

第3章

线性动态电路分析

前面两章分析的直流电路和交流电路均是在稳定状态的电路,即为稳态电路,但是在实际电路中会出现电路状态变化过程,在含有储能元件的电路中,若不考虑这一变化过程可能会发生意想不到的结果,譬如我们在插插座时会遇到冒火花现象。

本章主要介绍动态电路的换路定理和一阶线性 RL 和 RC 电路的零输入响应、零状态响应和全响应。

3.1 换路定律概述

学习目标

- (1) 了解动态过程、动态电路的概念及动态变化发生的条件。
- (2) 掌握换路定律及其解题方法。

3.1.1 动态过程

前面两章分析线性电路中,当电源电压(激励)为恒定值或呈周期性规律变化时,电路中各部分的电压或电流(响应)也是恒定的或呈周期性规律变化,即电路中电源与各部分电压或电流变化规律相同,电路这种工作状态称为稳定状态,简称稳态。但是实际中还会遇到从一种稳态向另一种稳态变化的过程。如图 3-1(a)所示电路,在开关 S 闭合前,电路中的电流为 $i_L=0$,在开关 S 闭合达到稳定状态后,电路中电流为 $i_L=\frac{U_S}{R}$,在电流由 0 变为 $\frac{U_S}{R}$,这中间经历一个过程才能达到一个稳态值,如图 3-1(b)所示。如上所述,电路从一种稳态变为另一种稳态需要的中间过程,称为动态过程,亦称过渡过程或暂态过程。

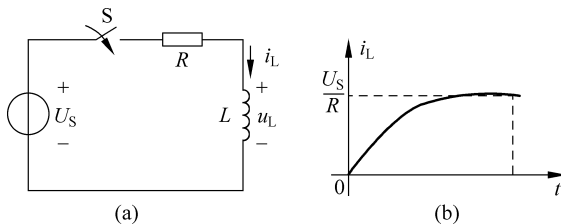


图 3-1 RL 动态电路

产生动态过程的原因是发生变化时储能元件的能量不能跃变(或突变)。电感和电容都是储能元件,电路中至少含有一个储能元件电感 L 或电容 C 的电路称为动态电路。动态电路产生动态过程是有内因和外因的,内因是电路中含有储能元件(L 或 C);外因是电路发生电路结构或参数改变,也就是说发生了换路,如电路接通、断开、短路、电压改变等。动态过程的实质是储能元件的充、放电过程。

电路的动态过程一般比较短暂,它的作用和影响都非常重要。有些电路设计时专门利用其动态过程来实现延时、波形产生等;但在电力系统中,动态过程会产生比稳态要大很多的过电压或过电流,对此要采取保护措施,否则电器设备就会毁坏。因此研究动态过程,掌握其规律是非常重要的。

3.1.2 换路定律

由于电感的储能为 $w_L = \frac{1}{2}Li_L^2$,在 u_L 为有限值时,电感储能不能跃变,即通过电感的电流 i_L 不能跃变。电容储能为 $w_C = \frac{1}{2}Cu_C^2$,在 i_C 为有限值时,而电容的储能为 $w_C = \frac{1}{2}Cu_C^2$,电容储能不能跃变,即电容两端的电压 u_C 不能跃变。

设: $t=0$ 表示换路瞬间(定为计时起点), $t=0_-$ 表示换路前最后一瞬间, $t=0_+$ 表示换路后开始一瞬间,即换路的初始值。

电容元件上的电压和电感元件中的电流不能跃变,这就是换路定律,用公式表示为

$$\begin{cases} u_C(0_+) = u_C(0_-) \\ i_L(0_+) = i_L(0_-) \end{cases} \quad (3-1)$$

注意:

- (1) 换路定律仅用于确定换路瞬间 u_C 、 i_L 的初始值。
- (2) 只有电容的电压与电感的电流不能跃变,其余变量如 i_C 、 u_L 、 u_R 、 i_R 、电压源的电流都可在换路时跃变。

3.1.3 初始值的计算

初始值的计算,即 $t=0_+$ 时电路中的电压、电流初始值的计算,解题步骤如下:

- ① 根据换路前的电路求换路前瞬间的 $u_C(0_-)$ 、 $i_L(0_-)$,注意电路视为一稳态,此时电感短路,电容开路。
- ② 根据换路定律求换路瞬间的 $u_C(0_+)$ 、 $i_L(0_+)$ 。
- ③ 画出 $t=0_+$ 时的等效电路。 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_S$ 时,电容用电压源 U_S 代替, $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$ 时,电容用短路线代替; $i_L(0_+) = i_L(0_-) = I_S$ 时,电感用电流源 I_S 代替, $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$ 时,电感进行开路处理。
- ④ 用直流电路分析方法,计算换路瞬间的其他电流、电压值。

