1-5】计算下列函数的导函数.

(1) $f(x)=(x^2+2x)\sqrt{x}$;　　(2) $f(x)=\dfrac{e^{1-x}}{x^2}$;

(3) $f(x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-2x\right)$;　　(4) $f(x)=\ln\sqrt{1+x^2}$.

分析 根据函数的和差积商求导法则以及复合函数的求导法则直接运算即可.

【解析】(1) 方法 1:$f'(x)=(2x+2)\sqrt{x}+(x^2+2x)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{5}{2}x\sqrt{x}+3\sqrt{x}$.

方法 2:$f(x)=x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}$,则 $f'(x)=\dfrac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}$.

(2) $f(x)=\dfrac{(e^{1-x})'x^2-e^{1-x}(x^2)'}{x^4}=\dfrac{-e^{1-x}x^2-e^{1-x}\cdot 2x}{x^4}=-\dfrac{x+2}{x^3}e^{1-x}$.

(3) 方法 1:令 $u=\dfrac{\pi}{4}-2x$,则 $y=\sin u$.

因为 $u_x=-2$,$y_u=\cos u$,故 $f'(x)=-2\cos\mu=-2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-2x\right)$.

方法 2:$f(x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-2x\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2x-\sin 2x)$,

故 $f'(x)=\sqrt{2}(-\sin 2x-\cos 2x)=-\sqrt{2}(\sin 2x+\cos 2x)$.

(4) 方法 1:令 $u=\sqrt{1+x^2}$,则 $y=\ln u$.

因为 $u_x=\dfrac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\times 2x=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,$y_u=\dfrac{1}{u}$,故 $f'(x)=\dfrac{1}{u}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{x}{1+x^2}$.

方法 2:$f(x)=\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$. 令 $u=1+x^2$,$y=\dfrac{1}{2}\ln u$.

因为 $u_x=2x$,$y_u=\dfrac{1}{2u}$,所以 $f'(x)=\dfrac{1}{2u}\cdot 2x=\dfrac{x}{1+x^2}$.

点评 正确求出给定函数的导函数是我们进行后继学习的基础.计算时,要牢记基本初等

函数的导函数，要熟悉基本的导数运算法则．有时候先对函数的形式进行适当的化简变形，可以更为快捷准确地进行求导（比如(1)和(4)）．

(2)(3)(4)均涉及复合函数求导法则，注意做好分拆求导和变量还原这两步．尤其要注意 $y=e^{1-x}$ 的导函数为 $y'=-e^{1-x}$．

【练习 1-9】（多选题）已知函数 $f(x)$在 $x=1$ 处的导数为$-\frac{1}{2}$，则 $f(x)$的解析式可能为（　　）．

A. $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\ln x$　　B. $f(x)=xe^x$

C. $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$　　D. $f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{x}$

【练习 1-10】（多选题）下列结论中正确的有（　　）．

A. 若函数 $f(x)=x\sin x+\cos 2x$，则 $f'(x)=\sin x-x\cos x+2\sin 2x$

B. 若函数 $f(x)=x\ln(1-x)$，则 $f'(x)=\ln(1-x)+\frac{x}{x-1}$

C. 若函数 $f(x)=x\sqrt{x}$，则 $f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

D. 若函数 $f(x)=\log_a\left(\frac{x-1}{x+1}\right)(a>0,a\neq 1)$，则 $f'(x)=\frac{2}{(x^2-1)\ln a}$

【例 1-6】已知 $f(x)=\frac{f'(1)}{e}e^x-f(0)x+\frac{1}{2}x^2$，则 $f(1)=$________．

分析 直接对 $f(x)$进行求导运算即可，但需要注意对 $f'(1)$和 $f(0)$的处理．

【答案】$e-\frac{1}{2}$．

【解析】由题意，$f(0)=\frac{f'(1)}{e}$，故 $f(x)=\frac{f'(1)}{e}(e^x-x)+\frac{1}{2}x^2$．

所以 $f'(x)=\frac{f'(1)}{e}(e^x-1)+x$．

令 $x=1$，则 $f'(1)=\frac{f'(1)}{e}(e-1)+1$，解得 $f'(1)=e$．

所以 $f(x)=e^x-x+\frac{1}{2}x^2$，所以 $f(1)=e-\frac{1}{2}$．

点评 解题的关键在于求导时要理解 $f'(1)$和 $f(0)$均为常数，然后再对导函数的表达式进行赋值．

【练习 1-11】已知 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+2xf'(1)$，则 $f'(1)=$________．

【练习 1-12】设点 P 是函数 $f(x)=2e^x-f'(0)x+1$ 图像上的任意一点，点 P 处切线的

倾斜角为 α,则角 α 的取值范围是(　　).

A. $\left[0,\dfrac{3\pi}{4}\right)$　　　　B. $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3\pi}{4},\pi\right)$

C. $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}\right)$　　　　D. $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left[\dfrac{3\pi}{4},\pi\right]$

【例 1-7】若函数 $f(x)=(x-3)(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)$,则 $f'(1)=$________;曲线 $y=\dfrac{f(x)}{x^2+\ln x-3}+4\ln(3x-2)$ 在点(1,0)处的切线方程为________.

分析 $f(x)$的解析式中含有多个因式,但我们只学习了 $F(x)\cdot G(x)$ 型的求导法则,故在计算 $f'(1)$时,可将表达式视为 $f(x)=(x-1)g(x)$,其中 $g(x)=(x-3)(x-2)x(x+1)(x+2)$,从而转化为两个函数乘积的求导运算.

【答案】12;$y=6(x-1)$.

【解析】令 $g(x)=(x-3)(x-2)x(x+1)(x+2)$,则 $f(x)=(x-1)g(x)$.

所以 $f'(x)=g(x)+(x-1)g'(x)$,所以 $f'(1)=g(1)=12$.

