第 1 章　期望效用函数理论与单期定价模型

众所周知，在经济学中，效用函数是偏好的定量描述，也是投资人决策的依据。金融学是在不确定性的环境中进行决策，金融资产的价格和投资收益都是随机变量，如何确定它的效用，是必须解决的重要问题。

期望效用函数理论是约翰·冯·诺伊曼(John Von Neumann)和奥斯卡·摩根施特恩(Oskar Morgenstern)创立的。期望效用函数是对不确定性的环境中各种可能出现的结果，定义效用函数值，即冯·诺伊曼-摩根施特恩(Von Neumann-Morgenstern)效用函数，然后将此效用函数按描述不确定性的概率分布取期望值。本章首先介绍期望效用函数理论，然后在此基础上研究投资者的风险偏好以及风险度量，最后介绍单期定价模型。

1.1　序数效用函数

期望效用函数是基数效用函数。为研究基数效用函数，首先介绍序数效用函数。序数效用函数只要求效用函数值与偏好关系一致，即如果消费者认为商品 x 比商品 y 更受偏好，定义的序数效用函数就要求 x 的效用函数值比 y 的效用函数值大。

假设商品选择集 B 是 n 维欧氏空间$\mathbb{R}^n$ 中的凸集。首先引入偏好关系概念。

1.1.1　偏好关系

设 B 是 n 维欧氏空间$\mathbb{R}^n$ 中的凸集，在 B 中引入一个二元关系，记为“$\succeq$”，如果它具有：

(1) (反身性)若 $\boldsymbol{x}\in B$，则 $\boldsymbol{x}\succeq\boldsymbol{x}$。

(2) (可比较性)若 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in B$，则 $\boldsymbol{x}\succeq\boldsymbol{y}$ 或者 $\boldsymbol{y}\succeq\boldsymbol{x}$。

(3) (传递性)若 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in B$，如果 $\boldsymbol{x}\succeq\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{y}\succeq\boldsymbol{z}$，则 $\boldsymbol{x}\succeq\boldsymbol{z}$。

我们称“$\succeq$”是一个偏好关系。

上述的二元关系可以理解如下：若 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in B$，$\boldsymbol{x}\succeq\boldsymbol{y}$，则认为 $\boldsymbol{x}$ 比 $\boldsymbol{y}$ 好，或者 $\boldsymbol{x}$ 不比 $\boldsymbol{y}$ 差。若 $\boldsymbol{x}\succeq\boldsymbol{y}$ 与 $\boldsymbol{y}\succeq\boldsymbol{x}$ 同时成立，则称 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 偏好无差异，记作 $\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{y}$。若 $\boldsymbol{x}\succeq\boldsymbol{y}$ 但 $\boldsymbol{y}\succeq\boldsymbol{x}$ 不成立，则称 $\boldsymbol{x}$ 严格地比 $\boldsymbol{y}$ 好，记作 $\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y}$。

1.1.2　字典序

我们给出一个偏好关系的例子，设选择集

$$B_2=\{(x,y)\mid x\in[0,\infty),y\in[0,\infty)\}$$

容易验证 B_2 是$\mathbb{R}^2$ 中的凸集，在 B_2 上，定义二元关系$\succeq$如下所述：

若$(x_1,y_1)\in B_2$，$(x_2,y_2)\in B_2$，如果 $x_1>x_2$，或者 $x_1=x_2$，$y_1\geqslant y_2$，定义$(x_1,y_1)\succeq(x_2,y_2)$为字典序。

下面验证上述的二元关系是一偏好的关系：

(1) 若$(x,y)\in B_2$,因为 $x=x,y=y$,按字典序定义$(x,y)\succeq(x,y)$,即反身性成立。

(2) 若$(x_1,y_1)\in B_2,(x_2,y_2)\in B_2$,如果 $x_1>x_2$,按字典序定义得$(x_1,y_1)\succeq(x_2,y_2)$；相反,如果 $x_1<x_2$,则$(x_2,y_2)\succeq(x_1,y_1)$；如果 $x_1=x_2,y_1\geqslant y_2$,按字典序定义则$(x_1,y_1)\succeq(x_2,y_2)$；如果 $x_1=x_2,y_1\leqslant y_2$,则$(x_2,y_2)\succeq(x_1,y_1)$,即可比较性成立。

(3) 设$(x_1,y_1)\in B_2,(x_2,y_2)\in B_2,(x_3,y_3)\in B_2$,若$(x_1,y_1)\succeq(x_2,y_2)\succeq(x_3,y_3)$,显然 $x_1\geqslant x_3$,如果 $x_1>x_3$,按字典序定义得$(x_1,y_1)\succeq(x_3,y_3)$,如果 $x_1=x_3$,此时 $x_1=x_2=x_3$,因为$(x_1,y_1)\succeq(x_2,y_2)$,所以 $y_1\geqslant y_2$,又$(x_2,y_2)\succeq(x_3,y_3)$,故 $y_2\geqslant y_3$,于是 $y_1\geqslant y_3$,从而$(x_1,y_1)\succeq(x_3,y_3)$,即传递性成立。

1.1.3 效用函数

设 B 是具有偏好关系"$\succeq$"的选择集,U 是 $B\to R_+$ 的单值函数,如果 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in B$,$U(\boldsymbol{x})\geqslant U(\boldsymbol{y})$,当且仅当 $\boldsymbol{x}\succeq\boldsymbol{y}$,则称 U 为效用函数。这里 R_+ 是全体非负实数构成的集合。显然,效用函数是偏好关系的一个定量描述,效用函数数值的大小与偏好关系相一致,这样我们就可以将效用函数值的大小作为选择的依据。为了在具有偏好关系的商品选择集 B 上定义与偏好关系一致的效用函数,需要 B 上的偏好关系具有三条性质。

1.1.4 偏好关系的三条重要性质

性质 1(序保持性)　对任意 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in B,\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y}$ 及 $\alpha,\beta\in[0,1]$

$$\alpha\boldsymbol{x}+(1-\alpha)\boldsymbol{y}\succ\beta\boldsymbol{x}+(1-\beta)\boldsymbol{y}$$

当且仅当 $\alpha>\beta$。

性质 2(中值性)　对任意 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in B$,如果 $\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y}\succ\boldsymbol{z}$,那么存在唯一的 $\alpha\in(0,1)$ 使 $\alpha\boldsymbol{x}+(1-\alpha)\boldsymbol{z}\sim\boldsymbol{y}$。

性质 3(有界性)　存在 $\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*\in B$,使对任意 $\boldsymbol{z}\in B$,有 $\boldsymbol{x}^*\preceq\boldsymbol{z}\preceq\boldsymbol{y}^*$。

性质 3 是为了效用函数存在定理的证明更方便,性质 1 和性质 2 是重要的,并不是所有偏好关系都具备这三条性质。

字典序具有性质 1 但不具有性质 2。

证明　首先证明字典序具有性质 1。

必要性　若$(x_1,y_1)\in B_2,(x_2,y_2)\in B_2,(x_1,y_1)\succ(x_2,y_2),\alpha,\beta\in(0,1)$,则根据向量运算法则

$$\begin{aligned}\alpha(x_1,y_1)+(1-\alpha)(x_2,y_2)&=[\alpha x_1+(1-\alpha)x_2,\alpha y_1+(1-\alpha)y_2]\\&=[\alpha(x_1-x_2)+x_2,\alpha(y_1-y_2)+y_2]\\\beta(x_1,y_1)+(1-\beta)(x_2,y_2)&=[\beta x_1+(1-\beta)x_2,\beta y_1+(1-\beta)y_2]\\&=[\beta(x_1-x_2)+x_2,\beta(y_1-y_2)+y_2]\end{aligned}$$

若 $\alpha(x_1,y_1)+(1-\alpha)(x_2,y_2)\succ\beta(x_1,y_1)+(1-\beta)(x_2,y_2)$,则必有 $\alpha>\beta$。因为若 $\alpha=\beta$,必有

$$\alpha(x_1,y_1)+(1-\alpha)(x_2,y_2)\sim\beta(x_1,y_1)+(1-\beta)(x_2,y_2)$$

若 $\alpha<\beta$,由于 $x_1\geqslant x_2$,则有

$$\alpha x_1+(1-\alpha)x_2=\alpha(x_1-x_2)+x_2\leqslant\beta(x_1-x_2)+x_2$$
$$\alpha y_1+(1-\alpha)y_2=\alpha(y_1-y_2)+y_2\leqslant\beta(y_1-y_2)+y_2$$

因此

$$\alpha(x_1,y_1)+(1-\alpha)(x_2,y_2)\preceq\beta(x_1,y_1)+(1-\beta)(x_2,y_2)$$

与假设矛盾,故必有 $\alpha>\beta$。

充分性　设 $\alpha>\beta$。

根据字典序的定义,可能有以下两种情况:$x_1>x_2$; $x_1=x_2,y_1>y_2$。分别证明如下:

(1) 若 $x_1>x_2$,则 $\alpha(x_1-x_2)+x_2>\beta(x_1-x_2)+x_2$ 结论成立。

(2) 若 $x_1=x_2,y_1>y_2$,则有

$$\alpha(x_1-x_2)+x_2=\beta(x_1-x_2)+x_2$$
$$\alpha(y_1-y_2)+y_2>\beta(y_1-y_2)+y_2$$

故

$$\alpha(x_1,y_1)+(1-\alpha)(x_2,y_2)\succ\beta(x_1,y_1)+(1-\beta)(x_2,y_2)$$

下面证明字典序不具有性质 2。

取$(x_1,y_1)\in B_2,(x_2,y_2)\in B_2,(x_3,y_3)\in B_2$,且 $x_1>x_2=x_3,y_2>y_3$,根据字典序定义,此时$(x_1,y_1)\succ(x_2,y_2)\succ(x_3,y_3)$,对任意 $\alpha\in(0,1)$,我们有

$$\begin{aligned}\alpha(x_1,y_1)+(1-\alpha)(x_3,y_3)&=\alpha(x_1,y_1)+(1-\alpha)(x_2,y_3)\\&=[\alpha x_1+(1-\alpha)x_2,\alpha y_1+(1-\alpha)y_3]\end{aligned}$$

因为 $0<\alpha<1,x_1>x_2$,有

$$\alpha x_1+(1-\alpha)x_2=\alpha(x_1-x_2)+x_2>x_2$$

所以 $\alpha(x_1,y_1)+(1-\alpha)(x_3,y_3)\succ(x_2,y_2)$,不存在 $\alpha\in(0,1)$使得

$$\alpha(x_1,y_1)+(1-\alpha)(x_3,y_3)\sim(x_2,y_2)$$

这说明字典序不具有性质 2。

1.1.5　序数效用函数存在定理

定理 1.1(序数效用函数存在定理)　设选择集 B 上的偏好关系“$\succeq$”具有 1.1.4 节中的性质 1~性质 3,则存在效用函数 $U:B\to R_+$ 使得

(1) $\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y}$ 当且仅当 $U(\boldsymbol{x})>U(\boldsymbol{y})$。

(2) $\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{y}$ 当且仅当 $U(\boldsymbol{x})=U(\boldsymbol{y})$。

证明　由性质 3,存在 $\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*\in B$ 使对任意 $\boldsymbol{x}\in B$,有 $\boldsymbol{x}^*\succeq\boldsymbol{x}\succeq\boldsymbol{y}^*$。

如果 $\boldsymbol{x}^*\sim\boldsymbol{y}^*$,此时对任意 $\boldsymbol{x}\in B$,有 $\boldsymbol{x}^*\sim\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{y}^*$,我们定义 $U(\boldsymbol{x})=c$(常数)。此时,定理显然成立。

若 $\boldsymbol{x}^*\succ\boldsymbol{y}^*$,对任意的 $\boldsymbol{x}\in B$,因为 B 存在偏好关系,只有三种情况,分别定义效用函数如下:

情况 1:当 $\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{x}^*$ 时,定义 $U(\boldsymbol{x})=1$。

情况 2:当 $\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{y}^*$ 时,定义 $U(\boldsymbol{x})=0$。

情况 3:当 $\boldsymbol{x}^*\succ\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y}^*$ 时,由性质 2 可知,存在唯一的 $\alpha\in(0,1)$使 $\boldsymbol{x}\sim\alpha\boldsymbol{x}^*+(1-\alpha)\boldsymbol{y}^*$,

此时我们定义 $U(\boldsymbol{x})=\alpha$。

这样,我们完成了效用函数的构造性定义。

(1) 证明 $\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y}$ 当且仅当 $U(\boldsymbol{x})>U(\boldsymbol{y})$。

必要性 设 $\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y}$。

① 如果 $\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{x}^*\succ\boldsymbol{y}\succ\boldsymbol{y}^*$,此时 $U(\boldsymbol{x})=1$,由于 $\boldsymbol{x}^*\succ\boldsymbol{y}\succ\boldsymbol{y}^*$,则存在唯一 $\alpha\in(0,1)$使 $\boldsymbol{y}\sim\alpha\boldsymbol{x}^*+(1-\alpha)\boldsymbol{y}^*$,按定义,$U(\boldsymbol{y})=\alpha<1$,所以 $U(\boldsymbol{x})>U(\boldsymbol{y})$。

当 $\boldsymbol{x}^*\succ\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y}\sim\boldsymbol{y}^*$,按定义 $U(\boldsymbol{y})=0$,由于 $\boldsymbol{x}^*\succ\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y}^*$,则存在唯一 $\alpha\in(0,1)$使 $\alpha\boldsymbol{x}^*+(1-\alpha)\boldsymbol{y}^*\sim\boldsymbol{x}$,此时 $U(\boldsymbol{x})=\alpha>0$, 即 $U(\boldsymbol{x})>U(\boldsymbol{y})$成立。

② 如果 $\boldsymbol{x}^*\succ\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y}\succ\boldsymbol{y}^*$,则存在 α_1,α_2, 使

$\alpha_1\boldsymbol{x}^*+(1-\alpha_1)\boldsymbol{y}^*\sim\boldsymbol{x}$,按定义 $U(\boldsymbol{x})=\alpha_1$;

$\alpha_2\boldsymbol{x}^*+(1-\alpha_2)\boldsymbol{y}^*\sim\boldsymbol{y}$,按定义 $U(\boldsymbol{y})=\alpha_2$。

由性质 1,由于 $\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y}$,必有 $\alpha_1>\alpha_2$,故 $U(\boldsymbol{x})>U(\boldsymbol{y})$。

充分性 假设已知 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in B$,且 $U(\boldsymbol{x})>U(\boldsymbol{y})$,证 $\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y}$。

