

## 第3章

# 控制系统的时域分析法



### 内容提要

本章讲述线性定常系统的时域分析方法。首先介绍线性定常系统稳定的充分必要条件、劳斯稳定判据及应用；然后介绍典型输入信号和控制系统时域性能指标的定义,在此基础上,讲述一阶系统、二阶系统和高阶系统的时域数学模型及动态性能分析方法,对误差、稳态误差、系统的型别给出定义,并讨论在给定输入和扰动输入作用下的稳态误差,以及改善稳态精度的方法;最后,介绍应用 MATLAB 进行控制系统的时域分析。

系统的数学模型确定后,可采用几种不同的方法分析控制系统的动态性能和稳态性能。在经典控制理论中,常用时域分析法、根轨迹法或频率特性法来分析并综合线性定常系统的性能。不同的方法有不同的特点和适用范围,但比较而言,时域分析法是一种直接在时间域中对系统进行分析的方法,具有直观、准确的优点,并且可以提供系统时间响应的全部信息。

## 3.1 稳定性和代数稳定判据

稳定是控制系统的重要性能,也是系统能够正常运行的首要条件。控制系统在实际运行中,总会受到外界和内部一些因素的扰动,如负载变化、电压波动、系统参数的变化、环境条件的改变等。如果系统不稳定,就会在任何微小的扰动作用下偏离平衡状态,并随着时间的推移而发散,当扰动消失后也不能恢复到原来的状态。所以分析系统的稳定性,并提出保证系统稳定的条件,是设计控制系统的基本任务之一。本节主要研究线性定常系统稳定的概念、控制系统稳定的充要条件和稳定性的代数判定方法。

### 3.1.1 稳定的概念

任何控制系统在扰动作用下都会偏离平衡状态,产生初始偏差。所谓稳定性就是指系统当扰动作用消失以后,由初始偏差状态恢复到平衡状态的性能。若系统能恢复平衡状态,就称系统是稳定的;若系统在扰动作用消失以后不能恢复平衡状态,且偏差越来越大,则称系统是不稳定的。

为了建立稳定的概念,首先通过一个直观的例子来说明稳定的含义。

图 3.1 所示为一个单摆的示意图,其中  $o$  为支点。设在外界扰动作用下,摆由原平衡点

$a$  偏移到新的位置  $b$ 。当外力去掉后,摆在重力作用下,由位置  $b$  运动到位置  $a$ 。在位置  $a$ ,摆因为惯性作用继续向前摆动,最后到达最高点  $c$ 。此后,摆将围绕点  $a$  反复摆动,经过一定时间,当摆因受介质阻碍而耗尽所有的能量后,将停留在原平衡点  $a$ ,故称  $a$  点为稳定平衡点。反之,若单摆处于另一个平衡点  $d$ ,则一旦受到外界扰动力的作用偏离了原平衡位置后,即使外界扰动力消失,无论经过多长时间,单摆也不可能再回到原平衡点  $d$ ,这样的平衡点称为不稳定平衡点。

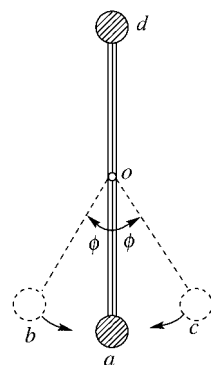


图 3.1 单摆的平衡

从上面关于稳定性的直观示例,可初步建立起有关稳定性的概念。现在给出关于控制系统稳定性的定义:如果控制系统在初始条件影响下,其响应过程随时间的推移而逐渐衰减并趋于零,则这样的系统具有渐近稳定性,简称具有稳定性。反之,在初始条件影响下,若控制系统的响应过程随时间推移而发散,则称这样的系统具有不稳定性。

### 3.1.2 线性定常系统稳定的充分必要条件

上述稳定性定义表明,线性系统的稳定性仅取决于系统自身的固有特性,而与外界条件无关。因此,设线性系统在初始条件为零时,作用一个理想单位脉冲  $\delta(t)$ ,这时系统的输出增量为脉冲响应  $c(t)$ 。这相当于系统在扰动信号作用下,输出信号偏离原平衡点的问题。若  $t \rightarrow \infty$  时,脉冲响应为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 0 \tag{3.1}$$

即输出增量收敛于原平衡点,则线性系统是稳定的。

设闭环传递函数为一个真有理分式:

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_g \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)}$$

系统处于全零初始状态。系统对外作用的响应  $c(t)$  的拉普拉斯变换为

$$C(s) = \Phi(s)R(s)$$

在现在的情况下,  $R(s) = 1$ , 则

$$C(s) = \Phi(s) = \frac{K_g \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)}$$

$$c(t) = L^{-1}[\Phi(s)] = L^{-1} \left[ \frac{K_g \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} \right] = \sum_{j=1}^n a_j e^{-p_j t} \tag{3.2}$$

式中,  $a_j$  称为  $s = -p_j$  极点处的留数。根据稳定性的定义,如果  $c(t)$  在  $t \rightarrow \infty$  时趋于 0, 则系统稳

定;反之,若系统是稳定的,则  $c(t)$  在  $t \rightarrow \infty$  时应趋于 0。从式(3.2)易知,  $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 0$  的充分必要条件是  $-p_j$  具有负实部。

综上所述,线性系统稳定的充要条件是:系统特征方程的根(即系统的闭环极点)均为负实部和(或)具有负实部的共轭复数(也就是说,系统的全部闭环极点都在复数平面虚轴的左半部)。

### 3.1.3 劳斯稳定判据

由线性系统稳定的充要条件可知,对于控制系统稳定性的判别可以根据闭环系统特征方程的根的分布情况,对于一阶、二阶系统可以直接通过求解特征方程来判别,但是对于三阶或三阶以上代数方程式的求根则是比较困难的。劳斯(E. J. Routh)于 1877 年提出了由特征方程式的系数直接利用代数方法判别特征方程根的分布位置,以此判别系统是否稳定。这就是劳斯稳定判据。

应用劳斯稳定判据判定系统稳定性的步骤如下:

(1) 写出线性系统的特征方程:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (3.3)$$

式中的系数为实数。设  $a_0 \neq 0$ , 即排除存在零根的情况。

(2) 设方程式(3.3)中所有系数都存在,并且均大于 0,这是系统稳定的必要条件。一个具有实系数的  $s$  多项式总可以分解成一次和二次因子,即  $(s+a)$  和  $(s^2+bs+c)$ , 式中  $a$ 、 $b$ 、 $c$  都是实数。一次因子给出的是实根,而二次因子给出的是复根。只有当  $b$  和  $c$  都是正值时,因子  $(s^2+bs+c)$  才能给出负实部的根。因子中的常数  $a$ 、 $b$ 、 $c$  都是正值是所有的根都具有负实部的必要条件。任意个只包含正系数的一次和二次因子的乘积,必然也是一个具有正系数的多项式。因此,若方程式(3.3)缺项或具有负的系数,系统便是不稳定的。

(3) 如果系数都是正值,按下面的方式编制劳斯计算表。

劳斯表的前两行由特征方程式的系数组成:第一行由第 1, 3, 5, ... 项系数组成,第二行由第 2, 4, 6, ... 项系数组成。以下各行系数由下列公式计算:

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$b_3 = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

⋮

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - b_2 a_{n-1}}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - b_3 a_{n-1}}{b_1}$$

$$c_3 = \frac{b_1 a_{n-7} - b_4 a_{n-1}}{b_1}$$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & & \vdots & & \\
 s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
 s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
 s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\
 s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\
 s^{n-4} & d_1 & d_2 & d_3 & \cdots \\
 \vdots & \vdots & & & \\
 s^2 & e_1 & e_2 & & \\
 s^1 & f_1 & & & \\
 s^0 & g_1 & & & 
 \end{array}$$

$n$  阶系统的劳斯表共有  $n+1$  行, 以竖线左边的  $s$  的幂次为行号, 在劳斯表的第一行旁边注明  $s^n$ , 第二行旁边注明  $s^{n-1}$ , 以此类推。上述计算一直进行到第  $n+1$  行, 即旁边注有  $s^0$  的行为止。劳斯表排列成倒三角形。在展开劳斯阵列的过程中, 可以用一个正整数去除或乘某一整行, 这时不会改变所得出的结论。

劳斯稳定判据指出: 方程式(3.3)中, 实部为正数的根的个数等于劳斯表的第一列元素符号改变的次数。因此, 系统稳定的充分必要条件是: 特征方程的全部系数都是正数, 并且劳斯表第一列元素都是正数。

### 3.1.4 劳斯稳定判据的应用

#### 1. 判定控制系统的稳定性

**例 3.1** 已知三阶系统的特征方程为  $a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0$ , 试确定系统稳定的充要条件。

**解** 列出劳斯表为

$$\begin{array}{c|cc}
 s^3 & a_3 & a_1 \\
 s^2 & a_2 & a_0 \\
 s^1 & \frac{a_1a_2 - a_3a_0}{a_2} & \\
 s^0 & a_0 & 
 \end{array}$$

根据劳斯稳定判据, 三阶系统稳定的充分必要条件为  $a_3, a_2, a_1, a_0$  均大于 0 及  $(a_1a_2 - a_3a_0)$  大于 0。

**例 3.2** 已知线性系统的特征方程为  $s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$ , 试用劳斯稳定判据判别该系统的稳定性。

**解** 该系统的劳斯表为

$$\begin{array}{c|ccc}
 s^4 & 1 & 3 & 5 \\
 s^3 & 2 & 4 & 0 \\
 s^2 & 1 & 5 & 0 \\
 s^1 & -6 & 0 & \\
 s^0 & 5 & & 
 \end{array}$$

由于劳斯表的第一列系数有两次变号, 故该系统是不稳定的, 且有两个正实部根。

在编制劳斯表时,可能遇到下面两种特殊情况。

(1) 劳斯表第一列系数中出现 0,但零元素所在行存在非零元素。可以用一个很小的正数  $\epsilon$  来代替该零元素,然后继续计算其他元素。

**例 3.3** 试判别某系统的稳定性,其特征方程为

$$s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 6s + 4 = 0$$

**解** 列出劳斯表为

$s^4$	1	3	4
$s^3$	2	6	0
$s^2$	$0(\epsilon)$	4	0
$s^1$	$(6\epsilon - 8)/\epsilon$	0	
$s^0$	4		

由于  $\epsilon$  是很小的正数,所以  $(6\epsilon - 8)/\epsilon$  为负数,则劳斯表第一列元素符号改变了两次。因此,系统不稳定,特征方程有两个正实部根。

**例 3.4** 已知线性系统的特征方程为  $s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 3s + 2 = 0$ ,试判别该系统的稳定性。

**解** 列出劳斯表为

$s^4$	1	3	2
$s^3$	3	3	0
$s^2$	2	2	0
$s^1$	$0(\epsilon)$		
$s^0$	2		

劳斯表第一列无符号改变,但第一列有 0 出现,有一对纯虚根,因此,系统不稳定(临界稳定)。

(2) 某行的各系数全为 0。这种情况下,劳斯表的计算工作也由于出现无穷大而无法继续进行。为了解决这个问题,可以利用各元为 0 的那一行的上一行各元作为系数,构成一个辅助方程,再用辅助方程求导一次后的系数来代替各元为 0 的那一行。辅助方程的解就是原特征方程的部分特征根,而且这部分特征根对称于原点,可能的情况为共轭虚根、符号相反的实根或者实部相异、虚部相反的复数根。因此系统是不稳定的。

