

随机事件及其概率



第 1 章

1.1 随机事件、事件的关系与运算

概率论与数理统计研究随机现象的统计规律性. 我们通过**随机试验**研究随机现象, 随机试验的结果具有随机性. 例如: 抛硬币、掷骰子都是经典的随机试验.

1.1.1 随机事件

我们在中学阶段已经接触过随机现象、随机试验、样本点、样本空间、随机事件等概念. 运用**集合论**的知识, 可以简化随机事件的学习. 概率论中的样本空间(Ω)、样本点(ω)和随机事件(A), 分别对应集合论中的全集、元素和集合(表 1.1). 具体而言: ①随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间**, 通常记为 Ω ; ②样本空间 Ω 中的元素称为**样本点**, 通常记为 ω , 它是随机试验 E 的基本结果; ③由一个样本点组成的子集是最简单的事件, 称为**基本事件**; ④满足某些条件的样本点组成的集合称为**随机事件**, 简称事件, 通常记为大写字母 A, B, \dots , 它是样本空间的子集.

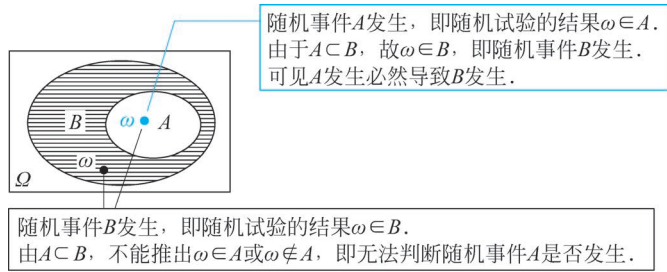
两个特殊的随机事件为**必然事件**(Ω)和**不可能事件**(\emptyset), 分别对应全集和空集.

表 1.1 概率论与集合论术语对照表

常用记号	概率论	集合论	例: 掷骰子
Ω	样本空间	全集	$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 掷骰子的所有可能点数
ω	样本点	元素	$\omega = 1$, 随机试验掷出点数 1
$\{\omega\}$	基本事件	单点集	$\{\omega\} = \{1\}$, 掷出点数 1 的基本事件
A	随机事件	集合	$A = \{1, 2\}$, 掷出点数 1 或 2 的随机事件

若随机试验 E 的结果 ω 满足 $\omega \in A$, 则称随机事件 A 发生; 反之, 若 $\omega \notin A$, 则称随机事件 A 不发生. 例如: 若随机试验(掷骰子)的结果是 $\omega = 2$, 即掷出点数 2, 则随机事件 $\{1\}$ 不发生, 而随机事件 $\{1, 2\}$ 发生.

由此, 根据韦恩图(图 1.1)可知, 若 A 为 B 的**子事件**, 即 $A \subset B$, 则 A 发生必然导致 B 发生.

图 1.1 若 A 为 B 的子事件, 则 A 发生必然导致 B 发生

1.1.2 事件的关系与运算

类似地, 基于随机事件与集合的对应关系, 可以用韦恩图表示随机事件的关系(子事件、互不相容、对立事件)与运算(和事件、积事件、差事件), 如图 1.2 所示.