若 $U(\boldsymbol{x})=1$,$U(\boldsymbol{y})=\alpha_2\in(0,1)$,此时 $\boldsymbol{x}\sim1\boldsymbol{x}^*+(1-1)\boldsymbol{y}^*$,$\boldsymbol{y}\sim\alpha_2\boldsymbol{x}^*+(1-\alpha_2)\boldsymbol{y}^*$,由于 $\alpha_2<1$,由性质 1(序保持性)可得,$\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y}$。

当 $U(\boldsymbol{x})=1$,$U(\boldsymbol{y})=0$ 时,按定义 $\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{x}^*\succ\boldsymbol{y}^*\sim\boldsymbol{y}$, 故 $\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y}$。

若 $U(\boldsymbol{x})=\alpha_1\in(0,1)$,$U(\boldsymbol{y})=0$,此时 $\boldsymbol{y}\sim\boldsymbol{y}^*=0\boldsymbol{x}^*+(1-0)\boldsymbol{y}^*$,$\boldsymbol{x}\sim\alpha_1\boldsymbol{x}^*+(1-\alpha_1)\boldsymbol{y}^*$,由于 $\alpha_1>0$, 故 $\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y}$。

若 $1>U(\boldsymbol{x})>U(\boldsymbol{y})>0$,此时令 $\alpha_1=U(\boldsymbol{x})$,$\alpha_2=U(\boldsymbol{y})$,由 U 的定义,$\boldsymbol{x}\sim\alpha_1\boldsymbol{x}^*+(1-\alpha_1)\boldsymbol{y}^*$,$\boldsymbol{y}\sim\alpha_2\boldsymbol{x}^*+(1-\alpha_2)\boldsymbol{y}^*$。因为 $\alpha_1=U(\boldsymbol{x})>U(\boldsymbol{y})=\alpha_2$,由性质 1,必有 $\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y}$。

(2) 证明 $\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{y}$ 当且仅当 $U(\boldsymbol{x})=U(\boldsymbol{y})$。

必要性 任取 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in B$,设 $\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{y}$,证 $U(\boldsymbol{x})=U(\boldsymbol{y})$,若不然,$U(\boldsymbol{x})\neq U(\boldsymbol{y})$。不妨设 $U(\boldsymbol{x})>U(\boldsymbol{y})$,由该定理的结论(1),此时 $\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y}$,这与 $\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{y}$ 矛盾。

充分性 若 $U(\boldsymbol{x})=U(\boldsymbol{y})$,而 $\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{y}$ 不成立,此时有两种可能:$\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y}$,$\boldsymbol{y}\succ\boldsymbol{x}$。由结论(1),必有 $U(\boldsymbol{x})\neq U(\boldsymbol{y})$,这与 $U(\boldsymbol{x})=U(\boldsymbol{y})$矛盾,所以 $\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{y}$。 证毕。

设 U 是效用函数,函数 $G:R\to R$ 是正值严格单调增加函数,容易证明复合函数 $G\circ U:B\to R$也是效用函数。

注 1 由效用函数的构造性定义,可见序数效用函数不是唯一的,但是都具有如下性质,$U(\boldsymbol{x})>U(\boldsymbol{y})$的充要条件是 $\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y}$;$U(\boldsymbol{x})=U(\boldsymbol{y})$的充要条件是 $\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{y}$,即效用函数与偏好关系是一致的,效用的大小是两个选择比较而言的,效用函数的取值大小并不重要。

注 2 对于序数效用函数的存在性,1.1.4 节中的性质 1 和性质 2 起着十分关键的作用,前面我们已经证明了字典序具有性质 1,但不具有性质 2,我们也可以证明在字典序 B_2 上,不存在序数效用函数。

若不然,如果存在 B_2 上的效用函数 U,使得$(x_1,y_1)\succ(x_2,y_2)$,如果 $U(x_1,y_1)>U(x_2,y_2)$,任取 $x\in[0,1]$,显然$(x,1)\succ(x,0)$,于是 $U(x,1)>U(x,0)$。

设 $U(x,0)=\alpha_x$,$U(x,1)=\beta_x$,则(α_x,β_x)是一开区间。如果 $x>y$,根据字典序定义

$$(x,1)\succ(x,0)\succ(y,1)\succ(y,0)$$

于是 $\beta_x>\alpha_x>\beta_y>\alpha_y$。故$(\alpha_y,\beta_y)$与$(\alpha_x,\beta_x)$是互不相交的开区间,令 $T:x\to(\alpha_x,\beta_x)$,

则 T 是一对一映射。但$[0,1]$区间的实数是不可数集合，而互不相交的开区间是可数集合，矛盾，于是在字典序上不存在与字典序相一致的效用函数。

注 3　设 B 是具有偏好关系的有限集，则存在效用函数 $U:B\to R$ 使得

(1) $\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y}$ 当且仅当 $U(\boldsymbol{x})>U(\boldsymbol{y})$；

(2) $\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{y}$ 当且仅当 $U(\boldsymbol{x})=U(\boldsymbol{y})$。

当 B 只有两个元素时，结论显然成立。设 B 有 n 个元素 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 时，定理成立。

下面证明 B 有 $n+1$ 个元素时定理也成立。不妨假设 $\boldsymbol{x}_1\preceq\boldsymbol{x}_2\preceq\cdots\preceq\boldsymbol{x}_n$。如果不存在 $1\leqslant k\leqslant n-1$，使 $\boldsymbol{x}_{k+1}\succ\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_{k+1}\succeq\boldsymbol{x}_{n+1}\succeq\boldsymbol{x}_k$，则必有 $\boldsymbol{x}_{n+1}\preceq\boldsymbol{x}_1$ 或 $\boldsymbol{x}_{n+1}\succeq\boldsymbol{x}_n$。现在定义 $U(\boldsymbol{x}_{n+1})$：

如果 $\boldsymbol{x}_{n+1}\sim\boldsymbol{x}_k$，定义 $U(\boldsymbol{x}_{n+1})=U(\boldsymbol{x}_k)$；

如果 $\boldsymbol{x}_{k+1}\succ\boldsymbol{x}_{n+1}\succ\boldsymbol{x}_k$，定义 $U(\boldsymbol{x}_{n+1})=\dfrac{1}{2}[U(\boldsymbol{x}_{k+1})+U(\boldsymbol{x}_k)]$；

如果 $\boldsymbol{x}_{n+1}\prec\boldsymbol{x}_1$，定义 $U(\boldsymbol{x}_{n+1})=\dfrac{1}{2}U(\boldsymbol{x}_1)$；

如果 $\boldsymbol{x}_{n+1}\succ\boldsymbol{x}_n$，定义 $U(\boldsymbol{x}_{n+1})=2U(\boldsymbol{x}_n)$；

容易验证，如上定义的效用函数 U，满足如下条件：

$U(\boldsymbol{x}_i)>U(\boldsymbol{x}_j)$，当且仅当 $\boldsymbol{x}_i\succ\boldsymbol{x}_j$；

$U(\boldsymbol{x}_i)=U(\boldsymbol{x}_j)$，当且仅当 $\boldsymbol{x}_i\sim\boldsymbol{x}_j$。

其中，$i,j=1,2,\cdots,n+1$。由数学归纳法，可见结论成立。

1.2　期望效用函数

本节借助 1.1 节讲述的序数效用函数，对于随机变量定义效用函数。

1.2.1　彩票及其运算

由于金融资产的价格存在不确定性，所以它是一个随机变量。首先研究只有有限状态的离散随机变量如何定义效用函数，假设随机变量 X 的取值有 n 个结果 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，它们出现的概率分别为 $p_1,p_2,\cdots,p_n$，其中 $p_i\geqslant0$，$\sum\limits_{i=1}^{n}p_i=1$。$p_i$ 表示结果 x_i 发生的概率。为了对随机变量 X 定义效用函数，引入彩票概念，为了简单起见，记 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{P}=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$，称 $\widetilde{\boldsymbol{P}}=(x_1,x_2,\cdots,x_n;p_1,p_2,\cdots,p_n)=(\boldsymbol{x};\boldsymbol{P})$为彩票。

$\widetilde{B}$ 为形如 $\widetilde{\boldsymbol{P}}$ 的彩票构成的集合，设 $\widetilde{\boldsymbol{P}}=(\boldsymbol{x};\boldsymbol{P})\in\widetilde{B}$，$\widetilde{\boldsymbol{Q}}=(\boldsymbol{x};\boldsymbol{Q})\in\widetilde{B}$，$0\leqslant\alpha\leqslant1$，定义

$\alpha\widetilde{\boldsymbol{P}}\oplus(1-\alpha)\widetilde{\boldsymbol{Q}}=[x_1,x_2,\cdots,x_n;\alpha p_1+(1-\alpha)q_1,\alpha p_2+(1-\alpha)q_2,\cdots,\alpha p_n+(1-\alpha)q_n]$，

因为 $\alpha p_i+(1-\alpha)q_i\geqslant0$，而且 $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha p_i+(1-\alpha)q_i=1$，可见

$$\alpha\widetilde{\boldsymbol{P}}\oplus(1-\alpha)\widetilde{\boldsymbol{Q}}\in\widetilde{B}$$

所以，$\widetilde{B}$ 是凸集。

由上述定义,设 $\widetilde{\boldsymbol{P}},\widetilde{\boldsymbol{Q}}\in\widetilde{B}$,$\alpha\in[0,1)$,经过简单的计算可以证明

(1) $\alpha\widetilde{\boldsymbol{P}}\oplus(1-\alpha)\widetilde{\boldsymbol{P}}=\widetilde{\boldsymbol{P}}$。

(2) $1\widetilde{\boldsymbol{P}}\oplus0\widetilde{\boldsymbol{Q}}=\widetilde{\boldsymbol{P}}$。

(3) $\alpha\widetilde{\boldsymbol{P}}\oplus(1-\alpha)\widetilde{\boldsymbol{Q}}=(1-\alpha)\widetilde{}\oplus\alpha\widetilde{\boldsymbol{P}}$。

(4) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in[0,1]$,则

$$\alpha_1[\alpha_3\widetilde{\boldsymbol{P}}\oplus(1-\alpha_3)\widetilde{\boldsymbol{Q}}]\oplus(1-\alpha_1)[\alpha_2\widetilde{\boldsymbol{P}}\oplus(1-\alpha_2)\widetilde{\boldsymbol{Q}}]$$
$$=[\alpha_1\alpha_3+(1-\alpha_1)\alpha_2]\widetilde{\boldsymbol{P}}\oplus[1-\alpha_1\alpha_3-(1-\alpha_1)\alpha_2]\widetilde{\boldsymbol{Q}}$$

1.2.2 彩票集合上的偏好关系

又假定 $\widetilde{B}$ 中元素定义满足如下条件的偏好关系$\geq$具有:

(1)(返身性)对任意 $\widetilde{\boldsymbol{P}}\in\widetilde{B}$,有 $\widetilde{\boldsymbol{P}}\geq\widetilde{\boldsymbol{P}}$。

(2)(可比较性)对任意 $\widetilde{\boldsymbol{P}},\widetilde{\boldsymbol{Q}}\in\widetilde{B}$,则或者 $\widetilde{\boldsymbol{P}}\geq\widetilde{\boldsymbol{Q}}$,或者 $\widetilde{\boldsymbol{Q}}\geq\widetilde{\boldsymbol{P}}$。

(3)(传递性)对任意 $\widetilde{P}_1,\widetilde{P}_2,\widetilde{P}_3\in\widetilde{B}$,如果 $\widetilde{P}_1\geq\widetilde{P}_2,\widetilde{P}_2\geq\widetilde{P}_3$,则 $\widetilde{P}_1\geq\widetilde{P}_3$。

类似地,可定义严格偏好序“$>$”及无差异关系“$\sim$”。假设 $\widetilde{B}$ 中的偏好序有如下性质:

性质 1 对任意 $\widetilde{\boldsymbol{P}},\widetilde{\boldsymbol{Q}}\in\widetilde{B}$,设 $\widetilde{\boldsymbol{P}}>\widetilde{\boldsymbol{Q}}$,$\alpha,\beta\in[0,1]$,则

$$\alpha\widetilde{\boldsymbol{P}}\oplus(1-\alpha)\widetilde{\boldsymbol{Q}}>\beta\widetilde{\boldsymbol{P}}\oplus(1-\beta)\widetilde{\boldsymbol{Q}}$$

的充要条件是 $\alpha>\beta$。

性质 2 设 $\widetilde{\boldsymbol{P}}_1,\widetilde{\boldsymbol{P}}_2,\widetilde{\boldsymbol{P}}_3\in\widetilde{B}$,$\widetilde{\boldsymbol{P}}_1>\widetilde{\boldsymbol{P}}_2>\widetilde{\boldsymbol{P}}_3$,则存在唯一 $\alpha\in[0,1]$使

$$\widetilde{\boldsymbol{P}}_2\sim\alpha\widetilde{\boldsymbol{P}}_1\oplus(1-\alpha)\widetilde{\boldsymbol{P}}_3$$

性质 3 设存在 $\widetilde{\boldsymbol{P}}^*,\widetilde{\boldsymbol{Q}}^*\in\widetilde{B}$,对任意 $\widetilde{\boldsymbol{P}}\in\widetilde{B}$,有 $\widetilde{\boldsymbol{P}}^*\geq\widetilde{\boldsymbol{P}}\geq\widetilde{\boldsymbol{Q}}^*$。

1.2.3 基数效用函数存在定理

定理 1.2(基数效用函数存在定理) 设 $\widetilde{B}$ 具有 1.2.2 节中的性质 1～性质 3 的偏好关系“$\geq$”,则存在效用函数 $U:\widetilde{B}\to R$ 满足:

(1) $\widetilde{\boldsymbol{P}}>\widetilde{\boldsymbol{Q}}$,当且仅当 $U(\widetilde{\boldsymbol{P}})>U(\widetilde{\boldsymbol{Q}})$;

(2) $\widetilde{\boldsymbol{P}}\sim\widetilde{\boldsymbol{Q}}$,当且仅当 $U(\widetilde{\boldsymbol{P}})=U(\widetilde{\boldsymbol{Q}})$;

(3) 设 $\widetilde{\boldsymbol{P}},\widetilde{\boldsymbol{Q}}\in\widetilde{B}$,$\beta\in[0,1]$,则 $U[\beta\widetilde{\boldsymbol{P}}\oplus(1-\beta)\widetilde{\boldsymbol{Q}}]=\beta U(\widetilde{\boldsymbol{P}})+(1-\beta)U(\widetilde{\boldsymbol{Q}})$。