**例 3.5** 试判别某系统的稳定性。设其特征方程为

$$s^6 + s^5 + 5s^4 + 3s^3 + 8s^2 + 2s + 4 = 0$$

**解** 列出劳斯表为

$s^6$	1	5	8	4	
$s^5$	1	3	2	0	
$s^4$	2	6	4	$0 \rightarrow 2s^4 + 6s^2 + 4 = 0$ (辅助方程)	
$s^3$	$0(8)$	$0(12)$	$0(0)$	将辅助方程求导一次,得 $8s^3 + 12s = 0$	
$s^2$	3	4	0		
$s^1$	$4/3$	0			
$s^0$	4				

求解辅助方程  $2s^4 + 6s^2 + 4 = 0$  得

$$s_{1,2} = \pm j, \quad s_{3,4} = \pm j\sqrt{2}$$

故该系统不稳定,有两对共轭虚根。

2. 分析系统参数变化对稳定性的影响

劳斯稳定判据可确定系统个别参数变化对稳定性的影响,以及在系统稳定的前提下,这些参数允许的取值范围。使系统稳定的开环放大倍数的临界值称为临界放大倍数,用  $K_p$  表示。

**例 3.6** 如图 3.2 所示系统,试确定使系统稳定的开环放大倍数取值范围。

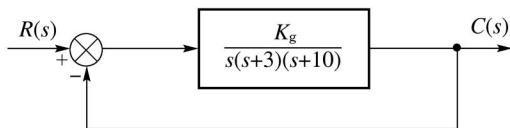


图 3.2 系统结构图

**解** 系统的传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_g}{s^3 + 13s^2 + 30s + K_g}$$

闭环系统的特征方程为

$$s^3 + 13s^2 + 30s + K_g = 0$$

根据劳斯稳定判据,系统稳定的充分必要条件是

$$\begin{cases} K_g > 0 \\ 13 \times 30 - 1 \times K_g > 0 \end{cases}$$

所以  $K_g$  的取值范围为  $0 < K_g < 390$ , 由于系统的开环放大倍数  $K = \frac{K_g}{30}$ ,  $K$  的取值范围为  $0 < K < 13$ , 故系统的开环临界放大倍数  $K_p$  为 13。

**例 3.7** 焊接头位置控制系统如图 3.3 所示,其中控制器传递函数为  $G_1(s) = \frac{K(s+a)}{(s+1)}$ , 焊接

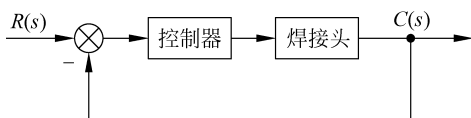


图 3.3 例 3.7 图

头的传递函数为  $G_2(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+3)}$ , 试确定参数  $K$  和  $a$  的范围,以保证系统稳定。

**解** 闭环系统的特征方程为

$$1 + G(s) = 1 + G_1(s)G_2(s) = 1 + \frac{K(s+a)}{s(s+1)(s+2)(s+3)} = 0$$

即

$$s^4 + 6s^3 + 11s^2 + (K+6)s + Ka = 0$$

要保证系统稳定,则特征方程各项系数要大于 0,即  $K > 0, a > 0$

建立劳斯判定表,有

$$\begin{array}{c|ccc}
 s^4 & 1 & 11 & Ka \\
 s^3 & 6 & K+6 & 0 \\
 s^2 & b_1 & Ka & 0 \\
 s^1 & c_1 & & \\
 s^0 & Ka & & 
 \end{array}$$

其中,

$$b_1 = \frac{60-K}{6}, \quad c_1 = \frac{b_1(K+6) - 6Ka}{b_1}$$

要保证系统稳定, 劳斯表第一列各元素必须是正数, 即

$$60 - K > 0$$

$$\frac{60-K}{6} \cdot (K+6) - 6Ka > 0$$

综上, 可确定  $K$  和  $a$  的取值范围:

$$\begin{cases} 0 < K < 60 \\ 0 < a < \frac{(60-K)(K+6)}{36K} \end{cases}$$

如果令  $K=50$ , 则  $0 < a < 0.311$ 。

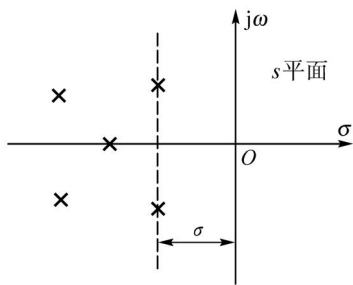


图 3.4 系统的稳定裕量  $\sigma$

### 3. 确定系统的相对稳定性

前面利用稳定判据判别系统是否稳定, 只回答了系统绝对稳定性问题。这对于许多实际情况来说, 是不全面的。在控制系统的分析、设计中, 常常应用相对稳定性的概念, 以说明系统的稳定程度。由于一个稳定系统的特征方程的根都落在复平面虚轴的左半部, 而虚轴是系统的临界稳定边界, 因此, 以特征方程最靠近虚轴的根和虚轴的距离  $\sigma$  表示系统的相对稳定性或稳定裕量, 如图 3.4 所示。一般来说,  $\sigma$  越大则系统的稳定度越高。

利用劳斯判据可以确定系统的稳定程度。具体做法是: 以  $s = z - \sigma$  代入原系统的特征方程, 得到以  $z$  为变量的方程, 然后, 应用劳斯判据于新的方程。若满足稳定的充要条件, 则该系统的特征根都落在  $s$  平面中  $s = -\sigma$  直线的左半部分, 即具有  $\sigma$  以上的稳定裕量。

**例 3.8** 对于例 3.6 系统, 若要使系统具有  $\sigma=1$  以上的稳定裕量, 试确定  $K$  的取值范围。

**解** 进行坐标变换, 将  $s = z - 1$  代入原系统的特征方程, 得

$$(z-1)^3 + 13(z-1)^2 + 30(z-1) + K_g = 0$$

整理后得

$$z^3 + 10z^2 + 7z + (K_g - 18) = 0$$

根据劳斯判据, 稳定的充要条件是

$$\begin{cases} K_g - 18 > 0 \\ 10 \times 7 - (K_g - 18) > 0 \end{cases}$$

即

$$18 < K_g < 88$$

由于系统的开环放大倍数  $K = \frac{K_g}{30}$ , 故  $K$  的取值范围为  $0.6 < K < 2.93$ 。

4. 结构不稳定系统及其改进

仅仅通过调整参数无法稳定的系统, 称为结构不稳定系统。不稳定的系统是不能够工作的, 必须从结构上对系统进行改造, 使系统满足稳定的条件。

图 3.5 所示系统就是一个结构不稳定系统。该系统的开环传递函数为

$$G_K(s) = \frac{K_1 K_m K_2}{s^2 (T_m s + 1)}$$

令  $K = K_1 K_m K_2$ , 系统的特征方程为

$$T_m s^3 + s^2 + K = 0$$

由于特征方程有缺项(缺  $s^1$  项), 故该系统是不稳定的, 并且无论怎样改变  $K$  和  $T_m$  的数值, 都不能使系统稳定。这是一个结构不稳定系统, 必须改变系统的结构才可能使之稳定。

通常, 单位负反馈系统若其前向通路包含有两个或两个以上的积分环节, 便构成一个结构不稳定的系统。

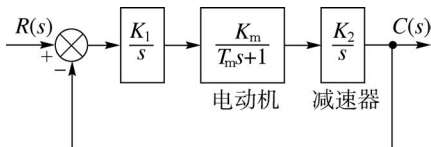


图 3.5 结构不稳定系统

消除结构不稳定常采用以下两种方法: 一种是设法改变积分环节的性质; 另一种是引入比例-微分控制, 以便填补特征方程的缺项。

(1) 改变积分环节的性质。

用反馈环节  $K_H$  包围积分环节即可改变其积分性质。如图 3.6(a) 所示, 被包围后的小闭环系统的传递函数为

$$\frac{Y_1(s)}{X_1(s)} = \frac{K_1}{s + K_1 K_H}$$

可见, 积分环节已被改变成惯性环节。

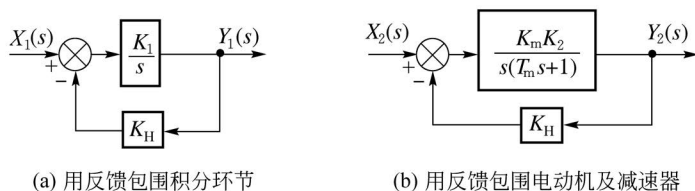


图 3.6 改变积分环节的性质

用反馈包围电动机及减速器, 如图 3.6(b) 所示, 被包围后小闭环系统的传递函数为

$$\frac{Y_2}{X_2} = \frac{K_m K_2}{s(T_m s + 1) + K_m K_2 K_H} = \frac{K_m K_2}{T_m s^2 + s + K_m K_2 K_H}$$

这样, 电动机及减速器中的积分性质也被改变了。

若将图 3.5 所示的结构不稳定系统的积分环节  $\frac{K_1}{s}$  用反馈环节  $K_H$  包围, 系统的特征方程变为

$$T_m s^3 + (1 + K_1 K_H T_m) s^2 + K_1 K_H s + K_1 K_m K_2 = 0$$

特征方程不再缺项,只要适当选择参数,便可以使系统稳定。

需要指出,通过改变积分环节性质的方法可以改善系统的稳定性,但改变了系统的型别,降低了系统的静态性能。关于这个问题,在 3.6 节会有进一步的论述。

(2) 引入比例-微分环节。

若在图 3.5 所示的结构不稳定系统的前向通路中引入比例-微分环节,如图 3.7 所示。

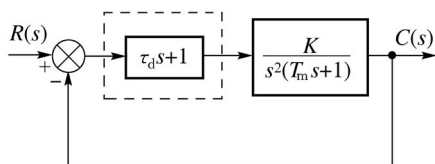


图 3.7 引入比例-微分环节

系统的特征方程为

$$T_m s^3 + s^2 + K\tau_d s + K = 0$$

根据劳斯稳定判据,该系统稳定的充要条件是

$$T_m > 0, \quad K > 0, \quad \tau_d > T_m$$

可见,引入比例-微分环节,适当选择参数便可以使系统稳定。

## 3.2 典型输入信号和时域性能指标

控制系统性能的评价指标分为动态性能指标和稳态性能指标两类。为了求解系统的时间响应,必须了解输入信号(即外作用)的解析表达式。然而,在一般情况下,控制系统的外加输入信号具有随机性而无法预先确定,因而在分析和设计控制系统时,需要有一个对控制系统的性能进行比较的基准。这个基准就是系统对预先规定的具有典型意义的试验信号,即典型输入信号的响应。总之,为评价控制系统的性能,需要选择若干典型输入信号。

