第1章 质点运动学

一、基本要求

1. 掌握位置矢量、速度和加速度等描述质点运动的物理概念，理解运动的矢量性、相对性和瞬时性。

2. 掌握运动的叠加原理，并利用其处理复杂运动。

3. 利用自然坐标系计算切向加速度和法向加速度，掌握质点做圆周运动时的角速度、角加速度、切向加速度和法向加速度的概念及其计算方法。

4. 掌握运用高等数学的微积分手段解决运动学两类问题的求解方法。

5. 理解运动的相对性原理和伽利略变换，并掌握质点相对运动问题的计算方法。

二、知识要点

1. 运动函数（或运动方程）

位置矢量：用以确定质点位置的矢量，其定义式为

$$\boldsymbol{r}=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$$

位移：质点在一段时间内位置的改变，其定义式为

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)$$

2. 速度与加速度的定义

速度：位置矢量对时间的变化率，其定义式为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

加速度：质点速度对时间的变化率，其定义式为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

3. 曲线运动的加速度

对于曲线运动，质点的加速度等于法向加速度与切向加速度的矢量和，即 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}$。其中，法向加速度为 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}=\dfrac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$，切向加速度为 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}$。

圆周运动：$a_{\mathrm{n}}=\dfrac{v^2}{R}=R\omega^2$，$a_{\mathrm{t}}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=R\,\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=R\alpha$。

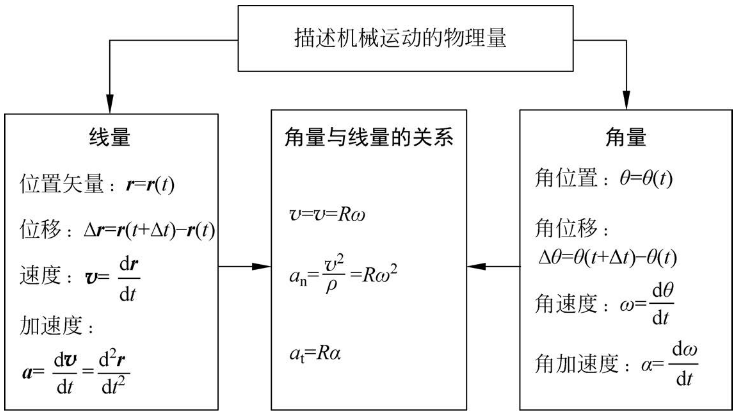
4. 伽利略速度变换

一个质点在两个相对平动的参考系中的速度之间的关系为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{u}$$

其中,$\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{v}'$分别表示质点相对于参考系 S 和 S'的速度,$\boldsymbol{u}$ 是参考系 S'相对于参考系 S 的速度。

三、知识梗概框图



四、基本题型

1. 运动学第一类问题

已知运动函数(或运动方程)$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$,求速度、加速度、切向加速度、法向加速度、平均速度、平均加速度、位移、路程、任一时刻的位置以及轨道方程等。

已知运动函数 $s=s(t)$或 $\theta=\theta(t)$,求速率、切向加速度、法向加速度、角位置、角位移、角速度、角加速度等。

2. 运动学第二类问题

已知加速度 $\boldsymbol{a}$(或速度$\boldsymbol{v}$)及初始条件,求速度和运动函数。其中,$\boldsymbol{a}$ 有三种表示情况:$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t)$、$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(v)$和 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(x,y,z)$。

已知角加速度 α(或角速度 ω)及初始条件,求角速度和角位置。其中,α 也有三种表示情况:$\alpha=\alpha(t)$、$\alpha=\alpha(\omega)$、$\alpha=\alpha(\theta)$。

3. 相对运动问题的求解

已知质点相对某一参考系的运动情况,求它相对另一参考系的运动情况。

五、解题方法介绍

1. 质点运动学第一类问题的求解方法

对于运动学第一类问题,求解它的数学方法为微分法。关键是求出质点的运动函数,然后对运动函数求导数,得到速度和加速度。题中运动函数可能是矢量方程,也可能是分量方程,对矢量方程可直接微分,无须转换为分量方程。运动函数可能是直接给出的,也可能是间接给出的,对于间接给出的运动函数的形式,要明确运动函数与已知条件之间的关系,列出包含中间变量的运动函数是关键,这类问题常涉及复合函数的微分运算。