【例 3-1】 在图 3-2(a)所示电路中,开关 S 闭合前,电容两端电压为零,求开关 S 闭合瞬间各元件电压和各支路电流的初始值。



视频讲解

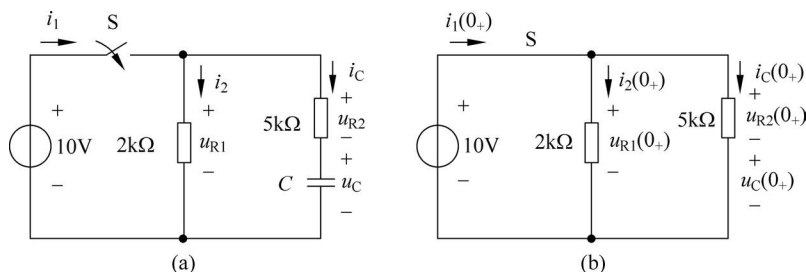


图 3-2 例 3-1 图

解：由题意知，开关 S 闭合前有 $u_C(0_-)=0$ 。

开关 S 闭合后，根据换路定律，可得 $u_C(0_+)=u_C(0_-)=0$ 。

当 $t=0_+$ 时等效电路图如图 3-2(b) 所示。

由 KVL，可得 $u_{R1}(0_+)=10\text{V}$ ， $u_{R2}(0_+)=10\text{V}$ 。

$$i_2(0_+) = \frac{10}{2 \times 10^3} \text{A} = 5\text{mA}, i_C(0_+) = \frac{10}{5 \times 10^3} \text{A} = 2\text{mA}。$$

由 KCL 可得 $i_1(0_+) = i_2(0_+) + i_C(0_+) = 2 + 5 = 7\text{mA}$ 。

【例 3-2】 在图 3-3(a) 所示电路中，电路已稳定， $t=0$ 时，合上开关 S。试求初始值 $i_1(0_+)$ 、 $i_L(0_+)$ 和 $u_L(0_+)$ 。

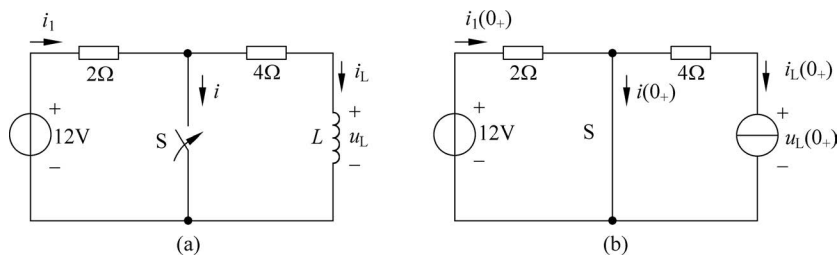


图 3-3 例 3-2 图

解：开关 S 闭合前，电感相当于短路，则有

$$i_L(0_-) = \frac{12}{2+4} = 2\text{A}$$

开关 S 闭合前，根据换路定律，可得 $i_L(0_+)=i_L(0_-)=2\text{A}$ 。

当 $t=0_+$ 时等效电路如图 3-3(b) 所示。

由 KVL 可得 $2i_1(0_+) - 12 = 0$ ，则 $i_1(0_+) = 6\text{A}$ 。

根据 KCL 可得 $i(0_+) = i_1(0_+) - i_L(0_+) = 6 - 2 = 4\text{A}$ 。

根据 KVL 有 $4 \times 4 + u_L(0_+) = 0$ ，则 $u_L(0_+) = -16\text{V}$ 。

3.2 一阶电路的分析

可用一阶微分方程描述的电路称为一阶电路。除了电源(电压源或电流源)与电阻元件，只含一个储能元件(电容或电感)的电路都是一阶电路。

分析一阶电路的过程就是根据激励(电压源或电流源)求电路的响应(电压和电流值)。

根据初始条件的不同,电路的响应可分为三种。

零输入响应:指输入激励信号为零,仅有储能元件的初始储能所激发的响应。零输入响应也是储能元件放电的过程。

零状态响应:指电路初始状态为零,电路仅有外加电源作用所激发的响应。零状态响应也是储能元件充电的过程。

全响应:指电路初始状态和输入都不为零的一阶电路。

学习目标

- (1) 掌握 RC 、 RL 一阶电路零输入响应的概念及响应变化规律。
- (2) 掌握 RC 、 RL 一阶电路零状态响应的概念及响应变化规律。
- (3) 熟悉一阶电路中时间常数的概念。

下面先分析零输入响应、零状态响应电路。

3.2.1 零输入响应

零输入响应有 RC 电路和 RL 电路两种。

1. RC 电路零输入响应

图 3-4 所示电路中,开关 S 在 A 位置时电路处于稳定状态,电容元件已充电,即电容电压为 $u_C(0_-) = U_S$ 。在 $t=0$ 时刻,开关 S 从 A 点切换到 B 点,电路发生换路,电容元件开始对电阻元件 R 放电。

由于电容两端电压不能突变,根据换路定律可知:
 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_S$ 。

此时电路中仅由电容和电阻组成,电路中的电压和电流都是由 $u_C(0_+) = U_S$ 引起,这时电路中的电压和电流为零输入状态,也是电容放电的过程。

根据 KVL,列出电压方程 $u_R - u_C = 0$ 。

图 3-4 中, $u_R = i_R R$, 电容两端的电压与通过的电流为非

关联参考方向,则有 $i_C = -C \frac{du_C}{dt}$, 所以电压方程为

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \quad (3-2)$$

式(3-2)是一阶常系数齐次线性微分方程,可得该微分方程的解为

$$u_C(t) = u_C(0_+) e^{-\frac{t}{RC}}$$

将初始条件 $u_C(0_+) = U_S$ 代入上式,则

$$u_C(t) = U_S e^{-\frac{t}{RC}}$$

令 $\tau = RC$, τ 为时间常数,电阻 R 的单位为欧姆,电容 C 的单位为法,则时间常数 τ 的单位为秒。可表示为

$$u_C(t) = u_C(0_+) e^{-\frac{t}{\tau}} = U_S e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3-3)$$

