

# 数学培优竞赛一讲一练

(七年级, 第2版)

朱华伟 编著

清华大学出版社

北 京

## 内容简介

本书是《数学培优竞赛讲座(七年级,第2版)》(ISBN: 9787302640004)的配套练习册,可为读者提供自我检测.在内容上以中考数学难题和国内外初中数学竞赛为背景,按照初中数学课程的进度分专题编写,力求与课堂教学同步.在夯实基础的同时,通过新颖、有趣的数学问题,构建通往数学奥林匹克前沿的捷径;在巩固深化初中数学教材知识的同时,拓展有关中考数学和竞赛数学的知识,介绍令人耳目一新的解题方法与技巧.本书有助于激发学生创新与发现的灵感,开发智力,提高学生中考数学和初中数学竞赛的成绩.

本书可供初中生及准备参加初中数学竞赛的学生使用,同时也适合中学数学教师、数学爱好者及高等院校数学教育专业的大学生、研究生和数学教师参考使用.

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究. 举报: 010-62782989, [beiqinquan@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:beiqinquan@tup.tsinghua.edu.cn)。

### 图书在版编目(CIP)数据

数学培优竞赛一讲一练. 七年级 / 朱华伟编著. —2版. —北京: 清华大学出版社, 2023.9(2023.11重印)  
ISBN 978-7-302-64001-1

I. ①数… II. ①朱… III. ①中学数学课—初中—教学参考资料 IV. ①G634.603

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2023)第 117581 号

责任编辑: 王 定

封面设计: 周晓亮

版式设计: 思创景点

责任校对: 成凤进

责任印制: 刘海龙

出版发行: 清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址: 北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编: 100084

社总机: 010-83470000 邮 购: 010-62786544

投稿与读者服务: 010-62776969, [c-service@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:c-service@tup.tsinghua.edu.cn)

质 量 反 馈: 010-62772015, [zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn)

印 装 者: 北京同文印刷有限责任公司

经 销: 全国新华书店

开 本: 185mm×260mm 印 张: 11 字 数: 246 千字

版 次: 2021 年 8 月第 1 版 2023 年 9 月第 2 版 印 次: 2023 年 11 月第 3 次印刷

定 价: 49.80 元

---

产品编号: 102857-01

# 前 言

提升基础学科的科研水平，培养世界一流的拔尖创新人才，是推动人类文明进步和世界持续发展的重要动力。培养拔尖创新人才，一定要从娃娃抓起、从基础教育抓起。因此，重视并加强基础教育阶段的数学、物理等教育迫在眉睫，尤其是对于数理拔尖人才的早期识别和培养，适合的、特殊的成长机会及高水平的、有效的学习资源至关重要。

为了给对数学感兴趣的初中资优生提供一个扩展知识视野、提高解题能力和培养创新精神的平台，笔者以中考数学难题和国内外初中数学竞赛为背景，根据多年辅导初中数学资优生参加中考数学和初中数学竞赛积累的素材、经验和体会，编写了这套《数学培优竞赛讲座》（七年级、八年级、九年级），以及配套的《数学培优竞赛一讲一练》（七年级、八年级、九年级）。

《数学培优竞赛讲座》每册分培优篇和竞赛篇两大部分。

**培优篇** 按照初中数学教科书的进度分专题编写，在内容的安排上力求与课堂教学同步，采用从课内到课外逐步引申扩充、由浅入深、由易到难、循序渐进的教学方法；在夯实基础的同时，通过新颖、有趣的数学问题，构建通往中考数学、著名重点高中自主招生和初中数学竞赛的捷径；在学生力所能及的范围内帮助学生扩展知识视野，提高思维能力；在有利于学生把初中数学教材知识巩固深化的同时，又恰到好处地为学生拓宽有关中考数学、自主招生和竞赛数学的知识。

**竞赛篇** 以初中数学竞赛中的热点、难点问题为载体，介绍竞赛数学中令人耳目一新的解题方法与技巧，激发学生创新与发现的灵感。这类问题涉及的数学知识较少而包含的技巧性强，理解和解决时往往不需要很多专门的数学知识，而发现解法相当困难，没有固定的模式可套。它要求学生去探索、尝试，通过观察、思考，利用归纳、枚举、构造、对应、反证、奇偶分析、染色、赋值、不变量等方法技巧，发现规律，找到解决问题的途径，这恰是数学竞赛试题应有的风格。

