第 一 章

极限与连续

客观世界中存在许多变化现象,数学上用变量和变量间的关系表示这些现象.变量之间最主要的一种关系就是函数关系,它是高等数学研究的主要对象.极限是研究函数时要用到的最重要的方法和工具;连续性是研究函数性态时要考虑的最基本的性质.本章将介绍函数、极限和连续性的有关概念、性质和方法,这些内容是学习后续知识的基础.

第一节 函 数

一、函数的概念

1. 集合

集合是指具有某种性质的事物的全体,组成这个集合的事物称为该集合的元素.集合通常用大写字母 $A,B,\cdots$ 表示,集合的元素常用小写字母 $a,b,\cdots$ 表示.若事物 a 是集合 M 的元素,则记为 $a\in M$(读作 a 属于 M);若事物 a 不是集合 M 的元素,则记为 $a\notin M$.

注 1 定义中的某种性质必须是明确的,可以用它判断任意元素是否属于该集合.

注 2 定义中关于性质的描述有多种方法,如列举法、解析法等.

例 1 $A=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$;$B=\{2,3\}$;$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2+1=0\}$.

集合 A,C 是用解析法表示的,而集合 B 则采用列举法表示.

元素都是数的集合称为数集.经常用到的数集有:全体自然数构成的集合记为 $\mathbf{N}$,全体整数的集合记为 $\mathbf{Z}$,全体有理数的集合记为 $\mathbf{Q}$,全体实数的集合记为 $\mathbf{R}$.

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素,即若 $a\in A$,则有 $a\in B$,则称 A 是 B 的子集,记作 $A\subset B$(读作 A 包含于 B),或 $B\supset A$(读作 B 包含 A),显然有 $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$.

如果 $A\subset B$,同时有 $B\subset A$,就称集合 A 与 B 相等,记作 $A=B$,此时集合 A 与 B 由相同的元素构成.例 1 中,$A=B$.

不含任何元素的集合称为空集,记作 $\varnothing$.例 1 中的 C 在实数范围内是空集,即 $C=\varnothing$.一切既属于集合 A 又属于集合 B 的元素组成的集合称为集合 A 与 B 的交集,记为 $A\cap B$.一切属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合称为集合 A 与 B 的并集,记为 $A\cup B$,即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\},\quad A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}.$$

2. 区间、邻域

设 a 和 b 都是实数,且 $a<b$,数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 称为开区间,记为 (a,b),即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\},$$

a,b 称为开区间的端点.

数集$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$称为闭区间,记为$[a,b]$,即

$$[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\},$$

a,b称为闭区间的端点.

显然,开区间不包括它的两个端点,而闭区间包括两个端点.只包括一个端点的区间

$$[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\}$$

及

$$(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}$$

称为半开半闭区间.

设x_0,δ是实数,$\delta>0$,则关于x_0对称的开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x \,\big|\, |x-x_0|<\delta\}$一般被称为点$x_0$的$\delta$邻域,记为$U(x_0,\delta)$,其中$x_0$称为邻域中心,$\delta$称为邻域半径.

满足不等式$0<|x-x_0|<\delta$的点的集合称为点x_0的去心δ邻域,记为$\mathring{U}(x_0,\delta)$,即$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$.

不考虑半径时,邻域简记为$U(x_0)$,去心邻域简记为$\mathring{U}(x_0)$.

3. 函数的定义

定义1 设X,Y是两个非空的实数集合,如果有一个规则f,使对每一个$x\in X$,由f都唯一确定了一个$y\in Y$与之相对应,则称f为定义于X上的函数,记为

$$f:X\to Y,$$

或

$$y=f(x),\quad x\in X,$$

其中,x称为自变量,y称为因变量,自变量x的变化集合X称为函数$y=f(x)$的定义域.当$x_0\in X$时,与x_0对应的数值称为函数$y=f(x)$在点x_0处的函数值,记为$f(x_0)$.当x取遍X中的所有数值时,对应的函数值构成的集合称为函数$y=f(x)$的值域,记为

$$f(X)=\{y \mid y=f(x),x\in X\}.$$

注1 函数可用符号描述为:对$\forall x\in X$,按规则f,$\exists$唯一的$y\in Y$,则称f是从X到Y的一个函数.其中符号“$\forall$”表示“任意的”,符号“$\exists$”表示“存在”.