图 3-4 中,电阻两端电压为 $u_R(t) = u_C(t) = u_C(0_+) e^{-\frac{t}{\tau}} = U_S e^{-\frac{t}{\tau}}$

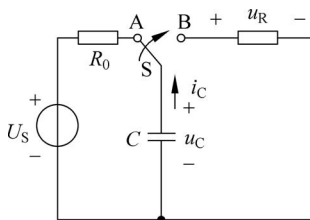


图 3-4 RC 零输入电路

$$\text{电路中的电流为 } i_C(t) = \frac{u_R(t)}{R} = \frac{u_C(t)}{R} = \frac{u_C(0_+)}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U_S}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

2. RL 电路零输入响应

图 3-5 所示电路中,开关 S 在 A 位置时电路处于稳定状态,电感元件充电电流为 $i_L(0_-) = \frac{U_S}{R_0}$ 。在 $t=0$ 时刻,开关 S 从 A 点切换到 B 点,电路发生换路,电感元件开始释放磁场能。

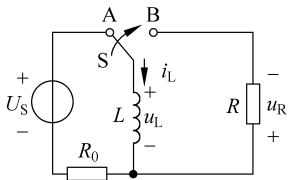


图 3-5 RL 零输入电路

由于电感的电流不能突变,根据换路定律可知: $i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{U_S}{R_0}$ 。

此时电路中仅由电感和电阻组成,电路中无电源,电路中的电压和电流为零输入状态。根据 KVL,列出电压方程 $u_R + u_L = 0$ 。

图 3-5 中, $u_R = i_L R$, 电感两端的电压与通过的电流为关联参考方向,则有 $u_L = L \frac{di_L}{dt}$, 所以电压方程为

$$L \frac{di_L}{dt} + i_L R = 0 \quad (3-4)$$

式(3-4)是一阶常系数齐次线性微分方程,可得该微分方程的解为

$$i_L(t) = i_L(0_+) e^{-\frac{Rt}{L}}$$

将初始条件 $i_L(0_+) = \frac{U_S}{R_0}$ 代入上式,则

$$i_L(t) = \frac{U_S}{R_0} e^{-\frac{Rt}{L}}$$

令 $\tau = \frac{L}{R}$, τ 为时间常数,电阻 R 的单位为欧姆,电感 L 的单位为亨,则时间常数 τ 的单位为秒。可表示为

$$i_L(t) = i_L(0_+) e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U_S}{R_0} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3-5)$$

图 3-5 中,电阻两端电压为 $u_R(t) = i(t)R = Ri_L(0_+) e^{-\frac{t}{\tau}}$ 。

电感两端电压为 $u_L(t) = -u_R(t) = Ri_L(0_+) e^{-\frac{t}{\tau}}$ 。

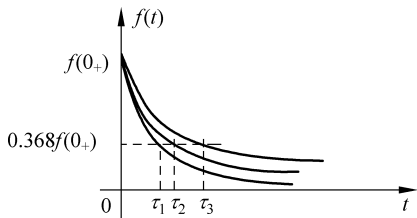
3. 一阶响应的时间常数

由式(3-3)和式(3-5),可知零输入响应,即电容放电和电感释放磁场能的过程,对应通式可写为

$$f(t) = f(0_+) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3-6)$$

式中, $f(0_+)$ 为 $t=0_+$ 时的初始值, τ 为时间常数,其中对 RC 电路, $\tau = RC$, 对 RL 电路, $\tau = \frac{L}{R}$ 。

式(3-6)表明零输入响应 u_C 和 i_L 是按指数规律衰减的,变化曲线如图 3-6 所示。时间常数 τ 是表示衰减快慢的物理量,时间常数 τ 越大,衰减越慢。当 $t=\tau$ 时, $f(\tau)=0.368f(0_+)$; $t=2\tau$ 时, $f(2\tau)=0.135f(0_+)$; $t=3\tau$ 时, $f(3\tau)=0.05f(0_+)$; $t=4\tau$ 时, $f(4\tau)=0.018f(0_+)$; $t=5\tau$ 时, $f(5\tau)=0.007f(0_+)$ 。理论上 $\tau=\infty$, 电路才达到稳定,实际当 $t=5\tau$, 储能元件的响应已衰减到初始值的 0.7%。工程中,当 $t\geq 5\tau$ 时,可认为动态过程基本结束。

图 3-6 不同时间常数下的 $f(t)$ 变化曲线

【例 3-3】 图 3-7 所示电路中,已知电路在换路前已达稳态,求开关 S 由 A 切换到 B 后电容电压 $u_C(t)$ 和电流 $i_C(t)$ 。

解: 换路前电容开路,由题意可知

$$u_C(0_-) = 80\text{V}$$

开关切换到 B 后,根据换路定律得

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 80\text{V}$$

时间常数为 $\tau = RC = 4 \times 10^3 \times 10 \times 10^{-6} = 4 \times 10^{-2}\text{s}$, 则 $u_C(t) = u_C(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = 80e^{-\frac{t}{0.04}} = 80e^{-25t}\text{V}$, $i_C(t) = \frac{u_R(t)}{R} = \frac{u_C(t)}{R} = \frac{80e^{-25t}}{4 \times 10^3} = 0.02e^{-25t}\text{A}$ 。