### 3.2.1 典型输入信号

为了便于对系统进行分析 and 实验研究,同时也为了方便对各种控制系统的性能进行比较,就要有一个共同的基础,即需要规定一些具有代表性的特殊输入信号(或称试验信号、基本信号),然后比较各种系统对这些特殊输入信号(也称为典型输入信号)的响应。

选取的典型输入信号应满足如下条件:首先,输入的形式应反映系统在工作中所响应的实际输入;其次,输入信号在形式上应尽可能地简单,以便于对系统响应的分析;最后,应选取能使系统工作在最不利情况下的输入信号作为典型输入信号。通常选用的典型信号有以下 5 种时间函数。

#### 1. 阶跃函数

阶跃函数信号的数学描述定义为

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ A, & t \geq 0 \end{cases}$$

称  $A$  为阶跃函数的阶跃值,如图 3.8 所示。当  $A=1$  时,称为单位阶跃函数,记为  $1(t)$ 。给

定输入电压接通、指令的突然转换、负荷的突变等,均可视为阶跃输入。

阶跃函数可以表示为

$$r(t) = A \cdot 1(t)$$

阶跃函数的拉普拉斯变换为

$$L[A \cdot 1(t)] = \frac{A}{s}$$

## 2. 斜坡函数

斜坡函数(或称速度阶跃函数)信号的数学描述定义为

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ Bt, & t \geq 0 \end{cases}$$

如图 3.9 所示。斜坡函数的微分为阶跃函数,表示斜坡函数的速度变化,故称  $B$  为斜坡函数的速度阶跃值。当  $B=1$  时,称为单位斜坡函数。

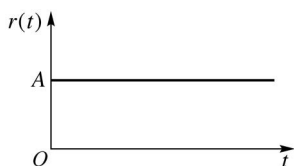


图 3.8 阶跃函数

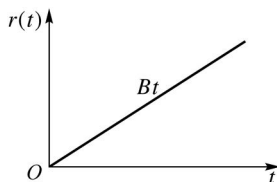


图 3.9 斜坡函数

斜坡函数可以表示为

$$r(t) = Bt \cdot 1(t)$$

斜坡函数的拉普拉斯变换为

$$L[Bt \cdot 1(t)] = \frac{B}{s^2}$$

## 3. 抛物线函数

抛物线函数(或称加速度函数)信号的数学描述定义为

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}Ct^2, & t \geq 0 \end{cases}$$

如图 3.10 所示。抛物线函数的一次微分为斜坡函数,二次微分为阶跃函数。二次微分表示抛物线函数的加速度变化,故称  $C$  为加速度阶跃值。当  $C=1$  时,称为单位抛物线函数。

抛物线函数可以表示为

$$r(t) = \frac{1}{2}Ct^2 \cdot 1(t)$$

抛物线函数的拉普拉斯变换为

$$L\left[\frac{1}{2}Ct^2 \cdot 1(t)\right] = \frac{C}{s^3}$$

## 4. 脉冲函数

脉冲函数的数学描述定义为

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \text{ 或 } t > h \\ \frac{A}{h}, & 0 \leq t \leq h \end{cases}$$

如图 3.11 所示,其中脉冲宽度为  $h$ ,脉冲面积等于  $A$ 。若对脉冲的宽度  $h$  取趋于零的极限,则有

$$\begin{cases} r(t) \rightarrow \infty, & t \rightarrow 0 \\ r(t) = 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

及

$$\int_{-\infty}^{+\infty} r(t) dt = A$$

当  $A=1(h \rightarrow 0)$  时,称此脉冲函数为理想单位脉冲函数,记为  $\delta(t)$ 。

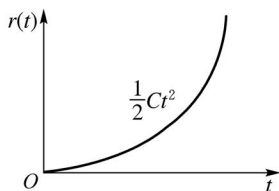


图 3.10 抛物线函数

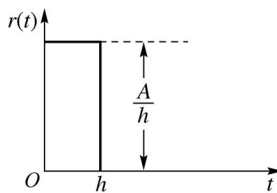


图 3.11 脉冲函数

理想单位脉冲函数的拉普拉斯变换为

$$L[\delta(t)] = 1$$

理想单位脉冲函数  $\delta(t)$  在现实中是不存在的,只有数学上的意义,但却是一种重要的输入信号。脉冲电压信号、冲击力、阵风等都可近似为脉冲作用。

### 5. 正弦函数

正弦函数也是常用的典型输入信号之一。

正弦函数(见图 3.12)的数学描述定义为

$$r(t) = A \sin \omega t$$

式中,  $A$  为振幅;  $\omega$  为角频率。

正弦函数的拉普拉斯变换为

$$L[A \sin \omega t] = \frac{A \omega}{s^2 + \omega^2}$$

海浪对舰艇的扰动力、伺服振动台的输入指令、电源及机械振动的噪声等,均可近似正弦作用。

由于上述函数都是简单的时间函数,因此应用这些函数作为典型输入信号,可以很容易地对控制系统进行分析和试验研究。

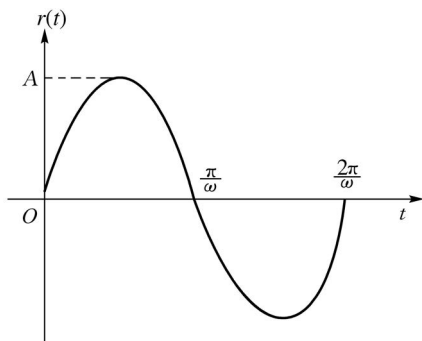


图 3.12 正弦函数

### 3.2.2 动态过程与稳态过程

在典型输入信号作用下,任何一个控制系统的时间响应都由动态过程和稳态过程两部分组成。

### 1. 动态过程

动态过程又称为过渡过程或瞬态过程,是指系统在典型输入信号作用下,系统输出量从初始状态到接近最终状态的响应过程。由于实际控制系统具有惯性、摩擦以及其他一些原因,系统输出量不可能完全复现输入量的变化。根据系统结构和参数选择情况,动态过程表现为衰减、发散或等幅振荡形式。显然,一个可以实际运行的控制系统,其动态过程必须是衰减的,换句话说,系统必须是稳定的。动态过程除提供系统稳定性的信息外,还可以提供响应速度及阻尼情况等信息,这些信息用动态性能描述。

### 2. 稳态过程

稳态过程是系统在典型输入信号作用下,当时间  $t$  趋于无穷时,系统输出量的表现方式。稳态过程又称稳态响应,表征系统输出量最终复现输入量的程度,提供系统有关稳态精度的信息,用稳态误差来描述。

由此可见,控制系统在典型输入信号作用下的性能指标,通常由动态性能和稳态性能两部分组成。

## 3.2.3 时域性能指标

稳定是控制系统能够运行的首要条件,因此只有当动态过程收敛时,研究系统的动态性能才有意义。

### 1. 动态性能指标

一般认为,阶跃输入对系统来说是最严峻的工作状态。如果系统在阶跃函数作用下的动态性能满足要求,那么系统在其他形式的函数作用下,其动态性能也是令人满意的。所以通常在阶跃函数作用下,测定或计算系统的动态性能。

描述稳定系统在单位阶跃函数作用下,动态过程随  $t$  衰减的变化状态的指标,称为动态性能指标。为了便于分析和比较,假定系统在单位阶跃输入信号作用前处于静止状态,而且输出量及其各阶导数均等于 0。对于大多数控制系统来说,这种假设是符合实际情况的。对于图 3.13 所示单位阶跃响应  $c(t)$ ,其动态性能指标通常如下。

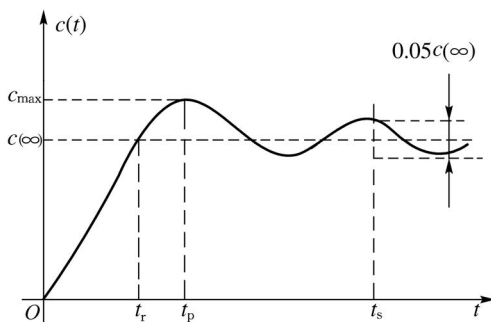


图 3.13 单位阶跃响应曲线

(1) 上升时间  $t_r$ : 指响应曲线从 0 至第一次到达稳态值所需要的时间。有些情况下,指输出响应由稳态值的 10% 上升到 90% 所需的时间。

(2) 峰值时间  $t_p$ : 指响应曲线从 0 至第一个峰值所需要的时间。

(3) 调节时间  $t_s$ : 指响应曲线从 0 到达且以后不再超过稳态值的  $\pm 5\%$  或  $\pm 2\%$  误差范

围所需的最小时间。调节时间又称为过渡过程时间。

(4) 超调量  $\sigma\%$ : 指在系统响应过程中, 输出量的最大值超过稳态值的百分比, 即

$$\sigma\% = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\%$$

式中,  $c(\infty)$  为  $t \rightarrow \infty$  时的输出值。

(5) 振荡次数  $N$ : 在调节时间内,  $c(t)$  偏离  $c(\infty)$  的振荡次数。

上述各种性能指标中,  $t_r$ 、 $t_p$ 、 $t_s$  是阶跃响应过程的快速性指标,  $\sigma\%$ 、 $N$  是时间响应的平稳性指标。

## 2. 稳态性能指标

稳态误差  $e_{ss}$  是描述系统稳态性能的一种性能指标, 当时间  $t$  趋于无穷时, 系统单位阶跃响应的稳态值与输入量  $1(t)$  之差, 即

$$e_{ss} = 1 - c(\infty)$$

稳态误差是系统控制精度或抗干扰能力的一种度量。

具有单调上升的阶跃响应曲线如图 3.14 所示, 由于响应过程不出现超调 [ $c(\infty)$  是整个响应过程的最大值], 一般只取调节时间  $t_s$  作为动态性能指标。

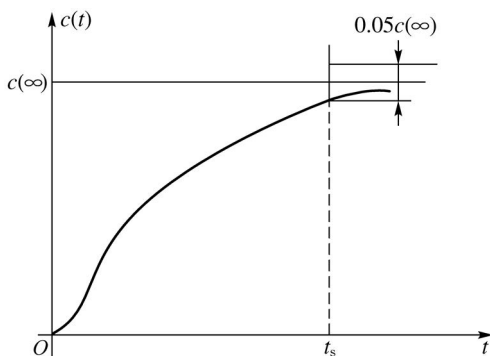


图 3.14 单调变化的阶跃响应曲线

## 3.3 一阶系统的动态性能

凡是由一阶微分方程描述的系统称为一阶系统。在工程实践中, 一阶系统的应用广泛。一些控制元、部件及简单的系统, 如  $RC$  网络、发电机励磁控制系统、空气加热器和液压控制系统等, 都可视为一阶系统。有些高阶系统的特性, 常可用一阶系统的特性来近似表征。

### 3.3.1 一阶系统的时域数学模型

一阶系统的时域微分方程为

$$T \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t) \quad (3.4)$$

式中,  $c(t)$  和  $r(t)$  分别为系统的输出信号和输入信号;  $T$  为时间常数, 具有时间“秒”的量纲, 此外时间常数  $T$  也是表征系统惯性的一个主要参数, 所以一阶系统也称为惯性环节。

