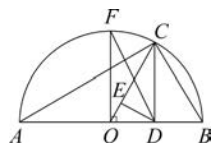


第3章 不等式

不等式是数学里面很重要的一块知识,跟各个模块都很契合进而形成各类不等式问题。不等式主要培养发散思维,不等式的思想是开放的、相对的,不同于等式的绝对。我们需要灵活掌握不等式的思想,从而灵活解决各类不等式问题。

基本不等式的几何证明:

在半圆中, $AD = a, BD = b$, 则 $OC = OF = \frac{a+b}{2}$, $AC \perp BC$, $CD \perp AB$,
 $OF \perp AB$, $DE \perp OC$, $CD = \sqrt{ab}$, $CE = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$, $FD = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$, 由 $CE \leq CD \leq$



$OC = OF \leq FD$ 得 $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ 。

刷题散点图

让我们用数学的思想来备战高考数学,如统计中的散点图可展示出数据的分布和聚合情况,甚至可以得到趋势线公式。大道至简,请在刷题后完成属于你的本章刷题散点图,直接用你刷题的黑笔在题号上标出即可,做对画 $\checkmark$,做错画 $\times$ 。

完成后,根据题号的分布和聚合情况,合理安排你的二刷甚至三刷。

3.1

199 200 201 202 203 204

205 206 207 208 209 210

211 212 213 214

3.2

215 216 217 218 219 220

3.1 基本不等式



核心笔记

基本不等式是解决不等式问题的重要工具,既可以求解相关代数式的范围,也可用于放缩,使用的核心在于搞清楚代数式之间的关联。

1. 若 $a, b \in \mathbf{R}$, 则 $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, 当且仅当 $a = b$ 时取“=”。

2. 若 $a, b \in \mathbf{R}^+$, 则 $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, 当且仅当 $a = b$ 时取“=”。

变式: $ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, 当且仅当 $a = b$ 时取“=”。

3. 重要结论: 若 $a > 0, b > 0$, 则

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}, \text{ 当且仅当}$$

$a = b$ 时取“=”。

$$\textcircled{4} a^3 + b^3 \geqslant 3;$$

$$\textcircled{5} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geqslant 2.$$

【200】(2022·新高考全国二·12·) (多选题)

对任意 $x, y, x^2 + y^2 - xy = 1$, 则 ()。

A. $x + y \leqslant 1$

B. $x + y \geqslant -2$

C. $x^2 + y^2 \leqslant 2$

D. $x^2 + y^2 \geqslant 1$

【199】(2010·安徽·15·) (多选题)

若 $a > 0, b > 0, a + b = 2$, 则下列不等式对一切满足条件的 a, b 恒成立的是 _____。(写出所有正确命题的编号)

① $ab \leqslant 1$;

② $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leqslant \sqrt{2}$;

③ $a^2 + b^2 \geqslant 2$;

不是超常发挥,而是蓄谋已久。(推荐人: @木子李三金(河南驻马店))

【201】(2015·天津·12·🔥🔥🔥)

已知 $a > 0, b > 0, ab = 8$, 则当 a 的值为 _____ 时, $\log_2 a \cdot \log_2 (2b)$ 取得最大值。

【202】(2015·重庆·14·🔥🔥🔥)

设 $a, b > 0, a + b = 5$, 则 $\sqrt{a+1} + \sqrt{b+3}$ 的最大值为 _____。

【203】(2015·山东·14·🔥🔥🔥)

定义运算“ $\otimes$ ”： $x \otimes y = \frac{x^2 - y^2}{xy} (x, y \in \mathbf{R}, xy \neq 0)$ 。当 $x > 0, y > 0$ 时, $x \otimes y + (2y) \otimes x$ 的最小值为 _____。

【204】(2013·天津·14·🔥🔥🔥)

设 $a + b = 2, b > 0$, 则当 $a =$ _____ 时, $\frac{1}{2|a|} + \frac{|a|}{b}$ 取得最小值。

【205】(2020·江苏·12·)

已知 $5x^2y^2 + y^4 = 1 (x, y \in \mathbf{R})$, 则 $x^2 + y^2$ 的最小值为_____。

【207】(2020·天津·14·)

已知 $a > 0, b > 0$, 且 $ab = 1$, 则 $\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{8}{a+b}$ 的最小值为_____。

【206】(2017·天津·12·)

若 $a, b \in \mathbf{R}, ab > 0$, 则 $\frac{a^4 + 4b^4 + 1}{ab}$ 的最小值为_____。

【208】(2010·四川·11·)

设 $a > b > 0$, 则 $a^2 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{a(a-b)}$ 的最小值是()。