又 $y'=\dfrac{f'(x)(x^2+\ln x-3)-f(x)(x^2+\ln x-3)'}{(x^2+\ln x-3)^2}+\dfrac{3}{3x-2}\times 4$

$$=\frac{f'(x)(x^2+\ln x-3)-f(x)\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)}{(x^2+\ln x-3)^2}+\frac{12}{3x-2},$$

所以 $y'|_{x=1}=\dfrac{12\times(-2)-0\times 3}{4}+12=6$,即切线的斜率为 $k=6$.

所以曲线在点(1,0)处的切线方程为 $y=6(x-1)$.

点评 例 1-7 中,我们用到了重要的数学思想方法——化归转化,将含有多个因式乘积的函数的计算转化为两个函数乘积的求导运算.同学们可以类比计算 $f'(0)$.当然,因为 0,1 等都是 $f(x)$的零点,所以例题中所用的方法是很快捷的.但如果是计算 $f'(4)$等非零点处的导数值,那么将 $f(x)$直接化简为多项式函数再求导可能更为快捷.

【练习 1-13】定义在 **R** 上的函数 $f(x)$满足 $f(x)+f(2-x)=2022$,$f(x)$的导函数为 $f'(x)$,则 $f'(-2020)-f'(2022)=$________.

【练习 1-14】在人工智能领域,神经网络是一个比较热门的话题.由神经网络发展而来的深度学习正在飞速改变着我们身边的世界.从 AlphaGo 到自动驾驶汽车,这些大家耳熟能详的例子,都是以神经网络作为其理论基础的.在神经网络中,有一类很重要的函数称为激活函数,Sigmoid 函数 $\sigma(x)$即神经网络中最有名的激活函数之一,其解析式为:$\sigma(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$.下列关于 Sigmoid 函数的表述正确的是________.

① Sigmoid 函数是单调递增函数;

② Sigmoid 函数的图像是一个中心对称图形,对称中心为$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$;

③ Sigmoid 函数的导数满足：$\sigma'(x)=\sigma(x)(1-\sigma(x))$.

【例 1-8】 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f'(x)+f(x)=2x\mathrm{e}^{-x}$，若 $f(0)=1$，则函数 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ 的取值范围为________.

分析 根据表达式的结构，构造函数 $g(x)=\mathrm{e}^x f(x)$. 结合 $f(0)=1$，可以求出 $f(x)$ 的解析式，从而完成解题.

【答案】 $[-2,0]$.

【解析】 由 $f'(x)+f(x)=2x\mathrm{e}^{-x}$，得 $\mathrm{e}^x f'(x)+\mathrm{e}^x f(x)=2x$，所以 $[\mathrm{e}^x f(x)]'=2x$.

设 $\mathrm{e}^x f(x)=x^2+c$，由于 $f(0)=1$，因而 $c=1$.

所以 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{\mathrm{e}^x}$，$f'(x)=\dfrac{2x\mathrm{e}^x-(x^2+1)\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}=-\dfrac{(x-1)^2}{\mathrm{e}^x}$，

所以 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=-\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}=-1+\dfrac{2x}{x^2+1}$.

当 $x=0$ 时，$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=-1$；

当 $x\neq 0$ 时，$\dfrac{2x}{x^2+1}=\dfrac{2}{x+\dfrac{1}{x}}\in[-1,0)\cup(0,1]$，当 $x=-1$ 时取得最小值，当 $x=1$ 时取得最大值，故 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ 的取值范围为 $[-2,0]$.

点评 例 1-8 的关键是构造——根据表达式的结构，结合导数的四则运算法则，得到 $[\mathrm{e}^x f(x)]'=2x$. 构造的关键在于熟悉导数运算法则和基本初等函数的导数. 常见题设条件下可能的构造如下.

① 已知 $f'(x)=k(k\neq 0)$，可构造函数 $g(x)=f(x)-kx+b$；

② 已知 $xf'(x)+f(x)=0$，可构造函数 $g(x)=xf(x)+C$（C 为常数）；

③ 已知 $xf'(x)-f(x)=0$，可构造函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}+C$（$x\neq 0$，C 为常数）；

④ 已知 $xf'(x)+nf(x)=0$，可构造函数 $g(x)=x^n f(x)+C$（C 为常数）；

⑤ 已知 $xf'(x)-nf(x)=0$，可构造函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^n}+C$（$x\neq 0$，C 为常数）；

⑥ 已知 $f'(x)+f(x)=0$，可构造函数 $g(x)=\mathrm{e}^x f(x)+C$（C 为常数）；

⑦ 已知 $f'(x)-f(x)=0$，可构造函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^x}+C$（$C$ 为常数）；

⑧ 已知 $f'(x)+kf(x)=0$，可构造函数 $g(x)=\mathrm{e}^{kx}f(x)+C$（$C$ 为常数）.

⑨ 已知 $f(x)+f'(x)\tan x=0$，可构造函数 $g(x)=f(x)\sin x+C$（C 为常数）；

⑩ 已知 $f'(x)-f(x)\tan x=0$，可构造函数 $g(x)=f(x)\cos x+C$（C 为常数）.

【练习 1-15】 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，其导函数为 $f'(x)$. 若 $2f(x)=$

$xf'(x)$,且 $f(1)=2$,则 $f(x)=$________.

【练习 1-16】设函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$,若 $f(0)=1$,且 $3f(x)=f'(x)-3$,则 $4f(x)>f'(x)$ 的解集是(　　).

A. $\left(\frac{\ln 4}{3},+\infty\right)$　　B. $\left(\frac{\ln 2}{3},+\infty\right)$

C. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},+\infty\right)$　　D. $\left(\frac{\sqrt{e}}{3},+\infty\right)$

1.3　导数在研究函数中的应用

1.3.1　函数的单调性与导数

一、内容提要

函数的单调性与其导数的正负之间的关系

若在区间(a,b)内，$f'(x)>0$，则函数 $f(x)$在此区间内单调递增；

若在区间(a,b)内，$f'(x)<0$，则函数 $f(x)$在此区间内单调递减；

若在区间(a,b)内，$f'(x)\equiv 0$，则函数 $f(x)$在此区间内为常数函数.