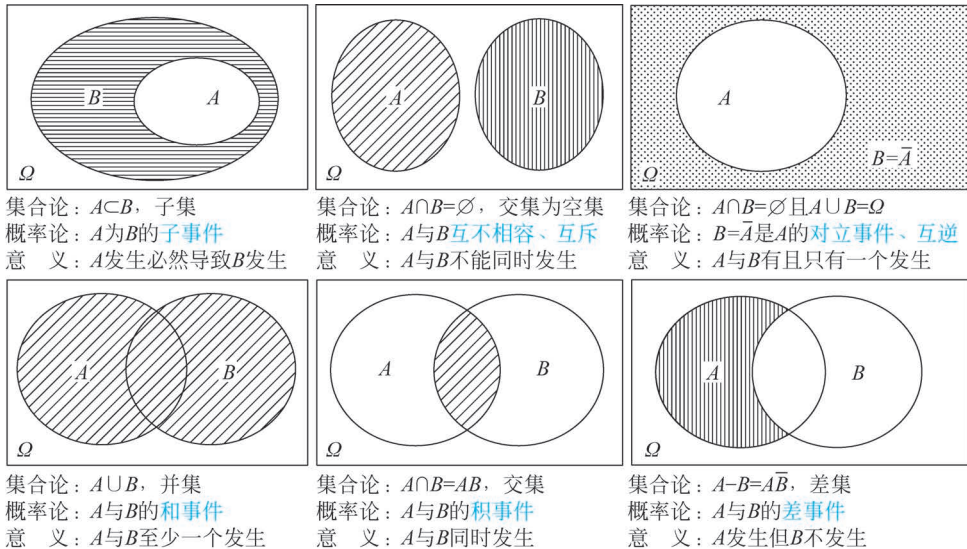


图 1.2 用韦恩图表示随机事件的关系与运算

此外, 随机事件的运算性质还有下面这些, 同样可以用韦恩图帮助理解.

- (1) 交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$.
- (2) 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C,$
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$.
- (3) 分配律: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cap (\bigcup_{i \geq 1} A_i) = \bigcup_{i \geq 1} (A \cap A_i),$
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cup (\bigcap_{i \geq 1} A_i) = \bigcap_{i \geq 1} (A \cup A_i),$
 $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C).$
- (4) 对偶律: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{\bigcup_{i \geq 1} A_i} = \bigcap_{i \geq 1} \bar{A}_i, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}, \overline{\bigcap_{i \geq 1} A_i} = \bigcup_{i \geq 1} \bar{A}_i.$

1.2 什么是概率？概率的公理化定义

本章有一个非常数学、非常烧脑的内容：概率的公理化定义. 为什么需要引入公理化定义呢？这要从概率的定义说起. 什么是概率？粗略地讲，概率是随机事件发生的可能性大小. 历史上曾有过多种概率定义：古典定义、几何定义、频率定义，等等. 它们分别适合某一类随机现象，但又难以避免一些悖论（详见第 2 章拓展阅读：概率论发展简史）. 如何给出适合所有随机现象的最一般的概率定义呢？1933 年，苏联数学家柯尔莫哥洛夫（Andrey Nikolaevich Kolmogorov, 1903—1987）首次提出了概率的公理化定义，这个定义既概括了历史上几种概率定义中的共同特性，又避免了各自的局限性. 从此，概率论得到了迅速发展.

我们通过下面的引例讨论计算事件概率的几种思路，即概率的几种定义.

引例 1.1- 抛掷一枚质地均匀的硬币，则正面朝上的概率是 $\frac{1}{2}$. 大家有没有想过这个 $\frac{1}{2}$ 是怎么得到的呢？

1.2.1 等可能概型：概率的古典定义和几何定义

我们知道，抛掷硬币只有两种可能结果：正面朝上和反面朝上（通常忽略“恰好直立”等零概率事件）. 这两种结果等可能发生. 因此，正面朝上的概率 = 正面朝上对应的样本点数 ÷ 总的样本点数 = $\frac{1}{2}$. 这种思路成立的条件是“基本事件等可能发生”，对应等可能概型：**古典型概率（古典型概型）**和**几何型概率（几何型概型）**（表 1.2）. 它们分别对应**概率的古典定义**和**概率的几何定义**.

表 1.2 古典型概率与几何型概率

类型	计算公式	主要方法	成立条件
古典型概率	$P(A) = \frac{\text{事件 } A \text{ 包含样本点的个数}}{\text{样本空间 } \Omega \text{ 包含样本点的个数}}$	排列 组合	(1) 样本空间只有有限个样本点； (2) 每个样本点发生的可能性相等
几何型概率	$P(A) = \frac{\text{事件 } A \text{ 对应区域的度量}}{\text{样本空间 } \Omega \text{ 对应区域的度量}}$	度量 计算	(1) 样本空间充满某个区域； (2) 任意一点落在度量相等的子区域中的可能性相等

古典型概率的关键是计算排列组合，详见 1.7 节“常用的排列组合结论”. **几何型概率**中的“度量”是**测度论**中的概念，粗略地讲：一维、二维、三维区域的度量分别是长度、面积、体积，对应**均匀分布**. 古典型概率和几何型概率是高中阶段概率问题的两种基本题型，具有较高的实际应用价值.

典型题 1.2 [2016, III, 古典型概率]

设袋中有红、白、黑球各 1 个，从中有放回地取球，每次取 1 个，直到三种颜色的球都取

到时停止,则取球次数恰好为4的概率为_____.