由式(3.4)在初始条件为零时两边取拉普拉斯变换,可得其闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1} \quad (3.5)$$

一阶系统的结构图如图 3.15 所示。

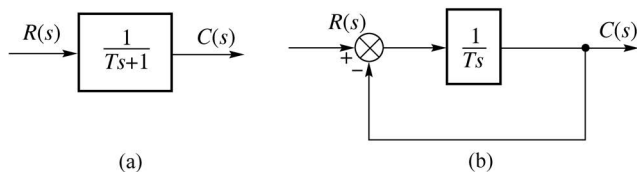


图 3.15 一阶系统的结构图

下面分析一阶系统在典型输入信号作用下的响应。设系统的初始工作条件为零。

### 1. 单位阶跃响应

输入  $r(t) = 1(t)$ , 即  $R(s) = \frac{1}{s}$  时, 系统输出量的拉普拉斯变换式为

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{1}{Ts + 1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}} \quad (3.6)$$

对上式两边求拉普拉斯反变换, 可得输出量的时域表达式:

$$c(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}, \quad t \geq 0 \quad (3.7)$$

式(3.7)表明, 响应由两部分组成: 一是与时间  $t$  无关的定值“1”, 称为稳态分量; 二是与时间  $t$  有关的指数项  $e^{-\frac{t}{T}}$ , 称为暂态(或动态、瞬态)分量。当  $t \rightarrow \infty$  时, 暂态分量衰减到零, 输出量等于输入量, 没有稳态误差( $e_{ss} = 0$ )。响应曲线如图 3.16 所示。

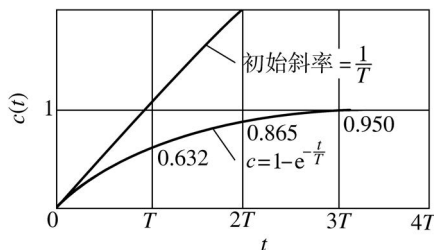


图 3.16 一阶系统的单位阶跃响应曲线

由图 3.16 所示的曲线可以看出, 一阶系统的单位阶跃响应曲线是一条由 0 开始, 按指数规律上升并最终趋于 1 的曲线。响应曲线具有非振荡特征, 为非周期响应。

响应具有两个重要特征。

(1) 时间常数  $T$  是表征系统响应特性的唯一参数, 它与输出值有以下确定的对应关系:

$$\begin{aligned} t = 0, & \quad c(0) = 1 - e^0 = 0 \\ t = T, & \quad c(T) = 1 - e^{-1} = 0.632 \\ t = 2T, & \quad c(2T) = 1 - e^{-2} = 0.865 \\ t = 3T, & \quad c(3T) = 1 - e^{-3} = 0.950 \\ t = 4T, & \quad c(4T) = 1 - e^{-4} = 0.982 \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$t \rightarrow \infty, \quad c(\infty) = 1$$

(2) 响应曲线的初始斜率等于  $1/T$ 。

$$\left. \frac{dc(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \Big|_{t=0} = \frac{1}{T}$$

上式表明,在  $t=0$  时,响应曲线的切线斜率为  $1/T$ 。其物理意义是,一阶系统的单位阶跃响应如果以初始速度等速上升至稳态值 1 时,所需要的时间恰好为  $T$ 。这一特点为用实验方法求取系统的时间常数  $T$  提供了依据。

根据动态性能指标定义,可知一阶系统的阶跃响应没有超调量  $\sigma\%$  和峰值时间  $t_p$ ,其主要动态性能指标是调节时间  $t_s$ ,表征系统暂态过程进行的快慢。 $T$  越小,调节时间  $t_s$  越小,响应过程的快速性也越好。 $t_s$  的取值为

$$t_s = 3T \text{ (对应 } \Delta = 5\% \text{ 误差带)} \quad (3.8)$$

$$t_s = 4T \text{ (对应 } \Delta = 2\% \text{ 误差带)} \quad (3.9)$$

**例 3.9** 一阶系统结构图如图 3.17 所示,试求该系统单位阶跃响应的调节时间  $t_s$ 。若要求调节时间  $t_s \leq 0.1\text{s}$ ,试确定系统的反馈系数的取值。

**解** 首先由系统结构图求得闭环传递函数

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{100}{s}}{1 + 0.1 \times \frac{100}{s}} = \frac{10}{0.1s + 1}$$

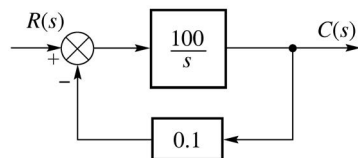


图 3.17 一阶系统的结构图

由闭环传递函数得到时间常数

$$T = 0.1\text{s}$$

由式(3.8)得到调节时间

$$t_s = 3T = 0.3\text{s} \text{ (取 } \Delta = 5\% \text{ 误差带)}$$

其次,设满足  $t_s \leq 0.1\text{s}$  的反馈系数为  $\mu$  ( $\mu > 0$ ),同样由系统结构图求得闭环传递函数

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{100}{s}}{1 + \frac{100}{s}\mu} = \frac{\frac{1}{\mu}}{\frac{0.01}{\mu}s + 1}$$

由上述闭环传递函数得到时间常数

$$T = \frac{0.01}{\mu}\text{s}$$

则有

$$t_s = 3T = \frac{0.03}{\mu} \leq 0.1\text{s}$$

所以

$$\mu \geq 0.3$$

## 2. 单位斜坡响应

输入  $r(t) = t \cdot 1(t)$ , 即  $R(s) = \frac{1}{s^2}$  时,系统输出量的拉普拉斯变换式为

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{1}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T}{s + \frac{1}{T}} \quad (3.10)$$

对上式两边求拉普拉斯反变换,可得输出量的时域表达式

$$c(t) = (t - T) + Te^{-\frac{t}{T}}, \quad t \geq 0 \quad (3.11)$$

式(3.11)表明,响应由两部分组成。式(3.11)中

$(t - T)$ 和  $Te^{-\frac{t}{T}}$  分别为系统响应的稳态分量和瞬态分量,当  $t \rightarrow \infty$  时,瞬态分量衰减到零。其斜坡响应曲线如图 3.18 所示。

系统响应的初始斜率等于 0,即

$$\left. \frac{dc(t)}{dt} \right|_{t=0} = 1 - e^{-\frac{1}{Tt}} \Big|_{t=0} = 0 \quad (3.12)$$

由图 3.18 可见,一阶系统在单位斜坡输入下的稳态输出,与输入的斜率相等,只是滞后一个时间  $T$ 。显然一阶系统单位斜坡响应具有稳态误差

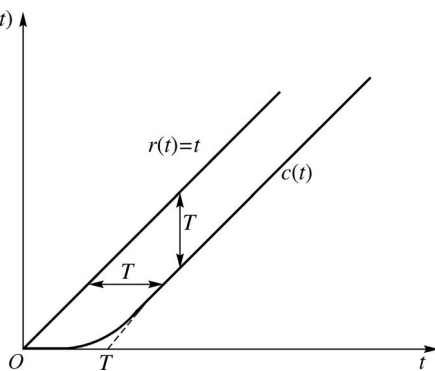


图 3.18 一阶系统的单位斜坡响应曲线

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{t \rightarrow \infty} [t - c(t)] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} [t - (t - T + Te^{-\frac{1}{Tt}})] \\ &= T \end{aligned} \quad (3.13)$$

这里,输入信号  $r(t) = t \cdot 1(t)$  是输出量的期望值。式(3.13)还表明,一阶系统在跟踪单位斜坡输入信号时,输出量与输入量存在跟踪误差,其稳态误差值与系统的  $T$  的值相等。一阶系统在跟踪斜坡输入信号所带来的原理上的位置误差,只能通过减小时间常数  $T$  来降低,而不能最终消除它。

### 3. 单位抛物线响应

输入  $r(t) = \frac{1}{2}t^2 \cdot 1(t)$ , 即  $R(s) = \frac{1}{s^3}$  时,系统输出量的拉普拉斯变换式为

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{1}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s^3} = \frac{1}{s^3} - \frac{T}{s^2} + \frac{T^2}{s} - \frac{T^2}{s + \frac{1}{T}} \quad (3.14)$$

对上式两边求拉普拉斯反变换,得系统输出量的时域表达式

$$c(t) = \frac{1}{2}t^2 - Tt + T^2(1 - e^{-\frac{t}{T}}), \quad t \geq 0 \quad (3.15)$$

上式表明,当时间  $t \rightarrow \infty$  时,系统输出信号与输入信号之差将趋于无穷大。这说明对于一阶系统是不能跟踪单位抛物线函数输入信号的。

### 4. 单位脉冲响应

当输入  $r(t) = \delta(t)$ , 即  $R(s) = 1$  时,系统输出量的拉普拉斯变换式为

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{1}{Ts + 1} \cdot 1 = \frac{\frac{1}{T}}{s + \frac{1}{T}} \quad (3.16)$$

对上式两边求拉普拉斯反变换,得输出量的时域表达式

$$c(t) = \frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}, \quad t \geq 0 \quad (3.17)$$

相应的响应曲线如图 3.19 所示。

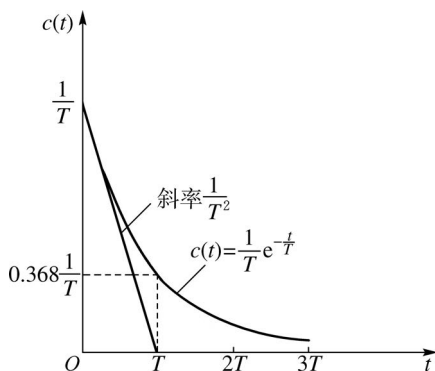


图 3.19 一阶系统的单位脉冲响应曲线

### 3.3.2 一阶系统的重要特性

根据上面的分析,可将一阶系统在典型输入作用下的响应归纳如表 3.1 所示。

表 3.1 一阶系统对典型输入信号的输出

输入信号 $r(t)$	输出信号 $c(t)$
$\delta(t)$	$\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}$
$1(t)$	$1 - e^{-\frac{t}{T}}$
$t \cdot 1(t)$	$(t - T) + Te^{-\frac{t}{T}}$
$\frac{1}{2}t^2 \cdot 1(t)$	$\frac{1}{2}t^2 - Tt + T^2(1 - e^{-\frac{t}{T}})$

从表 3.1 中各响应得到如下结论:

(1) 一阶系统只有一个特征参数,即其时间常数  $T$ 。在一定的输入信号作用下,其时间响应  $c(t)$  由其时间常数唯一确定。

(2) 比较一阶系统对脉冲、阶跃、斜坡和抛物线输入信号的响应,可以发现它们与输入信号之间有如下关系:

$$r_{\text{脉冲}} = \frac{d}{dt}r_{\text{阶跃}} = \frac{d^2}{dt^2}r_{\text{斜坡}} = \frac{d^3}{dt^3}r_{\text{抛物线}} \quad (3.18)$$

$$c_{\text{脉冲}} = \frac{d}{dt}c_{\text{阶跃}} = \frac{d^2}{dt^2}c_{\text{斜坡}} = \frac{d^3}{dt^3}c_{\text{抛物线}} \quad (3.19)$$

