高中数学一课一练

(选择性必修一)

主　编　朱华伟
编　者　张红兵　许苏华　赵志伟

清華大学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是《高中数学精讲(选择性必修一)》(ISBN: 9787302640486)的配套练习册,涵盖新高考所有知识点和考题类型. 每章精选习题,循序渐进、拾级而上,遵循因材施教原则,习题设置兼顾多个层次的学习需求,分为 A,B,C 三层,适合分层教学,学生在实际使用中可以按需取舍. 数学基础较好的学生,可以在完成 A 组和 B 组习题的基础上努力尝试完成 C 组习题;数学基础较弱的学生,可以在完成 A 组习题的前提下努力尝试完成 B 组习题. 书后附有所有习题的详细解答.

本书可供高中准备参加高考数学、大学自主招生的学生学习使用,也可供中学数学教师、数学爱好者、高等师范院校数学教育专业大学生、研究生及数学教师参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

高中数学一课一练. 选择性必修一 / 朱华伟主编. —北京:清华大学出版社,2023.8

ISBN 978-7-302-64050-9

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①朱… Ⅲ. ①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ. ①G634.603

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2023)第 128128 号

责任编辑: 王 定
封面设计: 周晓亮
版式设计: 思创景点
责任校对: 马遥遥
责任印制:

出版发行: 清华大学出版社
网 址: http://www.tup.com.cn, http://www.wqbook.com
地 址: 北京清华大学学研大厦 A 座 **邮 编:** 100084
社 总 机: 010-83470000 **邮 购:** 010-62786544
投稿与读者服务: 010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈: 010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者:
经 销: 全国新华书店
开 本: 185mm×260mm **印 张:** 16 **字 数:** 359 千字
版 次: 2023 年 9 月第 1 版 **印 次:** 2023 年 9 月第 1 次印刷
定 价: 69.80 元

产品编号:102851-01

前　言

课程是学校教育的载体，办好一所学校的落脚点在提升教育质量，提升教育质量的关键点在课程. 我国实行的是国家、地方、学校三级课程管理制度，因此学校就有了一定的课程开发自主权，即校本课程. 近年来，深圳中学竭尽所能创新开发、打磨完善了一系列高水平的校本课程，目前校本课程已开设有360余门，内容丰富、涵盖面广. 同时，我一直鼓励并支持参与校本课程开发的教师，在经验成熟的基础上将教学实践成果化——编写校本教材.

校本课程基于学生差异因材施教，是适合本校学生的课程. 20世纪90年代，中国人民大学附属中学、上海中学、华东师范大学二附中、武钢三中、黄冈中学等著名中学为学生开发和编写了具有相当难度和广度的数学学习资料，带动其在高考、竞赛等方面声名鹊起. 近年来，深圳中学一直在学习、借鉴、吸取国内外著名中学课程建设的宝贵经验. 在深圳中学，我一直倡导在国家数学课程的基础上，学生要学多点、学深点、学难点，要有更多、更好的适合深圳中学学生水平的数学校本课程，给每一位学生提供可充分发展的课程，科学合理地发展学生的智力. 目前，深圳中学开设了数学分析、微积分、线性代数、解析几何与群论初步、射影几何、统计学、初等数论、离散数学、算法导论、博弈论、数理经济学原理、逻辑导论、AP微积分、AP统计学等大学先修课程，以及数学文化与数学史、数学思想方法、数学建模、数学问题选讲、数学竞赛、欧氏几何、强基计划数学等选修课；出版了《数学培优竞赛讲座》《数学培优竞赛一讲一练》丛书（三、四、五、六、七、八、九、高一、高二、高三年级，共20册，清华大学出版社）.

我从2003年开始参加新课标湘教版高中数学教科书的研发工作，在这个过程中积极向张景中院士等前辈、老师学习，得到了很好的锻炼和提高，后来担任湘教版高中数学教科书的副主编，同时我个人也出版了一些高考备考、数学培优和数学竞赛方面的书籍，对新课标、新教材、新高考有较深入的学习和理解. 因此，在深圳中学工作的数年来，我一直希望能够有机会借助自己多年积累的经验，带头开发一套适合所有深圳中学学生的数学校本教材.

众所周知，2022年全国高考数学创下了近些年的难度新高，以此为契机，我决定将这个酝酿多年的想法付诸实施. 在2022年高考数学结束后的第二天，我组织深圳中学数学组十余位高三一线教师和骨干教师召开研讨会议，动员大家集思广益、群策群力，编写一套贴合新课标、适应新高考、匹配深圳中学学生水平的深圳中学数学校本教材，于是《高中数学精讲》《高中数学一课一练》丛书应运而生. 如今呈现在各位读者面前的这套丛书，凝结了深圳中学数学教师多年来的教学经验、教育智慧和辛勤付出.

在本丛书的撰写过程中，我们以最新的《高中数学课程标准》精神为指导，以高中生数学认知能力为基础，以最新的《高中数学课程标准》知识脉络为主线，以提高学生核心素养为宗旨，

对标新高考,注重提升学生数学学习的质量,充分将新课标、新教材和新高考理念融入其中.

《高中数学精讲》涵盖高中数学课程和新高考数学的所有内容,难度不超过高考数学,按章、节编写,每章开头简明扼要地介绍该章的内容、方法和意义,给出该章的知识结构框图,方便学生形成自己的知识结构.每节包括如下三个栏目.

内容提要:梳理每节中的基本概念、公式、定理,突出重点、难点和数学思想方法技巧,提供一个知识网络,授人以渔.

释疑解惑:通过精心设置的一系列问题与解答,解释学生数学学习过程中经常遇到的疑难问题,主要包括对概念、性质的解析,公式的理解和应用,定理的条件分析和使用要领,方法技巧的归纳总结,对某些似是而非的论断的辨析等,授业解惑.

典型例题:每节精讲具有典型性、新颖性、启迪性的例题,覆盖该节的知识方法技巧,遵循可接受性原则,按由浅入深、从易到难排序,通过分析、求解和点评,介绍与该例题有关的解题方法与技巧,帮助学生归纳解题规律,提高解题能力;每道例题后配有相关性、发展性的练习,帮助学生熟练演算技巧,巩固、拓展、深化对知识的理解和认知,培养分析问题、解决问题的能力,举一反三.

在书的后半部分,我们提供了所有练习题的详细解答,帮助学生自学及自我评价.

与《高中数学精讲》配套使用的是《高中数学一课一练》.

《高中数学一课一练》按章、节编写,涵盖新高考所有知识点,并增加多选题型.每节与《高中数学精讲》对应,精选习题循序渐进、拾级而上,遵循因材施教原则,习题设置兼顾多个层次的学习需求,分为A,B,C三层,适合分层教学,学生在实际使用中可以按需取舍.例如,数学基础较好的学生,可以在完成A组和B组习题的基础上努力尝试完成C组习题;数学基础较弱的学生,可以在完成A组习题的前提下努力尝试完成B组习题.书后附有所有习题的详细解答,《高中数学一课一练》与《高中数学精讲》配套使用,能更好地达到预期的学习效果.

本丛书包括《高中数学精讲》《高中数学一课一练》(必修一、必修二、选择性必修一、选择性必修二),共8册.

本丛书的编委会由深圳中学数学组的优秀中青年教师组成,他们是:洪建明、曾劲松、张红兵、董正林、黄文辉、张文涛、周峻民、许苏华、罗承成、邱际春、赵志伟、林健.在本丛书的编写过程中,我们力求精益求精,但其中难免存在一些疏漏与不足之处,敬请广大读者给予批评指正.