二、释疑解惑

【问题 1-8】如何利用导数工具确定函数 $f(x)$的单调区间？

答：第一步：确定 $f(x)$的定义域 D；

第二步：计算 $f(x)$的导函数 $f'(x)$；

第三步：解不等式——将 $f'(x)>0$ 的解集与定义域 D 求交集，即得 $f(x)$的单调递增区间，将 $f'(x)<0$ 的解集与定义域 D 求交集，即得 $f(x)$的单调递减区间.

【问题 1-9】“在区间(a,b)内，$f'(x)>0$”是“函数 $f(x)$在(a,b)内单调递增”的充分不必要条件还是充要条件？

答：“在区间(a,b)内，$f'(x)>0$”是“函数 $f(x)$在(a,b)内单调递增”的充分不必要条件. 必要性不成立的一个直接的例证就是 $f(x)=x^3$. 它在整个定义域 $\mathbf{R}$ 上单调递增，但在 $\mathbf{R}$ 上，$f'(x)\geqslant 0$.

同理，“在区间(a,b)内，$f'(x)<0$”是“函数 $f(x)$在(a,b)内单调递减”的充分不必要条件.

那么，“在区间(a,b)内，$f'(x)\geqslant 0$”是“函数 $f(x)$在(a,b)内单调递增”的什么条件？

若函数 $f(x)$在(a,b)内单调递增，则在区间(a,b)内，$f'(x)\geqslant 0$，比如 $y=x^3$. 但在区间(a,b)内，$f'(x)\geqslant 0$，并不确保函数 $f(x)$在(a,b)内单调递增，比如常数函数. 故“在区间(a,b)内，$f'(x)\geqslant 0$”是“函数 $f(x)$在(a,b)内单调递增”的必要不充分条件.

三、典型例题

【例 1-9】(1) 函数 $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}\mathrm{e}^{-4x}$ 的单调递增区间为________.

(2) 已知函数 $f(x)$的定义域为$[-1,5]$，部分对应值如下.

x	-1	0	4	5
$f(x)$	1	2	2	1

$f(x)$的导函数 $y=f'(x)$的图像如图 1-4 所示.下列关于 $f(x)$的命题:

① 函数 $f(x)$是周期函数;

② 函数 $f(x)$在$[0,2]$上是减函数;

③ 如果当 $x\in[-1,t]$时,$f(x)$的最大值是 2,那么 t 的最大值为 4;

④ 函数 $y=f(x)-a$ 的零点个数可能为 0,1,2,3,4 个.

其中正确命题的序号是________.

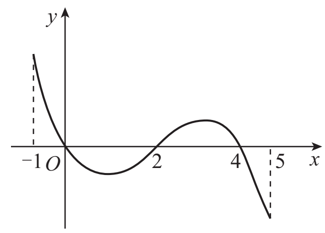


图 1-4

分析 (1) 准确计算 $f'(x)$,然后解不等式 $f'(x)>0$ 即可,但要注意定义域;

(2) 根据导函数图像,确定 $f'(x)$何时为正,何时为负,从而找到函数 $f(x)$的单调区间.再根据列表中给出的特殊点的函数值(注意 $f(2)$的值不确定),绘制出函数 $f(x)$的大致图像(如图 1-5 所示),从而逐一判断各命题的正误.

【答案】(1) $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right),(1,+\infty)$;(2) ②④.

【解析】(1) $f'(x)=\frac{2(2x^2-1)}{(1-x)^2}e^{-4x}(x\neq1)$. $f'(x)>0\to 2x^2-1>0$ 且 $x\neq1$.

解得 $x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$或 $x>\frac{\sqrt{2}}{2}$且 $x\neq1$.

故函数 $f(x)$的单调递增区间为$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right),(1,+\infty)$.

(2) ①显然为假命题;②为真命题.因为在$[0,2]$上导函数$\leqslant0$,所以原函数单调递减;

③为假命题.当 $t=5$,也满足 $x\in[-1,t]$时,$f(x)$的最大值是 2;

④为真命题.当 $a>2$ 时,有 0 个零点;当 $a=2$ 时,有 2 个零点;当 $a=f(2)<1$ 时,有 1 个零点;当 $1<a=f(2)<2$ 时,有 3 个零点;当 $f(2)<a<2$ 时,有 4 个零点.

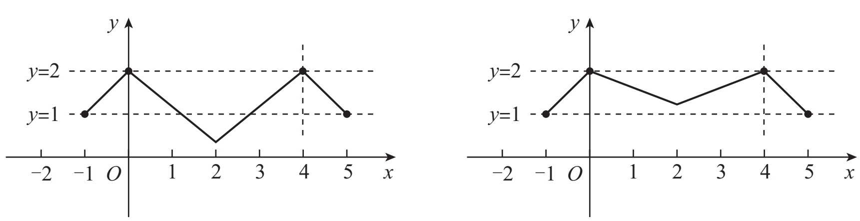


图 1-5

点评 (1)在求解函数的单调区间时,要注意两个细节:①单调区间是定义域的子区间,故务必首先考虑定义域;②即使函数有多个单调递增(减)区间,也不要轻易使用并集符号!

(2)要熟练掌握导数的正负与原函数单调性的关系.根据函数的单调性及特殊点的函数值等其他性质绘制函数草图,是解决导数题目的基本功底.

【练习 1-17】函数 $f(x)=x+\dfrac{3}{x}+2\ln x$ 的单调递减区间是________.