证明 由定理 1.1 容易证明(1)和(2)。现证(3),这里只考虑 $\widetilde{\boldsymbol{P}}^*>\widetilde{\boldsymbol{P}}>\widetilde{\boldsymbol{Q}}>\widetilde{\boldsymbol{Q}}^*$ 的情形。由性质 2 存在唯一的 $\alpha_1\in[0,1]$,$\alpha_2\in[0,1]$使

$$\widetilde{\boldsymbol{P}}\sim\alpha_1\widetilde{\boldsymbol{P}}^*+(1-\alpha_1)\widetilde{\boldsymbol{Q}}^*$$
$$\widetilde{\boldsymbol{Q}}\sim\alpha_2\widetilde{\boldsymbol{P}}^*+(1-\alpha_2)\widetilde{\boldsymbol{Q}}^*$$

对于 $\beta \in (0,1)$，则

$$\beta\widetilde{\boldsymbol{P}} \oplus (1-\beta)\widetilde{\boldsymbol{Q}} \sim [\beta\alpha_1+(1-\beta)\alpha_2]\widetilde{\boldsymbol{P}}^* \oplus \{1-[\beta\alpha_1+(1-\beta)\alpha_2]\}\widetilde{\boldsymbol{Q}}^*$$

由效用函数的构造性定义

$$U(\widetilde{\boldsymbol{P}})=\alpha_1, U(\widetilde{\boldsymbol{Q}})=\alpha_2, U[\beta\widetilde{\boldsymbol{P}} \oplus (1-\beta)\widetilde{\boldsymbol{Q}}]=\beta\alpha_1+(1-\beta)\alpha_2$$

即

$$U[\beta\widetilde{\boldsymbol{P}} \oplus (1-\beta)\widetilde{\boldsymbol{Q}}]=\beta U(\widetilde{\boldsymbol{P}})+(1-\beta)U(\widetilde{\boldsymbol{Q}})$$

证毕。

注意： 可以将(3)推广到 n 个彩票相加的情形。

设 $\pi_i \geqslant 0, \sum\limits_{i=1}^n \pi_i = 1, \widetilde{\boldsymbol{P}}_1, \widetilde{\boldsymbol{P}}_2, \cdots, \widetilde{\boldsymbol{P}}_n \in \widetilde{B}$，我们用记号 $\sum\limits_{i=1}^n \oplus \pi_i\widetilde{\boldsymbol{P}}_i$ 表示 n 个彩票相加，容易证明，$\sum\limits_{i=1}^n \oplus \pi_i\widetilde{\boldsymbol{P}}_i \in \widetilde{B}$，而且

$$U\left(\sum_{i=1}^n \oplus \pi_i\widetilde{\boldsymbol{P}}_i\right)=\sum_{i=1}^n \pi_i U(\widetilde{\boldsymbol{P}}_i)$$

这里定义的效用函数与序数效用函数不同，对于选择集 $\widetilde{B}$ 中的每个元素，定义一个与之相应的效用函数值，称这种效用函数为基数效用函数。

由效用函数的定义可见，上面定义的效用函数不唯一，但是在正仿射的意义下是唯一的。下面命题说明两个效用函数之间的正仿射关系。

命题 1.1　设 $\widetilde{B}$ 具有性质 1～性质 3，$W: \widetilde{B} \to R, U: B \to R$ 是关于偏好序"$\succeq$"的两个效用函数，它们都是具有定理 1.2 的性质(1)、(2)、(3)的效用函数，则存在实数 $a>0$ 和实数 b 使对任意 $\widetilde{\boldsymbol{P}} \in \widetilde{B}$，有

$$W(\widetilde{\boldsymbol{P}})=aU(\widetilde{\boldsymbol{P}})+b$$

证明　这里 U 是定理 1.2 中定义的效用函数，令

$$a=W(\widetilde{\boldsymbol{P}}^*)-W(\widetilde{\boldsymbol{Q}}^*), b=W(\widetilde{\boldsymbol{Q}}^*)$$

则 $a>0$，对任意 $\widetilde{\boldsymbol{P}} \in \widetilde{B}$，且 $\widetilde{\boldsymbol{P}}^* \succ \widetilde{\boldsymbol{P}} \succ \widetilde{\boldsymbol{Q}}^*$ 时，有唯一的 $\alpha \in [0,1]$，使

$$\widetilde{\boldsymbol{P}} \sim \alpha\widetilde{\boldsymbol{P}}^* \oplus (1-\alpha)\widetilde{\boldsymbol{Q}}^*, \text{且 } U(\widetilde{\boldsymbol{P}})=\alpha$$

由定理 1.2，效用函数 U 满足定理 1.2 中的性质(3)，于是

$$\begin{aligned}
W(\widetilde{\boldsymbol{P}}) &= W[\alpha\widetilde{\boldsymbol{P}}^* \oplus (1-\alpha)\widetilde{\boldsymbol{Q}}^*] \\
&= \alpha W(\widetilde{\boldsymbol{P}}^*)+(1-\alpha)W(\widetilde{\boldsymbol{Q}}^*) \\
&= \alpha[W(\widetilde{\boldsymbol{P}}^*)-W(\widetilde{\boldsymbol{Q}}^*)]+W(\widetilde{\boldsymbol{Q}}^*) \\
&= a\alpha+b=aU(\widetilde{\boldsymbol{P}})+b
\end{aligned}$$

由命题 1.1 可见，$\widetilde{B}$ 上的效用函数尽管不唯一，但在正仿射变换之下是唯一的。

1.2.4　Von Neumann-Morgenstern 效用函数

借助 $\widetilde{B}$ 上的效用函数及 Von Neumann-Morgenstern 效用函数，定义随机变量 X 的

期望效用函数。

首先记 $\tilde{\boldsymbol{e}}_i=(\boldsymbol{x},0,\cdots,0;\ 1,0,\cdots,0)$，$i=1,2,\cdots,n$，则彩票 $\tilde{\boldsymbol{e}}_i$ 是特殊的彩票，其对应的随机变量是退化的随机变量，此时，随机变量 X 取值 x_i 的概率为1，取其他值的概率为0。实际上，它是一个确定性的量，记

$$V(x_i)=U(\tilde{\boldsymbol{e}}_i)$$

称其为 Von Neumann-Morgenstern 效用函数。确定性的结果取值为 x_i 时看作特殊的随机变量的效用函数值。随机变量 X 视为彩票 $\widetilde{\boldsymbol{P}}=(x_1,x_2,\cdots,x_n;p_1,p_2,\cdots,p_n)$时，可将其表示为 n 个特殊的彩票相加，$\widetilde{\boldsymbol{P}}=\sum\limits_{i=1}^{n}\oplus p_i\tilde{\boldsymbol{e}}_i$，由效用函数的性质

$$U(X)=U(\widetilde{\boldsymbol{P}})=U\left(\sum_{i=1}^{n}\oplus p_i\tilde{\boldsymbol{e}}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}p_i\cdot U(\tilde{\boldsymbol{e}}_i)=\sum_{i=1}^{n}p_i\cdot V(x_i)=E[V(X)]$$

可见，随机变量 X 的效用函数等于随机变量 $V(X)$对随机变量 X 的概率分布取期望值，因此称为期望效用函数。

以上的推导是针对离散的有限状态的情形，可以根据它推导连续的状态空间的情形。

当考虑具有连续状态取值于实数集 R 的随机变量 X 时，将 $\widetilde{B}$ 定义为

$$\widetilde{B}=\{\text{所有随机变量 } X \text{ 的概率分布函数 } F_X(x)\}$$

并假设 X_n 依分布收敛于 X，其中 F_{X_n}，$F_X\in\widetilde{B}$，那么$\lim\limits_{n\to\infty}U(F_{X_n})=U(F_X)$，记

$$F_{\delta_X}(y)=\begin{cases}0, & y<x\\ 1, & y\geqslant x\end{cases}$$

则 $F_{\delta_X}(y)\in\widetilde{B}$，定义 $V(x)=U(\delta_X)$，不加证明地给出

$$U(X)=\int_{-\infty}^{\infty}V(x)\mathrm{d}F(x)=E[V(X)]$$

定理1.3 当选择集 $\widetilde{B}$ 仅由以R(或 R 的离散子集)为状态空间的随机变量组成时，存在效用函数 $U:\widetilde{B}\to R_+$ 使

$$U(X)=\int_{-\infty}^{\infty}V(x)\mathrm{d}F(x)=E[V(X)]$$

式中，$V(x)$是对应于 X 取确定状态 x 值的效用值，$V(x)$称为冯·诺伊曼-摩根施特恩(Von Neumann-Morgenstern)效用函数。

1.2.5 伯瑞特率

以后假设投资者具有 Von Neumann-Morgenstern 效用函数，由命题1.1可知，效用函数的具体形式可以不相同，但是它们在正仿射变换的意义之下是唯一的，伯瑞特(Pratt)发现如下定义的伯瑞特率在正仿射变换之下是不变的。因此，伯瑞特率由 Von Neumann-Morgenstern 效用函数唯一确定，下面可见，伯瑞特率在风险度量中起到重要作用。

给定 Von Neumann-Morgenstern 效用函数 $V(x)$，定义伯瑞特率 $A_h:R\to R$

$$A_h(x)=-\frac{V(x+h)+V(x-h)-2V(x)}{V(x+h)-V(x)}$$

命题 1.2　伯瑞特率 A_h 对于正仿射变换是不变的。

证明　设 $G(r)=ar+b$ 为一正仿射，由此正仿射定义的 Von Neumann-Morgenstern 效用函数为 $G[V(x)]$，其伯瑞特率为

$$\begin{aligned} G_h(x) &= -\frac{G[V(x+h)]+G[V(x-h)]-2G[V(x)]}{G[V(x+h)]-G[V(x)]} \\ &= -\frac{a[V(x+h)+V(x-h)-2V(x)]}{a[V(x+h)-V(x)]} \\ &= -\frac{V(x+h)+V(x-h)-2V(x)}{V(x+h)-V(x)}=A_h(x) \end{aligned}$$

证毕。

如果 $V(x)$是两次连续可微的，可以证明

$$\lim_{h\to 0}A_h(x)/h=\lim_{h\to 0}-\frac{\dfrac{V(x+h)+V(x-h)-2V(x)}{h^2}}{\dfrac{V(x+h)-V(x-h)}{h}}=-\frac{V''(x)}{V'(x)}$$

1.3　投资者的风险类型及风险度量

1.3.1　投资者的风险类型

为区分投资者的风险类型，看下面的例子。

考察抽彩，如果投资者的初始财富为 ω_0，参加抽彩后的财富为随机变量，为简单起见，设只有两种状态$\{h_1,h_2\}$，状态 h_1 出现的概率为 p，状态 h_2 出现的概率为 $1-p$，而且 $ph_1+(1-p)h_2=0$，这表明抽彩是公平的。

若投资者不参加抽彩，那么他的效用值是 $V(\omega_0)$。如果投资者参加抽彩，那么抽彩后的财富发生变化，以概率 p 变化为 ω_0+h_1，以概率 $1-p$ 变化为 ω_0+h_2。抽彩是公平的，则 $p(\omega_0+h_1)+(1-p)(\omega_0+h_2)=\omega_0$，$[p,(1-p)]$可视为一个特殊的分布。因为 $ph_1+(1-p)h_2=0$，不妨设 $h_1>0>h_2$，即如果赢，则财富增加；如果输，则财富减少。设投资者的 Von Neumann-Mogernstern 效用函数为 $V(x)$，则投资者参加抽彩的期望效用为 $pV(\omega_0+h_1)+(1-p)V(\omega_0+h_2)$。

如果投资者厌恶风险，则他认为参加抽彩，有财富减少的风险，不愿参加抽彩，他认为，不参加抽彩的效用大于参加抽彩的效用，即

$$\begin{aligned} V(\omega_0) &= V[p(\omega_0+h_1)+(1-p)(\omega_0+h_2)] \\ &\geqslant pV(\omega_0+h_1)+(1-p)V(\omega_0+h_2) \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

由式(1.3.1)可见，投资者的 Von Neumann-Morgenstern 效用函数 $V(x)$为凹函数。如果 $V(x)$二次连续可微且 $V'(x)>0$，$V''(x)\leqslant 0$，由 Jensen 不等式，对一般的风险资产 $\tilde{\omega}$ 有 $V[E(\tilde{\omega})]\geqslant E[V(\tilde{\omega})]$，则称投资者为风险厌恶型。

如果投资者愿意参加抽彩，则应有

$$\begin{aligned} V(\omega_0) &= V[p(\omega_0+h_1)+(1-p)(\omega_0+h_2)] \\ &\leqslant pV(\omega_0+h_1)+(1-p)V(\omega_0+h_2) \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

此时 V 是凸函数。满足 $V'(x)\geqslant 0, V''(x)\geqslant 0$,对一般的 $\tilde{\omega}$,有 $V[E(\tilde{\omega})]\leqslant E[V(\tilde{\omega})]$,称投资者为风险爱好型。

因为是公平抽彩,如果投资者认为参加抽彩前后效用函数也是一样的,则

$$V(\omega_0)=pV(\omega_0+h_1)+(1-p)V(\omega_0+h_2) \tag{1.3.3}$$

即

$$V[E(\tilde{\omega})]=E[V(\tilde{\omega})]$$

此时,效用函数 V 是线性函数,称投资者为风险中性型。

例 1.1

某经济主体初始财富为 100 万元,效用函数为 $V(\cdot)$。现有一张彩票:中彩概率为 10%、可得 50 万元;不中彩概率为 90%、经济主体损失 50 万元(购买彩票的钱)。通过比较初始财富给消费者带来的效用和买彩票获得的期望效用,判断投资者风险态度。

解 经济主体买彩票获得的效用期望值为:

若 $V(150)\times 10\%+V(50)\times 90\%=0.1V(150)+0.9V(50)$,经济主体初始财富效用为 $V(100)$。

若 $0.1V(150)+0.9V(50)<V(100)$,则经济主体为风险厌恶者。

若 $0.1V(150)+0.9V(50)>V(100)$,则经济主体为风险偏好者。

若 $0.1V(150)+0.9V(50)=V(100)$,则经济主体为风险中性者。

例 1.2

证明:一个投资者是(严格)风险厌恶的,当且仅当其效用函数在所有财富水平上是(严格)凹的。

证明:充分性。设投资者的效用函数为 $V(x)$ 是(严格)凹的,任意给定财富水平 ω,令 $\tilde{\varepsilon}$ 表示公平抽彩的事后净收益,即 $E(\tilde{\varepsilon})=0$。根据 Jensen 不等式有

$$E(V(\omega+\tilde{\varepsilon}))(<)\leqslant V(E(\omega+\tilde{\varepsilon}))=V(\omega)$$

所以,投资者是(严格)风险厌恶的。

必要性。对任意的 a,以及 $\lambda\in[0,1]$,考虑简单的抽彩:

$$P(\tilde{\varepsilon}=\lambda a)=1-\lambda,\quad P(\tilde{\varepsilon}=-(1-\lambda)a)=\lambda$$