希望更多的同学喜欢数学,取得自己理想的成绩!

朱华伟

2023年6月

目　录

第 1 章　数　　列

1.1　数列的概念

A　组

1. 数列$\{a_n\}$的前几项为$\frac{1}{2}$,3,$\frac{11}{2}$,8,$\frac{21}{2}$,……,则此数列的通项公式可能是(　　).

A. $a_n=\frac{5n-4}{2}$　　B. $a_n=\frac{3n-2}{2}$　　C. $a_n=\frac{6n-5}{2}$　　D. $a_n=\frac{10n-9}{2}$

2. 若数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=2a_n-1(n\in \mathbf{N}_+)$,则$a_5$等于(　　).

A. 8　　B. 16　　C. 32　　D. 64

3. (多选题)已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{9n^2-9n+2}{9n^2-1}(n\in \mathbf{N}_+)$,则下列结论正确的是(　　).

A. 这个数列的第10项为$\frac{27}{31}$　　B. $\frac{97}{100}$是该数列中的项

C. 数列中的各项都在区间$\left[\frac{1}{4},1\right)$内　　D. 数列$\{a_n\}$是单调递减数列

4. 判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).

(1) 相同的一组数按不同顺序排列时都表示同一个数列.　　(　　)

(2) 1,1,1,1,…… 不能构成一个数列.　　(　　)

(3) 任何一个数列不是递增数列,就是递减数列.　　(　　)

(4) 如果数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,则对任意$n\in \mathbf{N}_+$,都有$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$.　　(　　)

5. 设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,且$S_n=\frac{a_1(4^n-1)}{3}$,若$a_4=32$,则$a_1=$________.

6. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3n^2-28n$.

(1) 写出数列的第4项和第6项;

(2) -49和68是该数列的项吗?若是,是第几项?若不是,请说明理由.

7. 已知 $a_n=\dfrac{9^n\cdot(n+1)}{10^n}(n\in\mathbf{N}_+)$,则数列$\{a_n\}$中有没有最大项?如果有,求出最大项;如果没有,请说明理由.

B 组

8. 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_n=\begin{cases}(3-a)\cdot(n-2),n\leqslant 6,\\ a^{n-5},n>6,\end{cases}$ 且$\{a_n\}$是递增数列,则实数 a 的取值范围是( ).

A. $\left(\dfrac{16}{7},3\right)$ B. $\left[\dfrac{16}{7},3\right)$ C. $(1,3)$ D. $(2,3)$

9. 意大利数学家斐波那契以兔子繁殖为例,引入"兔子数列":1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,… 即 $F(1)=F(2)=1$,$F(n)=F(n-1)+F(n-2)(n\geqslant 3,n\in\mathbf{N}_+)$,此数列在现代物理"准晶体结构"、化学等领域都有着广泛的应用.若此数列被 2 除的余数构成一个新数列$\{a_n\}$,则数列$\{a_n\}$的前 2022 项的和为( ).

A. 674 B. 673 C. 1348 D. 2020

10. 已知数列$\{a_n\}$中,$a_n=1+\dfrac{1}{a+2(n-1)}(n\in\mathbf{N}_+,a\in\mathbf{R}$,且 $a\neq 0)$.

(1) 若 $a=-7$,求数列$\{a_n\}$中的最大项和最小项的值;

(2) 若对任意的 $n\in\mathbf{N}_+$,都有 $a_n\leqslant a_6$ 成立,求 a 的取值范围.

C　组

11. 已知数列$\{a_n\}$满足$2^1 \cdot a_1 + 2^2 \cdot a_2 + 2^3 \cdot a_3 + \cdots + 2^n \cdot a_n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2(n \in \mathbf{N}_+)$，则数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n =$____________.

12.（多选题）对于数列$\{a_n\}$，若存在数列$\{b_n\}$满足$b_n = a_n - \dfrac{1}{a_n}(n \in \mathbf{N}_+)$，则称数列$\{b_n\}$是$\{a_n\}$的“倒差数列”，下列关于“倒差数列”描述正确的是(　　).

A. 若数列$\{a_n\}$是单增数列，则其“倒差数列”不一定是单增数列

B. 若$a_n = 3n - 1$，则其“倒差数列”有最大值

C. 若$a_n = 3n - 1$，则其“倒差数列”有最小值

D. 若$a_n = 1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$，则其“倒差数列”有最大值

1.2 等差数列

1.2.1 等差数列及其通项公式

A 组

1. 等差数列$\{a_n\}$中,$a_4+a_8=10$,$a_{10}=6$,则公差$d=$( ).

A. $\dfrac{1}{4}$ B. $\dfrac{1}{2}$ C. 2 D. $-\dfrac{1}{2}$

2. 在等差数列$\{a_n\}$中,$3a_5=2a_7$,则此数列中一定为0的是( ).

A. a_1 B. a_3 C. a_8 D. a_{10}

3. (多选题)数列$\{a_n\}$的通项公式如下,则能判断数列$\{a_n\}$为等差数列的是( ).

A. $a_n=1$ B. $a_n=2n$ C. $a_n=\begin{cases}2, n=1,\\2^{n-1}, n\geqslant 2\end{cases}$ D. $a_n=\begin{cases}3, n=1,\\2n, n\geqslant 2\end{cases}$

4. 判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1) 若一个数列从第2项起,每一项与它前一项的差都是常数,则这个数列是等差数列. ( )

(2) 已知数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=pn+q$(其中p,q为常数),则数列$\{a_n\}$一定是等差数列. ( )

(3) 数列$\{a_n\}$为等差数列的充要条件是对任意的$n\in\mathbf{N}_+$,都有$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$. ( )

(4) 等差数列$\{a_n\}$的单调性是由公差d决定的. ( )

5. 首项为30的等差数列$\{a_n\}$,从第8项开始为负数,则公差d的取值范围是____________.

6. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=3$,$a_{n+1}=3-\dfrac{4}{a_n+1}(n\in\mathbf{N}_+)$,设数列$b_n=\dfrac{1}{a_n-1}$.

(1) 证明:数列$\{b_n\}$为等差数列;

(2) 求数列$\{a_n\}$的通项公式.

7. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和S_n满足$a_n\cdot S_n=(S_n-1)^2$.

(1) 证明:数列$\left\{\dfrac{1}{S_n-1}\right\}$为等差数列;

(2) 求数列$\{a_n\}$的通项公式.

B　组

8．已知等差数列$\{a_n\}$是递增数列，且$a_1+a_2+a_3\leqslant 3$，$a_7-3a_3\leqslant 8$，则a_4的取值范围为____________.

9．记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和.已知$a_n>0$，$a_2=3a_1$，且数列$\{\sqrt{S_n}\}$是等差数列，证明：$\{a_n\}$是等差数列.

10．已知数列$\{a_n\}$满足：$a_3=-13$，$a_n=a_{n-1}+4(n>1,n\in\mathbf{N}_+)$.

(1) 求a_1，a_2及通项公式a_n；

(2) 设S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，则数列S_1，S_2，S_3，⋯中哪一项最小？

C　组

11．已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=(-1)^{n+1}a_n+2$，则$\dfrac{a_{18}}{a_{19}}=$(　　).