《数学培优竞赛讲座》以专题讲座的形式编写，每讲的主要栏目如下。

**名人名言欣赏：**以名人名言开宗明义，开启每讲的数学学习之旅。

**知识方法述要：**详细归纳相关的知识、方法与技巧，突出重点、难点和考点，对于初中数学教科书中没有的内容，尽可能给出新知识、新方法的产生背景。

**例题精讲：**含“分析”“解”和“评注”，从易到难，拾级而上，由基础题、提高题、综合题组成。部分例题的解答之后有评注，评注的作用是对某些问题或解答过程中意犹未尽之处进行阐述分析，起到画龙点睛之效；对可进一步深入研究的问题予以拓展引申，引导学生去创造；对一题多解的问题提出相关的解法，发现特技与通法之间的联系。总之，评注一方



面揭示问题的背景和来源，另一方面启迪学生发现解决问题的思路及通过合理猜测提出新问题的方法，使学生不仅知其然，更知其所以然。

**同步训练：**含选择题、填空题、解答题，遵循因材施教原则，同步训练题的设置兼顾多个层次的学习需求，分为 A, B, C 三层，便于分层教学，师生在实际教学中可按需取舍。例如，对于数学基础较好的学生，可以在完成 A 组和 B 组习题的基础上努力尝试完成 C 组习题；对于数学基础较弱的学生，可以在完成 A 组习题的前提下努力尝试完成 B 组习题。为方便自学，在书后每题均给出了详细解答过程。

《数学培优竞赛一讲一练》是《数学培优竞赛讲座》的配套练习册，可以为使用者提供自我检测。书后附有详细解答，可以检验使用者对数学知识的理解水平和掌握程度。《数学培优竞赛一讲一练》与《数学培优竞赛讲座》配套使用，能达到更好的学习效果。

本书注重数学基础知识的巩固提高和数学思想方法的渗透，凸显科学精神和人文精神的融合，加强对学生学习兴趣、创新精神、应用意识和分析解决问题能力的培养。希望通过学习本书，学生能够发现数学的美丽和魅力，体会数学的思想和方法，感受数学的智慧和创新，体验经过不懈的探索而获得成功的兴奋和快乐，进而增强学习数学的兴趣。

数学大师陈省身为 2002 年 8 月在北京举行的第 24 届国际数学家大会题词：“数学好玩。”我们深信本书能让学生品味到数学的无穷乐趣。著名数学家陈景润说：“数学的世界是变幻无穷的世界，其中的乐趣只有那些坚持不懈的人才能体会得到！”

本书是初中生参加数学竞赛的宝典，是冲刺重点高中自主招生、破解中考数学压轴题的利器，是中学数学教师进行数学竞赛辅导、进修的益友。

在本书的编写过程中，笔者参考并引用了有关资料中的优秀题目，为求简明，书中未一一注明出处，在此，谨向原题编者表示感谢。由于笔者水平有限，书中难免会有疏漏之处，诚挚欢迎读者批评与指正。

李华伟

2023 年 5 月于深圳中学新校区

# 目 录

## 培优篇/1

	试题	答案
第 1 讲 有理数和数轴 .....	1	99
第 2 讲 有理数的运算 .....	4	100
第 3 讲 绝对值 .....	7	103
第 4 讲 代数初步知识 .....	10	105
第 5 讲 整式的加减 .....	13	107
第 6 讲 观察、归纳与猜想 .....	15	108
第 7 讲 定义新运算 .....	19	110
第 8 讲 一元一次方程 .....	22	111
第 9 讲 一元一次方程的应用 .....	24	113
第 10 讲 线段与角 .....	27	115
第 11 讲 相交线与平行线 .....	30	117
第 12 讲 面积 .....	33	118
第 13 讲 图形的计数 .....	37	121
第 14 讲 立体图形初步 .....	40	123
第 15 讲 实数 .....	44	125
第 16 讲 平面直角坐标系 .....	46	126
第 17 讲 一次方程组 .....	49	128
第 18 讲 一次方程组的应用 .....	52	130
第 19 讲 一元一次不等式 .....	55	132
第 20 讲 一次不等式组 .....	57	134
第 21 讲 一次不等式(组)的应用 .....	59	136
第 22 讲 行程问题 .....	61	138
第 23 讲 数据的收集、整理与描述 .....	64	141