注2 对应规则f与自变量和因变量所采用的符号无关,因而函数

$$y=f(x),\quad x\in X$$

与函数

$$s=f(t),\quad t\in X$$

表示同一个函数,但是函数$y=x$与$y=\dfrac{x^2}{x}$不是相同的函数.在同一问题中,不同的函数要用不同的字母表示,如$f(x),g(x)$等.

函数关系可以有不同的表示方法,但是需要表明其定义域和对应规则.经常采用的方法有以下三种:

(1) 公式法

用解析表达式表示函数关系的方法称为公式法.解析表达式是对自变量及某些常数经初等运算所得到的表达式.例如,

$$y=\sin x+\lg(1-x^2),\quad y=\sqrt{\frac{4-x^2}{x-1}}+\mathrm{e}^x,$$

都是用公式法表示的函数.

（2）列表法

将自变量的一系列值与所对应的函数值排列成表，这种表示函数的方法称为列表法.如经常用的平方根表、对数表、三角函数表等.定义域是有限集时常用此种表示法.

（3）图像法

设函数为 $y=f(x)$，$x\in X$.在直角坐标系中，自变量 x 的值为横坐标，对应的函数值 $f(x)$为纵坐标，称点集

$$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in X\}$$

为函数 $y=f(x)$的图形(图像).

例 2　函数

$$y=\begin{cases}1, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & x<a \text{ 或 } x>b\end{cases}$$

称为区间$[a,b]$的特征函数，它的定义域 $X=(-\infty,+\infty)$，值域 $Y=\{0,1\}$，图形如图 1-1 所示.

例 3　函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为符号函数，它的定义域 $X=(-\infty,+\infty)$，值域 $Y=\{1,0,-1\}$，图形如图 1-2 所示.

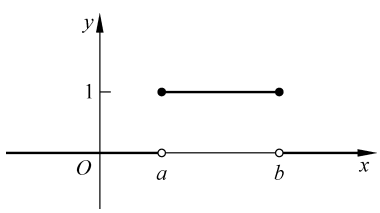

图　1-1

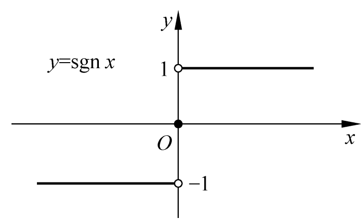

图　1-2

例 4　函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

称为绝对值函数，它的定义域 $X=(-\infty,+\infty)$，值域 $Y=[0,+\infty)$，图形如图 1-3 所示.

例 5　函数

$$y=[x],\quad x\in\mathbf{R}$$

称为取整函数，它表示：$\forall x\in\mathbf{R}$，所对应的 y 是不超过 x 的最大整数，如$[1.5]=1$，$[-0.5]=-1$，$[2]=2$.它的定义域为 $X=(-\infty,+\infty)$，值域为 $Y=\mathbf{Z}$.其图像呈阶梯状，如图 1-4 所示.

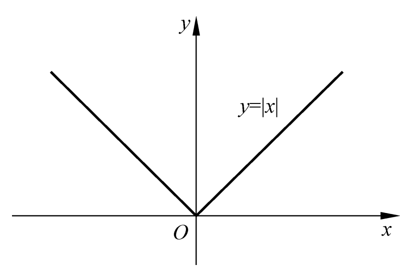

图　1-3

相应地，函数

$$y=x-[x],\quad x\in\mathbf{R},$$

它表示对应的 y 是 x 的小数部分，记为 $y=\{x\}$. 如

$$\{1.5\}=0.5,\quad \{2\}=0,\quad \{-3.1\}=-3.1-(-4)=0.9.$$

它的定义域为 $X=(-\infty,+\infty)$，值域为 $Y=[0,1)$，函数图像呈锯齿形，如图 1-5 所示.