解答 说明:这是一个典型的**古典型概率**问题,关键是运用排列组合计算“分子部分”,取球次数恰好为4的样本点个数.

取球次数恰好为4次,意味着:

(1) 第4次取到一种新的颜色,也就是从红、白、黑三种颜色中选一种,组合数为 $C_3^1=3$.

(2) 前3次取其他两种颜色,也就是取其中一种颜色一次、取另一种颜色两次.

① 首先选一种颜色,作为取一次的颜色,组合数为 $C_2^1=2$.

② 再在前3次中选1次,取到这种颜色(其他2次是另一种颜色),组合数为 $C_3^1=3$.

这是分步骤完成的.运用乘法原理,取球次数恰好为4的样本点个数为 $C_3^1 \times C_2^1 \times C_3^1 = 3 \times 2 \times 3$.

另一方面,样本空间包含样本点的总个数为:4次取球、每次三种颜色随意的样本点个数,即 3^4 .

因此,取球次数恰好为4的概率为 $\frac{C_3^1 \times C_2^1 \times C_3^1}{3^4} = \frac{3 \times 2 \times 3}{3^4} = \frac{2}{9}$.

答案 $\frac{2}{9}$

典型题 1.3 [2007, I & III & IV, 几何型概率]

在区间(0,1)中随机地取两个数,则这两个数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的概率为_____.

解答 说明:这是一个典型的**几何型概率**问题,可以用面积来计算.

设所取的两个数分别为 x 和 y ,以 x 为横坐标、 y 为纵坐标的点 (x, y) 随机地落在边长为1的正方形 Ω 内,如图 1.3 所示.不妨记 Ω 的面积为 $S_\Omega=1$,区域 G_i 的面积为 $S_{G_i}, i=1, 2, 3$. 故

x 和 y 之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的概率为 $\frac{S_{G_1}}{S_\Omega} = \frac{S_\Omega - S_{G_2} - S_{G_3}}{S_\Omega}$

$$= \frac{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{1} = \frac{3}{4}.$$

答案 $\frac{3}{4}$

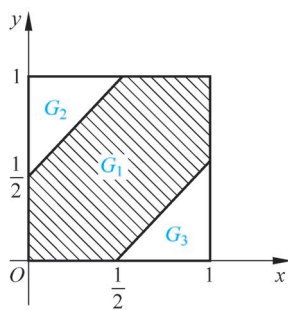


图 1.3 几何型概率问题用面积来计算

1.2.2 概率的频率定义

利用等可能概型可以方便地计算硬币正面朝上的概率.但并不是所有的随机试验都可归结为等可能概型,还需要寻求其他方法.将这个硬币抛掷 n 次,假设其中正面朝上 m 次.

将 m 称为**频数**, $\frac{m}{n}$ 称为**频率**.每一次随机试验可能得到不同的频数和频率,但我们通常认为,当试验次数 n 足够大时,频率会逐渐稳定到一个实数,称为**概率**.通过大量的随机试验

可以知道(表 1.3): 正面朝上的概率是 $\frac{1}{2}$. 这种思路对应于**概率的统计定义**(又称为**概率的频率定义**). 这里有一个数学细节, 什么叫作“频率稳定到概率”, 或者说“概率是频率的稳定值”呢? 我们将在第 5 章运用“大数定律”回答这个问题.

表 1.3 几位著名数学家的随机试验数据

试验者	抛掷次数 n	正面朝上的次数 m	正面朝上的频率 $\frac{m}{n}$
棣莫弗	2 048	1 061	0.518 1
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
费勒	10 000	4 979	0.497 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

1.2.3 概率的公理化定义

对样本空间 Ω 中的任一事件 A 定义实值函数 $P(A)$. 如果 $P(\cdot)$ 满足**概率的公理化定义**:

- (1) **非负性**: 对任意事件 A , 有 $P(A) \geq 0$;
- (2) **规范性**(正则性): 对必然事件 Ω , 有 $P(\Omega) = 1$;

- (3) **可列可加性**: 若 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 两两互不相容(互斥), 则有 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) =$

$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$, 称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

粗略地讲, 概率是样本空间 Ω 到 $[0, 1]$ 区间的实值函数, 它定量描述事件发生的可能性大小(尽管公理化定义没有告诉我们如何确定概率).