【练习 1-18】已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,其导函数 $f'(x)$ 的图像如图 1-6 所示,则对于任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}(x_1\neq x_2)$,下列结论正确的是________.(填序号)

① $f(x)<0$ 恒成立;

② $(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]<0$;

③ $(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0$;

④ $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)>\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$;

⑤ $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

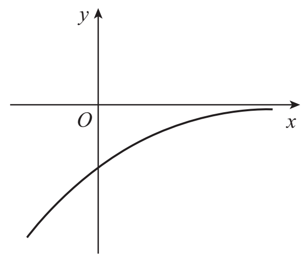


图 1-6

【例 1-10】讨论函数 $f(x)=ax-(2a+1)\ln x-\dfrac{2}{x}(a\in\mathbf{R})$的单调性.

分析 直接对 $f(x)$进行求导,然后讨论 $f'(x)$的符号即可.讨论时要综合考虑函数定义域、二次项系数以及两根大小等因素.

【解析】函数的定义域为$(0,+\infty)$,$f'(x)=a-\dfrac{2a+1}{x}+\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{(ax-1)(x-2)}{x^2}$.

① 当 $a\leqslant0$ 时,$ax-1<0$,当 $x\in(0,2)$时,$f'(x)>0$,此时函数 $f(x)$单调递增;当 $x\in(2,+\infty)$时,$f'(x)<0$,此时函数 $f(x)$单调递减;

② 当 $a=\dfrac{1}{2}$时,$f'(x)=\dfrac{(x-2)^2}{2x^2}\geqslant0$,此时函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增;

③ 当 $a>\dfrac{1}{2}$,$x\in\left(0,\dfrac{1}{a}\right)\cup(2,+\infty)$时,$f'(x)>0$,此时函数 $f(x)$的单调递增区间为$\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$,$(2,+\infty)$;当 $x\in\left(\dfrac{1}{a},2\right)$时,$f'(x)<0$,此时函数 $f(x)$单调递减.

④ 当 $0<a<\dfrac{1}{2}$,$x\in(0,2)\cup\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$时,$f'(x)>0$,此时函数 $f(x)$的单调递增区间为$(0,2)$,$\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$;当 $x\in\left(2,\dfrac{1}{a}\right)$时,$f'(x)<0$,此时函数 $f(x)$单调递减.

综上所述,当 $a\leqslant0$ 时,函数 $f(x)$在$(0,2)$上单调递增,在$(2,+\infty)$上单调递减;

当 $a=\dfrac{1}{2}$时,函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增;

当 $a>\dfrac{1}{2}$时,函数 $f(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$,$(2,+\infty)$上单调递增,在$\left(\dfrac{1}{a},2\right)$上单调递减;

当 $0<a<\frac{1}{2}$时,函数 $f(x)$在$(0,2)$,$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递增,在$\left(2,\frac{1}{a}\right)$上单调递减.

点评 求函数 $f(x)$的单调区间,本质是求不等式 $f'(x)>0$ 或 $f'(x)<0$ 的解.当函数的解析式中含有参数时,往往需要对参数进行讨论以确定单调区间.最常见的情形就是将问题化归为含参二次型不等式的讨论,这时一般需要考虑如下情形:(1)函数的定义域;(2)方程 $f'(x)=0$ 是否有根;(3)二次项系数是正?是负?还是零?(4)方程 $f'(x)=0$ 根的大小.

【练习 1-19】讨论函数 $f(x)=xe^x-\frac{3}{2}ax^2-3ax$ 的单调性.

【练习 1-20】讨论函数 $h(x)=\ln x-\frac{1}{2}ax^2-2x$ 的单调性.

【例 1-11】已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\ln x+(a-e)x$ 在$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$上是增函数,则实数 a 的取值范围是________.

分析 已知函数 $f(x)$在$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$上是增函数,则 $f'(x)\geqslant 0$ 在$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$上恒成立,且 $f'(x)$在$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$的任何一个子区间上不恒为 0,然后使用参变分离的手段进行求解.

【答案】$[e-2,+\infty)$.

【解析】因为 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\ln x+(a-e)x$ 在$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$上是增函数,

所以 $f'(x)=x+\frac{1}{x}+a-e\geqslant 0\left(x>\frac{1}{2}\right)$恒成立,所以 $-a+e\leqslant\left(x+\frac{1}{x}\right)_{\min}$.

由基本不等式得 $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$$\left(\text{当且仅当 } x=\frac{1}{x}\text{,即 } x=1 \text{ 时取等号}\right)$.

所以 $\left(x+\frac{1}{x}\right)_{\min}=2$,所以 $-a+e\leqslant 2$,解得 $a\geqslant e-2$.

点评 已知函数 $f(x)$在区间 D 上单调递增(或单调递减),求参数的取值范围,这类题目的本质是不等式的恒成立问题.需要注意的地方是,应转化为不等式 $f'(x)\geqslant 0$ 恒成立(单调递增)或 $f'(x)\leqslant 0$ 恒成立(单调递减),这里不能忘记等号!当然,如果 $f(x)$的单调区间易于求出,我们也可以将 D 转化为单调区间的子集,利用集合的包含关系求解.

【练习 1-21】对任意 $x_1,x_2\in[2,+\infty)$,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $e^{ax_2^2-ax_1^2}<\frac{x_1}{x_2}$,则实数 a 的取值范围为________.

【练习 1-22】若函数 $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{a}{2}x^2+4x+1$ 在区间$(1,4)$上不单调,则实数 a 的取值范围是________.

【例 1-12】若 $0<x<1$，则 $\frac{\ln3+1}{3}$，$\frac{x^2+1}{e^{x^2}}$，$\frac{x+1}{e^x}$ 的大小关系是(　　).

A. $\frac{x^2+1}{e^{x^2}}>\frac{\ln3+1}{3}>\frac{x+1}{e^x}$　　B. $\frac{x^2+1}{e^{x^2}}>\frac{x+1}{e^x}>\frac{\ln3+1}{3}$

C. $\frac{\ln3+1}{3}>\frac{x+1}{e^x}>\frac{x^2+1}{e^{x^2}}$　　D. $\frac{\ln3+1}{3}>\frac{x^2+1}{e^{x^2}}>\frac{x+1}{e^x}$

分析 $\frac{\ln3+1}{3}=\frac{\ln3+1}{e^{\ln3}}$，故根据表达式的结构，可以构造函数 $f(x)=\frac{x+1}{e^x}$，从而将问题转化为研究函数 $f(x)$ 的单调性.