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【209】 (2011 · 天津 · 12 · 🍷🍷🍷)

已知 $\log_2 a + \log_2 b \geq 1$, 则 $3^a + 9^b$ 的最小值为_____。

【210】 (2013 · 山东 · 理 12 · 🍷🍷🍷🍷)

设正实数 x, y, z 满足 $x^2 - 3xy + 4y^2 - z = 0$, 则当 $\frac{xy}{z}$ 取得最大值时, $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{z}$ 的最大值为()。

- A. 0 B. 1 C. $\frac{9}{4}$ D. 3

【211】 (2013 · 山东 · 文 12 · 🍷🍷🍷)

设正实数 x, y, z 满足 $x^2 - 3xy + 4y^2 - z = 0$, 则当 $\frac{z}{xy}$ 取得最小值时, $x + 2y - z$ 的最大值为()。

- A. 0 B. $\frac{9}{8}$ C. 2 D. $\frac{9}{4}$

【212】 (2014 · 辽宁 · 理 16 · 🍷🍷🍷🍷)

对于 $c > 0$, 当非零实数 a, b 满足 $4a^2 - 2ab + 4b^2 - c = 0$, 且使 $|2a + b|$ 最大时, $\frac{3}{a} - \frac{4}{b} + \frac{5}{c}$ 的最小值为_____。

【213】(2014·辽宁·文16·★★★★)

对于 $c > 0$, 当非零实数 a, b 满足 $4a^2 - 2ab + b^2 - c = 0$, 且使 $|2a + b|$ 最大时, $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{4}{c}$ 的最小值为_____。

【214】(2011·重庆·15·★★★★)

若实数 $2^a + 2^b = 2^{a+b}$, $2^a + 2^b + 2^c = 2^{a+b+c}$, 则 c 的最大值是_____。

3.2 不等式综合问题

核心笔记

不等式的综合问题对学生基础要求较高,既要掌握关于不等式的基础知识和各类其他知识,也要有敏锐的观察力和缜密的数学思维能力,要能从多个角度对问题进行剖析并寻求内部关联和转化。

【215】(2012·浙江·17·★★★★)

设 $a \in \mathbf{R}$, 若 $x > 0$ 时, 均有 $[(a-1)x - 1] \cdot (x^2 - ax - 1) \geq 0$, 则 $a =$ _____。

【216】(2020·浙江·9·★★★★)

已知 $a, b \in \mathbf{R}$ 且 $ab \neq 0$, 对于任意 $x \geq 0$ 均有 $(x-a)(x-b)(x-2a-b) \geq 0$, 则 ()。

A. $a < 0$ B. $a > 0$ C. $b < 0$ D. $b > 0$

【217】(2015·浙江·14·🔥🔥🔥)

若实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 \leq 1$, 则 $|2x + y - 2| + |6 - x - 3y|$ 的最小值是_____。

【218】(2012·江苏·14·🔥🔥🔥🔥)

已知正数 a, b, c 满足: $5c - 3a \leq b \leq 4c - a$, $c \ln b \geq a + c \ln c$, 则 $\frac{b}{a}$ 取值范围是_____。

【219】(2014·浙江·16·🔥🔥🔥)

已知实数 a, b, c 满足 $a + b + c = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, 则 a 的最大值为_____。

【220】(2020·新课标全国三·12·🔥🔥🔥)

已知 $5^5 < 8^4$, $13^4 < 8^5$, 设 $a = \log_5 3$, $b = \log_8 5$, $c = \log_{13} 8$, 则()。

A. $a < b < c$ B. $b < a < c$
C. $b < c < a$ D. $c < a < b$

第4章 三角函数

三角函数是高中数学重要的内容之一,主要包含了三角函数的性质及其应用,三角恒等变换。这里需要同学们深刻掌握三角函数的性质并在解题中加以应用。而三角恒等变换需要同学们掌握各类公式及其变形和转换关联。三角函数也是一种函数,只不过是以角度为自变量的,因而在具体解题中函数思想是适用的。

刷题散点图

让我们用数学的思想来备战高考数学,如统计中的散点图可展示出数据的分布和聚合情况,甚至可以得到趋势线公式。大道至简,请在刷题后完成属于你的本章刷题散点图,直接用你刷题的黑笔在题号上标出即可,做对画 $\checkmark$,做错画 $\times$ 。

完成后,根据题号的分布和聚合情况,合理安排你的二刷甚至三刷。

4.1

221	222	223	224	225	226
227	228	229	230	231	
232	233	234	235	236	237
238	239	240	241	242	243
244	245	246	247		