1.2.4 可列无限、不可列无限[选学]

概率的公理化定义中的“可列可加性”是指: 对于可列无限多个两两互不相容的随机事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, 有“和事件的概率等于概率的和”, 即 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

什么是“可列无限”呢? 事实上, 数学中有很多的“无限”、“无穷”. 粗略地讲, “可列无限”是“与自然数一样多的无限”, 是最低限度的无限. 可列无限多个元素可以用自然数作为脚标排成一列. 这意味着: 可列集可以与自然数集建立一一对应关系. 常见的可列无限集有自然数集、整数集和有理数集. 有限集与可列无限集统称为至多可列集, 其他的无限集统称为不可列集. 常见的不可列集有无理数集、实数集, 它们是可列无限集更“大”的无限集. 粗略地讲, 不可列无限多个元素不可以用自然数作为脚标排成一列. 这意味着: 不可列集不能与自然数集建立一一对应关系. 当然, 数学中还有比实数集更“大”的无限集, 但我们很少遇到. 有兴趣的同学可以了解“集合的势”.

1.3 概率的运算及基本性质

概率的公理化定义中的三个性质(非负性、规范性、可列可加性)是不需要证明的基本命题. 从它们出发可以证明概率的其他性质(表 1.4 左栏), 表 1.4 右栏的性质将在 1.4 节中讲解.



表 1.4 概率和条件概率的公理化定义、加法公式和减法公式

概率 $P(\cdot)$ 的基本性质	条件概率 $P(\cdot B)$ 的基本性质, $P(B)>0$
(1) 非负性: 对任意事件 A , 有 $P(A)\geq 0$; 对不可能事件 \emptyset , 有 $P(\emptyset)=0$	(1) 非负性: 对任意事件 A , 有 $P(A B)\geq 0$; 对不可能事件 \emptyset , 有 $P(\emptyset B)=0$
(2) 规范性: 对必然事件 Ω , 有 $P(\Omega)=1$	(2) 规范性: 对必然事件 Ω , 有 $P(\Omega B)=1$
(3) 加法公式: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$	(3) 加法公式: $P(A_1\cup A_2 B)=P(A_1 B)+P(A_2 B)-P(A_1A_2 B)$
(4) 广义加法公式(多除少补原理) $P\left(\bigcup_{1\leq i\leq n} A_i\right) = \sum_{1\leq i\leq n} P(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} P(A_iA_j) + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} P(A_iA_jA_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\cdots A_n)$ 特别地, 三个事件的加法公式为 $P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$	(4) 广义加法公式(多除少补原理) $P\left(\bigcup_{1\leq i\leq n} A_i B\right) = \sum_{1\leq i\leq n} P(A_i B) - \sum_{1\leq i<j\leq n} P(A_iA_j B) + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} P(A_iA_jA_k B) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\cdots A_n B)$ 特别地, 三个事件的加法公式为 $P(A_1\cup A_2\cup A_3 B) = P(A_1 B) + P(A_2 B) + P(A_3 B) - P(A_1A_2 B) - P(A_1A_3 B) - P(A_2A_3 B) + P(A_1A_2A_3 B)$
(5) 有限可加性: 若 A_1, A_2, \dots, A_n 两两互不相容(互斥), 则有 $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$	(5) 有限可加性: 若 A_1, A_2, \dots, A_n 两两互不相容(互斥), 则有 $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i B\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i B)$
(6) 可列可加性: 若 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 两两互不相容(互斥), 则有 $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$	(6) 可列可加性: 若 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 两两互不相容(互斥), 则有 $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i B)$
(7) 减法公式: $P(A-B)=P(A)-P(AB)$ 特别地, 当 $B\subset A$ 时, $P(A-B)=P(A)-P(B),$ 从而 $P(B)\leq P(A)$, 单调性	(7) 减法公式: $P(A_1 - A_2 B) = P(A_1 B) - P(A_1A_2 B)$ 特别地, 当 $A_2\subset A_1$ 时, $P(A_1 - A_2 B) = P(A_1 B) - P(A_2 B)$, 从而 $P(A_2 B)\leq P(A_1 B)$, 单调性
(8) 求逆公式: $P(\bar{A})=1-P(A)$	(8) 求逆公式: $P(\bar{A} B)=1-P(A B)$