【答案】B.

【解析】设 $f(x)=\frac{x+1}{e^x}$，则 $f'(x)=\frac{-x}{e^x}$. 令 $f'(x)>0$，得 $x<0$；令 $f'(x)<0$，得 $x>0$. 则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. 若 $0<x<1$，则 $0<x^2<x<1<\ln3$，因此 $f(x^2)>f(x)>f(\ln3)$，即 $\frac{x^2+1}{e^{x^2}}>\frac{x+1}{e^x}>\frac{\ln3+1}{3}$.

点评 例 1-12 的关键是将 $\frac{\ln3+1}{3}$ 进行变形，使得三个式子具备相同的结构特征，从而构造函数 $f(x)=\frac{x+1}{e^x}$，然后用 $f(x)$ 的单调性来比较大小. 构造是一种很重要的解题方法，请同学们认真体会.

【练习 1-23】若对任意的 $x_1,x_2\in(m,+\infty)$，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}>\frac{3}{x_1x_2}$，则 m 的最小值是________.

【练习 1-24】(多选题)若 $0<b<a<\frac{\pi}{2}$，则下列不等关系中一定正确的是(　　).

A. $e^b+\frac{1}{e^a}+2a>e^a+\frac{1}{e^b}+2b$　　B. $be^a-e^b>ae^b-e^a$

C. $a\sin b+b<b\sin a+a$　　D. $b^a<a^b$

1.3.2　函数的极值与导数

一、内容提要

1. 函数的极值与极值点的概念

设函数 $f(x)$在区间(a,b)内有定义,x_0 是区间(a,b)内的一个点.若点 x_0 附近的函数值都小于或等于 $f(x_0)$,则称函数 $f(x_0)$是函数 $y=f(x)$的一个极大值,称 x_0 为 $f(x)$的一个极大值点;若点 x_0 附近的函数值都大于或等于 $f(x_0)$,则称函数 $f(x_0)$是函数 $y=f(x)$的一个极小值,称 x_0 为 $f(x)$的一个极小值点.

函数极大值和极小值统称为极值,极大值点和极小值点统称为极值点.

2. 利用导数求函数 $f(x)$极值的步骤

(1) 求导数 $f'(x)$;

(2) 求 $f(x)$的驻点,即求方程 $f'(x)=0$ 的根;

(3) 对方程 $f'(x)=0$ 的每一个根 x_0,分析 $f'(x)$在 x_0 左右两侧的符号,确定极值点——若 $f'(x)$在 x_0 两侧的符号为“左正右负”,则 x_0 为极大值点;若 $f'(x)$在 x_0 两侧的符号为“左负右正”,则 x_0 为极小值点.

(4) 求出各极值点的函数值,就得到函数 $f(x)$的全部极值.

二、释疑解惑

【问题 1-10】函数的极值与极值点的概念有何区别?

答:函数的极值是指满足相关条件的函数值,而极值点是取极值时的自变量.比如,函数 $f(x)=x^3-3x$ 的极大值点为 $x=-1$,极大值为 $f(-1)=2$,极小值点为 $x=1$,极小值为 $f(1)=-2$.

【问题 1-11】函数的极值与最值有何区别?

答:① 函数的极值是一个局部概念,而最值是整体概念——设 x_0 是区间(a,b)内一点,在区间(a,b)内,只要存在一个包含 x_0 的区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)(\delta>0)$,使得 $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\backslash\{x_0\}$,$f(x)<f(x_0)$(或 $f(x)>f(x_0)$),则 $f(x_0)$是函数 $y=f(x)$的一个极大值(极小值).若 $f(x_0)$是函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内的最大值(最小值),则应满足 $\forall x\in(a,b)$,$f(x)\leqslant f(x_0)$(或 $f(x)\geqslant f(x_0)$).

② 在一个给定的区间上,函数 $f(x)$可能没有极大(小)值,也可能有很多个极大(小)值;在一个给定的区间上,函数 $f(x)$可能没有最大(小)值,若存在,则只能是一个确定的最大(小)值.

③ 在一个给定的区间上,若函数 $f(x)$同时存在最大值和最小值,则函数的最大值一定大于或等于其最小值;在一个给定的区间上,若函数 $f(x)$同时存在极大值和极小值,则函数的

极大值不一定大于其极小值.

④ 函数的极值点一定不能取区间端点,但最值可以在端点处达到.

⑤ 函数的极大(小)值不一定是最大(小)值,最大(小)值也不一定是极大(小)值.

【问题 1-12】“$f'(x_0)=0$”与“x_0 为函数 $f(x)$ 的极值点”有何关系?

答:首先,由 $f'(x_0)=0$ 不能推出 x_0 为函数 $f(x)$ 的极值点. 比如,对于三次函数 $f(x)=x^3$,$f'(0)=0$,但 $x=0$ 不是极值点.

其次,对一般函数而言,若 x_0 为函数 $f(x)$ 的极值点,也不一定有 $f'(x_0)=0$. 比如,对于函数 $f(x)=|x|$,$x=0$ 是其极小值点,但 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的导数不存在.

对可导函数 $f(x)$ 而言,若 x_0 为函数 $f(x)$ 的极值点,则必有 $f'(x_0)=0$.

综上所述,若函数 $f(x)$ 为可导函数,则“$f'(x_0)=0$”是“x_0 为函数 $f(x)$ 的极值点”的必要不充分条件.

【问题 1-13】如何用二阶导数的符号来判断函数的极值?