2. 质点运动学第二类问题的求解方法

对于运动学第二类问题,求解它的数学方法为积分法。根据加速度的不同表达式,采用

不同的积分方法。对于 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(x)$ 或 $\alpha=\alpha(\theta)$ 这类问题，常涉及变量替换的问题，要求对定积分知识有较为全面的理解，从而掌握变量变换的技巧。

3. 相对运动问题的求解方法

求解这类问题，一般是从相对性原理和伽利略变换出发，运用矢量方法求解。首先要明确研究对象，然后选择两个参考系，画出三个速度之间关系的矢量示意图，再进行求解。正确地画出速度矢量示意图是解决这类问题的关键。

六、典型例题

例题 1.1　质点的运动函数为 $x=t$，$y=4t^2+5$，式中的量均采用 SI 单位。求：

(1) 质点运动的轨道方程；

(2) $t_1=1$ s 和 $t_2=2$ s 时，质点的位置、速度和加速度。

选题目的　掌握轨道方程、速度和加速度的计算方法。

分析　本题属于质点运动学第一类问题，题中已给出质点的运动函数，消去时间 t 即可得到轨道方程。根据速度和加速度的定义，通过微分计算，可以得到速度和加速度的矢量表示式。

解　(1) 消去运动函数中的 t，得轨道方程为

$$y=4x^2+5$$

即质点沿一抛物线运动。

(2) 由题可得质点的位矢为

$$\boldsymbol{r}=t\boldsymbol{i}+(4t^2+5)\boldsymbol{j}$$

因此，速度和加速度分别为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{i}+8t\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=8\boldsymbol{j}$$

当 $t_1=1$ s 和 $t_2=2$ s 时，质点的位置分别为

$$\boldsymbol{r}_1=(\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j})\ \mathrm{m},\quad \boldsymbol{r}_2=(2\boldsymbol{i}+21\boldsymbol{j})\ \mathrm{m}$$

速度分别为

$$\boldsymbol{v}_1=(\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j})\ \mathrm{m},\quad \boldsymbol{v}_2=(\boldsymbol{i}+16\boldsymbol{j})\ \mathrm{m}$$

加速度为

$$\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}_2=(8\boldsymbol{j})\ \mathrm{m/s^2}$$

例题 1.2　已知质点的运动函数 $\boldsymbol{r}=R(\cos kt^2\boldsymbol{i}+\sin kt^2\boldsymbol{j})$，式中 R，k 均为常量，求：

(1) 质点运动的速度和加速度的表达式。

(2) 质点的切向加速度和法向加速度大小。

选题目的　掌握速度、加速度以及切向加速度和法向加速度的计算方法。

分析　本题已知运动函数求速度和加速度，属于运动学第一类问题。题中还涉及切向加速度和法向加速度的概念，可从定义出发计算结果。

解　(1) 根据速度的定义式可得质点运动的速度为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}[R(\cos kt^2\boldsymbol{i}+\sin kt^2\boldsymbol{j})]}{\mathrm{d}t}$$

所以,质点运动的速度的表达式为

$$\boldsymbol{v}=2ktR(-\sin kt^2\boldsymbol{i}+\cos kt^2\boldsymbol{j}) \qquad (\text{Ⅰ})$$

由 $\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$计算并整理得,质点运动的加速度的表达式为

$$\boldsymbol{a}=-2kR(2kt^2\cos kt^2+\sin kt^2)\boldsymbol{i}+2kR(\cos kt^2-2kt^2\sin kt^2)\boldsymbol{j} \qquad (\text{Ⅱ})$$

(2) 由速度表达式(Ⅰ)可以算出对应的速率大小为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=2ktR$$

因此,质点的切向加速度和法向加速度的大小为

$$a_{\mathrm{t}}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=2kR,\quad a_{\mathrm{n}}=\frac{v^2}{R}=4k^2Rt^2$$