显然 $E(\tilde{\varepsilon})=0$,即此抽彩是公平的。假设投资者是(严格)风险厌恶的,因此有

$$V(\omega)(>)\geqslant E(V(\omega+\tilde{\varepsilon}))=\lambda V(\omega-(1-\lambda)a)+(1-\lambda)V(\omega+\lambda a)$$

上式对所有的 a,λ 成立[要求 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$,并且 $\omega-(1-\lambda)a$ 和 $\omega+a\lambda$ 均在 $V(x)$ 的定义域里],注意到 $\omega=\lambda(\omega-(1-\lambda)a)+(1-\lambda)(\omega+\lambda a)$,即 ω 是 $\omega-(1-\lambda)a$ 和 $\omega+\lambda a$ 两个值的凸组合,所以 $V(\cdot)$是(严格)凹的。

例 1.3

某风险偏好者的效用函数为 $V(h)=h^2$。假定有一个公平游戏,即投资者投资 5 万元,获利 1 万元的概率为 0.5,亏损 1 万元的概率也为 0.5。试问:该投资者会参加此

例　1.3(续)
公平游戏吗?
解　投资者参加该公平游戏的期望效用为 $$pV(\omega_0+h_1)+(1-p)V(\omega_0+h_2)=0.5\times 36+0.5\times 16=26$$ 投资者不参加公平游戏的确定性收益的期望为 $$V(\omega_0)=V(5)=25$$ 因此,$V(\omega_0)<pV(\omega_0+h_1)+(1-p)V(\omega_0+h_2)$,该投资者不会参加该公平游戏。

1.3.2　马科维茨风险溢价

假定所有的投资者都是风险厌恶的,可是不同的投资者对风险的厌恶程度未必一样,为度量投资者风险厌恶程度,我们引入马科维茨风险溢价(Markowitz risk premium)概念。

投资者是风险厌恶的,所以式(1.3.1)成立。

设 $\Theta(\omega_0,\tilde{h})$满足下列条件

$$V[\omega_0-\Theta(\omega_0,\tilde{h})]=pV(\omega_0+h_1)+(1-p)V(\omega_0+h_2) \tag{1.3.4}$$

更一般地,

$$V[E(\tilde{\omega})-\Theta(\tilde{\omega})]=E[V(\tilde{\omega})] \tag{1.3.5}$$

式中,$\tilde{\omega}=\omega_0+\tilde{h}$,则称 $\Theta(\omega_0,\tilde{h})$为马科维茨风险溢价。

$\Theta(\omega_0,\tilde{h})$越大,表明投资者越厌恶风险,称

$$\omega_0-\Theta(\omega_0,\tilde{h})\quad 或\quad E(\tilde{\omega})-\Theta(\tilde{\omega})$$

为确定性等价财富。

设 $x=\omega_0+h_1$,$y=\omega_0+h_2$,用图 1.1 中的 x'作为确定性等价财富,ω_0-x'为马科维茨风险溢价。

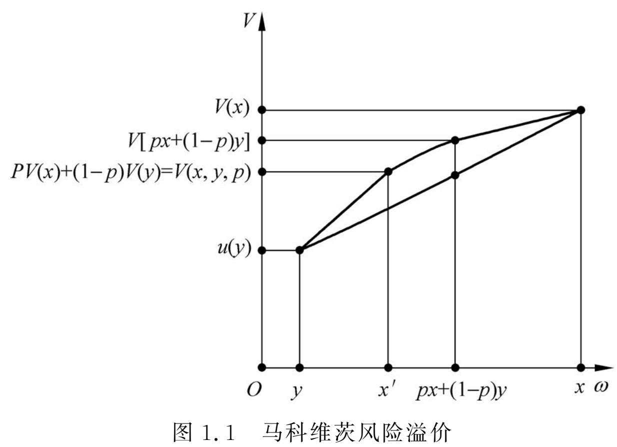

图 1.1　马科维茨风险溢价

例 1.4

假设投资者的效用函数为 $V(x)=\ln x$,初始财富为 $\omega_0=10$ 元,假定他面临一个公平的抽奖,有 0.8 的概率获得 5 元,有 0.2 的概率获得 30 元。试计算其确定性等价财富和风险溢价。

首先计算投资者参与这一抽奖的期望效用:

$$E(\tilde{\omega})=0.8\times 5+0.2\times 30=10$$

$$V[E(\tilde{\omega})]=\ln 10\approx 2.3$$

$$E[V(\tilde{\omega})]=0.8\times \ln 5+0.2\times \ln 30=1.97$$

由

$$V[E(\tilde{\omega})-\Theta(\omega_0,\tilde{h})]=E[V(\tilde{\omega})]=1.97$$

确定性等价财富

$$E(\tilde{\omega})-\Theta(\omega_0,\tilde{h})=7.17$$

所以,马科维茨风险溢价

$$\Theta(\omega_0,\tilde{h})=10-7.17=2.83$$

例 1.5

设某消费者的效用函数为 $V(w)=\ln(w)$,该消费者进行博弈的盈亏都为 h,概率均为 50%,消费者原资产水平为 w_0,求其确定性等价财富和风险溢价。

解 设风险溢价为 Θ。原来的资产 w_0 是一个确定性的收入水平,如果消费者不参与博弈,其资产不变。如果消费者参与博弈,有两种可能:一是盈利,资产变为 w_0+h;二是亏损,资产变为 w_0-h。由已知条件:初始财富为 w_0,效用函数为 $V(w)=\ln(w)$,

$$\begin{aligned} E(V(W+\varepsilon)) &= \frac{1}{2}V(w_0+h)+\frac{1}{2}V(w_0-h) \\ &= \frac{1}{2}\ln(w_0-h)+\frac{1}{2}\ln(w_0-h)=\ln\left(\sqrt{w_0^2-h^2}\right) \\ V(W-\Theta) &= \ln(w_0-\Theta) \end{aligned}$$

由定义知:$V(W-\Theta)=E(V(W+\varepsilon))$,即 $\ln(w_0-\Theta)=\ln\left(\sqrt{w_0^2-h^2}\right)$,求得:$w_0-\Theta=\left(\sqrt{w_0^2-h^2}\right)$,$\Theta=w_0-(w_0^2-h^2)^{\frac{1}{2}}$。

因此,确定性等价财富为 $w_0-\Theta=\left(\sqrt{w_0^2-h^2}\right)$,风险溢价为 $\Theta=w_0-(w_0^2-h^2)^{\frac{1}{2}}$。

1.3.3 阿罗-伯瑞特绝对风险厌恶函数

马科维茨风险溢价表示风险厌恶投资者对风险的厌恶程度,下面讨论马科维茨风险

溢价和效用函数之间的关系。

由风险溢价的定义

$$V[E(\tilde{\omega})-\Theta(\tilde{\omega})]=E[V(\tilde{\omega})]$$

这里 $\Theta(\tilde{\omega})$表示风险溢价,下面推导风险溢价和效用函数之间的关系。

由微分公式,将等号的左边写为

$$V[E(\tilde{\omega})-\Theta(\tilde{\omega})]=V[E(\tilde{\omega})]-V'[E(\tilde{\omega})]\Theta(\tilde{\omega})+o[\Theta(\tilde{\omega})] \tag{1.3.6}$$

把 $V(\tilde{\omega})$在 $E(\tilde{\omega})$展开,得

$$V(\tilde{\omega})=V[E(\tilde{\omega})]+V'[E(\tilde{\omega})][\tilde{\omega}-E(\tilde{\omega})]+\frac{V''[E(\tilde{\omega})]}{2}[\tilde{\omega}-E(\tilde{\omega})]^2+o[\tilde{\omega}-E(\tilde{\omega})]^2 \tag{1.3.7}$$

式(1.3.7)两边取期望,得

$$E[V(\tilde{\omega})]=V[E(\tilde{\omega})]+\frac{V''[E(\tilde{\omega})]}{2}\sigma^2(\tilde{\omega})+o[\tilde{\omega}-E(\tilde{\omega})]^2 \tag{1.3.8}$$

由式(1.3.6)和式(1.3.8)得

$$\Theta(\tilde{\omega})\approx\left\{-\frac{V''[E(\tilde{\omega})]}{V'[E(\tilde{\omega})]}\right\}\left[\frac{\sigma^2(\tilde{\omega})}{2}\right] \tag{1.3.9}$$

由上面的讨论可见,$-\frac{V''(x)}{V'(x)}$在风险的度量中起关键性作用。称

$$A(x)=-\frac{V''(x)}{V'(x)} \tag{1.3.10}$$

为阿罗-伯瑞特(Arrow-Pratt)绝对风险厌恶函数。称

$$T(x)=A(x)^{-1} \tag{1.3.11}$$

为风险容忍函数。称

$$R(x)=xA(x) \tag{1.3.12}$$

为相对风险厌恶函数。

1.3.4　双曲绝对风险厌恶函数

称形如

$$V(x)=\frac{1-r}{r}\left(\frac{ax}{1-r}+b\right)^r,\quad b>0$$

的函数为双曲绝对风险厌恶(HARA)函数,它是金融经济学中用到的一类重要的效用函数。此函数的定义域为$\frac{ax}{1-r}+b>0$。直接计算,可得

$$V'(x)=a\left(\frac{ax}{1-r}+b\right)^{r-1}$$

$$V''(x)=-a^2\left(\frac{ax}{1-r}+b\right)^{r-2}$$

因此,

$$A(x)=-\frac{V''(x)}{V'(x)}=a\left(\frac{ax}{1-r}+b\right)^{-1}=\left(\frac{x}{1-r}+\frac{b}{a}\right)^{-1} \tag{1.3.13}$$

是一条双曲线,称这类函数为双曲绝对风险厌恶函数,而

$$T(x)=\left(\frac{1}{1-r}\right)x+\frac{b}{a} \tag{1.3.14}$$

是一条直线。当参数取不同值时,可以得到各种常用的效用函数。

(1) 当 $r=1$ 时,则

$$V(x)=ax \tag{1.3.15}$$

是线性函数,是风险中性者的效用函数。

(2) 当 $r=2$ 时,则

$$V(x)=-\frac{1}{2}(b-ax)^2 \tag{1.3.16}$$

是二次效用函数,一般写成

$$V(x)=x+ax^2,\quad a<0 \tag{1.3.17}$$

(3) 当 $b=1,r\to\infty$ 时

$$V(x)=-\mathrm{e}^{-ax} \tag{1.3.18}$$

是指数效用函数。容易验证 $A(x)=a$,具有常绝对风险厌恶特征。

(4) 当 $r<1,b=0$ 时,为幂效用函数,可写成

$$V(x)=\frac{x^r}{r} \tag{1.3.19}$$

而且

$$T(x)=1-r$$

它具有常相对风险厌恶和递减绝对风险厌恶。

(5) 当 $a=1,b=0,r\to0$ 时

$$\frac{1-r}{r}\left[\left(\frac{x}{1-r}\right)^r\right]\to\ln x \tag{1.3.20}$$

这是对数效用函数,它是等弹性边际效用函数

$$R(x)=-\frac{V''(x)x}{V'(x)}=1$$

1.4 均值方差效用函数

为了以后的应用,本节研究一种特殊的期望效用函数,即所谓的均值方差效用函数,为此,首先讨论金融资产的各种收益率。

1.4.1 资产的收益率

在金融市场中,直接观察到的是资产的价格,设有 $n+1$ 个交易时点,记 $0,1,\cdots,n$,时点 t 金融资产的价格用 P_t 来表示,也即表示从时刻 t 到时刻 $t+1$ 到来之前金融资产的

价格，同时也称 t 期价格。

假如从时点 t 到时点 $t+1$ 没有红利支付，那么从时点 t 到时点 $t+1$ 的绝对收益为 $P_{t+1}-P_t$。

绝对收益是一个描述收益大小的概念，但它不能更合理地比较不同资产收益的大小。例如，价值为 100 元的金融资产的绝对收益为 8 元，价值为 10 元的金融资产的绝对收益为 4 元，哪一种金融资产的收益更大？显然后者的收益更大。因此，引入相对收益——百分比收益概念。

假设从时点 t 到时点 $t+1$ 没有红利支付，时点 t 的价格为 P_t，时点 $t+1$ 的价格为 P_{t+1}，则该资产从时点 t 到时点 $t+1$ 百分比收益（单位净收益）R_t 为

$$R_t=\frac{P_{t+1}-P_t}{P_t}=\frac{P_{t+1}}{P_t}-1 \tag{1.4.1}$$

而称 $1+R_t$ 为资产总收益，即净收益加上成本 1。显然，百分比收益越大的资产收益越大。假设从时刻 t 到时刻 $t+k$ 共有 k 个时期，那么从时刻 t 到第 $t+k$ 时刻 $t+k$ 期的总收益用 $1+R_{t+k}$ 表示，则由定义

$$1+R_{t+k}=\frac{P_{t+k}}{P_t}=\frac{P_{t+1}}{P_t}\times\frac{P_{t+2}}{P_{t+1}}\times\cdots\times\frac{P_{t+k}}{P_{t+k-1}}=(1+R_t)(1+R_{t+1})\cdots(1+R_{t+k-1}) \tag{1.4.2}$$

从式(1.4.2)中可见资产总收益是某一个时期从期末到期初的收益，显然和时间的跨度有关。如果时间跨度为 1 年称为年收益，时间跨度为 1 个月称为月收益，时间跨度为 1 个星期称为周收益，时间跨度为 1 天称为日收益。

假设从 t 期到 $t+k$ 期 k 年的收益为 $1+R_{t+k}$，假设 k 年的收益为 $R_t(k)$，年平均收益记为 $[R_t(k)]$，则

$$[R_t(k)]=\{1+R_{t+k}\}^{\frac{1}{k}}-1 \tag{1.4.3}$$

如果每一个时期收益都很小，则容易得出

$$[R_t(k)]\approx\frac{1}{k}R_{t+k} \tag{1.4.4}$$

年平均收益是几何平均，计算起来不太方便，引入如下连续复合收益 r_t，定义为

$$r_t=\ln(1+R_t) \tag{1.4.5}$$

令 $p_t=\ln P_t$，则由式(1.4.2)可得

$$r_t=\ln(1+R_t)=\ln\frac{P_{t+1}}{P_t}=\ln P_{t+1}-\ln P_t=p_{t+1}-p_t$$

如果考虑多期连续复合收益 $r_{t+k}=\ln(1+R_{t+k})$，则

$$\begin{aligned}r_{t+k}&=\ln(1+R_{t+k})=\ln\prod_{i=1}^{k}(1+R_{t+i-1})=\sum_{i=1}^{k}\ln(1+R_{t+i-1})\\&=r_t+r_{t+1}+\cdots+r_{t+k-1}\end{aligned}$$

k 期连续复合收益等于每个时刻连续复合收益之和，这样计算多期收益就比较简单。

1.4.2　均值方差效用函数的定义和性质

金融资产的一个重要特性是价格的不确定性，因此各种收益也具有不确定性。我们

假定价格和收益是随机变量,通常假定资产收益服从正态分布,它们的期望值称为金融资产的期望收益,而相应地把方差作为金融资产对期望收益偏离程度的刻画。方差越大,说明偏离期望收益的程度越高,风险越大。