答:对二阶可导的函数而言,若 $f'(x_0)=0$,且 $f''(x_0)>0$,则 x_0 为极小值点,若 $f'(x_0)=0$,且 $f''(x_0)<0$,则 x_0 为极大值点.

三、典型例题

【例 1-13】已知函数 $f(x)=x^3+3mx^2+nx+m^2$ 在 $x=-1$ 处取得极值 0,则 $m+n=$________.

分析 先求出导函数 $f'(x)$,然后由极值点和极值求出参数 m,n,即可得解. 但要注意检验 m,n 的取值是否符合 $x=-1$ 为极值点的定义.

【答案】11.

【解析】$f'(x)=3x^2+6mx+n$,则$\begin{cases}f'(-1)=0,\\f(-1)=0,\end{cases}$即$\begin{cases}3-6m+n=0,\\-1+3m-n+m^2=0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}m=1,\\n=3,\end{cases}$或$\begin{cases}m=2,\\n=9.\end{cases}$

当$\begin{cases}m=1,\\n=3\end{cases}$时,$f'(x)=3x^2+6x+3=3(x+1)^2\geqslant 0$,不符合题意,舍去;

当$\begin{cases}m=2,\\n=9\end{cases}$时,$f'(x)=3x^2+12x+9=3(x+3)(x+1)$.

令 $f'(x)>0$,得 $x<-3$ 或 $x>-1$;令 $f'(x)<0$,得 $-3<x<-1$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-3)$,$(-1,+\infty)$ 上单调递增,在 $(-3,-1)$ 上单调递减,符合题意.

故 $m+n=2+9=11$.

点评 例 1-13 是一道易错题,需要同学们正确理解“$f'(x_0)=0$”与“x_0 为函数 $f(x)$ 的极值点”的关系. 对可导函数 $f(x)$ 而言,“$f'(x_0)=0$”为“x_0 为函数 $f(x)$ 的极值点”的必要不充分条件,故此题在根据 $f'(-1)=0$ 建立相关方程解出 m,n 的值后,务必要注意验证充分性.

【练习 1-25】 若 $x=-2$ 是函数 $f(x)=(x^2+ax-1)e^{x-1}$ 的极值点,则 $f(x)=(x^2+ax-1)e^{x-1}$ 的极小值为(　　).

A. -1　　B. $-2e^{-3}$　　C. $5e^{-3}$　　D. 1

【练习 1-26】(多选题)设函数 $y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可导,其导函数为 $y=f'(x)$,且函数 $y=(1-x)f'(x)$ 的图像如图 1-7 所示,则下列结论中一定成立的是(　　).

A. 函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上递减,在 $(2,+\infty)$ 上递减

B. 函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上递增,在 $(2,+\infty)$ 上递增

C. 函数 $y=f(x)$ 有极大值 $f(2)$ 和极小值 $f(-2)$

D. 函数 $y=f(x)$ 有极大值 $f(-2)$ 和极小值 $f(2)$

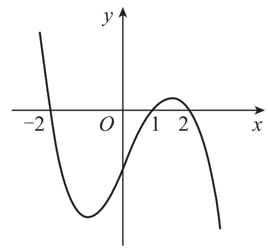


图 1-7

【例 1-14】(多选题)已知 $m\neq0$,若函数 $f(x)=m(x+m)^2(x+n)$ 在 $x=-m$ 处取得极小值,则下列结论中正确的是(　　).

A. 当 $m>0$ 时,$n>m$　　B. 当 $m<0$ 时,$n>m$

C. $m^2>mn$　　D. $n^2>mn$

分析 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 为一个二次函数,$f(x)$ 的两个驻点为 $x=-m$ 和 $x=-\dfrac{m+2n}{3}$. 根据极小值的判定条件(导函数的符号"左负右正"),结合二次函数的图像(此处主要是考虑开口方向),即可判定选项 A,B 的正误. 最后利用不等式的性质判定选项 C,D 的正误.

【答案】 A,D.

【解析】 函数 $f(x)=m(x+m)^2(x+n)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,

且 $f'(x)=m[2(x+m)(x+n)+(x+m)^2]=m(x+m)(3x+m+2n)$.

令 $f'(x)=0$,得 $x=-m$ 或 $x=-\dfrac{m+2n}{3}$.

要使函数 $f(x)$ 在 $x=-m$ 处取得极小值,需要在 $x=-m$ 处的左侧邻近区域 $f'(x)<0$,在 $x=-m$ 处的右侧邻近区域 $f'(x)>0$.

对于选项 A,当 $m>0$ 时,$f'(x)$ 的图像为开口向上的抛物线,则需要 $-\dfrac{m+2n}{3}<-m$,解得 $0<m<n$,故选项 A 成立;

对于选项 B,当 $m<0$ 时,$f'(x)$ 的图像为开口向下的抛物线,则需要 $-\dfrac{m+2n}{3}>-m$,解得 $n<m<0$,故选项 B 不成立;

对于选项 C,当 $0<m<n$ 时,$m^2<mn$;当 $n<m<0$ 时,$mn>m^2$,故选项 C 不成立;

对于选项 D,当 $0<m<n$ 时,$mn<n^2$;当 $n<m<0$ 时,$n^2>mn$,故选项 D 成立.

点评 $x=x_0$ 是可导函数 $f(x)$ 的极大(小)值点,除了满足 $f'(x_0)=0$ 外,还要求在 $x=x_0$ 的左侧邻近区域 $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$),且在 $x=x_0$ 的右侧邻近区域 $f'(x)<0$ ($f'(x)>0$).

当然，例 1-14 也可以用二阶导数来解——由题意：$f'(m)=0$，$f''(m)>0$.

【练习 1-27】设函数 $f(x)=x^3+3ax^2+3(a+2)x+1$ 存在极值，则实数 a 的取值范围是________.

【练习 1-28】若函数 $f(x)=e^x(\sin x-a)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上存在极值，则实数 a 的取值范围是________.