A. 3　　B. $\dfrac{1}{13}$　　C. $\dfrac{2}{13}$　　D. $\dfrac{2}{19}$

12．已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1, & n \text{为奇数}, \\ a_n+2, & n \text{为偶数}.\end{cases}$

(1) 记$b_n=a_{2n}$，写出b_1，b_2，并求数列$\{b_n\}$的通项公式；

(2) 求$\{a_n\}$的通项公式.

1.2.2 等差数列与一次函数

A 组

1. 已知$\{a_n\}$是等差数列，$a_4=15$，$a_7=27$，则过点$P(3,a_3)$，$Q(5,a_5)$的直线的斜率为(　　).

A. 4　　B. $\frac{1}{4}$　　C. -4　　D. $-\frac{1}{4}$

2. 已知数列$\{a_n\}$满足$2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}(n\geqslant 2)$，$a_2+a_4+a_6=12$，$a_1+a_3+a_5=9$，则$a_3+a_4$等于(　　).

A. 6　　B. 7　　C. 8　　D. 9

3. (多选题)已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_2=18$，$a_5=12$，则下列选项正确的是(　　).

A. $d=-2$　　B. $a_1=22$

C. $a_3+a_4=30$　　D. 当且仅当$n=11$时，S_n取得最大值

4. 若关于x的方程$x^2-2x+m=0$和$x^2-2x+n=0(m\neq n)$的四个根可组成首项为$\frac{1}{4}$的等差数列，则$|m-n|$的值是__________.

5. 在等差数列$\{a_n\}$中，若$a_1+a_5+a_9=4\pi$，则$a_5=$__________，$\tan(a_2+a_8)=$__________.

6. 在等差数列$\{a_n\}$中，已知$a_2=5$，$a_8=17$，求数列的公差及通项公式.

7. 某公司2016年经销一种数码产品，获利200万元，从2017年起，预计其利润每年比上一年减少20万元，按照这一规律，如果公司不研发新产品，也不调整经营策略，那么从哪一年起，该公司经销这一产品将出现亏损?

B　组

8．在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=-9$，$a_5=-1$．记$T_n=a_1a_2\cdots a_n(n=1,2,\cdots)$，则数列$\{T_n\}$(　　)．

A．有最大项，有最小项　　B．有最大项，无最小项

C．无最大项，有最小项　　D．无最大项，无最小项

9．已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$\frac{S_3}{S_6}=\frac{1}{4}$，则$\frac{S_6}{S_{12}}=$(　　)．

A．$\frac{1}{8}$　　B．$\frac{7}{26}$　　C．$\frac{1}{4}$　　D．$\frac{1}{2}$

10．(多选题)下面是关于公差$d>0$的等差数列$\{a_n\}$的四个命题，其中真命题为(　　)．

A．数列$\{a_n\}$是递增数列　　B．数列$\{na_n\}$是递增数列

C．数列$\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$是递增数列　　D．数列$\{a_n+3nd\}$是递增数列

C　组

11．将数列$\{2n+1\}$与$\{3n\}$的公共项从小到大排列，得到数列$\{a_n\}$，则$\{a_n\}$的通项公式为____________．

12．无穷数列$\{a_n\}$满足：$a_{n+1}a_n+3a_{n+1}+a_n+4=0$，且$a_1\neq-2$．

(1)求证：$\left\{\frac{1}{a_n+2}\right\}$为等差数列；

(2)若a_{2021}为数列$\{a_n\}$中的最小项，求a_1的取值范围．

1.2.3 等差数列的前 n 项和

A 组

1. 已知等差数列$\{a_n\}$中,S_n 为其前 n 项和,$S_4=24$,$S_9=99$,则 a_7 等于(　　).

A. 13　　B. 14　　C. 15　　D. 16

2. 已知等差数列$\{a_n\}$中,$a_2=3$,前 5 项和 $S_5=10$,则数列$\{a_n\}$的公差为(　　).

A. -1　　B. $-\frac{5}{2}$　　C. -2　　D. -4

3. (多选题)等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,前 n 项和为 S_n,当首项 a_1 和 d 变化时,$a_3+a_8+a_{13}$ 是一个定值,则下列各数也为定值的有(　　).

A. a_7　　B. a_8　　C. S_{15}　　D. S_{16}

4. 已知$\{a_n\}$是等差数列,其前 n 项和为 S_n,若 $a_3=2$,且 $S_6=30$,则 $S_9=$________.

5. 已知$\{a_n\}$是公差不为零的等差数列,且 $a_1+a_{10}=a_9$,则 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_9}{a_{10}}=$________.

6. 在数列$\{a_n\}$中,$a_1=8$,$a_4=2$,且满足 $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0(n\in\mathbf{N}_+)$.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2) 设 $T_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$,求 T_n.

7. 已知数列$\{a_n\}$的各项均为正数,记 S_n 为$\{a_n\}$的前 n 项和,从下面 ①②③ 中选取两个作为条件,证明另外一个成立.

① 数列$\{a_n\}$是等差数列;② 数列$\{\sqrt{S_n}\}$是等差数列;③$a_2=3a_1$.

(注:若选择不同的组合分别解答,则按第一个解答计分)

B　组

8. 等差数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前n项和分别为S_n，T_n，若对任意正整数n都有$\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n-1}{3n-2}$，则$\frac{a_{11}}{b_6+b_{10}}+\frac{a_5}{b_7+b_9}$的值为__________.

9. 已知S_n是等差数列$\{a_n\}$的前n项和，若$a_1=-2020$，$\frac{S_{2020}}{2020}-\frac{S_{2014}}{2014}=6$，则$S_{2023}$等于(　　).

A. 2023　　B. -2023　　C. 4046　　D. -4046

10. 已知等差数列$\{a_n\}$的项数为奇数，其中所有奇数项之和为319，所有偶数项之和为290，则该数列的中间项为(　　).

A. 28　　B. 29　　C. 30　　D. 31

C　组

11. 设函数$f(x)=2+\ln\frac{1-x}{x}$，$a_1=1$，$a_n=f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{3}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)$($n\in\mathbf{N}_+$，$n\geqslant 2$)，则数列$\{a_n\}$的前$n$项和$S_n=$__________.

12. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_3+a_4=4$，$a_5+a_7=6$.

(1) 求$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 设$b_n=[a_n]$，求数列$\{b_n\}$的前10项和，其中$[x]$表示不超过x的最大整数，如$[0.9]=0$，$[2.6]=2$.

1.3 等比数列

1.3.1 等比数列及其通项公式

A 组

1. 已知$\{a_n\}$是等比数列,$a_2=2$,$a_4=\frac{1}{2}$,则公比q等于(　　).

A. $-\frac{1}{2}$　　B. -2　　C. 2　　D. $\pm\frac{1}{2}$

2. 若等比数列$\{a_n\}$满足$a_1+a_2=1$,$a_4+a_5=8$,则a_7等于(　　).

A. $\frac{64}{3}$　　B. $-\frac{64}{3}$　　C. $\frac{32}{3}$　　D. $-\frac{32}{3}$

3. (多选题)设等比数列$\{a_n\}$的公比为q,则下列结论正确的是(　　).

A. 数列$\{a_na_{n+1}\}$是公比为q^2的等比数列

B. 数列$\{a_n+a_{n+1}\}$是公比为q的等比数列

C. 数列$\{a_n-a_{n+1}\}$是公比为q的等比数列

D. 数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是公比为$\frac{1}{q}$的等比数列

4. 已知数列$\{a_n\}$为等比数列,$a_2=6$,$6a_1+a_3=30$,则$a_4=$____________.