式(3.18)和式(3.19)表明,系统对输入信号微分(或积分)的响应,就等于系统对该输入信号响应的微分(或积分)。这是线性定常系统的一个重要特性,适用于任何线性定常连续控制系统。因此,研究和分析线性定常连续控制系统的输出时,不必对每种输入信号的响应都进行计算或求解,只要求解出其中一种典型响应,便可通过上述关系求出其他典型响应;或者,只取其中一种典型输入进行研究即可。

## 3.4 二阶系统的动态性能

凡是由二阶微分方程描述的系统,均称为二阶系统。控制工程中的许多系统都是二阶系统,如  $RLC$  系统、具有质量的物理系统、忽略电枢电感  $L_a$  后的电动机等。尤其值得注意

的是,在一定的条件下,许多高阶系统常常可以近似成二阶系统。因此,二阶系统的性能分析在自动控制系统分析中有非常重要的地位。

### 3.4.1 数学模型的标准式

首先研究一个实际的二阶物理系统结构并推导出其数学模型,然后将其数学模型转化成二阶系统数学模型的标准式,以便使分析的结果具有代表性。

如图 3.20 所示是 RLC 振荡电路。其运动方程可用线性二阶微分方程式描述,即

$$LC \frac{d^2 u_o(t)}{dt^2} + RC \frac{du_o(t)}{dt} + u_o(t) = u_i(t) \quad (3.20)$$

图 3.20 所示的 RLC 振荡电路是一个二阶系统。为使研究结果具有普遍意义,将式(3.20)改写为如下所示的二阶系统的标准运动方程式:

$$T^2 \frac{d^2 c(t)}{dt^2} + 2\zeta T \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t) \quad (3.21)$$

式中,  $T = \sqrt{LC}$  为二阶系统的时间常数,单位为 s;  $\zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$  为二阶系统的阻尼比或相对阻尼系数,无量纲。

二阶系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1} \quad (3.22)$$

引入参数  $\omega_n = 1/T$ , 称作二阶系统的自然角频率或无阻尼振荡角频率,单位为 rad/s, 则

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.23)$$

式(3.22)和式(3.23)为典型二阶系统的闭环传递函数。二阶系统通常表示为图 3.21 所示的单位负反馈的结构形式。二阶系统有两个结构参数  $\zeta$  和  $\omega_n$  (或  $T$ )。二阶系统性能的分析 and 描述,基本上是以这两个体现其特征的结构参数表示的。

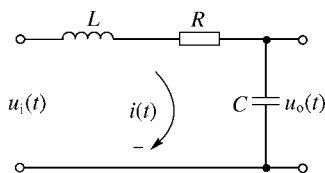


图 3.20 RLC 振荡电路

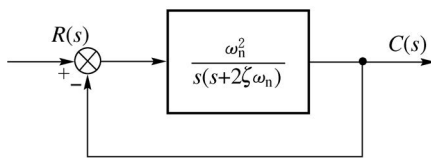


图 3.21 标准化二阶系统

### 3.4.2 典型二阶系统的单位阶跃响应

下面以式(3.23)所示的典型二阶系统为例,分析其单位阶跃响应。设初始条件为零,当输入量为单位阶跃函数时,输出量的拉普拉斯变换式为

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s} \quad (3.24)$$

系统的特征方程为

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (3.25)$$

特征根为

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (3.26)$$

由式(3.26)可以看出,特征根的性质与阻尼比  $\zeta$  有关。因此,当  $\zeta$  为不同值时,所对应的单位阶跃响应将有不同的形式,下面逐一加以说明。

### 1. 无阻尼( $\zeta=0$ )状态

当  $\zeta=0$  时,由式(3.26)可得系统特征根为一对共轭虚根

$$s_{1,2} = \pm j\omega_n$$

其输出量的拉普拉斯变换式为

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega_n^2}$$

上式两边取拉普拉斯反变换,可得

$$c(t) = 1 - \cos\omega_n t, \quad t \geq 0 \quad (3.27)$$

式(3.27)表明,无阻尼时二阶系统的单位阶跃响应为等幅正弦振荡曲线(如图 3.22 所示),振荡角频率为  $\omega_n$ 。

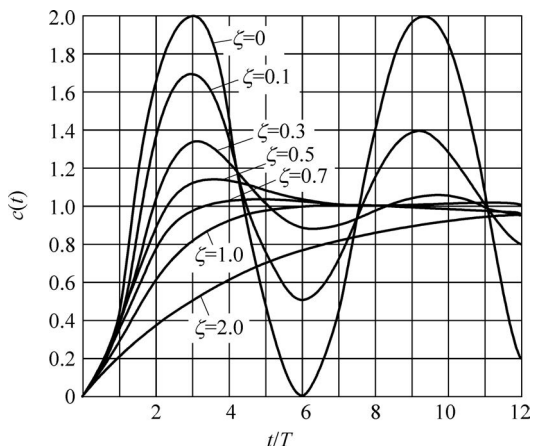


图 3.22 二阶系统的单位阶跃响应曲线

### 2. 欠阻尼( $0 < \zeta < 1$ )状态

当  $0 < \zeta < 1$  时,由式(3.26)可得系统特征根为一对共轭复根

$$s_1 = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \quad (3.28)$$

$$s_2 = -\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \quad (3.29)$$

输出量的拉普拉斯变换式为

$$\begin{aligned} C(s) &= \Phi(s)R(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2})^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2})^2} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} \cdot \frac{\omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \end{aligned}$$

式中,  $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$  为阻尼振荡角频率。

上式两边取拉普拉斯反变换,可得

$$\begin{aligned}
 c(t) &= 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\omega_d t \right) \\
 &= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_d t + \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) \\
 &= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \beta), \quad t \geq 0
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

式中,  $\beta$  为共轭复数对负实轴的张角。  $\beta$  和阻尼系数  $\zeta$  之间有确定的关系(见图 3.23)

$$\beta = \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = \arccos \zeta$$

也称  $\beta$  为阻尼角。

从式(3.30)可以看出,对应欠阻尼( $0 < \zeta < 1$ )时二阶系统的单位阶跃响应为衰减的正弦振荡曲线(见图 3.22),其衰减速度取决于  $\zeta\omega_n$  值的大小,其衰减振荡的角频率便是阻尼振荡角频率  $\omega_d$ 。当  $t \rightarrow \infty$  时,动态分量衰减到零,输出量等于输入量,  $c(\infty) = 1$ 。

### 3. 临界阻尼( $\zeta=1$ )状态

当  $\zeta=1$  时,由式(3.26)可得系统特征根为一对相等的负实根

$$s_{1,2} = -\omega_n \tag{3.31}$$

输出量的拉普拉斯变换式为

$$\begin{aligned}
 C(s) &= \Phi(s)R(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s} \\
 &= \frac{1}{s} - \frac{\omega_n}{(s + \omega_n)^2} - \frac{1}{s + \omega_n}
 \end{aligned}$$

上式两边取拉普拉斯反变换,可得

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (\omega_n t + 1), \quad t \geq 0 \tag{3.32}$$

从式(3.32)可以看出,对应临界阻尼( $\zeta=1$ )时二阶系统的单位阶跃响应没有振荡,是一条单调上升的曲线。系统的单位阶跃响应曲线如图 3.22 中  $\zeta=1$  曲线所示。

### 4. 过阻尼( $\zeta>1$ )状态

当  $\zeta>1$  时,由式(3.26)可得系统特征根为两个不同的负实数根

$$s_1 = -\zeta\omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \tag{3.33}$$

$$s_2 = -\zeta\omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \tag{3.34}$$

为便于计算,令

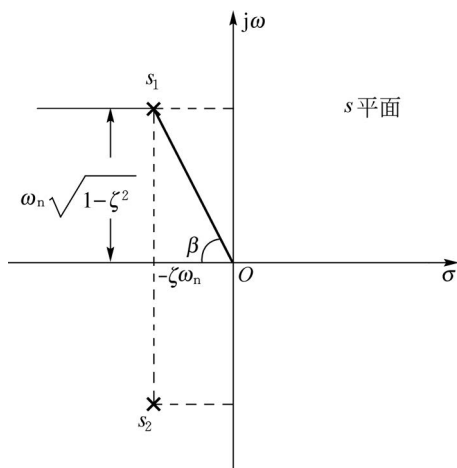


图 3.23 阻尼角  $\beta$  的确定

$$T_1 = \frac{1}{\omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})}$$

$$T_2 = \frac{1}{\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})}$$

式中,  $T_1$ 、 $T_2$  称为过阻尼二阶系统的时间常数。

输出量的拉普拉斯变换式为

$$\begin{aligned} C(s) &= \Phi(s)R(s) = \frac{\omega_n^2}{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)} \cdot \frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{s} + \frac{1}{\frac{T_2}{T_1} - 1} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{T_1}} + \frac{1}{\frac{T_1}{T_2} - 1} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{T_2}} \end{aligned}$$

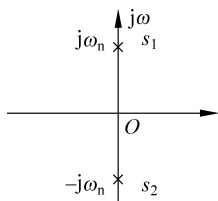
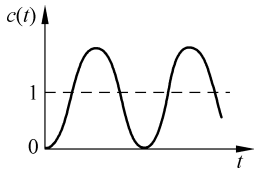
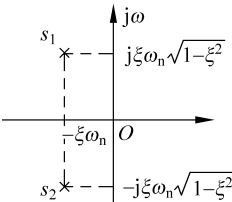
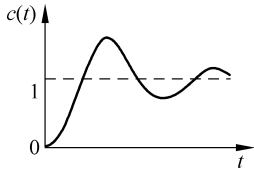
上式两边取拉普拉斯反变换, 可得

$$c(t) = 1 + \frac{1}{\frac{T_2}{T_1} - 1} e^{-\frac{1}{T_1}t} + \frac{1}{\frac{T_1}{T_2} - 1} e^{-\frac{1}{T_2}t}, \quad t \geq 0 \quad (3.35)$$

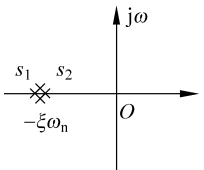
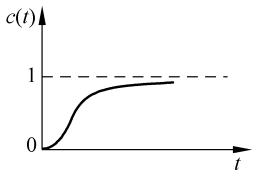
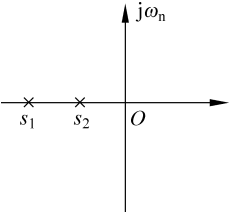
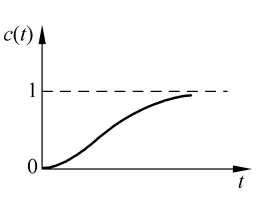
式(3.35)表明, 对应过阻尼( $\zeta > 1$ )时, 二阶系统的单位阶跃响应包含两个单调衰减的指数项, 过阻尼二阶系统的单位阶跃响应是非振荡的。当  $\zeta \gg 1$ ,  $T_2 \gg T_1$  时, 前一项单调衰减的指数项衰减快, 其对特性的影响小, 可以忽略。此时, 二阶系统的输出响应就类似于二阶系统的响应, 即二阶系统可视为一阶系统。系统的单位阶跃响应曲线如图 3.22 所示。