讨论 已知质点的运动函数,则可求得质点的速度,从而加速度就完全确定了。本题求出了直角坐标系中的加速度表达式,也用自然坐标系中的切向加速度 a_{t} 和法向加速度 a_{n} 表示加速度 $\boldsymbol{a}$,但二者的形式不同。

例题 1.3 一质点沿直线运动,加速度为 $a=4-t^2$(SI)。当 $t=3$ s 时,$x=9$ m,$v=2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$,求质点的运动方程。

选题目的 掌握已知加速度积分求解速度、运动方程的方法。

分析 本题属于质点运动学第二类问题,给出加速度的表达式是 t 的函数,可直接积分先求质点的速度,再积分求质点的运动方程。

解 先计算质点的速度,得

$$v=v_0+\int_0^t a\,\mathrm{d}t=v_0+\int_0^t(4-t^2)\mathrm{d}t=v_0+4t-\frac{1}{3}t^3 \qquad (\text{Ⅰ})$$

再计算质点的运动方程,得

$$x=x_0+\int_0^t v\,\mathrm{d}t=x_0+\int_0^t\left(v_0+4t-\frac{1}{3}t^3\right)\mathrm{d}t=x_0+v_0t+2t^2-\frac{1}{12}t^4 \qquad (\text{Ⅱ})$$

将已知条件:$t=3$ s 时,$x=9$ m,$v=2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 代入式(Ⅰ)和式(Ⅱ)得

$$x_0=0.75\ \mathrm{m},\quad v_0=-1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

求得质点的运动方程为

$$x=0.75-t+2t^2-\frac{1}{12}t^4$$

讨论 本题给出的已知条件不是 $t=0$ 时刻的初始条件,而是 $t=3$ s时的运动状态,利用此条件求出 x_0,v_0 是解决本题的关键。

例题 1.4 一质点沿半径为 R 的圆周运动,质点所经过的弧长与时间的关系为 $S=v_0t-\dfrac{1}{2}bt^2$,其中 v_0,b 均为大于零的常数。求:

(1) t 时刻质点加速度的大小。

(2) t 为何值时,加速度在数值上等于 b。

(3) 当加速度达到 b 时,质点已沿圆周运行了多少圈。

选题目的 掌握已知路程计算速率及加速度的方法。

分析 本题已知路程求速率,属于质点运动学第一类问题。题中还涉及切向加速度和法向加速度的概念,可从定义出发计算加速度。

解　(1) 由题意可知，质点运动的速率为

$$v=\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=v_0-bt$$

所以质点的切向加速度和法向加速度分别为

$$a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-b,\quad a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{(v_0-bt)^2}{R}$$

故加速度的大小为

$$a=\sqrt{a_n^2+a_t^2}=\frac{\sqrt{R^2b^2+(v_0-bt)^4}}{R}$$

(2) 根据题意可知 $a=b$，所以

$$a=\frac{\sqrt{R^2b^2+(v_0-bt)^4}}{R}=b$$

由上式解得

$$t=\frac{v_0}{b}$$

(3) 由(2)的结果，则在时间 t 内运动的路程为

$$s=v_0t-\frac{1}{2}bt^2=\frac{v_0^2}{2b}$$

所以运动的总圈数 n 为

$$n=\frac{s}{2\pi R}=\frac{v_0^2}{4\pi Rb}$$

讨论　本题是自然坐标系表示下的质点运动学第一类问题，即已知路程求加速度。在已知 $s=s(t)$ 时，a_t 和 a_n 均可通过求质点的速率而得，因此，求切向加速度 a_t 和法向加速度 a_n 的大小的关键是求出质点的速率。

例题 1.5　一列车沿水平直线运动，刹车后列车的加速度与其速度关系为 $a=-kv$，k 为一正常数，刹车时的车速为 v_0，求刹车后列车最多能行进多远？

选题目的　由质点的加速度巧妙利用积分法求质点的运动函数。

分析　本题属于质点运动学第二类问题。可以在数学上采用降阶的办法，先求出速度，然后进一步积分求得位移，也可以利用换元法直接计算位移。

解　设列车沿 x 轴运动，初始位置为 $x_0=0$。

方法 1　由加速度的定义式可知

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv \tag{Ⅰ}$$

分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}v}{v}=-k\,\mathrm{d}t$$

对上式两边积分，并代入初始条件得

$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v}=\int_0^t-k\,\mathrm{d}t$$