【例 3-4】 在图 3-8 所示电路中,电路已稳定,求打开开关 S 后,电感的电流 $i_L(t)$ 和电感的电压 $u_L(t)$ 。

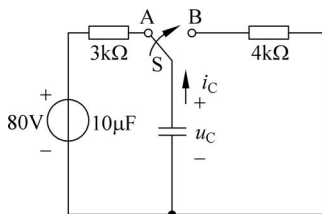


图 3-7 例 3-3 图

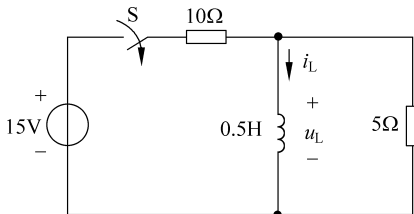


图 3-8 例 3-4 图

解: S 打开前,电感短路,有

$$i_L(0_-) = \frac{15}{10} = 1.5\text{A}$$

打开 S,根据换路定律,得

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 1.5\text{A}$$

时间常数为 $\tau = \frac{L}{R} = \frac{0.5}{5} = 0.1\text{s}$, 则 $i_L(t) = i_L(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = 1.5e^{-\frac{t}{0.1}} = 1.5e^{-10t}\text{A}$ 。

根据 KVL, 可得 $u_L(t) = -i_L(t)R = -5 \times 1.5e^{-10t} = -7.5e^{-10t}\text{V}$ 。

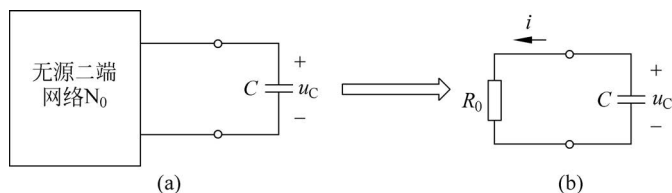
4. 一阶零输入响应的推广

若电路除了电容外其他部分为只含电阻的无源二端网络 N_0 , 如图 3-9(a) 所示, 把无源二端网络 N_0 用等效电阻 R_0 代替, 等效电路如图 3-9(b) 所示。在 $u_C(0_+) \neq 0$ 条件下, 此时有

$$\tau = R_0 C$$

$$u_C(t) = u_C(0_+) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i_C(t) = \frac{u_C(t)}{R_0}$$

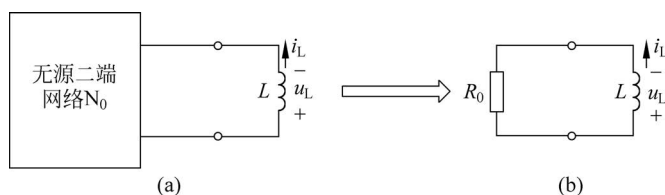
图 3-9 $R_0 C$ 等效电路

同理,若电路除了电感外其他部分为只含电阻的无源二端网络 N_0 ,如图 3-10(a)所示,把无源二端网络 N_0 用等效电阻 R_0 代替,等效电路如图 3-10(b)所示。在 $i_L(0_+) \neq 0$ 条件下,此时有

$$\tau = \frac{L}{R_0}$$

$$i_L(t) = i_L(0_+) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_L(t) = -R_0 i_L(0_+) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

图 3-10 $R_0 L$ 等效电路

【例 3-5】 图 3-11 所示电路中,已知换路前电路已达稳态,求开关 S 断开后的电容电压 $u_C(t)$ 和电流 $i_C(t)$ 。

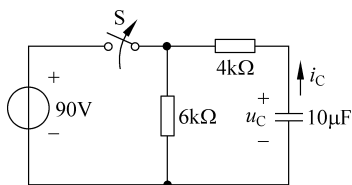


图 3-11 例 3-5 图

解: 换路前电容开路,由题意可知

$$u_C(0_-) = 90\text{V}$$

开关 S 断开后,根据换路定律,得

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 90\text{V}$$

时间常数为 $\tau = R_0 C = (4 + 6) \times 10^3 \times 10 \times 10^{-6} = 0.1\text{s}$ 。

则

$$u_C(t) = u_C(0_+) e^{-\frac{t}{\tau}} = 90 e^{-\frac{t}{0.1}} = 90 e^{-10t} \text{V}$$

$$i_C(t) = \frac{u_C(t)}{R_0} = \frac{90 e^{-10t}}{(4 + 6) \times 10^3} = 9 \times 10^{-3} e^{-10t} \text{A} = 9 e^{-10t} \text{mA}$$

3.2.2 零状态响应

1. RC 零状态响应

在图 3-12 所示电路中,开关 S 闭合前,电容未充电且处于稳态,即 $u_C(0_-)=0$ 。当 $t=0$ 时,开关 S 闭合,发生换路,电路中的电源通过电阻 R 给电容元件 C 充电。由于换路前 $u_C(0_-)=0$,换路后电路中的电流、电压都是由电源激励产生的响应,称为零状态响应。