表 3.2 给出了二阶系统特征根在  $s$  平面上的位置及系统结构参数  $\xi$ 、 $\omega_n$  与单位阶跃响应的关系。 $\xi$  越小, 系统响应的振荡越激烈, 当  $\xi \geq 1$  时,  $c(t)$  单调上升, 为非振荡过程。

表 3.2 典型二阶系统的单位阶跃响应

阻尼系数	特征方程根	根在复平面上位置	单位阶跃响应
$\zeta = 0$ (无阻尼)	$s_{1,2} = \pm j\omega_n$		
$0 < \zeta < 1$ (欠阻尼)	$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$		

续表

阻尼系数	特征方程根	根在复平面上位置	单位阶跃响应
$\zeta=1$ (临界阻尼)	$s_{1,2} = -\zeta\omega_n$		
$\zeta>1$ (过阻尼)	$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$		

### 3.4.3 典型二阶系统动态性能指标

#### 1. 欠阻尼二阶系统的动态性能指标

当  $0 < \zeta < 1$  时, 二阶系统的阶跃响应为

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \beta), \quad t \geq 0 \quad (3.36)$$

(1) 上升时间  $t_r$ 。

根据上升时间的定义,  $c(t_r) = 1$ , 由式(3.36)得

$$c(t_r) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t_r}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t_r + \beta) = 1, \quad t \geq 0$$

所以有

$$\frac{e^{-\zeta\omega_n t_r}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t_r + \beta) = 0$$

由于在  $t_r < \infty$  内,  $\frac{e^{-\zeta\omega_n t_r}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \neq 0$ , 所以只能  $\sin(\omega_d t_r + \beta) = 0$ , 由此得

$$\omega_d t_r + \beta = \pi$$

上升时间  $t_r$  为

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = \frac{\pi - \beta}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (3.37)$$

(2) 峰值时间  $t_p$ 。

根据定义,  $t_p$  应为  $c(t)$  第一次出现峰值所对应的时间, 由式(3.36), 令  $dc(t)/dt = 0$ , 可得

$$-\zeta \sin(\omega_d t_p + \beta) + \sqrt{1-\zeta^2} \cos(\omega_d t_p + \beta) = 0$$

整理得

$$\tan(\omega_d t_p + \beta) = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = \tan\beta$$

当  $\omega_d t = 0, \pi, 2\pi, \dots$  时,  $\tan(\omega_d t_p + \beta) = \tan\beta$ 。根据峰值时间定义, 峰值时间是对应出现第一个峰值的时间, 所以应取  $\omega_d t_p = \pi$ , 即有

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (3.38)$$

(3) 超调量  $\sigma\%$ 。

当  $t = t_p$  时,  $c(t)$  有最大值  $c_{\max} = c(t_p)$ , 而单位阶跃响应的稳态值  $c(\infty) = 1$ , 最大超调量为

$$\sigma\% = [c(t_p) - 1] \times 100\% = \left[ -\frac{e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\pi + \beta) \right] \times 100\%$$

由于

$$\sin(\pi + \beta) = -\sin\beta = -\sqrt{1-\zeta^2}$$

所以, 最大超调量为

$$\sigma\% = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% \quad (3.39)$$

上式表明, 超调量  $\sigma\%$  仅是阻尼比  $\zeta$  的函数, 与自然角频率  $\omega_n$  无关,  $\sigma\%$  与  $\zeta$  的关系如图 3.24 所示。

(4) 调节时间  $t_s$ 。

按定义, 调节时间  $t_s$  是  $c(t)$  与稳态值  $c(\infty)$  之间的偏差达到允许范围 ( $\Delta$  取 5% 或 2%) 且不再超过的过渡过程时间, 即

$$|c(t) - c(\infty)| \leq c(\infty) \times \Delta$$

由式(3.36)及  $c(\infty) = 1$ , 得

$$\left| \frac{e^{-\zeta\omega_n t_s}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t_s + \beta) \right| \leq \Delta \quad (3.40)$$

由于  $\frac{e^{-\zeta\omega_n t_s}}{\sqrt{1-\zeta^2}}$  是式(3.36)所描述的衰减正弦振荡的幅值表达项, 即振荡的包络线, 如图 3.25 所示。

而其描述二阶系统的单位阶跃响应的包络线是  $1 \pm \frac{e^{-\zeta\omega_n t_s}}{\sqrt{1-\zeta^2}}$ , 动态的响应曲线总是在上、下包络线之间, 简便起见, 用  $c(t)$  的包络线近似代替  $c(t)$ , 不等式(3.40)可改为

$$\left| \frac{e^{-\zeta\omega_n t_s}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right| \leq \Delta$$

两边取自然对数, 得

$$t_s = -\frac{1}{\zeta\omega_n} \ln(\Delta \sqrt{1-\zeta^2}) \quad (3.41)$$

分别取  $\Delta = 5\%$  或  $2\%$ , 并考虑到较小的欠阻尼比  $\zeta$  时,  $\sqrt{1-\zeta^2} \approx 1$ , 则

$$t_s \approx \frac{3}{\zeta\omega_n} \quad (\text{取 } \Delta = 5\%) \quad (3.42)$$

$$t_s \approx \frac{4}{\zeta \omega_n} \quad (\text{取 } \Delta = 2\%) \quad (3.43)$$

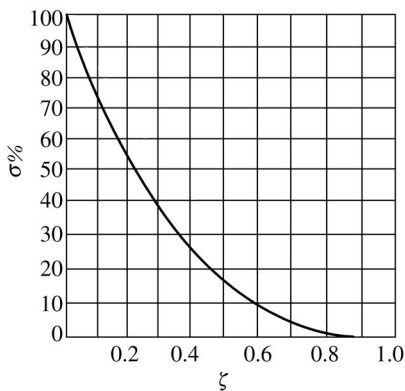


图 3.24  $\sigma\%$ 和  $\zeta$ 的关系

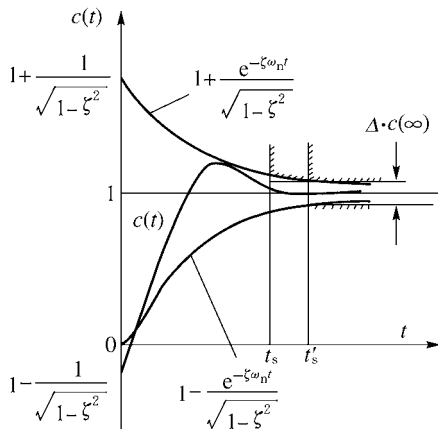


图 3.25 调节时间的近似计算

(5) 振荡次数  $N$ 。

按定义,当系统响应曲线有振荡时,振荡次数  $N$  按下式计算:

$$N = \frac{t_s}{t_f} \quad (3.44)$$

式中,  $t_f = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$  为阻尼振荡的周期时间。

上面求得的  $t_r$ 、 $t_p$ 、 $t_s$ 、 $\sigma\%$ 和  $N$  与二阶系统特征参数之间的关系是分析二阶系统动态性能的基础。若已知  $\zeta$  和  $\omega_n$  的值或复平面上特征方程根的位置,则可以计算出各性能指标。另外,也可以根据对系统的动态性能要求,由性能指标确定二阶系统的特征参数  $\zeta$  和  $\omega_n$ 。如要求系统具有一定的  $\sigma\%$ 和  $t_s$ ,则由  $\sigma\%$ 确定  $\zeta$  值[式(3.39)或图 3.24],再由  $t_s$  和  $\zeta$  值计算  $\omega_n$  值[式(3.41)或式(3.42)、式(3.43)]。 $t_r$ 、 $t_p$  和  $t_s$  都表示动态过程进行的快慢程度,是快速性指标。 $\sigma\%$ 和  $N$  则反映动态过程振荡激烈程度,是振荡性指标。 $\sigma\%$ 和  $t_s$  是反映系统动态性能好坏的两个最主要指标。从图 3.24 可以看到, $\zeta$  越大, $\sigma\%$  越小。 $\zeta$  和  $t_s$  的精确关系比较复杂,图 3.26 所示为  $\zeta$  和  $t_s/T$  的关系曲线。当  $\zeta=0.707$ ,  $t_s=3T$ ,调节时间取最小值,这时最大超调量约为 4.3%。工程上常取  $\zeta=0.707$  作为最佳阻尼系数。一般地,当  $\zeta$  值取 0.4~0.8 时,最大超调量为 2.5%~25%,而调节时间为 3.75T~7.5T ( $\Delta$  取 0.05)。

### 2. 过阻尼二阶系统的动态性能指标

当  $\zeta > 1$  时,则

$$c(t) = 1 - \frac{-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n t} + \frac{-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n t} \quad (3.45)$$

阶跃响应是从 0 到 1 的单调上升过程,超调量为 0。用  $t_s$  即可描述系统的动态性能。 $\zeta$  与  $t_s/T$  的关系曲线如图 3.27 所示。由图可见, $\zeta$  越大, $t_s$  也越大。 $\zeta=1$  是非振荡响应过

程中具有最小调节时间的情况。

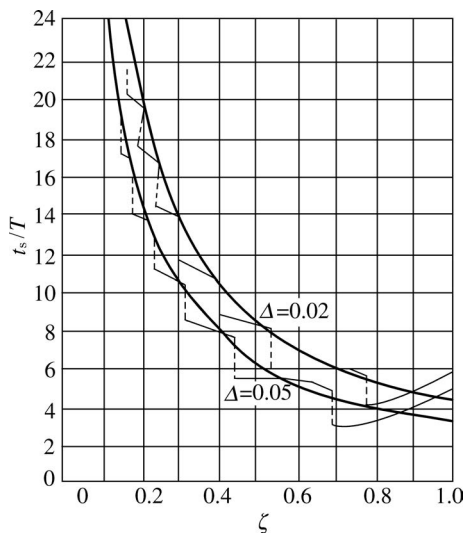


图 3.26  $\zeta$  与  $t_s/T$  的关系曲线 ( $0 < \zeta < 1$ )

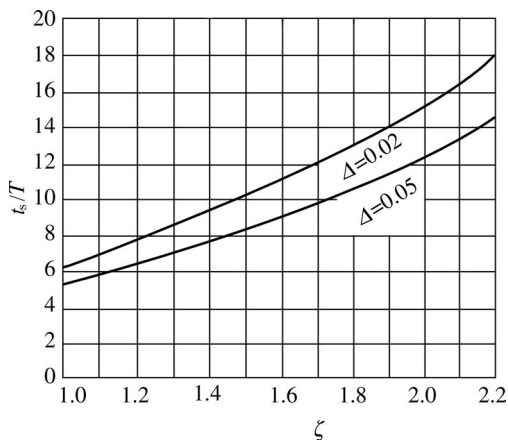


图 3.27  $\zeta$  与  $t_s/T$  的关系曲线 ( $\zeta > 1$ )

通常总是希望控制系统的阶跃响应比较快,即瞬态响应很快便衰减为 0。当  $\zeta > 1$  时,调节时间比较长,因此设计系统时总希望系统处于欠阻尼的状态。对于一些不允许出现超调(例如液体控制系统,超调会导致液体溢出)或大惯性(例如加热装置)的控制系统,则可采用  $\zeta > 1$ ,使系统处于过阻尼状态。