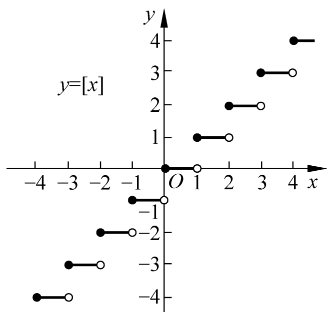

图 1-4

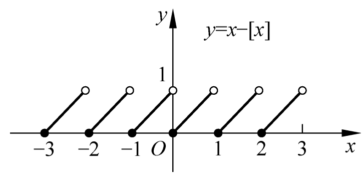

图 1-5

另外，由上述两个函数定义知

$$x-1<[x]\leqslant x<[x]+1,$$
$$0\leqslant\{x\}<1.$$

例 6 并不是对每一个函数都可以画出它的图形. 例如，狄利克雷(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 为有理数},\\ 0, & x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

就无法画出它的图形.

注 1 上述函数都是用几个式子表示的一个函数，通常称为分段函数.

注 2 对用解析式表示的函数，求定义域时，需使解析式有意义，一般要转化为不等式进行求解；如是实际应用问题，则还需结合具体情况加以确定.

例 7 求函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\lg(4-x^2)$ 的定义域.

解 函数 $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ 要求 $x-1>0$，而 $\lg(4-x^2)$ 有意义必须 $4-x^2>0$，即解不等式组

$$\begin{cases}x-1>0,\\ 4-x^2>0,\end{cases}$$

容易求得 $1<x<2$，定义域为 $(1,2)$.

例 8 设函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, & -1\leqslant x<0,\\ x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$ 求函数值 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)-f(0)$，$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)-f(0)$.

解 在求函数值 $f(x)$ 时，要注意 x 位于哪一段，

$$f(0)=0,$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)-f(0)=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2},$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)-f(0)=\left(-\frac{1}{2}-1\right)-0=-\frac{3}{2}.$$

二、函数的几种特性

研究函数是否具有某种性态是对函数进行研究的重要方法，下面主要复习一下函数常见的几种特性——单调性、奇偶性、有界性、周期性，后续还会学习更多特性，如最值性、连续性、可导性、可微性、可积性等，它们是高等数学的主要研究内容.

1. 函数的单调性

定义 2　设函数 $y=f(x)$，$x\in[a,b]$. 如果对任意两点 $x_1,x_2\in[a,b]$，当 $x_1<x_2$ 时，都有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\,(f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调增加（单调减少），$[a,b]$ 称为函数 $f(x)$ 的单调区间. 如果严格不等号成立，则称 $f(x)$ 为严格单调增加（减少）函数，严格单调增加或严格单调减少函数统称为严格单调函数. $[a,b]$ 换为其他区间时，单调性可类似定义.

例 9　证明函数 $y=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 内严格单调增加，在 $(-\infty,0)$ 内严格单调减少.

证　$\forall x_1,x_2\in[0,+\infty)$ 且 $x_1<x_2$，则

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^2-x_1^2=(x_2+x_1)(x_2-x_1),$$

显然有 $x_1+x_2>0$，$x_2-x_1>0$，故 $f(x_2)>f(x_1)$，即函数在 $[0,+\infty)$ 内严格单调增加.

类似可证函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 内严格单调减少.

注 1　证明函数的单调性通常转化为不等式的证明. 单调增加也称为单调上升，单调减少也称为单调下降.

注 2　从这个例题可以看出，同一个函数在某一部分区间内是单调上升的，在另一部分区间内可能是单调下降的，所以函数的单调性与区间有密切关系.

2. 函数的奇偶性

定义 3　设函数 $y=f(x)$，$x\in X$. 若 $\forall x\in X$，有 $-x\in X$，且满足

$$f(-x)=f(x)\,(f(-x)=-f(x)),$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上为偶（奇）函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称，而奇函数的图形关于原点对称.

例 10　狄利克雷函数 $D(x)$ 是偶函数.

证　当 x 为有理数时，$-x$ 也是有理数，因此 $D(-x)=1=D(x)$；当 x 为无理数时，$-x$ 也是无理数，从而 $D(-x)=0=D(x)$. 故 $\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $D(-x)=D(x)$，即 $D(x)$ 是偶函数.

3. 函数的有界性

函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的函数值介于 -1 与 1 之间，而函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(-1,0)\cup(0,1)$ 内的函数值不会介于任何值之间，对任意大的正数 M，当 x 充分靠近 0（不为 0）时，就会有 $\left|\dfrac{1}{x}\right|>M$. 下面将这两种特性加以区分.