设有某种金融资产的收益率为 R,如果存在二元函数 $v(x,y)$,使其效用函数

$$E[V(R)]=v[E(R),\mathrm{Var}(R)] \tag{1.4.6}$$

$$\partial_1 v[E(R),\mathrm{Var}(R)]\geqslant 0,\quad \partial_2 v[E(R),\mathrm{Var}(R)]\leqslant 0$$

则称 $E[V(R)]$为均值方差效用函数。其中,$\partial_1 v[E(R),\mathrm{Var}(R)]$为对第一个变量求偏导,$\partial_2 v[E(R),\mathrm{Var}(R)]$为对第二个变量求偏导。从上面的定义可见,如果投资者具有均值方差效用函数,则在某一收益水平之下,资产的风险越小越受偏爱,期望效用越大;在某一风险水平之下,收益越大的资产越受偏爱,期望效用越大。

如果 $V(R)$可在 $E(R)$展开为泰勒级数,即

$$V(R)=V[E(R)]+V'[E(R)][R-E(R)]+\frac{1}{2!}V''[E(R)][R-E(R)]^2+\sum_{j=3}^{\infty}\frac{1}{j!}V^{(j)}[E(R)][R-E(R)]^j \tag{1.4.7}$$

如果 $V(R)$是 R 的二次函数,则式(1.4.7)的第四项为零。此时式(1.4.7)两边取期望值,得

$$\begin{aligned}E[V(R)]&=V[E(R)]+V'[E(R)]E[R-E(R)]+\frac{1}{2!}V''[E(R)]E[R-E(R)]^2\\&=V[E(R)]+\frac{1}{2}V''[E(R)]\mathrm{Var}(R)\end{aligned}$$

此时,$E[V(R)]$可表示为 $E(R)$和 $\mathrm{Var}(R)$的函数。式(1.4.7)两边取期望得

$$E[V(R)]=V[E(R)]+\frac{1}{2!}V''[E(R)]\mathrm{Var}(R)+\sum_{j=3}^{\infty}\frac{1}{j!}V^{(j)}[E(R)]E[R-E(R)]^j$$

如果 R 服从正态分布,由正态分布的性质,

当 j 为奇数时 $\qquad E[R-E(R)]^j=0$

当 j 为偶数时 $\qquad E[R-E(R)]^j=\left[\dfrac{j!}{\left(\frac{j}{2}\right)!}\right]\dfrac{(\mathrm{Var}(R))^{\frac{j}{2}}}{2^{\frac{j}{2}}}$

此时 $E[V(R)]$可表示成 $E(R)$和 $\mathrm{Var}(R)$的函数,于是得到下面的结论:

如果 $V(R)$是二次函数或 R 服从正态分布,$V(R)$可展开成泰勒级数,则 $E[V(R)]$是均值方差的函数。

1.5 随机占优

1.5.1 随机占优准则

在通常的情况下,金融资产的收益率 R 是随机变量,利用投资者的 Von Neumann-Morgenstern 效用函数来判断资产的期望效用。由于不同投资者的 Von Neumann-

Morgenstern 效用函数不同，所以对资产的期望效用也就不尽相同。也就是说，对于同一项金融资产，不同的投资者会有不同的期望效用。这样就很难比较两个资产究竟哪一个更好。也就是说投资者的 Von Neumann-Morgenstern 效用函数的类型不一致，对资产的评价就会不一样。一般说来，风险厌恶的投资者和风险喜爱的投资者对资产的选择标准是不一致的。

随机占优(SD)准则是依据投资者效用函数的类型将投资者分类。首先把 $V'(x)\geqslant 0$ 的投资者作为第一类，与第一类投资者相应的 SD 准则称为一阶随机占优(FSD)准则。把第一类投资者继续分类，在第一类投资者中，满足 $V''(x)\leqslant 0$ 的投资者，为第二类投资者，相应的 SD 准则为二阶随机占优(SSD)准则，这类投资者是厌恶风险的投资者。

1.5.2　一阶随机占优

如果所有具有连续递增效用函数的投资者对资产 A 的偏好胜过对资产 B 的偏好，我们称资产 A 一阶随机占优于资产 B，记为 $A\underset{\text{FSD}}{\geq}B$。如前所述，对于第一类投资者而言，认为资产 A 优于资产 B，根据期望效用准则，即对于第一类投资者中的每一个投资者，资产 A 的期望效用大于资产 B 的期望效用，一阶随机占优可用资产的收益率来刻画。

定理 1.4　设 $F_A(x)$、$F_B(x)$分别是资产 A 和资产 B 的收益率 R_A 和 R_B 的分布函数，其定义域为$[a,b]$，则 $A\underset{\text{FSD}}{\geq}B$ 的充要条件是 $F_A(x)\leqslant F_B(x)$。

证明　必要性　首先证明若 $A\underset{\text{FSD}}{\geq}B$，则 $F_A(x)\leqslant F_B(x)$。

用反证法，若不然，存在实数 x_0，使 $F_A(x_0)>F_B(x_0)$，由分布函数的右连续性，存在 $c>x_0$，使

$$F_A(x)>F_B(x),\quad x\in[x_0,c]$$

令

$$V(x)=\int_a^x I_{[x_0,c]}(t)\mathrm{d}t$$

这里 $I_{[x_0,c]}(t)=\begin{cases}1, & t\in[x_0,c]\\ 0, & t\notin[x_0,c]\end{cases}$。由 $I_{[x_0,c]}(t)$的可积性，以及 $I_{[x_0,c]}\geqslant 0$，可知 $V(x)$是连续的，而且是递增的，

$$V'(x)=I_{[x_0,c]}(x)\geqslant 0$$

于是

$$\begin{aligned}
&E[V(R_A)]-E[V(R_B)]\\
&\quad=\int_a^b V(x)\mathrm{d}[F_A(x)-F_B(x)]\\
&\quad=V(x)[F_A(x)-F_B(x)]\Big|_a^b-\int_a^b[F_A(x)-F_B(x)]\mathrm{d}V(x)\\
&\quad=-\int_a^b[F_A(x)-F_B(x)]V'(x)\mathrm{d}x\\
&\quad=-\int_{x_0}^c[F_A(x)-F_B(x)]\mathrm{d}x<0
\end{aligned}$$

此与 $A \underset{\text{FSD}}{\geq} B$ 矛盾，故 $F_A(x) \leqslant F_B(x)$。

充分性 因为

$$\begin{aligned}
E[V(R_A)] - E[V(R_B)] &= \int_a^b V(x)\mathrm{d}F_A(x) - \int_a^b V(x)\mathrm{d}F_B(x) \\
&= V(x)F_A(x)\Big|_a^b - \int_a^b F_A(x)V'(x)\mathrm{d}x - V(x)F_B(x)\Big|_a^b + \int_a^b F_B(x)V'(x)\mathrm{d}x \\
&= -\int_a^b [F_A(x) - F_B(x)]V'(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

由假设 $F_A(x) \leqslant F_B(x)$，又 $V(x)$ 递增，$V'(x) \geqslant 0$，所以

$$E[V(R_A)] \geqslant E[V(R_B)]$$

即

$$A \underset{\text{FSD}}{\geq} B$$ 证毕。

若风险资产 A、B 的收益率 $R_A \sim N(\mu_A, \sigma_A^2)$，$R_B \sim N(\mu_B, \sigma_B^2)$，而且 $\mu_A > \mu_B$，$\sigma_A = \sigma_B$。此时 $F_A(x) \leqslant F_B(x)$，所以 $A \underset{\text{FSD}}{\geq} B$，如图 1.2 所示。

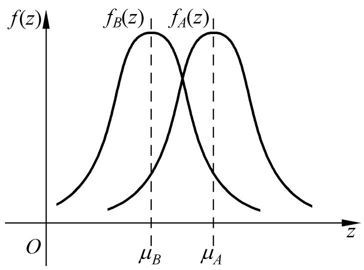

图 1.2 风险资产 A 和 B 的收益率的密度函数

例 1.6

设资产 A 和资产 B 的收益率分别为 $\tilde{r}_A$ 和 $\tilde{r}_B$，且满足：$P(\tilde{r}_A = 0) = 0.2$，$P(\tilde{r}_B = 0) = 0.25$，$P(\tilde{r}_A = 0.4) = 0.2$，$P(\tilde{r}_B = 0.4) = 0.25$，$P(\tilde{r}_A = 0.6) = 0.1$，$P(\tilde{r}_B = 1) = 0.5$，$P(\tilde{r}_A = 1) = 0.5$，则 $A \underset{\text{FSD}}{\geq} B$。这是由于

$$F_A(x) = \begin{cases} 0.2 & x \in [0, 0.4) \\ 0.4 & x \in [0.4, 0.6) \\ 0.5 & x \in [0.6, 1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}, \quad F_B(x) = \begin{cases} 0.25 & x \in [0, 0.4) \\ 0.5 & x \in [0.4, 1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

因此，$F_A(x) \leqslant F_B(x)$；根据定理 1.4，得 $A \underset{\text{FSD}}{\geq} B$。

1.5.3 二阶随机占优

如果对所有具有连续递增效用函数的厌恶风险的投资者偏好资产 A 胜过偏好资产

B，则称风险资产 A 二阶随机占优于资产 B，记为 $A \underset{\text{SSD}}{\geqslant} B$。

定理 1.5　$A \underset{\text{SSD}}{\geqslant} B$ 的充要条件是 $S(x) \leqslant 0$，其中

$$S(x) = \int_a^x [F_A(t) - F_B(t)]\mathrm{d}t, \quad x \in [a, b]$$

证明　必要性　设 $A \underset{\text{SSD}}{\geqslant} B$，证 $S(x) \leqslant 0$，用反证法，若不然，由 $S(x)$ 的连续性，存在 $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$ 使 $S(x) > 0$，当 $x \in [\alpha, \beta]$，令

$$V(x) = \int_a^x \int_y^b \boldsymbol{I}_{[\alpha,\beta]}(t)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y$$

容易验证 $V(\cdot)$ 是连续可微、单调递增且是凹函数，而且

$$V'(x) = \int_x^b \boldsymbol{I}_{[\alpha,\beta]}(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} \beta - \alpha, & x \leqslant \alpha \\ \beta - x, & x \leqslant \beta \\ 0, & x > \beta \end{cases}$$

$$V''(x) = -\boldsymbol{I}_{[\alpha,\beta]} \leqslant 0$$

于是

$$\begin{aligned}
&E[V(R_A)] - E[V(R_B)] \\
&= \int_a^b V(x)\mathrm{d}[F_A(x) - F_B(x)] \\
&= V(x)[F_A(x) - F_B(x)]\Big|_a^b - \int_a^b [F_A(x) - F_B(x)]\mathrm{d}V(x) \\
&= -\int_a^b [F_A(x) - F_B(x)]V'(x)\mathrm{d}x \\
&= -\int_a^b V'(x)\mathrm{d}S(x) \\
&= -S(x)V'(x)\Big|_a^b + \int_a^b S(x)\mathrm{d}V'(x), \quad S(a) = 0, V'(b) = 0 \\
&= \int_a^b S(x)\mathrm{d}V'(x) = \int_a^b S(x)V''(x)\mathrm{d}x \\
&= -\int_\alpha^\beta S(x)\mathrm{d}x < 0
\end{aligned}$$

这与 $A \underset{\text{SSD}}{\geqslant} B$ 相矛盾，所以 $S(x) \leqslant 0$。

充分性　设 $S(x) \leqslant 0$，则由前面证明可知

$$\begin{aligned}
&\int_a^b V(x)\mathrm{d}F_A(x) - \int_a^b V(x)\mathrm{d}F_B(x) \\
&\qquad = \int_a^b V(x)\mathrm{d}[F_A(x) - F_B(x)] \\
&\qquad = -S(x)V'(x)\Big|_a^b + \int_a^b S(x)\mathrm{d}V'(x) \\
&\qquad = \int_a^b S(x)\mathrm{d}V'(x) - S(b)V'(b)
\end{aligned}$$

由假设 $S(x) \leqslant 0$，$V'(b) \geqslant 0$，$S(b) \leqslant 0$，$V''(x) \leqslant 0$，所以

$$E[V(R_A)] \geqslant E[V(R_B)]$$

即 $A \underset{\text{SSD}}{\geqslant} B$。

设风险资产 A 和 B 的收益率 $R_A \sim N(\mu_A, \sigma_A^2)$，$R_B \sim N(\mu_B, \sigma_B^2)$，若 $\mu_A = \mu_B$，$\sigma_A < \sigma_B$，则 $A \underset{\text{SSD}}{\geqslant} B$，如图 1.3 所示。

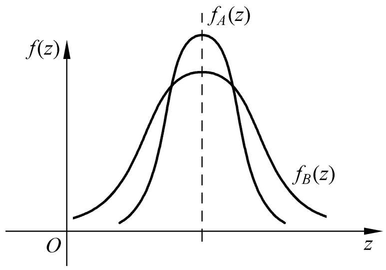

图 1.3 风险关系 A 和 B 的收益率的密度函数

例 1.7

设资产 A 和资产 B 的收益率分别为 $\tilde{r}_A$，$\tilde{r}_B$，并且满足 $P(\tilde{r}_A=0)=0.25$，$P(\tilde{r}_B=0)=0.3$，$P(\tilde{r}_A=0.5)=0.35$，$P(\tilde{r}_B=0.5)=0.25$，$P(\tilde{r}_A=0.75)=0.1$，$P(\tilde{r}_B=0.75)=0.1$，$P(\tilde{r}_A=1)=0.3$，$P(\tilde{r}_B=1)=0.35$，则 $A \underset{\text{SSD}}{\geq} B$。这是由于

$$F_A(x)=\begin{cases}0.25 & x\in[0,0.5)\\ 0.6 & x\in[0.5,0.75)\\ 0.7 & x\in[0.75,1)\\ 1 & x=1\end{cases},\quad F_B(x)=\begin{cases}0.3 & x\in[0,0.5)\\ 0.55 & x\in[0.5,0.75)\\ 0.6 & x\in[0.75,1)\\ 1 & x=1\end{cases}$$