开关 S 闭合后,根据换路定律可知

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$$

根据 KVL,列出电源方程为

$$iR + u_C = U_S$$

因为 $i = \frac{du_C}{dt}$,代入上式,则有

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_S \quad (3-7)$$

式(3-7)为一阶常系数非齐次线性微分方程,当 $u_C(0_+)=0$ 时,式(3-7)的解为

$$u_C(t) = U_S(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (3-8)$$

式(3-8)中,时间常数为 $\tau = RC$,当 $t = \infty$, $u_C(\infty) = U_S$ 。式(3-8)又可写为

$$u_C(t) = u_C(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (3-9)$$

式(3-9)表明电容电压 u_C 是按指数规律增加的,变化曲线如图 3-13 所示。时间常数 τ

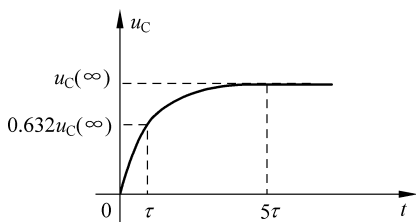


图 3-13 电容电压的变化曲线

表示电容充电的快慢,时间常数 τ 越小,充电越快。

当 $t = \tau$ 时, $u_C(\tau) = 0.632u_C(\infty)$; 当 $t = 5\tau$ 时, $u_C(5\tau) = 0.993u_C(\infty)$,已经很接近另一个稳态值 $u_C(\infty) = U_S$ 。理论上 $\tau = \infty$,电路才达到稳定,实际上当 $t = 5\tau$,电容元件电压已增加到稳态值的 99.3%。工程中,当 $t \geq 5\tau$ 时,可认为动态过程基本结束。

换路后,图 3-13 所示电路中电阻两端的电压根据 KVL 可得

$$u_R(t) = U_S - u_C(t) = U_S - U_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = U_S e^{-\frac{t}{\tau}}$$

电路中的电流为 $i(t) = \frac{u_R(t)}{R} = \frac{U_S}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$ 。

由以上两式可知,在 RC 电路零状态响应中,电阻两端的电压和电路中的电流在换路后都按指数规律衰减。

【例 3-6】 在图 3-14 所示电路中,开关 S 闭合前 $u_C(0_-) = 0$,试求开关 S 闭合后的时间常数 τ 、 $u_C(t)$ 和 $i(t)$ 。

解: 开关闭合后,根据换路定律,可知

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$$

换路结束后,电容视为开路,此时有

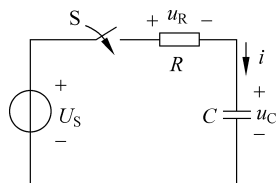


图 3-12 RC 零状态电路

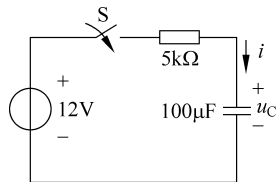


图 3-14 例 3-6 图

$$u_C(\infty) = 12\text{V}$$

时间常数为 $\tau = RC = 5 \times 10^3 \times 100 \times 10^{-6} = 0.5\text{s}$ 。

则有

$$u_C(t) = u_C(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 12(1 - e^{-\frac{t}{0.5}}) = 12(1 - e^{-2t})\text{V}$$

$$i(t) = \frac{12 - 12(1 - e^{-2t})}{5 \times 10^3}\text{A} = 2.4e^{-2t}\text{mA}$$

2. RL 零状态响应

在图 3-15 所示电路中,开关 S 闭合前,电路处于稳态,即 $i_L(0_-) = 0$ 。当 $t = 0$ 时,开关 S 闭合,发生换路,电路中的电源通过电阻 R 给电感元件 L 充电。由于换路前 $i_L(0_-) = 0$,电路中的电流、电压都是由电源激励产生的响应,称为零状态响应。

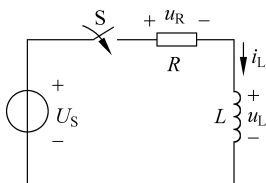


图 3-15 RL 零状态电路

开关 S 闭合后,根据换路定律可知

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$$

根据 KVL,列出电压方程为

$$i_L R + u_L = U_S$$

因为 $u_L = L \frac{di_L}{dt}$,代入上式,则有

$$L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = U_S \quad (3-10)$$

式(3-10)为一阶常系数非齐次线性微分方程,当 $i_L(0_+) = 0$ 时,式(3-10)的解为

$$i_L(t) = \frac{U_S}{R}(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}) \quad (3-11)$$

式(3-11)中,时间常数为 $\tau = \frac{L}{R}$,当 $t = \infty$, $i_L(\infty) = \frac{U_S}{R}$ 。式(3-11)又可写为

$$i_L(t) = i_L(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (3-12)$$

式(3-12)表明,电感的电流 i_L 是按指数规律增加的,变化曲线如图 3-16 所示。时间常数 τ 表示电感充电的快慢,时间常数 τ 越大,充电越慢。当 $t = \tau$ 时, $i_L(\tau) = 0.632 i_L(\infty)$; 当 $t = 5\tau$ 时, $i_L(5\tau) = 0.993 i_L(\infty)$,已经很接近另一个稳态值 $i_L(\infty) = U_S/R$ 。理论上 $\tau = \infty$,电路才达到稳定,实际上当 $t = 5\tau$ 时,电感元件电流已增加到稳态值的 99.7%。工程中, $t \geq 5\tau$ 时,可认为动态过程基本结束。

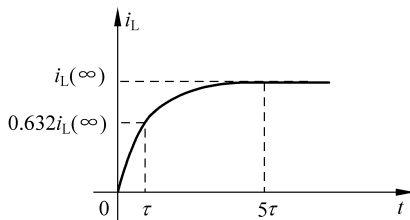


图 3-16 电感电流的变化曲线

换路后,图 3-16 所示电路中电感两端的电压根据 KVL 可得

$$u_L(t) = U_S - Ri_L(t) = U_S - R \times \frac{U_S}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = U_S e^{-\frac{t}{\tau}}$$