定义 4　函数 $y=f(x)$，$x\in X$. 若存在常数 M，使得

$$|f(x)|\leqslant M,\quad x\in X,$$

则称函数 $y=f(x)$在 X 上有界，此时也称 $f(x)$为 X 上的有界函数，M 叫作 $f(x)$在 X 上的一个界.

注 1 有界函数存在无穷多个界，如 $M+1, M+2$，等等.

注 2 不等式$|f(x)|\leqslant M$ 等价于$-M\leqslant f(x)\leqslant M$，或者 $f(x)\geqslant -M$ 且 $f(x)\leqslant M$.

一般地，对于函数 $y=f(x)$，若存在数 B，使得

$$f(x)\leqslant B,\quad x\in X,$$

则称函数 $y=f(x)$在 X 上有上界. 若存在数 A，使得

$$f(x)\geqslant A,\quad x\in X,$$

则称函数 $y=f(x)$在 X 上有下界. 函数有界等价于函数既有上界又有下界.

注 3 函数 $f(x)$的有界性与定义区间有关.

例 11 证明 $f(x)=\dfrac{3x+1}{x^2+4}$在区间$(-\infty,+\infty)$上是有界函数.

证 当$|x|\leqslant 1$ 时，

$$|f(x)|=\left|\frac{3x+1}{x^2+4}\right|\leqslant\frac{3|x|+1}{4}\leqslant 1;$$

当$|x|>1$ 时，

$$|f(x)|=\left|\frac{3x+1}{x^2+4}\right|\leqslant\frac{3|x|+|x|}{x^2+4}=\frac{4|x|}{x^2+4}\leqslant\frac{4|x|}{2\times 2\times|x|}=1.$$

所以有$|f(x)|\leqslant 1$，即 $f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$上是有界函数.

4. 函数的周期性

定义 5 对于函数 $y=f(x)$，若存在不为零的常数 T，使得 $x, x+T\in X$ 时，有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称函数 $f(x)$为周期函数，T 为 $f(x)$的周期.

注 1 若 T 是函数 $y=f(x)$的周期，则 nT 亦为 $f(x)$的周期$(n=\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

注 2 并非每一个周期函数都有最小正周期. 如狄利克雷函数 $D(x)$是周期函数，任何非零有理数都是它的周期，显然它没有最小正周期.

如果函数 $f(x)$有最小正周期，通常将它称为函数 $f(x)$的基本周期，简称为周期.

三、函数的运算

1. 四则运算

设函数 $f(x), g(x)$的定义域分别为 D_f, D_g，设 $D=D_f\cap D_g\neq\varnothing$，则可定义这两个函数的四则运算：

和：$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\quad x\in D;$

差：$(f-g)(x)=f(x)-g(x),\quad x\in D;$

积：$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x),\quad x\in D;$

商：$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)},\quad x\in D$ 且 $g(x)\neq 0.$

2. 逆运算

在匀加速直线运动中，物体初速度为 v_0，加速度为 $a>0$，则在 t 时刻物体的速度为

$$v(t)=v_0+at,$$

它描述了物体的运动速度与时间的关系，其中 v 是因变量，t 是自变量. 反之，当研究物体需要经过多少时间才能达到速度 v 时，可得到新的函数：

$$t=\frac{v-v_0}{a},$$

这时，速度 v 是自变量，而 t 是因变量，它们在函数关系中的地位正好相反，定义域和值域的地位也恰好相反. 另外，对自变量 $v(\geqslant v_0)$ 按新的函数关系求得对应值 t，这时 t 和 v 恰好如原来的函数关系.

定义 6　对于函数 $y=f(x)$，$x\in X$，若对 $\forall y\in f(X)$，都有唯一的一个 $x\in X$ 与之对应，并且满足 $f(x)=y$，则在 $f(X)$ 上定义了一个函数，称这个函数为 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$，$y\in f(X)$.

给定一个函数，求其反函数的运算称为该函数的逆运算.

注 1　由定义可知，$y=f(x)$ 和 $x=f^{-1}(y)$ 互为反函数.