1.3.1 概率基本性质的证明[选学]

如前所述,从概率的公理化定义出发可以证明概率的很多其他性质.这些性质有的看起来十分显然,但严格证明却不太容易.例如:对不可能事件 \emptyset ,有 $P(\emptyset)=0$.我们不能直接运用求逆公式(对立事件的概率公式) $P(\bar{A})=1-P(A)$ 和概率的规范性 $P(\Omega)=1$ 得到.因为“求逆公式”需要用“减法公式”证明,后者又需要用到“有限可加性”.而“有限可加性”需要由“可列可加性”和“ $P(\emptyset)=0$ ”证明.因此,用“求逆公式”证明“ $P(\emptyset)=0$ ”属于循环论证.一种严格的证明方式如下:它仅依赖于概率的公理化定义中给出的三条性质——非负性、规范性(正则性)、可列可加性.

$$\Omega = \Omega \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \cdots \cup \emptyset \cup \emptyset \cdots$$

$$\Rightarrow P(\Omega) \stackrel{\substack{\text{概率的可列可加性} \\ \text{两两互不相容}}}{=} P(\Omega) + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \cdots + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \cdots = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} P(\emptyset) = 0 \Rightarrow P(\emptyset) = 0$$

你是不是感到有些烧脑了？别害怕！如果你并不需要从事相关的数学研究，学会正确使用这些性质就足够了。这些性质可以用韦恩图直观地验证并帮助记忆，例如图 1.4 验证了两个事件的加法公式 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ 。

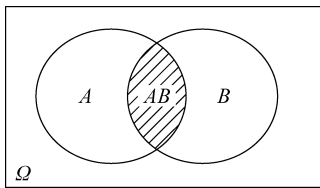


图 1.4 用韦恩图验证两个事件的加法公式

1.3.2 典型题

典型题 1.4 [2020, I & III]

设 A, B, C 为三个随机事件，且 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$, $P(AB) = 0$, $P(AC) = P(BC) = \frac{1}{12}$ ，则 A, B, C 中恰有一个事件发生的概率为_____。

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{5}{12}$

解题思路：怎样计算随机事件的概率呢？

(1) 当题目涉及三个以上随机事件时，不推荐使用各种公式进行大段的推导计算，这样很容易“迷失在数学符号中”。本书推荐使用**韦恩图**将已知和目标“可视化”。特别地，推荐将涉及的事件拆分为**两两互不相容**的子事件，然后在韦恩图中标注每个子事件的概率。绘制韦恩图时，默认绘制最一般的情况（所有交集都应该表示出来）。但在本题中，由于 $P(AB) = 0$ ，所以韦恩图可以简化。

(2) 当题目涉及**独立性**时，要注意 A 与 B 独立 $\Leftrightarrow \bar{A}$ 与 B 独立 $\Leftrightarrow A$ 与 \bar{B} 独立 $\Leftrightarrow \bar{A}$ 与 \bar{B} 独立。推荐将部分子事件的概率视为**未知数**，**解方程**，详见典型题 1.12。

(3) 当题目涉及**条件概率**时，运用条件概率的定义 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ 展开，再结合前述方法和概率与条件概率的基本运算公式（公理化定义、加法公式、减法公式等）求解。

对于更加复杂的题目，可以综合运用韦恩图和解方程等技巧，详见典型题 1.13。

随机事件概率的解题思路见图 1.5。

解答 由于 $P(AB) = 0$ ，绘制韦恩图如图 1.6 所示。

A, B, C 中恰有一个事件发生的概率为

$$P(A - C) + P(B - C) + P(C - A \cup B) = \frac{2}{12} + \frac{2}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$