5. 已知三个数成等比数列,若它们的和等于13,积等于27,则这三个数为____________.

6. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=2a_n+1$,求证:$\{a_n\}$是等比数列,并求出通项公式.

7. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$,$na_{n+1}=2(n+1)a_n$.设$b_n=\frac{a_n}{n}$,

(1) 求b_1,b_2,b_3;

(2) 判断数列$\{b_n\}$是否为等比数列,并说明理由;

(3) 求$\{a_n\}$的通项公式.

B　组

8. 已知一个蜂巢里有 1 只蜜蜂，第 1 天，它飞出去找回了 4 个伙伴；第 2 天，5 只蜜蜂飞出去，各自找回了 4 个伙伴……按照这个规律继续下去，第 20 天所有的蜜蜂都归巢后，蜂巢中一共有蜜蜂(　　).

A. 4^{20} 只　　B. 5^{20} 只　　C. $\dfrac{5^{20}-5}{4}$ 只　　D. $\dfrac{4^{21}-4}{3}$ 只

9. (多选题)在数列$\{a_n\}$中，$n\in\mathbf{N}_+$，若$\dfrac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=k$($k$ 为常数)，则称$\{a_n\}$为“等差比数列”，下列关于“等差比数列”的判断正确的是(　　).

A. k 不可能为 0

B. 等差数列一定是“等差比数列”

C. 等比数列一定是“等差比数列”

D. “等差比数列”中可以有无数项为 0

10. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{1}{3}a_n+n, n\text{ 为奇数},\\ a_n-3n, n\text{ 为偶数},\end{cases}$

求证：数列$\left\{a_{2n}-\dfrac{3}{2}\right\}$是等比数列.

C　组

11. 已知数列$\{a_n\}$为等差数列，数列$\{b_n\}$为等比数列，满足$\{a_1,a_2,a_3\}=\{b_1,b_2,b_3\}=\{a,b,-2\}$，其中$a>0$，$b>0$，则$a+b$的值为__________.

12. 在数列的每相邻两项之间插入此两项的积，形成新的数列，这样的操作叫作该数列的一次“扩展”，将数列 1，4 进行“扩展”，第一次得到数列 1，4，4；第二次得到数列 1，4，4，16，4；…；第 n 次得到数列 $1,x_1,x_2,\cdots,x_i,4$，并记 $a_n=\log_2(1\cdot x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_i\cdot 4)$，其中 $i=2^n-1$，$n\in\mathbf{N}_+$，则$\{a_n\}$的通项 $a_n=$__________.

1.3.2 等比数列与指数函数

A 组

1. 设$\{a_n\}$是等比数列,且$a_1+a_2+a_3=1$,$a_2+a_3+a_4=2$,则$a_6+a_7+a_8=$(　　).

A. 12　　B. 24　　C. 30　　D. 32

2. 在等比数列$\{a_n\}$中,a_3,a_{15}是方程$x^2+6x+2=0$的两根,则$\frac{a_2a_{16}}{a_9}$的值为(　　).

A. $-\frac{2+\sqrt{2}}{2}$　　B. $-\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. $-\sqrt{2}$或$\sqrt{2}$

3. (多选题)已知数列$\{a_n\}$为等比数列,首项$a_1>0$,公比$q\in(-1,0)$,则下列叙述正确的是(　　).

A. 数列$\{a_n\}$的最大项为a_1　　B. 数列$\{a_n\}$的最小项为a_2

C. 数列$\{a_na_{n+1}\}$为递增数列　　D. 数列$\{a_{2n-1}+a_{2n}\}$为递增数列

4. 等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数,且$a_1a_5=4$,则$\log_2a_1+\log_2a_2+\log_2a_3+\log_2a_4+\log_2a_5=$________.

5. 设等比数列$\{a_n\}$满足$a_1+a_3=10$,$a_2+a_4=5$,则$a_1a_2\cdots a_n$的最大值为________.

6. 已知等比数列$\{a_n\}$共有$2n$项,其和为-240,且奇数项的和比偶数项的和大80,求该数列的公比q.

7. 已知等比数列$\{a_n\}$共有10项,其中奇数项之积为2,偶数项之积为64,求该数列的公比q.

B　组

8. 已知正项等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_8-2S_4=5$，则$a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}$的最小值为(　　).

A. 25　　　　B. 20　　　　C. 15　　　　D. 10

9. 设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_n+a_n=1$，记b_m为数列$\{a_n\}$中能使$a_n\geqslant\dfrac{1}{2m+1}$($m\in\mathbf{N}_+$)成立的最小项，则数列$\{b_m\}$的前99项之和为____________.

10. 两个等比数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，满足$a_1=a(a>0)$，$b_1-a_1=1$，$b_2-a_2=2$，$b_3-a_3=3$.

(1) 若$a=1$，求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 若数列$\{a_n\}$唯一，求a的值.

C　组

11. 已知无穷等比数列$\{a_n\}$的各项均为正整数，且$\dfrac{a_1a_{n+1}}{a_{n+1}-a_1a_n}=2022$，$n\in\mathbf{N}_+$，则满足条件的不同数列$\{a_n\}$的个数为____________.

12. 1979年春，美籍华裔物理学家、诺贝尔物理学奖获得者李政道博士在访问中国科技大学时，向学校少年班学生提出了一个“五猴分桃”的趣题：有5只猴子在海边发现一堆桃子，决定第二天来平分. 第二天清晨，第一只猴子来了，它左等右等，见别的猴子还没来，便自作主张把桃子分成相等的五份，分完后还剩一个，它便把剩下的那个顺手扔到海里，自己拿了五份中的一份走了. 第二只猴子来了，它不知道刚才发生的事，也把桃子分成相等的五份，还是多一个，它也扔掉一个，自己拿了一份走了. 以后每只猴子来时也都遇到类似情形，也全都照此办理. 问：原来至少有多少个桃子？最后至少有多少个桃子？

1.3.3 等比数列的前 n 项和

A 组

1. 公元前 5 世纪，古希腊哲学家芝诺发表了著名的阿基里斯悖论：他提出让乌龟在跑步英雄阿基里斯前面 1000 m 处开始与阿基里斯赛跑，并且假定阿基里斯的速度是乌龟的 10 倍. 当比赛开始后，若阿基里斯跑完了 1000 m，此时乌龟便领先他 100 m，当阿基里斯跑完下一个 100 m 时，乌龟领先他 10 m，当阿基里斯跑完下一个 10 m 时，乌龟领先他 1 m…… 所以，阿基里斯永远追不上乌龟. 按照这样的规律，当阿基里斯和乌龟的距离恰好为 0.1 m 时，乌龟爬行的总距离为(　　).

A. $\dfrac{10^5-1}{900}$ m　　　　B. $\dfrac{10^5-9}{90}$ m

C. $\dfrac{10^4-9}{900}$ m　　　　D. $\dfrac{10^4-1}{90}$ m

2. 设 $b\in\mathbf{R}$，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=3^n+b$，则(　　).

A. $\{a_n\}$ 是等比数列　　　　B. $\{a_n\}$ 是等差数列

C. 当 $b=-1$ 时，$\{a_n\}$ 是等比数列　　　　D. 当 $b\neq-1$ 时，$\{a_n\}$ 是等比数列

3.（多选题）下列关于等比数列的论述正确的是(　　).