由上式可知,在 RL 电路零状态响应中,电感两端的电压在换路后是按指数规律衰减的。

【例 3-7】 电路如图 3-17 所示,开关 S 闭合前 $i_L(0_-)=0$,求闭合后 $i_L(t)$ 和 $u_L(t)$ 。

解: 开关 S 闭合后,根据换路定律可得

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$$

电感储能稳定后达新稳态值,电感视为短路,此时有

$$i_L(\infty) = \frac{8}{20} = 0.4 \text{ A}$$

时间常数为 $\tau = \frac{L}{R} = \frac{4}{20} = 0.2 \text{ s}$ 。

则

$$i_L(t) = i_L(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 0.4 \times (1 - e^{-\frac{t}{0.2}}) = 0.4(1 - e^{-5t}) \text{ A}$$

$$u_L(t) = 8 - 20 \times 0.4 \times (1 - e^{-5t}) = 8e^{-5t} \text{ V}$$

总结: 根据式(3-9)和式(3-12)可知,储能元件在零状态响应电路对应的响应为

$$f(t) = f(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (3-13)$$

式(3-13)中, $f(\infty)$ 为 $t=\infty$ 时的新稳态值, RC 电路中 $\tau=RC$, RL 电路中 $\tau=L/R$ 。

3. 零状态响应的推广

若动态电路如图 3-18(a)和图 3-19(a)所示,其中 N 为只含电源和电阻的线性有源二端网络,可应用戴维南定理把有源二端网络 N 等效为一个理想电压源 U_{OC} 和一个电阻 R_0 的串联电路,如图 3-18(b)和图 3-19(b)所示。

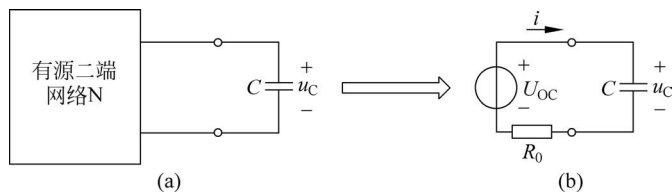


图 3-18 RC 电路及其等效电路

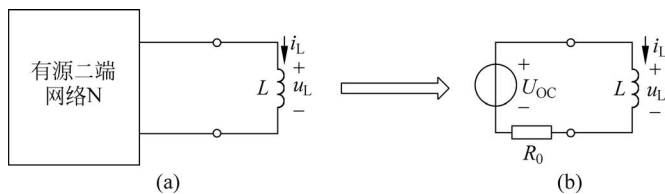


图 3-19 RL 电路及其等效电路

图 3-18 中若 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$, 则 $\tau = RC$, $u_C(\infty) = U_{OC}$, 电容的电压为

$$u_C(t) = U_{OC}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

图 3-19 中若 $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$, 则 $\tau = L/R_0$, $i_L(\infty) = U_{OC}/R_0$, 通过电感的电流为

$$i_L(t) = \frac{U_{OC}}{R_0}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

【例 3-8】 电路如图 3-20(a)所示,开关 S 闭合前,电路已达稳态,当 $t=0$ 时开关 S 闭合。求 $t \geq 0$ 的电容电压 $u_C(t)$ 。

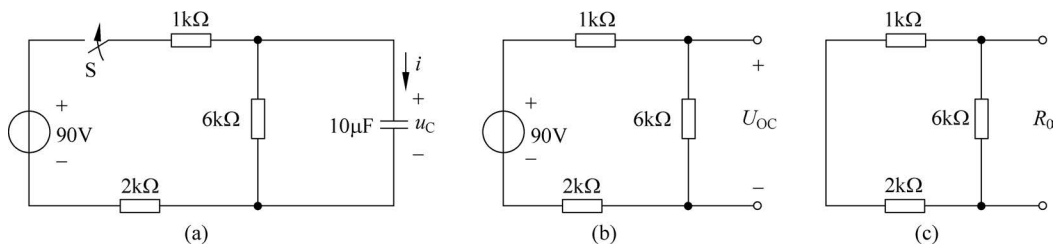


图 3-20 例 3-8 图

解：开关 S 闭合前，由题意可知 $u_C(0_-) = 0$ 。

S 闭合后，根据换路定律得 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$ 。

换路后在电容两端断开电路，如图 3-20(b)所示。

$$U_{OC} = \frac{90 \times 6 \times 10^3}{(1 + 6 + 2) \times 10^3} = 60 \text{ V}$$

当如图 3-20(b)所示二端网络中电源不起作用时，如图 3-20(c)所示，等效电阻为

$$R_0 = \frac{(1 + 2) \times 6}{1 + 2 + 6} = 2 \text{ k}\Omega$$

则时间常数为 $\tau = R_0 C = 2 \times 10^3 \times 10 \times 10^{-6} = 2 \times 10^{-2} \text{ s}$ 。

换路结束新稳态值为 $u_C(\infty) = U_{OC} = 60 \text{ V}$ 。

则有 $u_C(t) = U_{OC}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 60(1 - e^{-\frac{t}{2 \times 10^{-2}}}) = 60(1 - e^{-50t}) \text{ V}$ 。

3.3 三要素法求解一阶电路

初始状态为零的动态过程为零状态响应。激励源为零的动态过程为零输入响应。而电路中储能元件的初始状态和输入激励源都不为零的一阶动态电路，则称为全响应。

学习目标

- (1) 熟悉全响应的概念及特点。
- (2) 掌握全响应的解题方法及应用。

对于一阶线性电路的全响应，根据叠加定理，全响应等于零输入响应和零状态响应的叠加，即

$$f(t) = f(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} + f(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