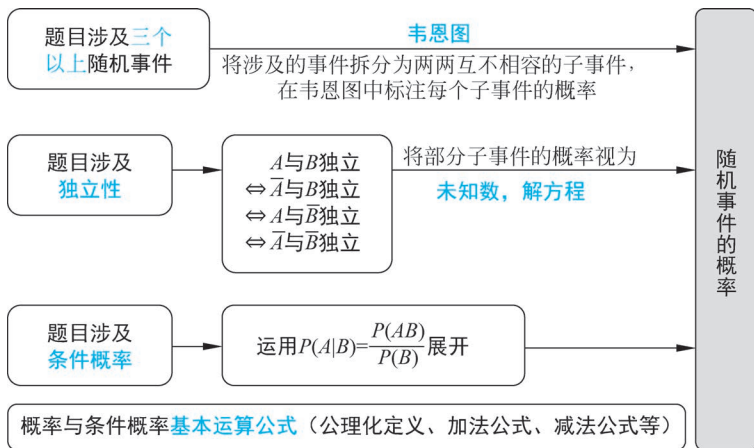


图 1.5 随机事件概率的解题思路

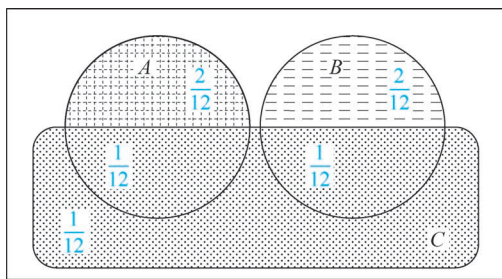


图 1.6 韦恩图及标注的事件概率

说明：韦恩图中各个两两互不相容子事件的概率的计算思路为

$$\left. \begin{array}{l} P(AC) = P(BC) = \frac{1}{12} \\ P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} P(A - C) = P(A) - P(AC) = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{2}{12} \\ P(B - C) = P(B) - P(BC) = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{2}{12} \\ P(C - A \cup B) = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12} \end{cases}$$

其中，概率 $\frac{2}{12}$ 不用刻意约分化简为 $\frac{1}{6}$ ，在解题最后一步约分化简即可。

答案 D

典型题 1.5

随机事件 A 与 B 满足 $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ 和 $P(A \cup B) = 1$ ，则必有_____。

- A. $A \cup B = \Omega$ B. $AB = \emptyset$ C. $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1$ D. $P(A - B) = 0$

解答 根据概率的加法公式容易证明选项 C 正确。事实上，

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cup \bar{B}) & \stackrel{\text{和事件的概率}}{=} P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\overline{AB}) \\ & \stackrel{\text{第3项用对偶律}}{=} P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\overline{A \cup B}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\text{各项均用对立事件的概率}}{=} [1 - P(A)] + [1 - P(B)] - [1 - P(A \cup B)] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 0 = 1 \end{aligned}$$

答案 C

说明: 很容易验证选项 D 错误, 如取事件 $A = \{\text{硬币正面向上}\}$, $B = \bar{A} = \{\text{硬币反面向上}\}$.

故 $P(A - B) = \{\text{硬币正面向上且没有反面向上}\} = P(A) = \frac{1}{2}$. 可见选项 D 错误.

选项 A 和 B 则具有很强的迷惑性, 它们涉及下面两对容易混淆的概念.

(1) 不可能事件 \emptyset 与零概率事件 $P(C) = 0$

根据概率的基本性质, 不可能事件的概率等于零, $P(\emptyset) = 0$. 但零概率事件不一定是不可可能事件. 例如, 在 $[0, 1]$ 区间上随机选一个点, 记为 X , 即 $X \sim U[0, 1]$, 详见第 3 章均匀分布. 则对于 $[0, 1]$ 区间上任意数 x 都应该有 $P\{X = x\} = 0$. 这是因为, 一方面, X 服从均匀分布, 则 X 在 $[0, 1]$ 区间上取任意值的概率恒等; 另一方面, $[0, 1]$ 区间上有无限多个点, 不妨取出其中可列无限多个 $x_i \in [0, 1], i = 1, 2, \dots$. 可见, 如果 $P\{X = x_i\} = a > 0$, 则

$$P(\Omega) = P\{0 \leq X \leq 1\} \geq \sum_{i=1}^n P\{X = x_i\} = na \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

这与概率的规范性 $P(\Omega) = 1$ 矛盾. 这样我们就构造了一个零概率事件 $\{X = x\}$. 但它包含一个样本点, 不是不可能事件 \emptyset .

本题已知 $P(A \cup B) = 1$, 再由概率的加法公式 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, 可知 $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0$. 这不能推出 $AB = \emptyset$, 可见选项 B 错误.

(2) 必然事件 Ω 与概率为 1 的事件 $P(C) = 1$

根据概率的公理化定义, 必然事件的概率等于 1, $P(\Omega) = 1$. 但概率为 1 的事件不一定是必然事件. 仍然看上面的零概率事件 $\{X = x\}$. 根据对立事件的概率公式(求逆公式), 它的对立事件 $\{X \neq x\}$ 是概率为 1 的事件. 但它显然不包含样本空间中的所有样本点, 不是必然事件 Ω .