**例 3.10** 有一个位置随动系统,结构图如图 3.28 所示,其中  $K=4$ 。求:(1)该系统的阻尼比、自然振荡角频率和单位阶跃响应;(2)系统的峰值时间、调节时间和超调量;(3)若要求阻尼比等于  $0.707(\sqrt{2}/2)$ ,应怎样改变系统传递系数  $K$  值。

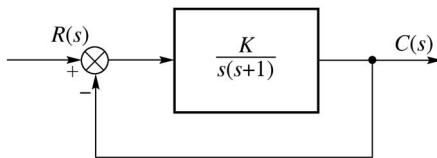


图 3.28 位置随动系统结构图

**解** 系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{4}{s^2 + s + 4}$$

将其与标准式  $\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$  相比较,可得

(1) 自然振荡角频率为

$$\omega_n = \sqrt{4} = 2 \text{ rad/s}$$

由  $2\zeta\omega_n = 1$  得阻尼比为

$$\zeta = \frac{1}{2\omega_n} = 0.25$$

由式(3.30)得单位阶跃响应为

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

$$= 1 - \frac{e^{-0.25 \times 2t}}{\sqrt{1 - 0.25^2}} \sin\left(2\sqrt{1 - 0.25^2}t + \arctan \frac{\sqrt{1 - 0.25^2}}{0.25}\right)$$

$$= 1 - 1.03e^{-0.5t} \sin(1.94t + \arctan \sqrt{15}), \quad t \geq 0$$

(2) 峰值时间为

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{3.14}{2\sqrt{1 - 0.25^2}} \approx 1.62s$$

调节时间为

$$t_s = \frac{3}{\zeta \omega_n} = \frac{3}{0.25 \times 2} = 6s \quad (\Delta = 5\%)$$

超调量为

$$\sigma\% = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% = e^{-3.14 \times 0.25/\sqrt{1-0.25^2}} \times 100\% \approx 44.5\%$$

(3) 要求  $\zeta = 0.707$  时,有

$$\omega_n = \frac{1}{2\zeta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{rad/s}, \quad K = \omega_n^2 = 0.5$$

由此可见,降低开环传递系数  $K$  值能使阻尼比增大、超调量下降,可改善系统动态性能。但在以后的系统稳态误差分析中可知,降低开环传递系数将使系统的稳态误差增大。

### 3.4.4 二阶系统性能的改善

从前面典型二阶系统响应特性的分析可见,通过调整二阶系统的两个特征参数(阻尼比  $\zeta$  和自然角频率  $\omega_n$ ),可以改善系统的动态性能。但是,这种改善是有限度的。例如,为提高系统响应的快速性,减小阶跃响应的超调量,应增大系统的阻尼比,而系统阻尼比的增加,势必降低其响应的快速性,使其上升时间、峰值时间加长。有时,作为受控的固有对象,系统的结构参数往往是不可调整的。这时,系统阻尼比的增大是以减小其自然角频率为代价的,这不仅会降低系统响应的快速性,同时也将增大系统的稳态误差,降低其控制的准确性。由于典型二阶系统只有两个参数选择的自由度,难以兼顾其响应的快速性和平稳性以及系统的动态和稳态性能的全面要求,必须研究其他控制方式,以改善二阶系统的性能。比例-微分控制和速度反馈是常用的两种改善二阶系统性能的方法。

#### 1. 比例-微分控制

比例-微分控制的二阶系统是在原典型二阶系统的前向通路上增加误差信号速度分量的并联通路  $T_d s$  组成,结构图如图 3.29 所示。 $e(t)$  为误差信号,  $T_d$  为微分时间常数。

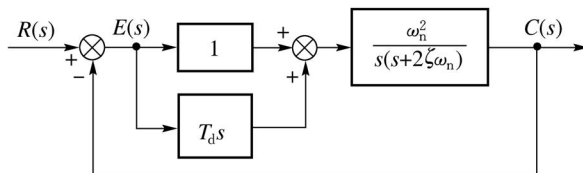


图 3.29 比例-微分控制系统

在结构图 3.29 中,受控对象的输入信号成为误差信号与其微分信号的线性组合。系统

的开环传递函数为

$$G_K(s) = \frac{\omega_n^2(T_d s + 1)}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2(T_d s + 1)}{s^2 + (2\zeta\omega_n + \omega_n^2 T_d)s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2 T_d (s + 1/T_d)}{s^2 + (2\zeta\omega_n + \omega_n^2 T_d)s + \omega_n^2} \quad (3.46)$$

参照式(3.23),有

$$2\zeta_d \omega_n = 2\zeta\omega_n + \omega_n^2 T_d$$

等效阻尼比  $\zeta_d$  为

$$\zeta_d = \zeta + \frac{1}{2}\omega_n T_d \quad (3.47)$$

由式(3.47)可见,引入比例-微分控制后,系统的无阻尼振荡角频率  $\omega_n$  不变,但系统的等效阻尼比加大了( $\zeta_d > \zeta$ ),从而使系统的调节时间缩短,超调量减小,抑制了振荡,改善了系统的动态性能。

另外,由式(3.46)可看出,引入比例-微分控制后,系统闭环传递函数出现附加零点( $s = -\frac{1}{T_d}$ )。闭环零点存在,将会使系统响应速度加快,削弱“阻尼”的作用。因此适当选择微分时间常数  $T_d$ ,既可以使系统响应不出现超调,又能显著地提高其快速性。

## 2. 输出量的速度反馈控制

在原典型二阶系统的反馈通路中增加输出信号的速度分量反馈信号,结构图如图 3.30 所示。 $e(t)$ 为偏差信号, $K_f$ 为输出量的速度反馈系数。

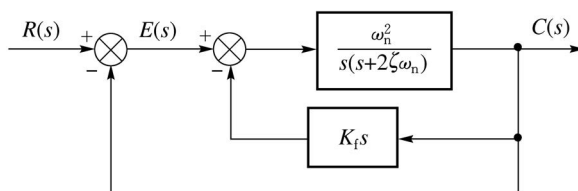


图 3.30 速度反馈控制系统

由图 3.30 可得系统的开环传递函数为

$$G_K(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n) + K_f \omega_n^2 s}$$

闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + (2\zeta\omega_n + \omega_n^2 K_f)s + \omega_n^2} \quad (3.48)$$

参照式(3.23),有

$$2\zeta_d \omega_n = 2\zeta\omega_n + \omega_n^2 K_f$$

等效阻尼比  $\zeta_d$  为

$$\zeta_d = \zeta + \frac{1}{2}\omega_n K_f \quad (3.49)$$

由式(3.49)可见,引入速度反馈控制后,增加了附加项 $\frac{1}{2}\omega_n K_f$ ,同样使系统的无阻尼振荡角频率 $\omega_n$ 不变、等效阻尼比增大( $\zeta_d > \zeta$ ),因而使系统的调节时间缩短,超调量减小,系统的平稳性得以改善,但系统没有附加闭环零点的影响。

**例 3.11** 对例 3.10 的位置随动系统引入速度反馈控制,结构图如图 3.31 所示,其中  $K=10$ 。若系统的等效阻尼比为 0.5,试确定反馈系数的值  $K_f$ ,并计算系统在引入速度反馈控制前后的调节时间和超调量。

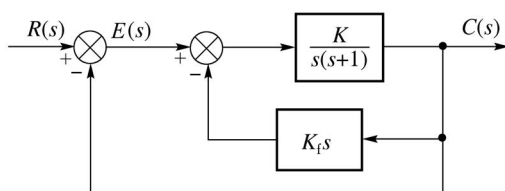


图 3.31 位置随动系统引入速度反馈控制结构图

**解** 由图 3.28,原系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{10}{s^2 + s + 10}$$

则原系统自然振荡角频率为

$$\omega_n = \sqrt{10} \approx 3.16 \text{ rad/s}$$

由  $2\zeta\omega_n=1$  得阻尼比为

$$\zeta = \frac{1}{2\omega_n} \approx 0.158$$

已知  $\zeta_d=0.5$ ,由式(3.49)得

$$K_f = \frac{2(\zeta_d - \zeta)}{\omega_n} = 0.216$$

当  $\zeta=0.158$  时,即引入速度反馈控制前的调节时间和超调量分别为

$$t_s(5\%) = \frac{3}{\zeta\omega_n} = \frac{3}{0.158 \times 3.16} \approx 6.01 \text{ s}$$

$$\sigma\% = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% = e^{-3.14 \times 0.158 / \sqrt{1-0.158^2}} \times 100\% \approx 60\%$$

当  $\zeta_d=0.5$  时,即引入速度反馈控制后的调节时间和超调量分别为

$$t_s(5\%) = \frac{3}{\zeta_d\omega_n} = \frac{3}{0.5 \times 3.16} \approx 1.90 \text{ s}$$

$$\sigma\% = e^{-\pi\zeta_d/\sqrt{1-\zeta_d^2}} \times 100\% = e^{-3.14 \times 0.5 / \sqrt{1-0.5^2}} \times 100\% \approx 16.4\%$$

上例计算表明,引入速度反馈控制后,调节时间减小、超调量下降,系统的动态性能得以改善。

### 3. 两种控制方案的比较

比例-微分控制和速度反馈控制都为系统提供了一个参数选择的自由度,兼顾了系统响应的快速性和平稳性,但是二者改善系统性能的机理及其应用场合是不同的,简述如下:

(1) 微分控制的附加阻尼作用产生于系统输入端误差信号的变化率,而速度反馈控制

的附加阻尼作用来源于系统输出量的变化率。微分控制为系统提供了一个实数零点,可以缩短系统响应时间,但在相同阻尼程度下,将比速度反馈控制产生更大的阶跃响应超调量。

(2) 比例-微分控制位于系统的输入端,微分作用对输入噪声有明显的放大作用。当输入端噪声严重时,不宜选用比例-微分控制。同时,由于微分器的输入信号是低能量的误差信号,要求比例-微分控制具有足够的放大作用,为了不明显恶化信噪比,需选用高质量的前置放大器。输出速度反馈控制,是从高能量的输出端向低能量的输入端传递信号,无须增设放大器,并对输入端噪声有滤波作用,适合于任何输出可测的控制场合。

### 3.5 高阶系统的动态性能

由三阶或三阶以上微分方程描述的系统,称为高阶系统。严格来说,任何一个控制系统都是高阶系统。对于高阶系统来说,其动态性能指标的确定是比较复杂的。工程上常采用闭环主导极点的概念对高阶系统进行近似分析。本节将通过高阶系统在单位阶跃函数作用下的过渡过程的讨论,引出闭环主导极点这一重要概念,以便将高阶系统在一定的条件下转化为近似的一阶或二阶系统进行分析研究。

#### 3.5.1 高阶系统的数学模型

高阶系统的微分方程式为

$$\begin{aligned} & a_n \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dc(t)}{dt} + a_0 c(t) \\ & = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t) \end{aligned} \quad (3.50)$$