解得

$$v=v_0 e^{-kt} \tag{Ⅱ}$$

因为

$$x=x_0+\int_0^t v\,dt$$

将式(Ⅱ)代入上式,计算可得

$$x=\frac{v_0}{k}(1-e^{-kt})$$

当 $t\to\infty$ 时,得

$$x_{max}=\frac{v_0}{k}$$

方法 2 由题中关系,利用$\frac{dx}{dt}=v$ 作变量变换,即

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}=-kv$$

分离变量,得

$$dx=-\frac{1}{k}dv$$

对上式两边积分,并代入初始条件,可得

$$\int_0^{x_{max}}dx=\int_{v_0}^0-\frac{1}{k}dv$$

解得

$$x_{max}=\frac{v_0}{k}$$

讨论 本题已知加速度与速度的函数关系,求速度、位移,属于质点运动学第二类问题。此类问题不能直接利用 $v=v_0+\int_0^t a\,dt$ 计算,因为题目给出的加速度 a 是速度 v 的函数。本题方法 1 由加速度的定义式出发,先积分算出速度,再积分算出位移。方法 2 用变量 x 替换时间变量 t,积分算出位移与速度的关系。

例题 1.6 一质点沿 x 轴运动,其加速度与位置的关系为 $a=-kx$,k 为常数。已知 $t=0$ 时,质点瞬时静止于 $x=x_0$ 处。试求质点的运动方程。

选题目的 掌握利用变量替换的方法由加速度求解运动方程。

分析 本题属于质点运动学第二类问题。由加速度求运动方程,一般来说,在数学上要采用降阶的办法,即先求出速度,然后进一步积分求得位移。

解 根据题意和加速度的定义,有

$$a=\frac{dv}{dt}=-kx \tag{Ⅰ}$$

将上式分子、分母都乘以 dx,并利用$\frac{dx}{dt}=v$ 将变量 t 替换为 v,得

$$a=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}=-kx \tag{Ⅱ}$$

分离变量，得

$$v\mathrm{d}v = -kx\mathrm{d}x$$

对上式两边积分，并代入初始条件，得

$$\int_0^v v\mathrm{d}v = \int_{x_0}^x -kx\mathrm{d}x$$

解得

$$v^2 = k(x_0^2 - x^2) \tag{Ⅲ}$$

将式(Ⅲ)代入$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v$ 进行积分，并代入初始条件，得

$$\int_{x_0}^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} = \int_0^t \pm\sqrt{k}\,\mathrm{d}t$$

积分，得

$$\arccos\left(\frac{x}{x_0}\right) = \pm\sqrt{k}\,t$$

故

$$x = x_0\cos\sqrt{k}\,t$$

讨论　本题已知加速度与位矢的函数关系为 $a = a(x)$ 求位移，属于运动学第二类问题。此类问题不能直接积分，因为在式(Ⅰ)中存在着 v、x 和 t 三个变量，因此，必须消去一个变量，由于加速度为位移 x 的函数，所以只能消去时间变量 t，先求出速度与位移之间的函数关系 $v = v(x)$，然后再根据速度的定义，求出位移与时间的关系。

例题 1.7　一半径为 0.5 m 的飞轮在启动的短时间内，其角速度与时间的平方成正比。在 $t = 2.0$ s 时，测得轮子边缘一点的速率为 $4.0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$。求：

(1) $t = 0.5$ s 时飞轮的角速度、轮子边缘一点的切向加速度和总加速度；

(2) 飞轮在 2 s 内转过的角度。

选题目的　掌握利用圆周运动的线量描述和角量描述的关系来计算角速度、切向加速度和法向加速度的方法。

分析　根据速率与角速度的关系，先求出 $t = 2.0$ s 的角速度，然后求出角速度与时间的函数关系(角速度的表达式)，再利用切向加速度和法向加速度的定义求出切向加速度和总加速度的大小，最后利用积分求出转过的角度。