A. 在数列 $\{a_n\}$ 中，若对任意的 $n\in\mathbf{N}_+$，$a_{n+1}=2a_n$，则数列 $\{a_n\}$ 是公比为 2 的等比数列

B. 存在等比数列 $\{a_n\}$，使得 $m+n\neq p+q(m,n,p,q\in\mathbf{N}_+)$ 时，$a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$ 成立

C. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，S_n 为其前 n 项和，则对给定正整数 k，总有 $S_k,S_{2k}-S_k,S_{3k}-S_{2k},\cdots\cdots$ 成等比数列

D. 若等比数列 $\{a_n\}$ 单调递增，则 $\{a_n\}$ 的公比一定为正数

4. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_3=7$，$S_6=63$，则 $a_1=$__________.

5. 如图 1-1 所示，正方形上连接着等腰直角三角形，等腰直角三角形的腰上再连接正方形 …… 如此继续下去得到一个树状图形，称为“勾股树”. 若某勾股树含有 1023 个正方形，且其最大的正方形的边长为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，则其最小的正方形的边长为__________.

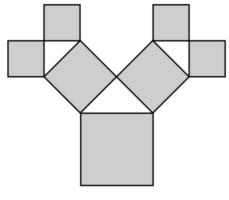

图 1-1

6. 等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_5=4a_3$，

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）记 S_n 为$\{a_n\}$的前 n 项和.若 $S_m=63$,求 m.

7．已知等差数列$\{a_n\}$的公差为 2,其前 n 项和 $S_n=pn^2+2n$,$n\in\mathbf{N}_+$,

（1）求实数 p 的值及数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）在等比数列$\{b_n\}$中,$b_3=a_1$,$b_4=a_2+4$,若$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n,求证:数列$\left\{T_n+\frac{1}{6}\right\}$为等比数列.

B　组

8．已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=2^{n-1}+1$,则数列$\{a_n\}$的前 10 项中所有奇数项之和与所有偶数项之和的比为(　　).

A. $\frac{1}{2}$　　B. 2　　C. $\frac{172}{341}$　　D. $\frac{341}{172}$

9．记数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,已知 $a_1=1$,$S_{n+1}=4a_n+1$.设 $b_n=a_{n+1}-2a_n$,

（1）求证:数列$\{b_n\}$为等比数列；

（2）设 $c_n=|b_n-100|$,T_n 为数列$\{c_n\}$的前 n 项和.求 T_{10}.

10．设首项为正数的等比数列,它的前 n 项和为 80,前 $2n$ 项和为 6560,且前 n 项中数值最大的项为 54,求此数列的首项和公比.

C　组

11. 已知公差为正数的等差数列$\{a_n\}$，a_2 与 a_8 的等差中项为 8，且 $a_3a_7=28$.

(1) 求$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 从$\{a_n\}$中依次取出第 1 项、第 3 项、第 9 项、…、第3^{n-1}项，按照原来的顺序组成一个新数列$\{b_n\}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n.

12. 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n, n\text{ 为奇数}, \\ 2a_n, n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

(1) 令 $b_n=a_{2n}$，求 b_1，b_2 及$\{b_n\}$的通项公式；

(2) 求数列$\{a_n\}$的前 $2n$ 项和 S_{2n}.

＊1.4　数学归纳法

A　组

1. 用数学归纳法证明下列等式：$-1+3-5+7+\cdots+(-1)^n(2n-1)+(-1)^{n+1}(2n+1)+(-1)^{n+2}(2n+3)=(-1)^{n+2}(n+2)$. 要验证当 $n=1$ 时等式成立，其左边的式子应为(　　).

A. -1　　B. $-1+3$　　C. $-1+3-5$　　D. $-1+3-5+7$

2. 设平面内有 k 条直线，其中任意两条不平行，任意三条不共点，设 k 条直线的交点个数为 $f(k)$，则 $f(k+1)$ 与 $f(k)$ 的关系是(　　).

A. $f(k+1)=f(k)+k+1$　　B. $f(k+1)=f(k)+k-1$

C. $f(k+1)=f(k)+k$　　D. $f(k+1)=f(k)+k+2$

3. (多选题) 意大利数学家斐波那契是第一个研究印度和阿拉伯数学理论的欧洲人，斐波那契数列被誉为是最美的数列，该数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=1$，$a_2=1$，$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geqslant 3, n\in \mathbf{N}_+)$. 若将数列的每一项按照图 1-2 的方法放进格子里，每一小格子的边长为 1，记前 n 项所占的格子的面积之和为 S_n，每段螺旋线与其所在的正方形所围成的扇形面积为 c_n，则下列结论正确的是(　　).

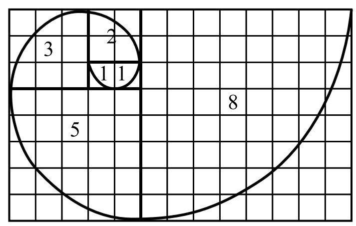

图 1-2

A. $S_{n+1}=a_{n+1}^2+a_{n+1}\cdot a_n$

B. $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=a_{n+2}-1$

C. $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}=a_{2n}-1$

D. $4(c_n-c_{n-1})=\pi a_{n-2}\cdot a_{n+1}$

4. 已知 $f(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4^n}(n\in \mathbf{N}_+)$，用数学归纳法证明：当 $f(n)>n$ 时，$f(k+1)$ 比 $f(k)$ 多了 ________ 项.

5. 用数学归纳法证明：若不等式 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}>\frac{127}{64}$ 成立，则起始值至少应取 $n=$ ________.

6. 用数学归纳法证明：$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

7. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=1-na_n(n\in \mathbf{N}_+)$，

(1) 计算 a_1, a_2, a_3, a_4；

(2) 猜想 a_n 的表达式，并用数学归纳法证明你的结论.

B 组

8. 用数学归纳法证明:$a^{n+1}+(a+1)^{2n-1}$ 能被 a^2+a+1 整除($n\in\mathbf{N}_+$).

9. 观察下列两个数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$,

数列$\{a_n\}$:1,4,9,16,25,36,49,64,81,…;

数列$\{b_n\}$:2,4,8,16,32,64,128,256,512,….

猜想从第几项起,a_n 小于 b_n,并证明你的结论.

10. 平面上有 $n(n\in\mathbf{N},n\geqslant 3)$ 个点,其中任意三点都不在同一条直线上.过这些点中任意两点作直线,这样的直线共有多少条?证明你的结论.

C 组

11. 一本旧教材上有一个关于正整数 n 的恒等式

$$1\times 2^2+2\times 3^2+\cdots+n(n+1)^2=\frac{1}{12}n(n+1).$$

其中问号处由于年代久远,只能看出它是关于 n 的二次三项式,具体的系数已经看不清楚了.请你猜想这个恒等式的形式,并用数学归纳法证明.

12. 设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,$a_3=4$,$a_4=S_3$.数列$\{b_n\}$满足:对每个 $n\in\mathbf{N}_+$,S_n+b_n,$S_{n+1}+b_n$,$S_{n+2}+b_n$ 成等比数列.

(1) 求数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的通项公式;

(2) 记$c_n=\sqrt{\dfrac{a_n}{2b_n}}$,$n\in\mathbf{N}_+$,证明:$c_1+c_2+\cdots+c_n<2\sqrt{n}$,$n\in\mathbf{N}_+$.