注 2　反函数的实质是给出一个新的对应规律，与表示变量的字母无关，通常用 x 表示自变量，y 表示因变量，所以有时把反函数 $x=f^{-1}(y)$ 记为

$$y=f^{-1}(x),$$

它们表示相同的对应规律. 例如，函数 $y=5x+2$，它的反函数为 $x=\dfrac{y-2}{5}$，将自变量 y 换为 x，因变量 x 换为 y，得到反函数 $y=\dfrac{x-2}{5}$.

注 3　$y=f(x)$ 的图形与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称(读者自行证明).

定理 1　若函数 $y=f(x)$ 在 X 上严格单调增加(减少)，其值域为 Y，则函数 $y=f(x)$ 必存在反函数 $x=f^{-1}(y)$，它在 Y 上也是严格单调增加(减少)的.

证　$\forall y_0\in Y$，由定义知，存在 $x_0\in X$，使 $f(x_0)=y_0$. 下面证明 x_0 是唯一的，否则存在 $x_1\neq x_0$，使 $f(x_1)=y_0$. 若 $x_1>x_0$，由于假设函数 $y=f(x)$ 在 X 上严格单调增加，于是 $f(x_1)>f(x_0)$，这与 $f(x_1)=y_0=f(x_0)$ 矛盾. 同理，当 $x_1<x_0$ 时，也出现矛盾，故只能 $x_1=x_0$. 即证明了 $\forall y\in Y$，X 中有唯一的 x 与之对应，且满足 $f(x)=y$，由定义知反函数 $x=f^{-1}(y)$ 存在.

再证明反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的严格单调性. $\forall y_1,y_2\in Y$ 且 $y_1<y_2$，相应有 $x_1=f^{-1}(y_1)$，$x_2=f^{-1}(y_2)$. 若 $x_1\geqslant x_2$，则由 $y=f(x)$ 的严格单调性知 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，即 $y_1\geqslant y_2$，与假设 $y_1<y_2$ 矛盾.

同理可证 $y=f(x)$ 严格单调减的情形.　□

注　定理中的条件“函数是严格单调的”中“严格”两字不可缺少. 例如，$y=[x]$ 具有单调性，但它不是严格单调函数，不存在反函数.

3. 复合运算

物体在自由落体过程中，在 t 时刻的动能为 $y=\dfrac{1}{2}mv^2(t)$，速度为 $v(t)=gt$. 显然，其动能可由这两个函数组成为 $y=\dfrac{1}{2}m(gt)^2$，其中 y 为因变量，t 为自变量，而 v 是 y 与 t 搭

桥的中间变量.我们称 y 通过 v 成为 t 的复合函数.

在函数复合过程中,出现了一个新的问题.例如,函数 $y=\ln u$ 和 $u=1-x$ 复合而成新的函数

$$y=\ln(1-x).$$

为使函数 $y=\ln u$ 有意义,必须有 $u>0$,其中 u 是自变量.而在函数 $u=1-x$ 中,它是因变量,要使其值域为 $u>0$,必须有 $1-x>0$,即 $x<1$,而对函数 $u=1-x$ 而言,其定义域为 $(-\infty,+\infty)$.现在 x 作为复合函数的自变量,只能 $x<1$.当 $x<1$ 时,通过 $u=1-x$ 求得的 u 落在函数 $y=\ln u$ 的定义域内,于是通过函数 $y=\ln u$ 找到对应的 y,形成新的函数关系.

通过上述分析可以看出,对于复合函数,中间变量只能在它作为第一个函数的自变量的定义域和它作为第二个函数的因变量的值域的公共部分取值,从而也确定了复合函数的定义域.

定义 7 若函数 $y=f(u)$的定义域为 U,值域为 R_1,函数 $u=\varphi(x)$的定义域为 X,值域为 R_2,记 $U^*=U\cap R_2$,$\varphi^{-1}(U^*)=X_1$,则对于每一 $x\in X_1$,通过中间变量 u,相应地得到唯一确定的 y,于是 y 通过中间变量 u 而成为 x 的函数,记为

$$y=f[\varphi(x)],$$

称为由函数 $y=f(u)$和 $u=\varphi(x)$复合而成的复合函数,它的定义域为 X_1.

给定两个函数,求它们的复合函数的运算称为这两个函数的复合运算.