并且

$$S(x)=\int_0^x (F_A(x)-F_B(x))\mathrm{d}x=\begin{cases}-0.05x & x\in[0,0.5)\\ -0.025+0.05(x-0.5) & x\in[0.5,0.75)\\ -0.0125+0.05(x-0.75) & x\in[0.75,1]\end{cases}$$

因此，$S(x)\leqslant 0$。

根据定理 1.5，得 $A \underset{\text{SSD}}{\geq} B$。

1.6 单期无套利资产定价模型

1.6.1 单期确定性无套利定价模型

1. 套利机会

设市场有 n 种风险资产，记为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，并将 1 种无风险资产记为 X_0，有两个时刻，记为时刻 0 和时刻 1。资产 X_i 在时刻 0 的价格记为 $P_0(X_i)$，在时刻 1 的价格记为 $P_1(X_i)$。假设 $P_1(X_i)>0$，$i=0,1,\cdots,n$。设投资于资产 X_i 的数量为 N_i，如果 $N_i>0$，N_i 表示买入数量，$N_i<0$，N_i 表示卖出数量，$(N_1, N_2, \cdots, N_n)^{\mathrm{T}}$ 称为资产组合。

$$w_i=\frac{N_iP_0(x_i)}{\sum_{i=0}^{n}N_iP_0(x_i)},\quad i=0,1,2,\cdots,n$$

称 $\boldsymbol{w}=(w_0,w_1,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$ 为投资组合。

套利机会(arbitrage opportunity)是指不投入任何资产即可获利，或者在0期不进行任何投入，而在1期可获得无风险收益；或者在0期获得无风险收益，而在1期无任何现金支出。容易看出，如果存在满足下列条件之一的资产组合，则有套利机会。

$$(1)\ P\left(\sum_{i=0}^{n} N_i X_i\right) \neq \sum_{i=0}^{n} N_i P(X_i) \tag{1.6.1}$$

这里 $P\left(\sum_{i=0}^{n} N_i X_i\right)$ 表示资产组合 $(N_0,N_1,\cdots,N_n)^{\mathrm{T}}$ 的价格。

$$(2)\ \sum_{i=0}^{n} N_i P_0(X_i) \leqslant 0 \text{ 且 } \sum_{i=0}^{n} N_i P_1(X_i) > 0 \tag{1.6.2}$$

$$(3)\ \sum_{i=0}^{n} N_i P_0(X_i) > 0 \text{ 且 } \sum_{i=0}^{n} N_i P_1(X_i) \leqslant 0 \tag{1.6.3}$$

如果市场不存在套利机会，则称市场为无套利市场。如果资产市场不存在任何套利机会，价格函数存在如下性质：

$$(1)\ P\left(\sum_{i=0}^{n} N_i X_i\right) = \sum_{i=0}^{n} N_i P(X_i) \tag{1.6.4}$$

性质(1)说明了价格函数是线性函数。

$$(2)\ \text{如果} \sum_{i=0}^{n} N_i P_1(X_i) > 0\text{，那么} \sum_{i=0}^{n} N_i P_0(X_i) > 0 \tag{1.6.5}$$

因为无论是在时刻0还是在时刻1假使关系式(1.6.4)不成立，就会出现套利机会。不妨设 $P\left(\sum_{i=0}^{n} N_i X_i\right) > \sum_{i=0}^{n} N_i P(X_i)$ 就可以卖空资产 $\sum_{i=0}^{n} N_i X_i$，同时买入 N_i 份资产 $X_i(i=0,1,\cdots,n)$ 立刻就可以获利。

如果 $\sum_{i=0}^{n} N_i P_1(X_i) > 0$ 而 $\sum_{i=0}^{n} N_i P_0(X_i) \leqslant 0$，则时刻0买入资产组合 $(N_0,N_1,\cdots,N_n)$，无任何现金支出，而时刻1卖出该资产组合即可获利。

这里需要假设市场无任何交易成本、税收和卖空限制，而且假定资产是无限可分的，令

$$R_i = \frac{P_1(X_i) - P_0(X_i)}{P_0(X_i)},\quad i=0,1,\cdots,n$$

称为资产 X_i 的收益率。则存在如下定理。

定理1.6　设资本市场不存在套利机会，资产组合 $(N_1,N_2,\cdots,N_n)^{\mathrm{T}}$ 满足 $\sum_{i=0}^{n} N_i P_0(X_i) > 0$，则资产组合 $(N_0,N_1,\cdots,N_n)$ 的收益率为

$$R_p = \sum_{i=0}^{n} w_i R_i$$

其中，$w_i = \dfrac{N_i P_0(X_i)}{\sum_{i=0}^{n} N_i P_0(X_i)}$。

证明　根据定义，资产组合 $(N_0,N_1,\cdots,N_n)$ 的收益率为

$$R_p = \frac{P_1\left(\sum_{i=0}^{n} N_i X_i\right) - P_0\left(\sum_{i=0}^{n} N_i X_i\right)}{P_0\left(\sum_{i=0}^{n} N_i X_i\right)} \tag{1.6.6}$$

因为市场不存在套利机会,所以

$$P_1\left(\sum_{i=0}^{n} N_i X_i\right) = \sum_{i=0}^{n} N_i P_1(X_i) \tag{1.6.7}$$

$$P_0\left(\sum_{i=0}^{n} N_i X_i\right) = \sum_{i=0}^{n} N_i P_0(X_i) \tag{1.6.8}$$

将式(1.6.7)和式(1.6.8)代入式(1.6.6),得投资组合的收益率为

$$\begin{aligned}
&\frac{\sum_{i=0}^{n} N_i P_1(X_i) - \sum_{i=0}^{n} N_i P_0(X_i)}{\sum_{i=0}^{n} N_i P_0(X_i)} \\
&= \frac{\sum_{i=0}^{n} N_i [P_1(X_i) - P_0(X_i)]}{\sum_{i=0}^{n} N_i P_0(X_i)} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{P_1(X_i) - P_0(X_i)}{P_0(X_i)} \frac{N_i P_0(X_i)}{\sum_{i=0}^{n} N_i P_0(X_i)} \\
&= \sum_{i=0}^{n} w_i R_i
\end{aligned}$$

这里

$$R_i = \frac{P_1(X_i) - P_0(X_i)}{P_0(X_i)} \tag{1.6.9}$$

证毕。

2. 单期确定性定价模型

单期资产定价问题是已知时刻1资产的价格,确定时刻0资产的价格,如果时刻1资产价格是确定的,可得到如下定理。

定理1.7 广义套利定价定理(generalized arbitrage pricing theorem,GAPT)。

设资本市场无套利机会,则

$$R_i = R_j, \quad i, j = 0, 1, 2, \cdots, n \tag{1.6.10}$$

证明 设 $R_0 = R_f$,式(1.6.10)等价于

$$P_0(X_i) = \frac{P_1(X_i)}{1 + R_f}, \quad i = 0, 1, \cdots, n \tag{1.6.11}$$

若存在 $1 \leqslant i_0 \leqslant n$,使 $P_0(X_{i_0}) \neq \dfrac{P_1(X_{i_0})}{1+R_f}$,不妨设

$$P_0(X_{i_0}) > \frac{P_1(X_{i_0})}{1+R_f}$$

现在构造一个资产组合：

$$\text{令 } N_0 = P_1(X_{i_0}),\quad N_{i_0} = -P_1(X_0),\quad N_i = 0,\quad i \neq 0, i_0 \tag{1.6.12}$$

该资产投资组合在时刻 0 的价格为

$$\frac{P_1(X_{i_0})P_1(X_0)}{1+R_f} - P_1(X_0)P_0(X_{i_0}) < 0$$

而在时刻 1 的价格为

$$P_1(X_{i_0})P_1(X_0) - P_1(X_0)P_1(X_{i_0}) = 0$$

这是一个套利机会，与假设矛盾。　　证毕。

定理 1.7 说明，如果不存在套利机会，任何资产价格都是确定的，那么资产的价格(时刻 0 的价格)等于时刻 1 的价格的折现值。

1.6.2　单期不确定性无套利定价模型

本节研究风险资产的定价问题，设有两个时刻，时刻 0 表示现在，时刻 1 表示未来，风险资产在时刻 1 的价格是不确定的，是随机变量，如果已知风险资产在时刻 1 的价格，来确定这种资产在时刻 0 的价格，称为资产定价问题。

1. 两资产情形

设有两种资产，风险资产记为 X_1，无风险资产记为 X_0。无风险资产的收益率记为 R_f，总收益率记为 $1+R_f$。设风险资产在时刻 0 的价格为 $P_0(X_1)$，在时刻 1 的价格为 $P_1(X_1)$，在时刻 1 有两种状态，上涨时价格为 $uP_0(X_1)$，下跌时价格为 $dP_0(X_1)$，上涨时的概率记为 q，下跌时的概率为 $1-q$，如图 1.4 所示。

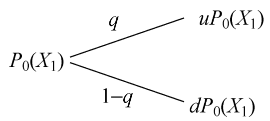

图 1.4　风险资产在时刻 1 的两种状态

显然 $d < 1+R_f < u$，否则将会出现套利机会。

为复制资产 1，我们定义两种基本证券：基本证券 1，在时刻 1，上涨状态时价格为 1，下跌状态时价格为 0；基本证券 2，上涨状态时价格为 0，下跌状态时价格为 1。构造资产组合：$uP_0(X_1)$份基本证券 1，$dP_0(X_1)$份基本证券 2。则无论是上涨还是下跌，资产组合的价值都和风险资产 X_1 的价格一样。

下面考虑基本证券的定价问题。设基本证券 1 在时刻 0 的价格为 π_u，基本证券 2 在时刻 0 的价格为 π_d。根据无套利原则，上述资产组合在时刻 1 的价格与风险资产 X_1 的价格一样，则在时刻 0，它们的价格也应当一样，否则就会产生套利机会，于是

$$P_0(X_1) = \pi_u u P_0(X_1) + \pi_d d P_0(X_1)$$

$$\pi_u u + \pi_d d = 1 \tag{1.6.13}$$

一份基本证券 1 和一份基本证券 2 构成的组合，无论是上涨还是下跌，其价格都是 1，因

此根据一般的套利定价定理,我们有

$$\pi_u + \pi_d = \frac{1}{1+R_f} \tag{1.6.14}$$

由式(1.6.13)和式(1.6.14),得

$$\pi_u = \frac{(1+R_f)-d}{(1+R_f)(u-d)} \tag{1.6.15a}$$

$$\pi_d = \frac{u-(1+R_f)}{(1+R_f)(u-d)} \tag{1.6.15b}$$

令 $p^* = \dfrac{(1+R_f)-d}{u-d}$,则 $1-p^* = \dfrac{u-(1+R_f)}{u-d}$,那么

$$\pi_u = \frac{p^*}{1+R_f}, \quad \pi_d = \frac{1-p^*}{1+R_f} \tag{1.6.16}$$

把式(1.6.16)代入式(1.6.13),风险资产 X_1 在时刻0的价格可表示为

$$P_0(X_1) = \frac{p^* uP_0(X_1) + (1-p^*)dP_0(X_1)}{1+R_f} \tag{1.6.17}$$

式(1.6.17)说明,风险资产 X_1 在时刻0的价格为风险资产 X_1 在时刻1的价格(随机变量),对于概率分布(p^*,$1-p^*$)取期望值,然后再折现,而概率分布(p^*,$1-p^*$)与风险资产 X_1 在时刻1上涨、下跌的概率 q 无关。它是由上涨下跌的倍数和无风险利率确定的。

亦可将式(1.6.17)写为 $E_*[P_1(X_1)]=(1+R_f)P_0(X_1)$,因此,称 p^* 为风险中性概率。

请注意:除了可以给风险资产 X_1 定价之外,基本证券还可以用来为其他的证券定价,如风险资产 X_2。利用矩阵代数的知识,我们就可以证明,由风险资产 X_2 导出新的 π_u 和 π_d 和由风险资产 X_1 导出的 π_u 和 π_d 是一样的。

为了清楚起见,我们记时刻1相应于风险资产 X_2 的上涨和下跌状态的参数为 u^* 和 d^*,基本证券1和基本证券2在时刻0的价格为 π_u^* 和 π_d^*。

将式(1.6.13)和式(1.6.14)写成矩阵形式,就有

$$[\pi_u, \pi_d]\begin{bmatrix} uP_0(X_1) & 1 \\ dP_0(X_1) & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0(X_1) & \dfrac{1}{1+R_f} \end{bmatrix}$$

由风险资产 X_1 导出 π_u 和 π_d,有

$$[\pi_u, \pi_d] = \begin{bmatrix} P_0(X_1) & \dfrac{1}{1+R_f} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} uP_0(X_1) & 1 \\ dP_0(X_1) & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

用 π_u 和 π_d 为风险资产 X_2 定价时,有

$$\begin{bmatrix} P_0(X_2) & \dfrac{1}{1+R_f} \end{bmatrix} = [\pi_u, \pi_d]\begin{bmatrix} u^* P_0(X_2) & 1 \\ d^* P_0(X_2) & 1 \end{bmatrix}$$

同理,由风险资产 X_2 导出 π_u^* 和 π_d^* 时,有

$$[\pi_u^*, \pi_d^*]\begin{bmatrix} u^* P_0(X_2) & 1 \\ d^* P_0(X_2) & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0(X_2) & \dfrac{1}{1+R_f} \end{bmatrix}$$

于是,有

$$
\begin{aligned}
[\pi_u^*, \pi_d^*] &= \begin{bmatrix} P_0(X_2) & \dfrac{1}{1+R_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^* P_0(X_2) & 1 \\ d^* P_0(X_2) & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= [\pi_u, \pi_d] \begin{bmatrix} u^* P_0(X_2) & 1 \\ d^* P_0(X_2) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^* P_0(X_2) & 1 \\ d^* P_0(X_2) & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= [\pi_u, \pi_d]
\end{aligned}
$$

由此得到证明。

所以，对于时刻 1 后出现两种状态的市场，它的两个基本证券是唯一确定的。反过来，也可以说，两个基本证券唯一地确定了这个市场。

假设资产 X_1 在时刻 0 的价格为 100，在时刻 1 的价格如图 1.5 所示。

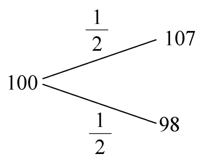

图 1.5　资产 X_1 在时刻 1 的价格

无风险利率 $R_f = 2\%$，则此时 $u = 1.07$，$d = 0.98$，由式(1.6.15a)和式(1.6.15b)，得

$$\pi_u = \frac{1.02 - 0.98}{1.02 \times (1.07 - 0.98)} \approx 0.435\,7$$

$$\pi_d = \frac{1.07 - 1.02}{1.02 \times (1.07 - 0.98)} \approx 0.544\,7$$

则 X_1 在时刻 0 的价格为

$$P_0(X_1) = \pi_u u P_A + \pi_d d P_A = 0.435\,7 \times 107 + 0.544\,7 \times 98 \approx 100$$