1.5　数列求和

A　组

1. 等差数列$\{a_n\}$中,已知公差$d=\frac{1}{2}$,且$a_1+a_3+\cdots+a_{99}=50$,则$a_2+a_4+\cdots+a_{100}$等于(　　).

A. 50　　B. 75　　C. 100　　D. 125

2. 已知等比数列$\{a_n\}$,$a_1=1$,$a_4=\frac{1}{8}$,且$a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_{n+1}<k$对一切正整数$n$成立,则$k$的取值范围是(　　).

A. $\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]$　　B. $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$　　C. $\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$　　D. $\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$

3. (多选题)已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$,且对任意的$n\in\mathbf{N}_+$都有$a_{n+1}=a_1+a_n+n$,则下列说法中正确的是(　　).

A. $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$　　B. 数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$的前 2020 项的和为$\frac{2020}{2021}$

C. 数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$的前 2020 项的和为$\frac{4040}{2021}$　　D. 数列$\{a_n\}$的第 50 项为 2550

4. 已知数列$\{na_n\}$的前n项和为S_n,且$a_n=2^n$,则使得$S_n-na_{n+1}+50<0$的最小正整数n的值为________.

5. 已知数列$\{4^n-2^n\}(n\in\mathbf{N}_+)$的前$n$项和为$S_n$,$b_n=\frac{2^n}{S_n}$,则数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n=$________.

6. 已知公差不为 0 的等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,$S_5=20$,a_3是a_2,a_5的等比中项,数列$\{b_n\}$满足对任意的$n\in\mathbf{N}_+$,$S_n+b_n=2n^2$.

(1) 求数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的通项公式;

(2) 设$c_n=\begin{cases}b_n-n^2, & n\text{ 为偶数},\\ 2^{a_n}, & n\text{ 为奇数},\end{cases}$求数列$\{c_n\}$的前$2n$项的和$T_{2n}$.

7. 在等差数列$\{a_n\}$中,已知公差$d=2$,a_2是a_1与a_4的等比中项.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2) 设$b_n=\dfrac{a_n(n+1)}{2}$,记$T_n=-b_1+b_2-b_3+b_4+\cdots+(-1)^n b_n$,求$T_n$.

B 组

8. 已知数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$满足$a_1=\dfrac{1}{18}$,$2a_{n+1}-a_n=16a_{n+1}a_n$,$b_n=\dfrac{1}{a_n}-16$.

(1) 证明:$\{b_n\}$为等比数列,并求$\{b_n\}$的通项公式;

(2) 求$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots+a_7b_7$.

9. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,$a_1=1$,$a_n>0$,$a_na_{n+1}=4S_n-1$.

(1) 计算a_2的值,求$\{a_n\}$的通项公式;

(2) 设$b_n=(-1)^n a_na_{n+1}$,求数列$\{b_n\}$的前$2n$项和T_{2n}.

10. 下面是一个由n^2个正数组成的数表,用a_{ij}表示第i行第j个数($i,j\in\mathbf{N}_+$).已知数表中第一列各数从上到下依次构成等差数列,每一行各数从左到右依次构成等比数列,且公比都相等.$a_{11}=1$,$a_{31}+a_{61}=9$,$a_{35}=48$.

$$\begin{array}{ccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}
\end{array}$$

(1) 求 a_{n1} 和 a_{4n};

(2) 设 $b_n=\dfrac{a_{4n}}{(a_{4n}-2)(a_{4n}-1)}+(-1)^n\cdot a_{n1}(n\in\mathbf{N}_+)$,求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n.

C　组

11. 设$\{a_n\}$是等差数列,$\{b_n\}$是等比数列. 已知 $a_1=4$,$b_1=6$,$b_2=2a_2-2$,$b_3=2a_3+4$.

(1) 求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式;

(2) 设数列$\{c_n\}$满足 $c_1=1$,$c_n=\begin{cases}1, 2^k<n<2^{k+1},\\ b_k, n=2^k,\end{cases}$ 其中 $k\in\mathbf{N}_+$.

① 求数列$\{a_{2^n}(c_{2^n}-1)\}$的通项公式;② 求 $\sum\limits_{i=1}^{2^n}a_ic_i(n\in\mathbf{N}_+)$.

12. 设各项均为正数的数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,满足 $S_n^2-(n^2+n-3)S_n-3(n^2+n)=0$,$n\in\mathbf{N}_+$.

(1) 求 a_1 的值;

(2) 求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(3) 证明:对一切正整数 n,有 $\dfrac{1}{a_1\sqrt{a_1+2}}+\dfrac{1}{a_2\sqrt{a_2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{a_n\sqrt{a_n+2}}\leqslant\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$.

※1.6 递推数列

A 组

1. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，$a_{n+1}-a_n=2^n$，则$a_9=$(　　).

A. 510　　B. 512　　C. 1022　　D. 1024

2. 数列$\{a_n\}$满足$a_n=4a_{n-1}+3(n\geqslant 2)$，且$a_1=0$，则此数列的第5项是(　　).

A. 15　　B. 255　　C. 16　　D. 63

3. (多选题)已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$4a_{n+1}=3a_n-n+4$，则下列结论正确的是(　　).

A. $a_3=\dfrac{13}{8}$　　B. $a_3=\dfrac{29}{8}$

C. $\{a_n+n-8\}$是等比数列　　D. $\{a_n+2\}$不可能是等比数列

4. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$n(a_{n+1}-a_n)=a_n+1$，$n\in\mathbf{N}_+$，则$\dfrac{a_n}{n}$的取值范围是__________.

5. 一牧羊人赶着一群羊通过4个关口，每过一个关口，守关人将拿走当时羊的一半，然后退还一只给牧羊人，过完这些关口后，牧羊人只剩下3只羊，则牧羊人在过第1个关口前有__________只羊.

6. 在数列$\{a_n\}$中，$a_1=\dfrac{4}{3}$，$a_{n+1}=\dfrac{8}{6-a_n}$.

(1) 令$b_n=\dfrac{a_n-2}{a_n-4}$，证明：$\{b_n\}$是等比数列，并求数列$\{b_n\}$的通项公式；

(2) 设数列$\{b_n\}$的前n项和为S_n，求满足$\dfrac{65}{64}<\dfrac{S_{2n}}{S_n}<\dfrac{9}{8}$的所有$n$的值.

7. 已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+\dfrac{a_n^2}{(n+1)^2}(n\in\mathbf{N}_+)$.

(1) 证明：$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant 1+\dfrac{1}{(n+1)^2}$；

(2) 证明：$\dfrac{2(n+1)}{n+3}<a_{n+1}<n+1$.