注 复合函数的定义域 $X_1=\varphi^{-1}(U^*)$的确定是其中的一个难点,通常转化为求解不等式得出 $\varphi(x)\in U$ 的 x 的范围.

例 12 求由函数 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=4-x^2$ 构成的复合函数.

解 复合函数为 $y=\sqrt{4-x^2}$,其定义域为满足 $4-x^2\geqslant 0$ 的 x,即

$$-2\leqslant x\leqslant 2.$$

例 13 设 $\varphi(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ x, & x>0\end{cases}$ 及 $\psi(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ -x^2, & x>0,\end{cases}$ 求 $\varphi[\psi(x)]$,$\varphi[\varphi(x)]$和 $\psi[\psi(x)]$.

解 这是一个分段函数求复合函数的问题,要分段进行讨论.

求复合函数 $\varphi[\psi(x)]$,可以把它看成 $y=\varphi(u)$和 $u=\psi(x)$的复合函数,即

$$y=\varphi(u)=\begin{cases}0, & u\leqslant 0,\\ u, & u>0\end{cases} \quad 及 \quad u=\psi(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ -x^2, & x>0.\end{cases}$$

当 $u\leqslant 0$ 时,即 $\psi(x)\leqslant 0$ 对所有 x 都成立,说明没有 x 使 $u>0$,从而

$$y=\varphi[\psi(x)]=0, \quad -\infty<x<+\infty.$$

经过类似讨论可得

$$\varphi[\varphi(x)]=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ x, & x>0\end{cases}=\varphi(x), \quad -\infty<x<+\infty,$$

$$\psi[\psi(x)]=0, \quad -\infty<x<+\infty.$$

四、初等函数

1. 基本初等函数

复杂的函数往往是由一些初等函数构成的. 最常用的初等函数有常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数，这六类函数统称为基本初等函数.

（1）常数函数

$$y=c,$$

其中 c 是常数. 它的图像是过点 $(0,c)$ 且平行于 x 轴的直线，如图 1-6 所示.

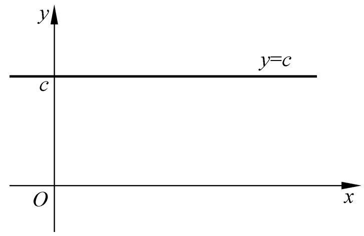

图　1-6

（2）幂函数

$$y=x^{\mu},$$

其中 μ 是任意实数，它的定义域随 μ 值不同而稍有差别. 但无论 μ 是什么数，在区间 $(0,+\infty)$ 内 $y=x^{\mu}$ 总有意义，且曲线都通过点 $(1,1)$. $\mu>0$ 的情形如图 1-7 所示.

（3）指数函数

$$y=a^{x}, \quad a>0, a\neq 1,$$

它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 当 $a>1$ 时，指数函数是严格单调增加的；当 $0<a<1$ 时，它是严格单调减少的. 对任何 x 值，总有 $a^{x}>0$.

指数函数的曲线总过点 $(0,1)$ 且在 x 轴上方. a^{x} 与 a^{-x} 的图形关于 y 轴对称，如图 1-8 所示.

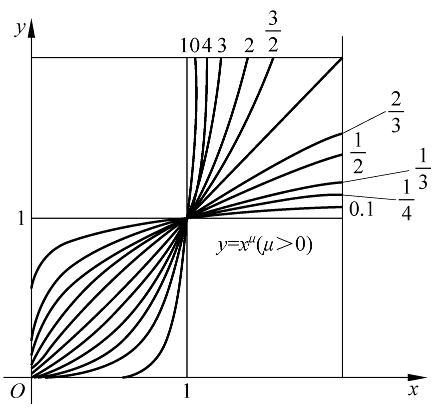

图　1-7

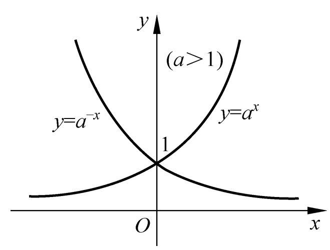

图　1-8

（4）对数函数

$$y=\log_{a}x, \quad a>0, a\neq 1,$$

它与指数函数互为反函数，其定义域为 $(0,+\infty)$. 当 $a>1$ 时，它是严格单调增加的；当 $0<a<1$ 时，它是严格单调减少的.