设有证券 X_2，其价格如图 1.6 所示。

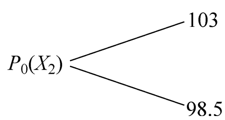

图 1.6　证券 X_2 的价格

则 $P_0(X_2) = 0.435\,7 \times 103 + 0.544\,7 \times 98.5 \approx 98.53$。

2. 一般单期不确定性定价模型

前面在两资产情形下利用基本证券给出了定价公式。现在讨论一般的情况，首先假设有 n 种资产，每种资产在时刻 1 的价格是有限状态(l 个状态)离散分布的情形。对于这种情况，存在状态价格定价向量，我们给出严格的证明。

设市场上有 n 种风险资产，每种资产在时刻 1 有 l 种状态，资产 X_i 在状态 $s(s=1,2,\cdots,l)$之下的价格记为 P_{si}，风险资产在时刻 1 的价格可用价格矩阵

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{l1} & P_{l2} & \cdots & P_{ln} \end{bmatrix}$$

表示，$\boldsymbol{P}$ 为 $l \times n$ 矩阵。记 $\boldsymbol{N} = (N_1, N_2, \cdots, N_n)^{\mathrm{T}}$ 表示资产组合，设资产 X_i 的当前时刻

0的价值为$v_i(i=1,2,\cdots,n)$。记$\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,\cdots,v_n)^{\mathrm{T}}$,$W_0=\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}$,$Z_{si}=\dfrac{P_{si}}{v_i}$,则设$w_0$为资产组合的初始价值。$Z_{si}=\dfrac{P_{si}}{v_i}$为在时刻1状态$s$出现时的总收益。$\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{v}}=\mathrm{diag}(v_1,v_2,\cdots,v_n)$,即以$v_1,v_2,\cdots,v_n$为对角线元素的对角阵,则有如下关系式

$$\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{l1} & Z_{l2} & \cdots & Z_{ln} \end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{v}}^{-1}$$

资产组合$\boldsymbol{w}$称为无风险投资组合,如果

$w_1+w_2+\cdots+w_n=1$;

$\boldsymbol{Z}\boldsymbol{w}=(R,R,\cdots,R)^{\mathrm{T}}$。

其中,$R_f=R-1$为无风险收益率。

(1) 套利机会。

为方便,引入如下记号

$$R_+^n=\{x\in\mathbb{R}^n\mid x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\cdots,n\}$$

$$R_{++}^n=\{x\in\mathbb{R}^n\mid x_i>0,\quad i=1,2,\cdots,n\}$$

如果$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in R_+^n$,$x\neq 0$,则称$x\gneqq 0$;类似地,可定义$x\gneqq y$。

如果$x,y\in\mathbb{R}^n$,$x-y\gneqq 0$,则称$x\gneqq y$。

如果资产组合$\boldsymbol{N}$满足下列条件之一

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{N}\leqslant 0,\quad \boldsymbol{P}\boldsymbol{N}\geqslant 0 \tag{1.6.18a}$$

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{N}\geqslant 0,\quad \boldsymbol{P}\boldsymbol{N}\leqslant 0 \tag{1.6.18b}$$

则存在套利机会;反之亦然。这里$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{N}$表示向量$\boldsymbol{v}$和向量$\boldsymbol{N}$的内积。

式(1.6.18a)说明,在时刻0资产组合的价值小于或者等于零,即无现金投入。而在时刻1至少有一种状态财富为正值。

例　1.8

市场由两种资产构成,时刻1的价格矩阵$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\1&4\end{bmatrix}$,时刻0的价格$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$。构造一个资产组合$\boldsymbol{N}$:卖空一个单位的第一种资产并买进一个单位的第二种资产,即$\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$,该组合不会有任何成本,即

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}=(1\quad 1)\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=0$$

但是,

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}>0$$

例　1.8(续)
因此,满足式(1.6.18a),存在第一类套利机会。这类套利机会像免费得到一张彩票,无须任何支付,可能会中奖(在第二种状态得到 1 或在第三种状态得到 3),也可能没有中奖(在第一种状态得到 0),但不会有失去任何东西的风险。进一步分析套利的原因,容易看出第二种资产占优于第一种资产,它应该更具有价值。为避免套利,第二种资产应该比第一种资产在时刻 0 有更高的价格,但本例中它们价格却相同,因此产生了套利机会。

(2) 状态价格向量。

如果向量$\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_l)^{\mathrm{T}}$满足如下条件

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{v}\ (\text{或}\ \boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}=1) \tag{1.6.19}$$

则称向量$\boldsymbol{\varphi}$为支持资产系统$\boldsymbol{P}$(或$\boldsymbol{Z}$)的状态价格向量。此时,每一种资产在时刻 0 的价格向量可以用时刻 1 各状态价格线性表示,资产 i 在时刻 0 的价格可表示为

$$v_i=\varphi_1P_{1i}+\varphi_2P_{2i}+\cdots+\varphi_lP_{li},\quad i=1,2,\cdots,n \tag{1.6.20}$$

(3) 单期不确定性无套利定价定理。

定理 1.8　资本市场不存在套利机会,当且仅当存在$\boldsymbol{\varphi}\in R_{++}^l$使

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{v}\ (\text{或}\ \boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}=1) \tag{1.6.21}$$

成立。这里$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$和$\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}$分别为矩阵$\boldsymbol{P}$和$\boldsymbol{Z}$的转置矩阵。

证明　设$L=R\times R^l$,$M=\{(-\boldsymbol{v}\boldsymbol{N},\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\mid\boldsymbol{N}\in\mathbb{R}^n\}$。又设$K=R_+\times R_+^l$,显然它是空间$L$的锥,$M$是$L$的子空间,它们都是$L$中的凸集。

根据无套利条件,市场不存在套利机会的充要条件是$K\cap M=\{0\}$。因为K和L都是凸集,由超平面分离定理,存在线性函数$F:L\to R$,对所有的$\boldsymbol{z}\in M$和$\boldsymbol{y}\in K$,$\boldsymbol{y}\neq0$,有$F(\boldsymbol{z})<F(\boldsymbol{y})$。又因为$M$是线性子空间,所以对$\boldsymbol{z}\in M$有$F(\boldsymbol{z})=0$,于是对所有的$\boldsymbol{y}\in K$,$\boldsymbol{y}\neq0$都有$F(\boldsymbol{y})\geqslant0$。注意到$L$是$l+1$维空间,$L$上的线性函数$F$对应$\mathbb{R}^{l+1}$中的向量$\boldsymbol{f}$,对任意的$\boldsymbol{x}\in R^{l+1}$,$F(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$,即$\boldsymbol{f}$和$\boldsymbol{x}$的内积,记为$\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{x}$。

因为L中的向量可以写成$(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$,其中$\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}$,$\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^l$,$\boldsymbol{f}$可写成$(\alpha,\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$,$L$上的线性函数$F$可表示为

$$F[(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}]=\alpha\boldsymbol{b}+\boldsymbol{\psi}\cdot\boldsymbol{c}$$

其中,$\boldsymbol{\psi}\in\mathbb{R}^l$是一常向量,$\alpha$是一常数。设$\boldsymbol{\psi}=(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_l)^{\mathrm{T}}$。

由于K是一个锥,线性函数在K上大于零,必有$\alpha>0$,$\psi_i>0$,$i=1,\cdots,l$,容易证明,若$\alpha,\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_l$中有一个为负数,$F$在$K$上可取负值,有一个为零,$F$在$K$上必取零值,$F$在$K$上恒取正值矛盾。

由于M是L的线性子空间,又$\boldsymbol{z}\in M$,$F(\boldsymbol{z})=0$,得到

$$-\alpha\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{N}+\boldsymbol{\psi}\cdot(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N})=0$$

由$\boldsymbol{N}$的任意性,必有

$$\alpha\,\boldsymbol{v}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\psi}$$

向量$\boldsymbol{\varphi}=\dfrac{\boldsymbol{\psi}}{\alpha}$即为支持资产系统的状态定价向量。类似可证,如果存在状态定价向量$\boldsymbol{\varphi}\in$

R_{++},那么不存在套利机会。　　　　证毕。

式(1.6.21)写成分量形式即式(1.6.20),这说明任何风险资产在时刻0的价格是 $\boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{P}_i$,其中 $\boldsymbol{P}_i=(P_{i1},P_{i2},\cdots,P_{il})^{\mathrm{T}}$,是时刻1不同状态价格向量的正线性函数。

假如存在一个收益率为 $R_f=R-1$ 的无风险投资组合,那么任何价格支持向量 $\boldsymbol{\varphi}$ 满足 $\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_l=\dfrac{1}{R}$。

设 $\boldsymbol{w}_1$ 是无风险投资组合,则 $\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_1=1,\boldsymbol{Z}\boldsymbol{w}_1=Rl$,那么由价格状态支持向量的定义,对于正的价格状态支持向量,有

$$(1+R_f)\,\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{l}=R\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Z}\boldsymbol{w}_1)=(\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z})\boldsymbol{w}_1=\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_1=1$$

$$\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{l}=\frac{1}{R}$$

即 $\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_l=\dfrac{1}{R}$。因为 $\sum\limits_{s=1}^{l}R\varphi_s=1$,记 $Q_s=R\varphi_s$,那么 $Q_s>0$,那么 $\sum\limits_{s=1}^{l}Q_s=1$,$\boldsymbol{Q}=(Q_1,\cdots,Q_l)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{Q}$ 可以看作一个概率分布,称为"风险中性概率"。

定理 1.9　假如存在一个收益率为 R_f 的无风险资产或无风险投资组合,那么资产市场不存在套利机会等价于存在概率分布,使得每种资产收益的期望值都等于 $1+R_f$。

证明　如果市场不存在套利机会,由定理1.8,存在状态价格支持向量 $\boldsymbol{\varphi}\in R_{++}^{l}$ 使得

$$\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}=1$$

于是 $\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}R\boldsymbol{\varphi}=R$,即 $\dfrac{E^{Q}(Z_j)}{R}=\dfrac{1}{R}\sum\limits_{s=1}^{l}z_{sj}\boldsymbol{Q}=1$。　　　　证毕。

由定理1.9可知:

$$\frac{E^{Q}(Z_j)}{R}=v_j,\quad j=1,2,\cdots,n \tag{1.6.22}$$

式(1.6.22)说明,任何资产在时刻0的价格,等于在时刻1的价格(随机变量)对风险中性概率测度 $\boldsymbol{Q}$ 取期望值,然后再折现。任何资产都可以通过相同的贴现率 R 定出价格,即风险中性定价。

例 1.9

考虑只有两种资产和两种状态的市场,假定两种状态发生的概率均为0.5,假设

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\upsilon}=\begin{bmatrix}1\\ 0.5\end{bmatrix}$$

可看出第一种资产是无风险资产,由于时刻0和时刻1的价格都为1,所以无风险资产的收益率 $r_f=0$。第二种资产在时刻1的期望价格也为1,与第一种资产相同,但是它在时刻0的价格是0.5,只有第一种资产的一半,这是因为第二种资产是有风险的。

令 $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0.5\end{bmatrix}$,即 $\varphi_1+\varphi_2=1$、$2\varphi_2=0.5$,解得 $\varphi_1=0.25$、$\varphi_2=0.75$,故不存在套利机会。

例　1.9(续)

进一步地,风险中性概率测度 $\boldsymbol{Q}=(q_1,q_2)$ 为

$$q_1=\frac{\varphi_1}{\varphi_1+\varphi_2}=\frac{0.25}{1}=0.25,\quad q_2=\frac{\varphi_2}{\varphi_1+\varphi_2}=\frac{0.75}{1}=0.75$$

根据风险中性定价公式(1.6.22):

$$\frac{E^Q(\boldsymbol{P}_1)}{1+r_f}=\frac{0.25\times 1+0.75\times 1}{1+0}=1,\quad \frac{E^Q(\boldsymbol{P}_2)}{1+r_f}=\frac{0.25\times 2+0.75\times 0}{1+0}=0.5$$

这正是两种资产的正确价格。其中,上面求期望时用的是风险中性概率测度 $\boldsymbol{Q}$,而非真实的概率。另外,还可利用这两种资产对其他资产进行定价。例如,假设存在第三种资产,它在时刻 1 的价格向量为 $\boldsymbol{P}_3=\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$,则该资产在时刻 0 的价格为

$$\frac{E^Q(\boldsymbol{P}_3)}{1+r_f}=\frac{0.25\times 4+0.75\times 2}{1+0}=2.5$$

1.7　单期不确定性均衡定价模型

1.7.1　均衡定价与期望效用最大化准则

假设有两个时刻,时刻 0 表示今天,时刻 1 表示未来,在时刻 1 的消费 C_1 和财富 W_1 都是随机变量。设 $\boldsymbol{\Omega}=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_l\}$ 是状态空间,第 j 种证券的价格用 S_j 表示,它是随机变量。期初价格为 S_j^0,第 i 个投资者对由 $\boldsymbol{\Omega}$ 表示的市场状态的概率分布为 $P_i(\omega)$,设第 i 个投资者的投资准则是期望效用最大化,为此将投资者的消费模型写成

$$U_i[C_{i0},C_{i1}(\omega)]=U_{i0}(C_{i0})+\sum_{k=1}^{l}P_i(\omega_k)U_{i1}[C_{i1}(\omega_k)]$$

这里 U_i 是投资者 i 的效用函数,我们假定它是时间可加的,即

$$U_i[C_{i0},C_{i1}(\omega)]=U_{i0}(C_{i0})+U_{i1}[C_{i1}(\omega)] \tag{1.7.1}$$

设投资者 i 最大期望消费模式是$[C_{i0}^*,C_{i1}^*(\omega)]$,如果投资者 i 在时刻 0 购买了 θ 单位证券 j,在时刻 1 卖出,投资者的消费模型变为$[C_{i0}^*-\theta S_j^0,C_{i1}^*+\theta S_j(\omega)]$,那么投资者的期望效用就可以写成

$$U_i[C_{i0},C_{i1}(\omega)]=U_{i0}(C_{i0}^*-\theta S_j^0)+\sum_{k=1}^{l}P_i(\omega)U_{i1}[C_{i1}^*(\omega_k)+\theta S_j(\omega_k)] \tag{1.7.2}$$

在 $\theta=0$ 时最大,直接计算,得

$$\frac{\mathrm{d}U_i[C_{i0},C_{i1}(\omega)]}{\mathrm{d}\theta}=U_{i0}'(C_{i0}^*-\theta S_j^0)\cdot(-S_j^0)+\sum_{k=1}^{l}P_i(\omega_k)U_{i1}'[C_{i1}^*(\omega)+\theta S_j(\omega_k)]S_j(\omega_k) \tag{1.7.3}$$