解　(1) 当 $t = 2$ s 时，$\omega = \frac{v}{R} = 8\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$，设比例系数为 k，根据题意得 $\omega = kt^2$，所以

$$k = \frac{\omega}{t^2} = 2\ \mathrm{rad\cdot s^{-3}}$$

则得

$$\omega = 2t^2$$

因此，$t = 0.5$ s 的角速度、角加速度、切向加速度和法向加速度分别为

$$\omega = 2t^2 = 0.5\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 4t = 2.0\ \mathrm{rad\cdot s^{-2}}$$

$$a_\mathrm{t} = \alpha R = 1.0\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

$$a_n = \omega^2 R = 0.125\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

故得总加速度为

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = 1.01\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

(2) 飞轮在 2 s 内转过的角度为

$$\Delta\theta = \int_0^2 \omega \mathrm{d}t = \int_0^2 2t^2 \mathrm{d}t = 5.33\ \mathrm{rad}$$

讨论 本题首先要根据已知条件得出角速度的表达式,即求出 k 值。要熟练掌握运用切向加速度和法向加速的定义式求解其数值。由角速度函数求转过的角度属于质点运动学第二类问题,要用积分求解。

例题 1.8 如图 1-1 所示,在离水面高度为 h 的岸边上,有人用绳子拉船靠岸,收绳的速率恒为 v_0,求船在离岸边的距离为 x 时的速度和加速度。

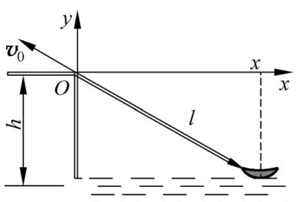


图 1-1 例题 1.8 用图

选题目的 应用加速度与速度的定义灵活计算。本题间接给出了运动函数的形式,要明确运动函数与已知条件之间的关系。

分析 本题根据运动函数求速度和加速度,属于质点运动学第一类问题。只是其运动函数不是直接给出的,需要通过已知条件建立运动函数。

解 方法 1 选择船为研究对象,建立如图 1-1 所示的直角坐标系,以 l 表示从船到定滑轮的绳长,依题意,有

$$v_0 = -\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$$

由图示的几何关系,可得 $x = \sqrt{l^2 - h^2}$,于是得到船的速度为

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = \frac{l}{\sqrt{l^2 - h^2}}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = -\frac{\sqrt{x^2 + h^2}}{x}v_0$$

负号表示船在水面上向岸靠近,沿 x 轴负向运动。

同样可得,船的加速度为

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}l}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left(\frac{l}{\sqrt{l^2 - h^2}}\right)v_0\right]v_0 = -\frac{h^2 v_0^2}{x^3}$$

方法 2 根据 v_0 的物理意义求解,由 $l = \sqrt{x^2 + h^2}$ 可得

$$v_0 = -\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{x^2 + h^2} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}}v_x$$

所以有

$$v_x = -\frac{\sqrt{x^2 + h^2}}{x}v_0$$

同样可得到上述结果。

讨论 (1) 由题意,已知条件为 $v_0 = -\dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$,表示绳的长度随时间减小;

(2) 从计算出的速度表达式可知,船的运动速度与位置 x 有关。即使拉绳的速度 v_0 为

常数,但船在不同的位置,它的速度还是不同,故船作变速运动;

(3) 本题还可用速度叠加原理以及其他方法求解。

例题 1.9　河宽为 d,岸边处水流速度为零。设河中央流速为 v_0,从岸边到河中央,流速按正比增大,如图 1-2 所示。某人划船以不变的划速 u(相对于水流)垂直于水流方向从岸边到河中央,求:

(1) 船的运动方程。

(2) 船的轨道方程。

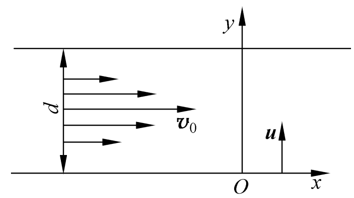


图 1-2　例题 1.9 用图

选题目的　相对运动、运动函数以及质点运动轨道的求解。

分析　本题为平面运动,可选择直角坐标系求解,利用伽利略速度变换求出船的速度,船速与位置坐标(x,y)相关,在求解时应引起注意。

解　以河岸为参考系,建立直角坐标系 xOy 如图 1-2 所示,船从点 O 出发,设船离岸时开始计时。

(1) 讨论从岸边到河中央$\left(0\leqslant y\leqslant\dfrac{d}{2}\right)$船的运动情况。根据伽利略速度变换可知,船相对于河岸的速度为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}_{河}$$

所以船的速度在 x 轴和 y 轴方向的分量分别为

$$v_x=ky,\quad v_y=u$$

当 $y=\dfrac{d}{2}$时,$v_x=v_0$,可求得

$$k=\frac{v_x}{y}=\frac{2v_0}{d}$$

故

$$v_x=\frac{2v_0}{d}y$$

由 $y=\int_0^t u\,\mathrm{d}t=ut$ 可得

$$v_x=\frac{2v_0}{d}y=\frac{2v_0}{d}ut$$

且 $v_x=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$,积分可得

$$x=\int_0^t\frac{2v_0u}{d}t\,\mathrm{d}t=\frac{v_0u}{d}t^2$$

所以船的运动方程为

$$\begin{cases}x=\dfrac{v_0u}{d}t^2\\ y=ut\end{cases}$$

(2) **方法 1**　从运动方程中消去变量 t,即可得到船的轨道方程为

$$x=\frac{v_0}{ud}y^2$$

可见，在 $0\leqslant y\leqslant\frac{d}{2}$ 范围内，船的轨迹为一抛物线。

方法 2 由于船在 x 轴和 y 轴方向的速度分量分别为

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ky=\frac{2v_0}{d}y$$

$$v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=u$$

两式相除，消去参数 t，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{ud}{2v_0y}$$

分离变量，并两边积分得

$$\int_0^y y\,\mathrm{d}y=\frac{ud}{2v_0}\int_0^x\mathrm{d}x$$

故得

$$x=\frac{v_0}{ud}y^2$$

讨论 (1) 本题介绍了两种求轨道方程的方法，第一种方法是在求出运动方程(或运动函数)的基础上，消去变量 t 求得轨道方程，这是一种常用的方法；

(2) 本题还可以借助高等数学知识，采用先消去变量 t，得到一个关于 y 和 x 的微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{ud}{2v_0y}$(也称为轨道微分方程)，然后积分求得解。

例题 1.10 射击运动员欲射击一个活动靶，若靶以 $10\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 的速度向正东方向运动，子弹的出膛速度为 $200\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，当靶运动到运动员的正北面时，扣动扳机。问运动员应瞄准什么方向才能正好打中靶心？

选题目的 相对运动及质点运动轨道的求解。

分析 本题属于相对运动的问题，题中涉及靶和地面两个参考系，要使子弹击中靶心，应使子弹相对靶的速度方向为正北方。

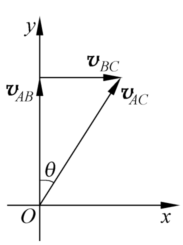


图 1-3 例题 1.10 用图

解 设子弹为 A，靶为 B，地面为 C，子弹对地的速度与竖直方向的夹角为 θ，如图 1-3 所示。由速度合成公式有

$$\boldsymbol{v}_{AB}=\boldsymbol{v}_{AC}-\boldsymbol{v}_{BC}$$

对速度进行分解，得

$$v_{BC}=v_{AC}\sin\theta$$

故

$$\theta=\arcsin\frac{v_{BC}}{v_{AC}}=\arcsin\frac{10}{200}=2.87^\circ$$

即运动员的瞄准方向应该为北偏东 2.87°。

讨论 本题还可以运用运动叠加原理求解。正确画出速度矢量示意图是十分重要的，它可以帮助我们对问题的理解，而且由此可了解到各个速度的方向。再通过矢量示意图的