对数函数曲线总是过点 $(1,0)$ 且在 y 轴的右方，如图 1-9 所示. $\log_{a}x$ 和 $\log_{\frac{1}{a}}x$ 的图形关于 x 轴对称.

(5) 三角函数

$$y=\sin x,\quad y=\cos x,\quad y=\tan x,$$
$$y=\cot x,\quad y=\sec x,\quad y=\csc x.$$

其中：正切函数 $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$，余切函数 $\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$，正割函数 $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$，余割函数 $\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.

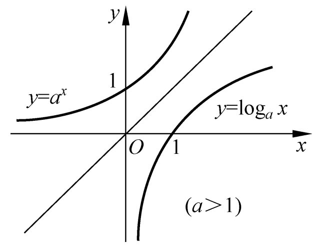

图 1-9

三角函数的性质与基本公式在中学教材中已有详细介绍，此处不再重复. $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 的图形如图 1-10 所示.

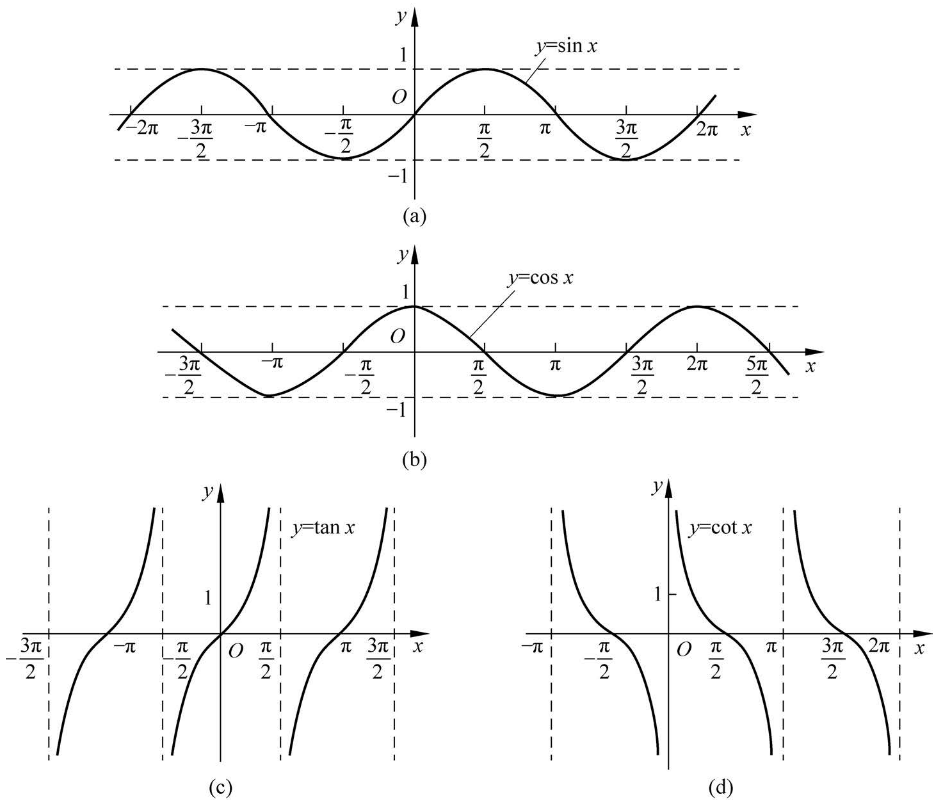

图 1-10

(6) 反三角函数

为保证三角函数的反函数存在，根据定理 1，一般在三角函数的主值区间上进行讨论：$y=\sin x$ 在主值区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数称为反正弦函数，记为 $\arcsin x$；$y=\cos x$ 在主值区间 $[0,\pi]$ 上的反函数称为反余弦函数，记为 $\arccos x$；$y=\tan x$ 在主值区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上的反函数称为反正切函数，记为 $\arctan x$；$y=\cot x$ 在主值区间 $(0,\pi)$ 上的反函数称为反余切函数，记为 $\operatorname{arccot} x$. 它们的图形如图 1-11 所示.