整理后，为

$$f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3-14)$$

式(3-14)中第一项 $f(\infty)$ 为稳态值，第二项 $[f(0_+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$ 为瞬态值，全响应也等于稳态值和瞬态值的叠加。

由式(3-14)可知：

① $f(0_+) = f(\infty)$ 时， $f(t) = f(\infty)$ 为稳态值，电路无动态过程。

② $f(0_+) > f(\infty)$ 时，换路后响应从初始值 $f(0_+)$ 开始放电直到新稳态值 $f(\infty)$ ，变化曲线如图 3-21(a)所示。

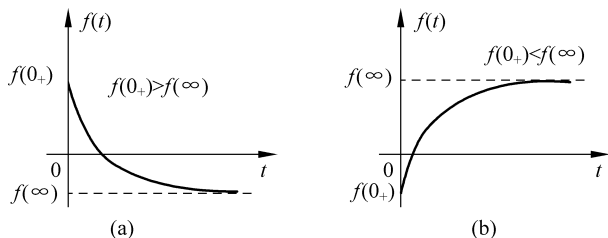


图 3-21 全响应变化曲线

③ $f(0_+) < f(\infty)$ 时, 换路后响应从初始值 $f(0_+)$ 开始充电直到新稳态值 $f(\infty)$, 变化曲线如图 3-21(b) 所示。

对于任何形式的一阶线性动态电路, 求解动态过程的任一电压或电流响应, 都可用通用表达式

$$f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

只要求得初始值 $f(0_+)$ 、新稳态值 $f(\infty)$ 和时间常数 τ , 就可直接写出一阶线性动态电路在电路中电压或电流的全响应, 这种方法称为三要素法。

三要素法的解题步骤如下所述。

① 确定初始值 $f(0_+)$ 。

根据换路定律解题步骤求解电压或电流响应的初始值 $f(0_+)$ 。

② 确定稳态值 $f(\infty)$ 。

根据新的稳态电路(直流电路: 在换路后的电路中将电容开路, 电感短路)的特征确定所求电压或电流响应。

③ 求时间常数 τ 。

含电容元件的电路中时间常数为 $\tau = R_0 C$, 含电感元件电路中时间常数为 $\tau = L/R_0$, 其中 R_0 为除了储能元件(电容或电感)外二端电路中电源都不起作用时的等效电阻。

④ 将初始值 $f(0_+)$ 、稳态值 $f(\infty)$ 和时间常数 τ 代入动态过程通用表达式, 画出响应曲线。

【例 3-9】 在图 3-22 所示电路中, 开关闭合前电路处于稳态, 当 $t=0$ 时合上开关 S。应用三要素法求 $t \geq 0$ 时的电容电压 $u_C(t)$ 。

解: 开关闭合前, 电容相当于开路, 由题意可知

$$u_C(0_-) = 9\text{V}$$

开关 S 闭合后, 根据换路定理可得

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 9\text{V}$$

开关闭合后, 电路处于稳定状态时, 电容相当于开路, 此时有

$$u_C(\infty) = \frac{9 \times 6}{3 + 6} = 6\text{V}$$

开关闭合后, 电压源不起作用时, 等效电阻为

$$R_0 = \frac{3 \times 6}{3 + 6} = 2\text{k}\Omega$$

时间常数为 $\tau = R_0 C = 2 \times 10^3 \times 10 \times 10^{-6} = 0.02\text{s}$ 。

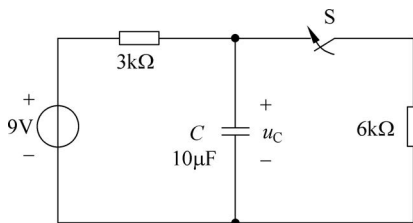


图 3-22 例 3-9 图

则电容电压为

$$u_C(t) = u_C(\infty) + [u_C(0_+) - u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 6 + (9 - 6)e^{-\frac{t}{0.02}} = 6 + 3e^{-50t} \text{ V}$$

【例 3-10】 在图 3-23 所示电路中,开关 S 闭合前电路处于稳定状态,在 $t=0$ 时开关 S 闭合,求开关 S 闭合后多久电感电流为 0.04A 。

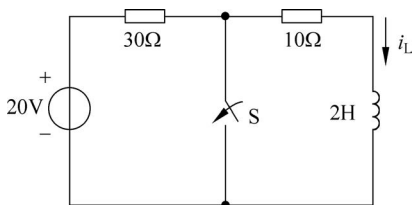


图 3-23 例 3-10 图

解: 开关 S 闭合前,电感短路。

$$i_L(0_-) = \frac{20}{10 + 30} = 0.5 \text{ A}$$

根据换路定律,可知

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0.5 \text{ A}$$

开关闭合后, $t=\infty$,即达到新的稳态时,电感放电完成。

$$i_L(\infty) = 0$$

开关闭合后,断开电感 L 后,戴维南等效电路的等效电阻为 $R_0 = 10\Omega$,时间常数为 $\tau = \frac{L}{R_0} = \frac{2}{10} = 0.2\text{s}$ 。

$$\text{则 } i_L(t) = i_L(\infty) + [i_L(0_+) - i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 0 + (0.5 - 0)e^{-\frac{t}{0.2}} = 0.5e^{-5t} \text{ A}.$$

当 $i_L(t) = 0.04\text{A} = 0.5e^{-5t} \text{ A}$ 时,有 $t \approx 0.51\text{s}$ 。

思考练习

3.1 在图 3-24 所示电路中,电路已稳定。当 $t=0$ 时,合上开关 S,试求初始值 $i_C(0_+)$ 、 $i_1(0_+)$ 和 $i(0_+)$ 。