【例 1-15】已知 $a>0$，函数 $f(x)=2ax^3-3(a^2+1)x^2+6ax-2$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的极值点；

(2) 若 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上仅有一个零点，求 a 的取值范围.

分析 (1) 对函数 $f(x)$ 的两个驻点的大小进行讨论，从而确定 $f(x)$ 的单调区间，进而根据极值点的概念判断谁是极大值点，谁是极小值点；(2) 将条件转换为 $f(x)$ 的图像与 x 轴只有一个交点，然后通过控制函数极值的正负来研究 $f(x)$ 的图像与 x 轴的交点个数.

【解析】(1) $f'(x)=6ax^2-6(a^2+1)x+6a=6(x-a)(ax-1)$，当 $f'(x)=0$ 时，$x=a$ 或 $x=\frac{1}{a}$.

① 当 $a=1$ 时，$\frac{1}{a}=a=1$，所以 $f'(x)\geqslant 0$，从而 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，此时 $f(x)$ 不存在极值点.

② 当 $0<a<1$ 时，$\frac{1}{a}>a$，所以 $x<a$ 或 $x>\frac{1}{a}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,a)$，$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增；当 $a<x<\frac{1}{a}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $\left(a,\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减.

故此时 $f(x)$ 有唯一的极大值点 $x=a$，有唯一的极小值点 $x=\frac{1}{a}$.

③ 当 $a>1$ 时，$a>\frac{1}{a}$，所以 $x<\frac{1}{a}$ 或 $x>a$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{1}{a}\right)$，$(a,+\infty)$ 上单调递增；当 $\frac{1}{a}<x<a$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{a},a\right)$ 上单调递减.

故此时 $f(x)$ 有唯一的极小值点 $x=a$，有唯一的极大值点 $x=\frac{1}{a}$.

(2) 由(1)的分析过程，可以绘制出函数 $f(x)$ 的大致图像. 结合图像可知，若 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上仅有一个零点，$a=1$ 显然满足条件；当 $a\neq 1$ 时，只需 $f(x)$ 的极大值小于 0 或者 $f(x)$ 的极小值大于 0 .

$f(a)=-a^4+3a^2-2=(a^2-1)(2-a^2)$，$f\left(\frac{1}{a}\right)=1-\frac{1}{a^2}$.

由(1)得，当 $0<a<1$ 时，$f(a)<0$，$f\left(\frac{1}{a}\right)<0$，所以 $f(x)$ 仅在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上有一个零点，因此 $0<a<1$ 时成立；

当 $a=1$ 时,$f(1)=0$,所以 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上仅有一个零点 1;

当 $a>1$ 时,$f\left(\frac{1}{a}\right)>0$,所以要满足题设,有 $f(a)>0$,从而 $2-a^2>0$,解得 $1<a<\sqrt{2}$,因此 $1<a<\sqrt{2}$时成立.

综上所述,满足题目条件的 a 的取值范围是$(0,\sqrt{2})$.

点评 讨论函数 $f(x)$的极值(极值点)的情况,与研究函数 $f(x)$的单调性基本一致. 1.3.1 节中对单调区间含参讨论的方法和技巧是完全适用于研究函数极值的情形的.

对于三次函数 $g(x)$而言,若其只有一个零点,则 $g(x)$为单调函数,或者 $g(x)$的极大值小于 0,或者 $g(x)$的极小值大于 0;

若其有两个零点,则 $g(x)$的极大值等于 0 或者 $g(x)$的极小值等于 0;

若其有三个零点,则 $g(x)$的极大值大于 0 且 $g(x)$的极小值小于 0.

【练习 1-29】已知过点(a,b)可以作函数 $f(x)=x^3-x$ 的三条切线,如果 $a>0$,那么 a 和 b 应该满足的关系是(　　).

A. $0<b<a^3$　　　　B. $-\frac{2\sqrt{3}}{9}<b<a^3-a$

C. $-a<b<a^3$　　　　D. $-a<b<a^3-a$

【练习 1-30】(多选题)已知 a 为常数,函数 $f(x)=e^x(x-ae^x)$有两个极值点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$,则(　　).

A. a 的取值范围是$\left(0,\frac{1}{2}\right)$　　　　B. a 的取值范围是$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$

C. $f(x_1)<0$　　　　D. $f(x_2)>-\frac{1}{2}$

【例 1-16】已知函数 $f(x)=\ln(ax+1)-2+\frac{4}{x+2}$,其中 $a>0$.

(1) 讨论 $f(x)$在区间$(0,+\infty)$上的极值点情况;

(2) 若 $f(x)$存在两个极值点 x_1,x_2,且 $f(x_1)+f(x_2)>0$,求 a 的取值范围.

分析 (1) 讨论 $f(x)$在区间$(0,+\infty)$上的单调性,进而说明其极值点情况;(2) 利用极值点 x_1,x_2 满足的条件,将 $f(x_1)+f(x_2)$转化为一个含 a 的式子,然后用函数的观点来研究 a 的取值范围.

【解析】(1) $f'(x)=\frac{a}{1+ax}-\frac{4}{(x+2)^2}=\frac{ax^2+4(a-1)}{(1+ax)(x+2)^2}$,其中$(1+ax)(x+2)^2>0$.

① 当 $a-1\geqslant0$,即 $a\geqslant1$ 时,$f'(x)\geqslant0$ 恒成立,则函数 $f(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增,$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上无极值;

② 当 $0<a<1$ 时,由 $f'(x)=0$,得 $x=\pm\frac{2\sqrt{a(1-a)}}{a}$.

当 $x\in\left(0,\dfrac{2\sqrt{a(1-a)}}{a}\right)$时，$f'(x)<0$，当 $x\in\left(\dfrac{2\sqrt{a(1-a)}}{a},+\infty\right)$时，$f'(x)>0$.