B　组

8．在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$n(n+1)(a_{n+1}-a_n)=1(n\in\mathbf{N}_+)$，则$a_{2020}=$(　　)．

A．$\frac{4039}{2020}$　　B．$\frac{2019}{2020}$　　C．$\frac{4037}{2019}$　　D．$\frac{2018}{2019}$

9．已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=1$，$a_2=2$，$a_n=3a_{n-1}+4a_{n-2}(n\geqslant 3)$，则$S_{10}=$(　　)．

A．$\frac{4^{10}-1}{5}$　　B．$\frac{4^{11}-1}{5}$　　C．$4^{10}-1$　　D．$4^{11}-1$

10．数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}+(-1)^n a_n=2n-1$，则$\{a_n\}$的前64项和为(　　)．

A．4290　　B．4160　　C．2145　　D．2080

C　组

11．设数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，且对任意正整数n，总有$(a_{n+1}-1)(1-a_n)=2a_n$成立，则数列$\{a_n\}$的前2019项的乘积为(　　)．

A．$\frac{1}{2}$　　B．1　　C．2　　D．3

12．已知$b>0$，数列$\{a_n\}$满足$a_1=b$，$a_n=\frac{nba_{n-1}}{a_{n-1}+2n-2}(n\geqslant 2)$．

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 证明：对于一切正整数n，$a_n\leqslant\frac{b^{n+1}}{2^{n+1}}+1$．

1.7　数列综合问题

A　组

1. 若 a,b 是函数 $f(x)=x^2-px+q(p>0,q>0)$ 的两个不同的零点,且 a,b,-2 这三个数可适当排序后成等差数列,也可适当排序后成等比数列,则 $p\cdot q=$(　　).

A. 17　　B. 18　　C. 19　　D. 20

2. 数列$\{a_n\}$是各项均为正数的等比数列,$\{b_n\}$是等差数列,且 $a_6=b_7$,则有(　　).

A. $a_3+a_9\leqslant b_4+b_{10}$　　B. $a_3+a_9\geqslant b_4+b_{10}$

C. $a_3+a_9\neq b_4+b_{10}$　　D. a_3+a_9 与 b_4+b_{10} 的大小不确定

3. (多选题)分形几何学是一门以不规则几何形态为研究对象的几何学.如图1-3所示,有一列曲线 P_0,P_1,P_2,…,P_n… 已知 P_0 是边长为1的等边三角形,P_{k+1} 是对 P_k 进行如下操作而得到的:将 P_k 的每条边三等分,以每边中间部分的线段为边,向外作等边三角形,再将中间部分的线段去掉($k=0,1,2,\cdots$).记 P_n 的周长为 L_n,面积为 S_n.对于 $n\in\mathbf{N}$,下列结论不正确的是(　　).

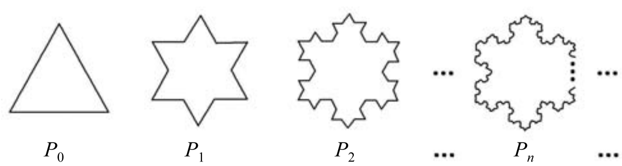

图 1-3

A. $\left\{\dfrac{S_n}{L_n}\right\}$ 为等差数列　　B. $\left\{\dfrac{S_n}{L_n}\right\}$ 为等比数列

C. $\exists M>0$,使 $L_n<M$　　D. $\exists M>0$,使 $S_n<M$

4. 有四个数,其中前三个数成等差数列,后三个数成等比数列,且第一个数与第四个数的和是16,第二个数与第三个数的和是12,这四个数依次是__________.

5. 已知公比大于1的等比数列$\{a_n\}$满足 $a_2+a_4=20$,$a_3=8$.记 b_m 为$\{a_n\}$在区间$(0,m]$($m\in\mathbf{N}_+$)中的项的个数,则 $a_n=$__________;数列$\{b_m\}$的前100项和 $S_{100}=$__________.

6. 已知数列$\{a_n\}$为等差数列,公差 $d\neq 0$,$\{a_n\}$的部分项组成的数列:a_{k_1},a_{k_2},a_{k_3},…a_{k_n} 恰为等比数列,其中 $k_1=1$,$k_2=5$,$k_3=17$,求 $k_1+k_2+k_3+\cdots+k_n$.

7. 已知数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足$a_1=1$，$b_1=0$，$4a_{n+1}=3a_n-b_n+4$，$4b_{n+1}=3b_n-a_n-4$.

(1) 证明：$\{a_n+b_n\}$是等比数列，$\{a_n-b_n\}$是等差数列；

(2) 求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式.

B　组

8. 已知集合$A=\{x\mid x=2n-1,n\in\mathbf{N}_+\}$，$B=\{x\mid x=2^n,n\in\mathbf{N}_+\}$. 将$A\cup B$的所有元素从小到大依次排列构成一个数列$\{a_n\}$. 记$S_n$为数列$\{a_n\}$的前$n$项和，则使得$S_n>12a_{n+1}$成立的$n$的最小值为____________.

9. 已知等差数列$\{a_n\}$和等比数列$\{b_n\}$满足$a_1=2$，$b_2=4$，$a_n=2\log_2 b_n$，$n\in\mathbf{N}_+$.

(1) 求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

(2) 设数列$\{a_n\}$中不在数列$\{b_n\}$中的项按从小到大的顺序构成数列$\{c_n\}$，记数列$\{c_n\}$的前n项和为S_n，求S_{100}.

10. 定义：若数列$\{a_n\}$对任意的正整数n，都有$|a_{n+1}|+|a_n|=d$（d为常数），则称$\{a_n\}$为“绝对和数列”，d叫作“绝对公和”. 已知“绝对和数列”$\{a_n\}$中，$a_1=2$，绝对公和为 3，则其前 2023 项的和S_{2023}的最小值为（　　）.

A. -2023　　B. -3010　　C. -3031　　D. -3027

C　组

11. 某校学生在研究民间剪纸艺术时，发现剪纸时经常会沿纸的某条对称轴把纸对折. 规格为 20 dm×12 dm 的长方形纸，对折 1 次共可以得到 10 dm×12 dm，20 dm×6 dm 两种规格的图形，它们的面积之和$S_1=240\ \mathrm{dm}^2$，对折 2 次共可以得到 5 dm×12 dm，10 dm×6 dm，20 dm×3 dm 三种规格的图形，它们的面积之和$S_2=180\ \mathrm{dm}^2$，以此类推，对折 4 次共可以得到不同规格图形的种数为____________；如果对折n次，那么$\sum\limits_{k=1}^{n}S_k=$____________$\mathrm{dm}^2$.

12. 给出下面的数表序列：

表1	表2	表3	…
1	1　3	1　3　5	
	4	4　8	
		12	

其中表 $n(n=1,2,3,\cdots)$ 有 n 行，第 1 行的 n 个数是 $1,3,5,\cdots,2n-1$，从第 2 行起，每行中的每个数都等于它肩上的两数之和.

(1) 写出表 4，验证表 4 各行中数的平均数按从上到下的顺序构成的等比数列，并将结论推广到表 $n(n\geqslant 3)$(不要求证明)；

(2) 每个数列中最后一行都只有一个数，它们构成数列 $1,4,12,\cdots$，记此数列为 $\{b_n\}$. 求和：$\frac{b_3}{b_1b_2}+\frac{b_4}{b_2b_3}+\cdots+\frac{b_{n+2}}{b_nb_{n+1}}(n\in\mathbf{N}_+)$.

单 元 测 试

一、单选题(共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求)

1. 已知数列$\{a_n\}$的前 4 项依次为 2,6,12,20,则数列$\{a_n\}$的通项公式可能是(　　).

A. $a_n=4n-2$　　B. $a_n=2^n+2(n-1)$

C. $a_n=n^2+n$　　D. $a_n=3^{n-1}+2n-1$

2. 从集合 $A=\{1,2,3,4\}$ 中任选 3 个不同的元素构成等差数列,这样的等差数列共有(　　)个.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. 在等差数列$\{a_n\}$中,已知 $a_1=2$, $a_2+a_3=13$,则 $a_4+a_5+a_6=$(　　).