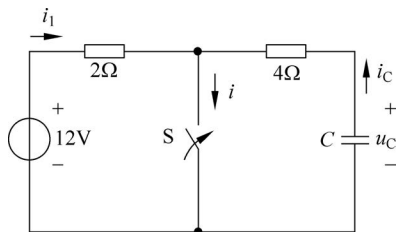


图 3-24

3.2 在图 3-25 所示电路中,开关 S 闭合前电路处于稳定状态,求开关闭合后各电流初始值和电感上电压 u_L 的初始值。

3.3 电路如图 3-26 所示,开关 S 打开前,电路处于稳定状态,试求开关打开后的 $u_C(0_+)$ 、 $u_R(0_+)$ 、 $i_L(0_+)$ 和 $i_C(0_+)$ 。

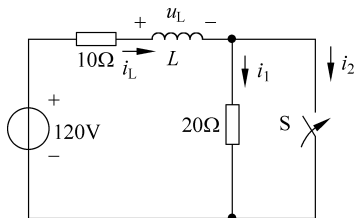


图 3-25

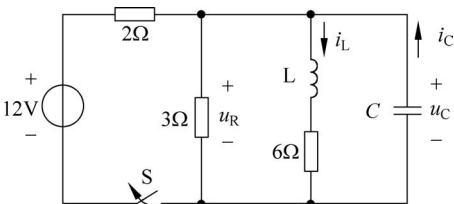


图 3-26

3.4 电路如图 3-27 所示,开关 S 闭合前电感、电容均无储能。试绘出 $t=0_+$ 和 $t=\infty$ 时的等效电路,并求初始值 $i_1(0_+)$ 、 $i_2(0_+)$ 和稳态值 $i_1(\infty)$ 、 $i_2(\infty)$ 。

3.5 在图 3-28 所示电路中,开关置于位置 A 且电路处于稳定状态,在 $t=0$ 时开关 S 从位置 A 打到位置 B,试求 $t \geq 0$ 时的电容两端电压 $u_C(t)$ 和电路中电流 $i(t)$ 。

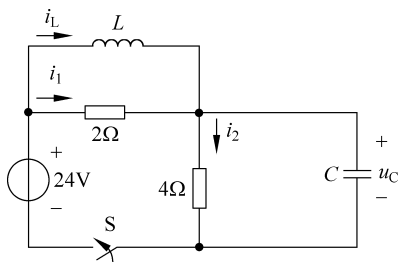


图 3-27

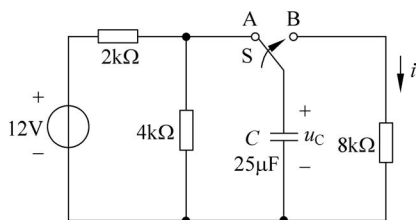


图 3-28

3.6 电路如图 3-29 所示,开关 S 闭合且电路处于稳态,当 $t=0$ 时 S 打开,求 $t \geq 0$ 时的电感两端电压 $u_L(t)$ 和电流 $i_L(t)$ 。

3.7 在图 3-30 所示电路中,开关 S 处于位置 B 且电路处于稳定状态,在 $t=0$ 时开关从位置 B 打到位置 A,试求 $t \geq 0$ 时的电容两端电压 $u_C(t)$ 和电路中电流 $i(t)$,并定性画出它们的变化曲线。

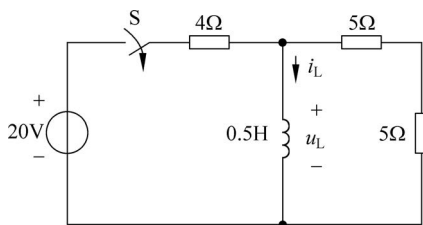


图 3-29

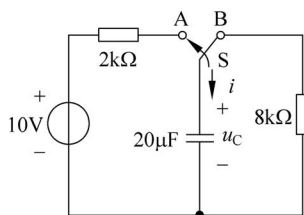


图 3-30

3.8 在图 3-31 所示电路中,开关 S 闭合前,电路处于稳定状态,当 $t=0$ 时开关 S 闭合。求 $t \geq 0$ 时的电感电流 $i_L(t)$ 和电压 $u_L(t)$,并绘出它们的曲线图。

3.9 在图 3-32 所示电路中,开关 S 闭合前电路处于稳定状态,在 $t=0$ 时开关 S 闭合。用三要素法求 $t \geq 0$ 时的电压 $u_C(t)$ 、 $i_C(t)$,并绘出响应曲线。

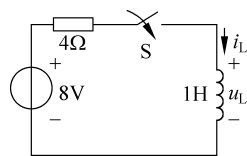


图 3-31

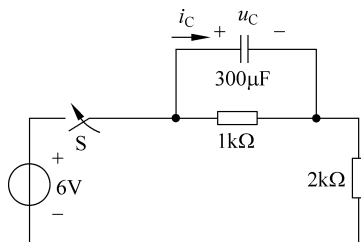


图 3-32

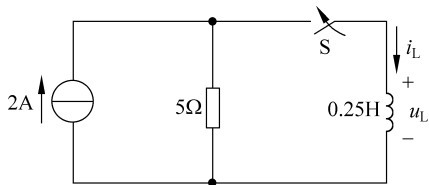


图 3-33