故函数 $f(x)$在区间$(0,+\infty)$上存在唯一极值点 $x=\dfrac{2\sqrt{a(1-a)}}{a}$，且为极小值点.

(2) 由(1)知，当 $0<a<1$ 时才可能出现两个极值点 x_1,x_2，且极值点只可能是 $x=\pm\dfrac{2\sqrt{a(1-a)}}{a}$.

考虑到定义域的要求，$-\dfrac{2\sqrt{a(1-a)}}{a}>-\dfrac{1}{a}$且$-\dfrac{2\sqrt{a(1-a)}}{a}\neq-2$，解得 $a\neq\dfrac{1}{2}$.

记 $x_1=-\dfrac{2\sqrt{a(1-a)}}{a}$，$x_2=\dfrac{2\sqrt{a(1-a)}}{a}$，则 $x_1+x_2=0$，$x_1x_2=\dfrac{4(a-1)}{a}$.

而 $f(x_1)+f(x_2)=\ln(1+ax_1)+\dfrac{4}{x_1+2}+\ln(1+ax_2)+\dfrac{4}{x_2+2}-4$

$=\ln[1+a(x_1+x_2)+a^2x_1x_2]+\dfrac{4(x_1+x_2+4)}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}-4=\ln(2a-1)^2+\dfrac{2}{2a-1}-2.$

令 $t=2a-1$，$h(t)=\ln t^2+\dfrac{2}{t}-2$.

① 当 $0<a<\dfrac{1}{2}$时，$-1<t<0$，此时 $h(t)=2\ln(-t)+\dfrac{2}{t}-2$，$h'(t)=\dfrac{2}{t}-\dfrac{2}{t^2}<0$，所以函数 $h(t)$在$(-1,0)$上单调递减，则 $h(t)<h(-1)=-4<0$，即 $\varphi(x_1)+\varphi(x_2)>0$，不符合题意；

② 当$\dfrac{1}{2}<a<1$ 时，$0<t<1$，此时 $h(t)=2\ln t+\dfrac{2}{t}-2$，$h'(t)=\dfrac{2}{t}-\dfrac{2}{t^2}=\dfrac{2(t-1)}{t^2}<0$，所以函数 $h(t)$在$(0,1)$上单调递减，则 $h(t)>h(1)=0$，即 $\varphi(x_1)+\varphi(x_2)>0$ 成立.

综上所述，a 的取值范围是$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$.

点评 对“$f(x_1)+f(x_2)>0$”这样的含两个变元的表达式的处理方法，通常是将其转化为单一变量的表达式进行研究. 常见的转化方法包括消元、换元等.

【练习 1-31】设函数 $f(x)=(x-1)^3-ax-b$，其中 $a,b\in\mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$的单调区间；

(2) 若 $f(x)$存在极值点 x_0，且 $f(x_1)=f(x_0)$，其中 $x_1\neq x_0$，求证：$x_1+2x_0=3$.

【练习 1-32】已知 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-4x+a\ln x$.

(1) 若函数 $f(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增，求实数 a 的取值范围；

(2) 若函数 $f(x)$有两个极值点 x_1,x_2，证明：$f(x_1)+f(x_2)>-10+\ln a$.

1.3.3 三次函数的性质:单调区间和极值

一、内容提要

1. 三次函数的单调区间和极值

设 $F(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$,其导函数 $F'(x)=3ax^2+2bx+c(a\neq 0)$. 记 $\Delta=(2b)^2-4\times 3ac=4(b^2-3ac)$.

情形 1:$\Delta\leqslant 0$.

若 $a>0$,则 $F'(x)\geqslant 0$ 恒成立,$F(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,无极值;

若 $a<0$,则 $F'(x)\leqslant 0$ 恒成立,$F(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,无极值.

情形 2:$\Delta>0$,函数 $F'(x)$有两个零点,记为 u,v,不妨设 $u<v$.

若 $a>0$,则 $F'(x)>0\Rightarrow x>v$ 或 $x<u$,$F'(x)<0\Rightarrow u<x<v$,故 $F(x)$在$(-\infty,u)$,$(v,+\infty)$上单调递增,在(u,v)上单调递减.

此时 $F(x)$在 $x=u$ 处取得极大值,在 $x=v$ 处取得极小值.

若 $a<0$,则 $F'(x)>0\Rightarrow u<x<v$,$F'(x)<0\Rightarrow x>v$ 或 $x<u$,故 $F(x)$在(u,v)上单调递增,在$(-\infty,u)$,$(v,+\infty)$上单调递减.

此时 $F(x)$在 $x=v$ 处取得极大值,在 $x=u$ 处取得极小值.

2. 求函数 $y=f(x)$在闭区间$[a,b]$上的最值的步骤

(1) 求导数 $f'(x)$,并求方程 $f'(x)=0$ 的根;

(2) 求函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内的极值;

(3) 计算函数 $y=f(x)$在端点处的函数值 $f(a)$,$f(b)$;

(4) 将函数 $y=f(x)$的各极值与 $f(a)$,$f(b)$比较,其中最大者就是最大值,最小者就是最小值.

二、释疑解惑

【问题 1-14】 从单调性的角度,我们可以将三次函数的图像划分为四种类型. 你能绘制出这四种类型的函数图像的草图吗?

答: 四种类型的函数图像的草图如图 1-8 所示.

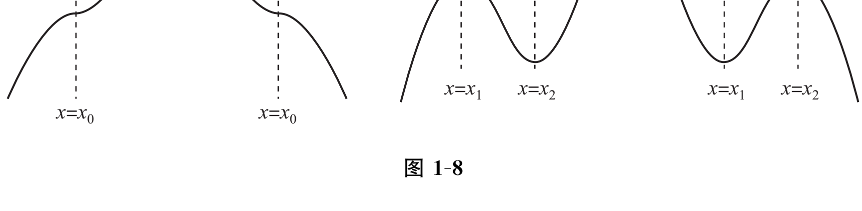


图 1-8