A. 40　　B. 42　　C. 43　　D. 45

4. 已知在等比数列$\{a_n\}$中,$a_5-a_1=15$,$a_4-a_2=6$,则 $a_3=$(　　).

A. -4　　B. 4　　C. $\frac{1}{2}$ 或 2　　D. -4 或 4

5. 在等比数列$\{a_n\}$中,a_4,a_6 是方程 $x^2+5x+1=0$ 的两根,则 $a_5=$(　　).

A. 1　　B. ± 1　　C. $\frac{5}{2}$　　D. $\pm\frac{5}{2}$

6. 我国古代数学名著《算法统宗》中有如下问题:“远望巍巍塔七层,红光点点倍加增,共灯三百八十一,请问底座几盏灯?”意思是:一座 7 层塔共挂了 381 盏灯,且相邻两层中的下一层灯数是上一层灯数的 2 倍,则塔的最底层共有(　　)盏灯.

A. 24　　B. 48　　C. 96　　D. 192

7. 在公差 d 不为零的等差数列$\{a_n\}$中,$a_6=17$,且 a_3,a_{11},a_{43} 成等比数列,则 $d=$(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

8. 已知等差数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的前 n 项和分别为 S_n 和 T_n,且$\frac{S_n}{T_n}=\frac{n+5}{2n-1}$,则$\frac{a_7}{b_6}=$(　　).

A. $\frac{6}{7}$　　B. $\frac{12}{11}$　　C. $\frac{18}{25}$　　D. $\frac{16}{21}$

二、多选题(共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求,全部选对得 5 分,部分选对得 2 分,有选错的得 0 分)

9. 记 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和. 若 $a_1+3a_5=S_7$,则以下结论一定正确的是(　　).

A. $a_4=0$　　B. S_n 的最大值为 S_3　　C. $S_1=S_6$　　D. $|a_3|<|a_5|$

10. 设等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,且$S_4=S_3-\frac{1}{S_3}$.若$a_1>1$,则(　　).

A. $a_1>a_3$　　B. $a_1<a_3$　　C. $a_2<a_4$　　D. $a_2>a_4$

11. 已知数列$\{a_n\}$是公比为q的等比数列,$b_n=a_n+4$,若数列$\{b_n\}$有连续四项在集合$\{-50,-20,22,40,85\}$中,则公比q的值可以是(　　).

A. $-\frac{3}{4}$　　B. $-\frac{2}{3}$　　C. $-\frac{4}{3}$　　D. $-\frac{3}{2}$

12. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_n=n\cdot k^n(n\in\mathbf{N}_+,0<k<1)$,则下列命题正确的有(　　).

A. 当$k=\frac{1}{2}$时,数列$\{a_n\}$为递减数列

B. 当$k=\frac{4}{5}$时,数列$\{a_n\}$一定有最大项

C. 当$0<k<\frac{1}{2}$时,数列$\{a_n\}$为递减数列

D. 当$\frac{k}{1-k}$为正整数时,数列$\{a_n\}$必有两项相等的最大项

三、填空题(共4小题,每小题5分,共20分)

13. 已知等差数列$\{a_n\}$的前三项依次是1,3,5,等比数列$\{b_n\}$的前三项依次是1,2,4,则$a_{b_{11}}=$________.

14. 请写出一个符合下列要求的数列$\{a_n\}$的通项公式:①$\{a_n\}$为无穷数列;②$\{a_n\}$为单调递增数列;③$0<a_n<2$.这个数列的通项公式可以是________.

15. 一个小朋友按如图1-4所示的规则练习数数,数到2019时对应的手指是________.(各手指的名称依次为大拇指、食指、中指、无名指、小指)

16. 如图1-5所示,P_1是一块半径为$2a$的半圆形纸板,在P_1的左下端剪去一个半径为a的半圆后得到图形P_2,然后依次剪去一个更小的半圆(其直径为前一个被剪掉半圆的半径),得图形$P_3,P_4,\cdots,P_n,\cdots$,记第$n$块纸板$P_n$的面积为$S_n$,则$S_3=$________;如果对$\forall n\in\mathbf{N}_+,S_n>\frac{2020\pi}{3}$恒成立,那么$a$的取值范围是________.

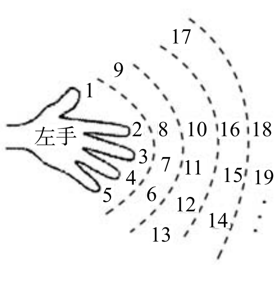

图 1-4

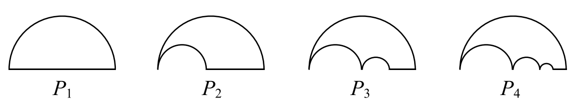

图 1-5

四、解答题(共 6 小题,共 70 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. 已知数列$\{a_n\}$中,a_1,a_2,a_3分别是表1-1第一、二、三行中的某一个数,且a_1,a_2,a_3中的任何两个数都不在表 1-1 的同一列.

表 1-1

	第一列	第二列	第三列
第一行	3	2	10
第二行	6	4	14
第三行	-2	8	18

(1) 如果数列$\{a_n\}$是等比数列,求其通项公式;

(2) 如果数列$\{a_n\}$是等差数列,求其通项公式.

18. 已知等差数列$\{a_n\}$前三项的和为-3,前三项的积为 8.

(1) 求等差数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2) 若a_2,a_3,a_1成等比数列,求数列$\{|a_n|\}$的前 n 项和.

19. (1) 已知数列$\{c_n\}$,其中$c_n=2^n+3^n$,且数列$\{c_{n+1}-pc_n\}$为等比数列,求常数 p;

(2) 设$\{a_n\}$,$\{b_n\}$是公比不相等的两个等比数列,$c_n=a_n+b_n$,证明:数列$\{c_n\}$不是等比数列.

20. 已知数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$满足$a_n=2^n-1$,$b_n=2^{n-1}$,对任意$n\in\mathbf{N}_+$,都有$\frac{b_1}{a_1a_2}+\frac{b_2}{a_2a_3}+\cdots+\frac{b_n}{a_na_{n+1}}>\frac{\lambda\cdot(-1)^n}{a_{n+1}}$,求实数$\lambda$的取值范围.

21. 某同学利用暑假时间到一家商场勤工俭学.该商场向他提供了三种付酬方案:第一种,每天支付38元;第二种,第1天付4元,从第2天起,每一天比前一天都多付4元;第三种,第1天付0.4元,以后每一天比前一天翻一番(即增加1倍).问:他选择哪种方式领取报酬更划算?

22. 给定正整数$n(n\in\mathbf{N},n\geqslant 3)$,按下列方式构成倒立的三角形数表:第一行依次写上数$1,2,\cdots,n$,在上一行的每两个相邻数的下方正中间写上这两个数的和,得到下一行.依此类推.

例如,$n=6$时的数表如图1-6所示.

1 2 3 4 5 6

3 5 7 9 11

8 12 16 20

20 28 36

48 64

112

图 1-6

(1) 填空:当$n=10$时,该数表共有________行,最后一行的数是________,倒数第二行的数是________(若有多个,请用逗号隔开);(不需证明)

(2) 填空:当$n=20$时,第15行的数从左至右构成等________(差、比)数列,公(差、比)为________;(不需证明)

(3) 当$n=100$时,求第100行的数;

(4) 当$n=2004$时,该数表中有多少个数是2004的倍数?

(说明:以上结果均可以用指数表示)