本题已知 $P(A \cup B) = 1$, 不能推出 $A \cup B = \Omega$. 可见选项 A 错误.

说明[选学]: 概率的公理化定义强调“可列可加性”, 而非“无限可加性”, 很好地避免了“无限个 0 相加得到 1”的悖论. 具体而言, 记 $X \sim U[0, 1]$, 则对于任意 $x \in [0, 1]$ 有 $P\{X = x\} = 0$. 但“互不相容事件的概率和 $\sum_{x \in [0, 1]} P\{X = x\}$ ”并不等于“和事件的概率 $P\left\{\bigcup_{x \in [0, 1]} \{X = x\}\right\} = P(\Omega) = 1$ ”. 因为, $[0, 1]$ 区间上有不可列无限多个点, 不能使用可列可加性.

1.3.3 用随机事件表示生活中的随机现象

概率论与现实生活联系紧密, 我们可以通过定义随机事件将生活中的随机现象转化为数学中的随机问题. 这种将自然语言与数学语言自由切换的能力, 有助于我们运用概率知识解决实际问题.

典型题 1.6

你在超市里拿了一瓶饮料. 记事件 A 表示拿到的是一瓶“果汁”, 事件 B 表示拿到的是一瓶“冰镇饮料”, 事件 C 表示拿到的是一瓶“纸包装饮料”. 那么, 随机事件 ABC 表示_____ ; 随机事件 $\bar{A} \subset \bar{C}$ 表示_____.

分析: 随机事件 ABC 表示拿到的是一瓶“非纸包装的冰镇果汁”. 这个问题比较简单. 那么, $\bar{A} \subset \bar{C}$ 表示什么随机现象呢? “不是果汁的饮料一定是非纸包装饮料”? 这样的表述正确, 但太拗口了, 不符合自然语言的习惯. 如果你注意到 $\bar{A} \subset \bar{C}$ 等价于 $A \supset C$, 就可以给出更加自然的表述了, 即“该超市中所有纸包装饮料都是果汁”.

解答 随机事件 ABC 表示拿到的是一瓶“非纸包装的冰镇果汁”, 随机事件 $\bar{A} \subset \bar{C}$ 表示“该超市中所有纸包装饮料都是果汁”.

1.4 条件概率的定义及三个计算公式

在实际应用中, 我们有时不仅关心随机事件 A 发生的概率, 还会关心在某些附加条件下事件 A 发生的概率. 这些附加条件通常以“某事件已经发生”的形式给出. 这就是“已知某事件发生的条件下事件 A 发生的**条件概率**”.

1.4.1 条件概率的定义

设 A 与 B 是样本空间 Ω 中的两个事件, 若 $P(B) > 0$, 则称 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ 为“在 B 发生的条件下 A 的条件概率”, 简称**条件概率**.

典型题 1.7

考虑恰有两个小孩的全部家庭, 并且假定生男、生女是等可能的. 若随机地选择一个家庭, 发现该家庭至少有一个女孩, 则这一家另一个小孩是男孩的概率是_____.

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

解答 说明: 本题有至少两种解法. 解法 1: 先写出所有的可能情况(样本点), 这些样本点发生的概率相等(等可能概型、古典型概率); 再分别计算满足“分子”和“分母”条件的样本点数; 最后相除. 解法 2: 运用条件概率的定义计算.

解法 1 古典型概率. 由题意, 样本空间为: $\{(女, 女), (女, 男), (男, 女), (男, 男)\}$ (图 1.7). 其中, 每个样本点中的两个性别按照小孩的年龄排序. 例如, 样本点“(女, 男)”表示家里两个小孩为“姐弟”.

因为假定生男、生女是等可能的, 所以样本空间中每个样本点发生的概率相等.

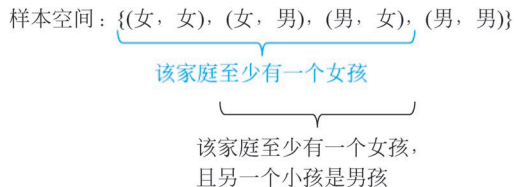


图 1.7 样本空间