由条件 $\theta=0$ 时,式(1.7.3)为零,得

$$U'_{i0}(C^*_{i0})(-S^0_j)+\sum_{k=1}^{n}P_i(\omega_k)U'_{i1}[C^*_{i1}(\omega_k)]S_j(\omega_k)=0$$

解得

$$S^0_j=\sum_{k=1}^{l}\frac{P_i(\omega_k)U'_{i1}[C_{i1}(\omega^*_k)]}{U'_{i0}(C^*_{i0})}S_j(\omega_k) \tag{1.7.4}$$

令 $\sigma_i(\omega_k)=\dfrac{U'_{i1}[C_{i1}(\omega^*_k)]}{U'_{i0}(C^*_{i0})}$,称为边际替代率,则

$$S^0_j=\sum_{k=1}^{l}P_i(\omega_k)\sigma_i(\omega_k)S_j(\omega_k)=E^{P_i}(\sigma_i S_j) \tag{1.7.5}$$

式(1.7.5)说明证券 j 的价格等于该证券的价格 S_j 和投资者 i 的边际替代率乘积的期望值,这里的期望值是对投资者 i 的主观概率 $P_i(\omega_k)$ 取期望。

1.7.2 阿罗-德布鲁证券

我们定义在资产定价理论当中经常用到一种特殊的证券,阿罗-德布鲁(Arrow-Debereul)证券 $l_k(k=1,2,\cdots,l)$。这种证券的性质是当状态 ω_k 出现时,价格是一个单位。若是其他状态,价格为0,由式(1.7.5),该证券在时刻0的价格

$$\psi_k=P_i(\omega_k)\frac{U'[C^*_{i1},(\omega_k)]}{U'_{i0}(C^*_{i0})},\quad k=1,2,\cdots,l$$

由式(1.7.5)得

$$\sum_{k=1}^{l}\psi_k=\sum_{k=1}^{l}P_i(\omega_k)\frac{U'_{i1}[C^*_{i1}(\omega)]}{U'_{i0}(C^*_{i0})}=\frac{1}{1+R_f} \tag{1.7.6}$$

因为在时刻1无论哪一种状态出现,取值都为1,所以它是无风险证券,时刻0的价格为 $\dfrac{1}{1+R_f}$,其中 R_f 为无风险收益率。因此,阿罗-德布鲁证券在时刻0的价格为 $\psi_k(k=1,2,\cdots,l)$。

1.7.3 多资产有限状态情况下的均衡定价模型

如果市场上有 I 个投资者,有 n 种证券,现在来讨论均衡定价问题。我们假设:

(1) 所有的投资者的效用函数是递增的凹函数,并且两次可微,而且效用函数是可加的,即

$$U_i(C_{i0},C_{i1})=U_{i0}(C_{i0})+U_{i1}(C_{i1}),\quad i=1,2,\cdots,I \tag{1.7.7}$$

且对未来状态的主观概率为 $P_i(\omega_k)$,$k=1,2,\cdots,l$。

(2) 投资者 i 在时刻0的财富是 W_{i0},在时刻1的财富为 W_{i1}。

(3) 证券 $j(j=1,2,\cdots,n)$ 在时刻1的价格 S_j 为随机变量,在时刻0的价格为 S^0_j。

(4) 投资人 i 的交易策略是 n 维向量 $(\theta^1_i,\theta^2_i,\cdots,\theta^n_i)$。

其中 θ^j_i 表示投资者 i 购买证券 j 的数量(如果 θ^j_i 是负数则表示卖出)。

此时投资者 i 的期望效用可以写成

$$E[U_i(C_{i0},C_{i1})]=U_{i0}(W_{i0}-\sum_{j=1}^{n}\theta^j_i S^0_j)+\sum_{k=1}^{l}P_i(\omega_k)U_{i1}\left[W_{i1}+\sum_{j=1}^{n}\theta^j_i S_j(\omega_k)\right],\quad i=1,2,\cdots,I$$

投资者都是按期望效用最大化选择投资策略的，如同前面的推导，我们得到

$$S_j^0 U'_{i0}\left(W_{i0}-\sum_{j=1}^{n}\theta_i^j S_j^0\right)=\sum_{k=1}^{l}S_j(\omega_k)P_i(\omega_k)U'_{i1}\left[W_{i1}+\sum_{j=1}^{n}\theta_i^j S_j(\omega_k)\right]$$

市场均衡，第 j 种证券的买卖总量相等(市场出清条件)，

$$\sum_{i=1}^{I}\theta_i^j=0,\quad j=1,2,\cdots,n \tag{1.7.8}$$

因此，$S_j^0(j=1,2,\cdots,n)$和 $\theta_i^j(i=1,2,\cdots,I)$的问题转化为求线性方程组(1.7.7)、(1.7.8)。注意到方程的个数和未知数个数都是 $n+n\times I$。

注意，I 个投资者的消费总量，恰好等于期初的财富总和。I 个投资者期初的消费总量为

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{I}\left(W_{i0}-\sum_{j=1}^{n}\theta_i^j S_j^0\right)&=\sum_{i=1}^{I}W_{i0}-\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{n}\theta_i^j S_j^0\\&=\sum_{i=1}^{I}W_{i0}-\sum_{j=1}^{n}S_j^0\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{n}\theta_i^j\\&=\sum_{i=1}^{I}W_{i0}-\sum_{j=1}^{n}S_j^0\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{I}\theta_i^j\end{aligned}$$

由市场出清条件，上式的第二项为零，可见期初的总消费量等于期初财富。同样，可得期末的消费总量等于期末财富。

1.7.4　均衡定价与无套利定价

上面推导了求均衡价格的投资策略的方程组。随着市场投资者的数量和证券数量增加，问题变得十分复杂，采用代表人方法加以简化。假设：

(1) 所有投资者对市场状态的主观概率都是一样的，因此将 $P_i(\omega)$写成 $P(\omega)$。

(2) 所有投资者的效用函数是可加的递增凹函数，即

$$U_i(C_{i0},C_{i1})=U_{i0}(C_{i0})+U_{i1}(C_{i1}),\quad i=1,2,\cdots,I$$

现在构造代表人的效用函数，代表人的效用函数应当是各投资者 i 的效用函数按投资者 i 的财富加权和。设定代表人的效用函数

$$V(x)=V_0(x)+V_1(x) \tag{1.7.9}$$

式中，

$$V_0(x)=\max_{x_i>0}\sum_{i=1}^{I}\lambda_i U_{i0}(x_i) \tag{1.7.10a}$$

$$V_1(x)=\max_{x_i>0}\sum_{i=1}^{I}\lambda_i U_{i1}(x_i) \tag{1.7.10b}$$

这里

$$\lambda_i=\frac{1}{U_{i0}(C_{i0}^{*})} \tag{1.7.10c}$$

$$x=x_1+x_2+\cdots+x_I \tag{1.7.10d}$$

按照代表人的效用函数和总消费,根据前面的方法,我们就可以求出证券的价格,特别此状态价格 ψ_k(阿罗-德布鲁证券价格)为

$$\psi_k = P(\omega_k)\frac{V_1'[C_1^{\alpha}(\omega_k)]}{V_0'(C_0^{\alpha})} \tag{1.7.11}$$

这里 C_0^{α} 表示在时刻 0 最优总消费,$C_1^{\alpha}(\omega_k)$表示时刻 1 在状态 ω_k 下的总消费。将式(1.7.5)去掉下标,写成

$$S_j^0 = E^P(\sigma S_j)$$

考虑一种无风险证券,该证券在时刻 1 每个状态价格为 1,即 $S_j(\omega_k)=1(k=1,2,\cdots,n)$,则

$$S_j^0 = \frac{1}{1+R_f} = \sum_{k=1}^{n} P(\omega_k)Z(\omega_k)$$

由于 $P(\omega_k)$非负,$Z(\omega_k)$是边际替代率的绝对值,也非负。我们定义

$$q(\omega_k) = (1+R_f)P(\omega_k)Z(\omega_k)$$

则 $q(\omega_k)$也非负,而且

$$\sum_{k=1}^{n} q(\omega_k) = 1$$

故我们定义一个新的概率测度 $\boldsymbol{Q}$,使得

$$\begin{aligned}
S_j^0 &= \sum_{k=1}^{n} P(\omega_k)Z(\omega_k)S_j(\omega_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(\omega_k)Z(\omega_k)S_j(\omega_k) \\
&= \frac{1}{1+R_f}\sum_{k=1}^{n} q(\omega_k)S_j(\omega_k) \\
&= \frac{1}{1+R_f}E^Q S_j
\end{aligned}$$

这与无套利定价的基本形式相同。

习 题 1

1. 设$(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in B_2$,且$(x_1,x_2)\succeq(y_1,y_2)$和$(y_1,y_2)\succeq(x_1,x_2)$,则证明 $x_1=y_1,x_2=y_2$。
2. 证明二次效用函数具有递增的绝对风险厌恶特征。
3. 证明指数效用函数 $V(x)=-\mathrm{e}^{-bx}(b>0)$具有常数绝对风险厌恶。
4. 证明对数效用函数 $V(x)=\ln x$ 绝对风险厌恶递增,相对风险厌恶系数为 1。
5. 假设有五种自然状态,表示为 $w_n(n=1,2,\cdots,5)$,发生机会都是等概率的。考虑两种有风险资产,收益率为 $\widetilde{R}_A$ 和 $\widetilde{R}_B$,如表 1.1 所示。

表 1.1　题 5 表

状态	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
$\widetilde{R}_A$	0.5	0.5	0.7	0.7	0.7
$\widetilde{R}_B$	0.9	0.8	0.4	0.3	0.7

解释风险厌恶投资者会选择哪种资产。

6. 假设现在有两种有风险资产，随机收益率分别是 $\tilde{r}_A$ 和 $\tilde{r}_B$。假设 $\tilde{r}_A$ 和 $\tilde{r}_B$ 是独立的并有相同的均值。进一步地，$\tilde{r}_B \overset{d}{=\!=} \tilde{r}_A+\tilde{\varepsilon}$，并且 $\tilde{r}_A$ 和 $\tilde{\varepsilon}$ 是独立的。这能否说明在二阶随机占优下，$\tilde{r}_B$ 优于 $\tilde{r}_A$？试证明根据期望效用最大化，在只有这两种资产的情况下，风险厌恶的个体将会投资于资产 A 多于投资于资产 B。

7. 设

$$F_A(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 0\end{cases},\quad F_B(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-\mathrm{e}^{-2x}, & x\geqslant 0\end{cases}$$

证明资产 A 一阶随机占优于资产 B。

8. 设

(1) $\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix}5 & 2\\ -5 & -8\end{bmatrix}$；

(2) $\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix}5 & 1\\ 3 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$。

试求正的状态价格支持向量。

9. 假设 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0.5 & 1\\ 1 & 3 & 1.5 & 2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\upsilon}=(1\quad 2\quad 0.6\quad 1)^{\mathrm{T}}$，判别是否存在套利机会。

10. 设投资者 k 和 j 的效用函数分别为 $V_k(x)$ 和 $V_j(x)$，若对所有的 $x\in R$，绝对风险厌恶函数 $A_k(x)>A_j(x)$，试证明：

(1) 存在函数 $G(x)$，其中 $G'>0$，$G''<0$，使得 $V_k(x)=G[V_j(x)]$；

(2) $V_k[V_j^{-1}(x)]$是凹函数。

11. 设 V 是满足 $V'(x)>0$，$V''(x)<0$ 的期望效用函数。证明：若它的绝对风险厌恶函数 A 满足 $A'(x)\leqslant 0$，则 $V'''(x)>0$。

12. 若下列效用函数为风险厌恶型投资者的效用函数，求 a 的取值范围。

(1) $V(X)=-X^{-a}$；

(2) $V(X)=-\mathrm{e}^{-aX}$；

(3) $V(X)=\dfrac{X^a}{a}$。

13. 投资者以初始财富 1 200 元参与一个抽彩，50%的概率可获 10 000 元，50%的概率可得 100 元。假设他的效用函数为 lg 函数，计算该投资者为避免抽彩而愿缴纳的罚金

以及其确定性等价财富,并阐释罚金和确定性等价财富的经济意义。

14. 一种彩票,可能以0.2的概率获得900元,也可能以0.8的概率损失100元,消费者效用函数为$V=\sqrt{w}$;问消费者愿意拿出多少钱购买该彩票?其风险溢价是多少?

15. 假设投资方案A的分布函数由以下函数给出,描述FSD准则。

$$F_A(x)=\begin{cases}0 & 0\leqslant x<1\\ 0.1 & 1\leqslant x<2\\ 0.8 & 2\leqslant x<4\\ 1 & x\geqslant 4\end{cases}$$

假设另外三个投资方案B、C和D的收益分布函数由以下函数给出,分析投资方案A优于B、C和D哪个投资方案。

$$F_B(x)=\begin{cases}0 & 0\leqslant x<1\\ 0.2 & 1\leqslant x<2\\ 0.7 & 2\leqslant x<4\\ 1 & x\geqslant 4\end{cases}\quad F_C(x)=\begin{cases}0 & 0\leqslant x<1\\ 0.1 & 1\leqslant x<2\\ 0.6 & 2\leqslant x<4\\ 1 & x\geqslant 4\end{cases}\quad F_D(x)=\begin{cases}0 & 0\leqslant x<1\\ 0.1 & 1\leqslant x<3\\ 0.6 & 3\leqslant x<4\\ 1 & x\geqslant 4\end{cases}$$

16. 假设投资方案A、B和C的收益分布函数均服从正态分布,其期望和标准差由表1.2给出,利用SSD准则判断这三个投资方案的优劣,并说明原因。

表1.2 题16表

投资方案	期望(μ)	标准差(σ)
A	12%	4%
B	10%	3%
C	5%	1%

17. 计算以下经济系统的正状态价格支持向量,并讨论相应的套利机会。

(1) $\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix}z_{11} & z_{12}\\ 0 & z_{22}\end{bmatrix}$;

(2) $\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$;

(3) $\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$;

(4) $\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix}5 & 2\\ -5 & -2\end{bmatrix}$;

(5) $\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 3 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$;

(6) $\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$。

18. 假设市场有四种状态、三种基础资产，它们在时刻 1 的价格矩阵和时刻 0 的价格向量分别为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\upsilon}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

(1) 无风险资产的收益是多少？

(2) 试求所有的状态价格向量，并判别是否存在套利机会；

(3) 有另外一种资产，其在时刻 1 的价格向量为$(1\quad 2\quad 0\quad 1)^{\mathrm{T}}$，试求该资产的无套利价格。

即 测 即 练