## 竞赛篇/70

第 24 讲 数的进位制 .....	70	142
第 25 讲 数的整除性 .....	72	144
第 26 讲 奇偶分析 .....	74	147



第 27 讲	带余除法 .....	77	149
第 28 讲	质数、合数与分解质因数 .....	79	151
第 29 讲	最大公约数与最小公倍数 .....	81	154
第 30 讲	一次不定方程 .....	83	156
第 31 讲	计数方法与原理 .....	86	159
第 32 讲	估计与估算 .....	89	162
第 33 讲	离散最值 .....	92	164
第 34 讲	逻辑推理 .....	95	167



## 第 1 讲 有理数和数轴

### 一、填空题(每题 5 分,共 50 分)

1. 若  $a, b$  互为相反数,  $c, d$  互为负倒数, 则  $(a+b)^{2016} + (cd)^{2015} =$  \_\_\_\_\_.

2. 有理数  $a, b$  在数轴上的位置如图 1-1 所示, 则在  $a+b, a-b, ab, a^3, a^2b^3$  这 5 个数中, 正数的个数是 \_\_\_\_\_.

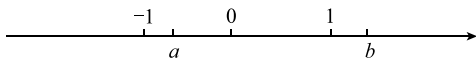


图 1-1

3. 如图 1-2 所示, 数轴上标出若干个等距点, 每相邻两点相距 1 个单位, 点  $A, B, C, D$  对应的数分别是整数  $a, b, c, d$ , 且  $d-2a=10$ , 那么数轴的原点应是 \_\_\_\_\_.

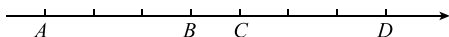


图 1-2

4. 若  $a+b < 0, b > 0$ , 则  $a, -a, b, -b$  的大小关系是 \_\_\_\_\_.

5. 在数轴上任取一条长度为  $1999\frac{1}{9}$  的线段, 则此线段在这条数轴上最多能盖住的整数点的个数是 \_\_\_\_\_.

6. 若  $a$  是小于 1 的正数, 试将  $-a, -\frac{1}{a}, \frac{1}{a}, a, 0, -1, 1$  这 7 个有理数由小到大排成一列, 并用“ $<$ ”连接, 顺序为 \_\_\_\_\_.

7. 已知  $m, n$  是不大于 5 的正整数, 且  $\frac{n}{m}$  是最简真分数, 则形如  $-\frac{n}{m}$  的不同有理数一共有 \_\_\_\_\_ 个.



8. 已知三个互不相等的数,可以表示成  $1, a+b, a$  的形式,也可以表示成  $0, \frac{b}{a}, b$  的形式,那么  $a+3b=$  \_\_\_\_\_.

9. 在数轴上,点  $N$  与点  $O$  的距离是点  $N$  与  $30$  所对应的点的距离的  $4$  倍,那么点  $N$  对应的数是 \_\_\_\_\_.

10. 数轴上有一动点  $A$ ,从原点出发沿着数轴移动,每次只允许移动  $1$  个单位. 经过  $10$  次移动,点  $A$  移动到距离原点  $6$  个单位处,那么点  $A$  的移动方法有 \_\_\_\_\_ 种.

## 二、解答题(每题 10 分,共 50 分)

11. 若  $a$  为有理数,在  $-a$  与  $a$  之间有  $1997$  个整数,则  $a$  的取值范围是什么?

12. 如图 1-3 所示,已知数轴上  $A, B, C, D$  四点对应的实数都是整数,每两个相邻的点相距  $1$  个单位,如果  $A$  对应的实数为  $a, B$  对应的实数为  $b$ ,且  $b-2a=9$ ,那么数轴上的原点应该是  $A, B, C, D$  中的哪一点?

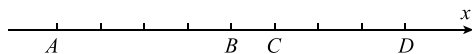


图 1-3

13. 比较  $-\frac{2}{3}, -\frac{5}{8}, -\frac{15}{23}, -\frac{10}{17}, -\frac{12}{19}$  的大小.

14. 已知有理数  $a, b$  在数轴上的位置如图 1-4 所示, 若设  $M = a + b, N = -a + b, H = a - b, G = -a - b$ , 试比较  $M, N, G, H$  的大小.

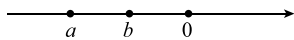


图 1-4

15. 已知三个有理数  $a, b, c$  两两不等, 那么  $\frac{a-b}{b-c}, \frac{b-c}{c-a}, \frac{c-a}{a-b}$  中有多少个是负数?

## 第 2 讲 有理数的运算

### 一、填空题(每题 5 分,共 50 分)

1. 100 个数之和为 1990,把第 1 个数减 1,第 2 个数加 2,第 3 个数减 3,⋯,第 100 个数加 100,则所得新数之和为\_\_\_\_\_.

2. 计算:  $\frac{-3^3 \times (-5) + 16 \div (-2)^3 - |-4 \times 5| + \left(\frac{5}{8} - 3.625\right)^2}{[0 - (-27)] \div (-3) + 12 \times [(-3) + (-8) \div 6]} =$ \_\_\_\_\_.

3. 如果  $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{2003}{2004}$ ,那么  $n =$ \_\_\_\_\_.

4. 计算:  $\frac{1}{11 \times 13 \times 15} + \frac{1}{13 \times 15 \times 17} + \cdots + \frac{1}{29 \times 31 \times 33} =$ \_\_\_\_\_.

5. 计算:  $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{50} + \frac{2}{50} + \cdots + \frac{48}{50} + \frac{49}{50}\right) =$ \_\_\_\_\_.

6. 从  $-4, -2, -1.5, -0.5, 0, 2.5, 3$  这 7 个数中任意选出几个作乘法,乘积的最大值是\_\_\_\_\_,最小值是\_\_\_\_\_.

7. 某地区 2008 年 2 月 21 日至 2 月 28 日的平均气温为  $-1^\circ\text{C}$ ,2 月 22 日至 2 月 29 日的平均气温为  $-0.5^\circ\text{C}$ ,2 月 21 日的平均气温为  $-3^\circ\text{C}$ ,则 2 月 29 日的平均气温为\_\_\_\_\_.

8. 甲、乙两队举行拔河比赛,标志物先向乙队方向移动 0.2 m,又向甲队方向移动 0.5 m,相持一会儿,又向乙队方向移动 0.4 m,随后又向甲队方向移动 1.3 m,在大家的欢呼鼓励中,标志物又向甲队移动 0.9 m,若规定标志物向某队方向移动 2 m 该队即可获胜,那么现在\_\_\_\_\_队赢.

9. 代数和  $-1 \times 2008 + 2 \times 2007 - 3 \times 2006 + 4 \times 2005 + \cdots - 1003 \times 1006 + 1004 \times 1005$  的个位数字是\_\_\_\_\_.

10. 已知  $O$  为数轴的原点, $A, B$  两点对应的数分别为  $-1, 1$ ,设  $P_1$  是  $OB$  的中点, $P_2$  是  $AP_1$  的中点, $P_3$  是  $P_1P_2$  的中点,⋯, $P_{10}$  是  $P_8P_9$  的中点,则  $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_{10}$  所对应的 10 个有理数之和为\_\_\_\_\_.

## 二、解答题(每题10分,共50分)

11. 能否在下式的“□”中填入“+”或“-”号,使等式成立;若不能,请说明理由.

$$15 \square 13 \square 11 \square 9 \square 7 \square 5 \square 3 \square 1 = 40.$$

12. 恰用4个数字4和一些加、乘、幂运算、负号、分数线和括号,写出5个值都等于5的不同算式.

13. 据说阿凡提来到印度,向印度国王挑战下国际象棋.国王说:我们打个赌,你要是能赢了我,要什么我都可以给你.阿凡提说:我赢你的话,只要你在国际象棋的棋盘格子里,第一格放1粒米,第二格放2粒米,以后的每个格子里都放前一个格子里米粒的2倍,我就满足了.同学们,请你们先用一个代数式表示阿凡提所要的这个国际象棋棋盘(棋盘共有64格)中米粒的总和 $S$ ,并估计一下,这些米粒数可能会是个多少位数,国王能拿得出这么多的米吗?

14. 已知  $S = \frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{3}{8} - \frac{4}{16} + \dots + (-1)^{k+1} \frac{k}{2^k} + \dots + \frac{2005}{2^{2005}} - \frac{2006}{2^{2006}}$ , 求小于 $S$ 的最大整数.



15. 已知  $m, n$  都是正整数, 并且

$$A = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 + \frac{1}{m}\right),$$

$$B = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

(1) 证明:  $A = \frac{m+1}{2m}$ ,  $B = \frac{n+1}{2n}$ ;

(2) 若  $A - B = \frac{1}{26}$ , 求  $m$  和  $n$  的值.