式中,  $n \geq 3, n \geq m$ ; 系统参数  $a_i (i=1, 2, \dots, n)$ 、 $b_j (j=1, 2, \dots, m)$  为定常值。

令初始条件为 0, 对式(3.50)两边取拉普拉斯变换, 可求出系统的闭环传递函数

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \\ &= \frac{K_g (s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} \end{aligned} \quad (3.51)$$

式中,  $K_g = \frac{b_m}{a_n}$ ;  $-p_j (j=0, 1, \dots, n)$  称为系统闭环极点;  $-z_i (i=0, 1, \dots, m)$  称为系统闭环零点。

#### 3.5.2 高阶系统的单位阶跃响应

设  $n$  个闭环极点中, 有  $n_1$  个实数极点,  $n_2$  对共轭复数极点, 且闭环极点与零点互不相等。由于一对共轭复数极点形成一个  $s$  的二阶项, 因此式(3.51)的因式包括一阶项和二阶项。故其可写为

$$\Phi(s) = \frac{K_g \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{l=1}^{n_1} (s + p_l) \prod_{k=1}^{n_2} (s^2 + 2\zeta_k \omega_k s + \omega_k^2)} \quad (3.52)$$

式中,  $n_1 + 2n_2 = n$ 。

当输入为单位阶跃函数时, 高阶系统输出量的拉普拉斯变换式为

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{K_g \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{l=1}^{n_1} (s + p_l) \prod_{k=1}^{n_2} (s^2 + 2\zeta_k \omega_k s + \omega_k^2)} \cdot \frac{1}{s}$$

将上式展开成部分分式, 得

$$C(s) = \frac{A_0}{s} + \sum_{l=1}^{n_1} \frac{A_l}{s + p_l} + \sum_{k=1}^{n_2} \frac{B_k s + C_k}{s^2 + 2\zeta_k \omega_k s + \omega_k^2} \quad (3.53)$$

式中,  $A_0$  为  $C(s)$  在原点处的留数;  $A_l$  为在实数极点处的留数, 其值为

$$A_0 = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot C(s) = \frac{b_0}{a_0}$$

$$A_l = \lim_{s \rightarrow -p_l} (s + p_l) \cdot C(s), \quad l = 1, 2, \dots, n_1$$

$B_k$  和  $C_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n_2$ ) 是与  $C(s)$  在闭环复数极点  $s = -\zeta_k \omega_k \pm j\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2}$  处的留数有关的常数。

对式(3.53)两边取拉普拉斯反变换, 可得高阶系统的单位阶跃响应为

$$c(t) = A_0 + \sum_{l=1}^{n_1} A_l e^{-p_l t} + \sum_{k=1}^{n_2} B_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \cos \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t + \sum_{k=1}^{n_2} \frac{C_k - B_k \zeta_k \omega_k}{\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2}} e^{-\zeta_k \omega_k t} \sin \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t, \quad t \geq 0 \quad (3.54)$$

由式(3.54)可知, 高阶系统的单位阶跃响应与一、二阶系统的形式相同, 均由两大部分组成: 一是稳态分量“ $A_0$ ”, 与时间  $t$  无关; 二是余下的与时间  $t$  有关的动态(瞬态)分量, 该动态分量包含指数项、正弦和余弦项。由此得到以下结论:

(1) 若所有闭环极点都分布在  $s$  的左半平面, 即如果所有实数极点为负值, 所有共轭复数极点具有负实部, 那么当时间  $t$  趋于无穷大时, 动态分量都趋于零, 系统的稳态输出量为“ $A_0$ ”, 这时, 高阶系统是稳定的; 只要有一个正极点或正实部的复数极点存在, 那么当  $t$  趋于无穷大时, 该极点对应的动态分量就趋于无穷大, 系统输出也就为无穷大, 这时系统是不稳定的。

(2) 动态响应各分量衰减的快慢取决于指数衰减常数。若闭环极点位于  $s$  的左半平面且离虚轴越远, 其对应的响应分量衰减得越快; 反之, 则衰减越慢。

(3) 各分量的幅值与闭环极点、零点在  $s$  平面中的位置有关, 具体如下:

- 若某极点的位置离原点很远, 那么其相应的系数将很小。所以, 远离原点的极点, 其动态分量幅值小、衰减快, 对系统的动态响应影响很小。
- 若某极点靠近一个闭环零点又远离原点及其他极点, 则相应项的幅值较小, 该动态

分量的影响也较小。工程上常把处于这种情况的闭环零点、极点称为偶极子,一般地这对闭环零点、极点之间的距离要比它们本身的模值小一个数量级。偶极子对动态分量影响较小的现象,称为零点、极点相消。

- 若某极点远离零点又接近原点,则相应的幅值就较大。因此,离原点很近并且附近又没有闭环零点的极点,其动态分量项不仅幅值大,而且衰减慢,对系统输出量的影响最大。

### 3.5.3 高阶系统的分析方法

由以上高阶系统单位阶跃响应的求解过程和讨论可知,对高阶系统的分析是十分烦琐的事情。如果再试图根据性能指标的定义,按式(3.54)所求出的高阶系统性能指标解析式,将会更加麻烦。为简单和方便起见,在控制工程中常常采用主导极点的概念对高阶系统进行近似分析。实践表明,这种近似分析方法是行之有效的。

在阶系统中,如果存在某个离虚轴最近的闭环极点,而其他闭环极点与虚轴的距离比起这个极点与虚轴的距离(实部长长度)大5倍以上,且其附近不存在闭环零点,则可以认为系统的动态响应主要由这个极点决定,称这个对动态响应起主导作用的极点为闭环主导极点。对应地,其他的极点称为普通极点或非主导极点。在阶稳定系统中,闭环主导极点往往是一对共轭复数极点,因为这样可以得到系统最小的调节时间和较高的精度。

根据闭环主导极点的概念,在对高阶系统性能进行分析时,如果能找到一对共轭复数主导极点,那么高阶系统就可以近似地当作二阶系统来分析,并用二阶系统的性能指标公式来估计系统的性能;如果能找到一个主导极点,那么高阶系统可以按一阶系统来分析。同样,在设计一个高阶系统时,也常常利用主导极点来选择系统参数,使系统具有一对共轭主导极点,以利于近似地按二阶系统的性能指标来设计系统。

若高阶系统不满足应用闭环主导极点的条件,则高阶系统不能近似为二阶系统。这时高阶系统的过渡过程必须具体求解,其研究方法同一阶、二阶系统。有时,对于不大符合存在闭环主导极点条件的高阶系统,可设法使其符合条件。例如,在某些不希望的闭环极点附近引入闭环零点,人为地构成偶极子,产生零点、极点相消。另外,在许多实际应用中,比主导极点距离虚轴远2~3倍的闭环零点、极点,在某些条件下也可略去不考虑。

值得指出,近年来由于数字计算机的发展和普及,特别是已经出现一些求解高阶微分方程的软件,如MATLAB等,容易求出高阶系统的输出解及绘制出相应的响应曲线,这给高阶系统的分析和设计带来了方便。

**例 3.12** 某控制系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{2.7}{s^3 + 5s^2 + 4s + 2.7}$$

- (1) 试绘出单位阶跃响应曲线,并求动态性能指标  $t_r$ 、 $t_p$ 、 $t_s$  和  $\sigma\%$ 。
- (2) 用主导极点方法求解并对比。

**解** 这是一个三阶系统,可以求得三个闭环极点分别为

$$s_{1,2} = -0.4 \pm j0.69, \quad s_3 = -4.2$$

其闭环传递函数可写为

$$\begin{aligned}\Phi(s) &= \frac{4.2 \times 0.8^2}{(s + 4.2)(s^2 + 2 \times 0.5 \times 0.8s + 0.8^2)} \\ &= \frac{4.2 \times 0.8^2}{(s + 4.2)(s + 0.4 - j0.69)(s + 0.4 + j0.69)}\end{aligned}$$

三阶系统的实数极点  $-p$  和  $\zeta, \omega_n$  为

$$-p = s_3 = -4.2, \quad \zeta = 0.5, \quad \omega_n = 0.8$$

(1) 把  $-p$  和  $\zeta, \omega_n, \beta = \frac{-p}{\zeta\omega_n} = -10.5$  代入式(3.48), 得

$$c(t) = 1 - 0.04e^{-4.2t} - e^{-0.4t}(0.96\cos 0.69t + 0.81\sin 0.69t)$$

相应的单位阶跃响应曲线表示在图 3.32 中。由该图求得系统响应的各项性能指标:

上升时间	$t_r = 3.2\text{s}$
峰值时间	$t_p = 4.6\text{s}$
调节时间	$t_s = 7.0\text{s} (\Delta = 0.05)$
超调量	$\sigma\% = 16\%$

(2) 该系统的实数极点与复数极点实部之比为 10.5, 故复数极点  $s_{1,2}$  可视为闭环主导极点, 所以该三阶系统可以用具有这一对复数极点的二阶系统近似。近似的二阶系统闭环传递函数为

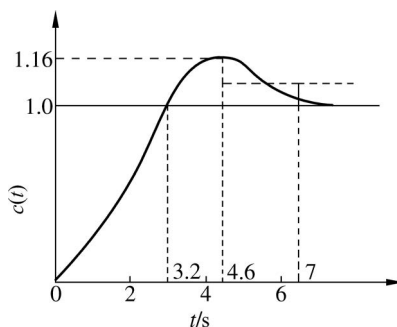


图 3.32 例 3.12 图

$$\Phi(s) = \frac{0.8^2}{s^2 + 2 \times 0.5 \times 0.8s + 0.8^2}$$

由二阶系统性能指标计算公式, 可求出:

上升时间	$t_r = 3.03\text{s}$
峰值时间	$t_p = 4.55\text{s}$
调节时间	$t_s = 7.25\text{s} (\Delta = 0.05)$
超调量	$\sigma\% = 16.3\%$

比较以上两种方法所求到的性能指标, 其数值都很接近。这说明当系统存在一对闭环主导极点时, 三阶系统可降阶为二阶系统进行分析, 其结果不会带来太大的误差。

### 3.6 系统稳态误差分析

控制系统的稳态误差是系统控制精度的一种度量, 通常称为静态性能。在控制系统设计中, 稳态误差是一项重要的性能指标。系统的稳态误差与系统本身的结构参数及外作用的形式都有关系。本节讨论的稳态误差并不包括由于元件的不灵敏区、零点漂移、老化等原因造成的误差。

线性控制系统若不稳定则不存在稳定的状态, 谈不上稳态误差。因此, 讨论稳态误差时所指的都是稳定的系统。

控制系统的稳态误差是因输入信号的不同而不同的, 因而, 控制系统的静态性能是通过

评价系统在典型输入信号作用下的稳态误差来衡量的。

在阶跃函数作用下没有稳态误差的系统称为无差系统,反之则称为有差系统。

为了分析方便,把系统的稳态误差分为两种:由给定输入引起的稳态误差称为给定稳态误差;由扰动输入引起的稳态误差称为扰动稳态误差。当线性系统既受到给定输入作用同时又受到扰动作用时,它的稳态误差是上述两项误差的代数和。对于随动系统,给定输入信号是不断变化的,所以要求系统的输出以一定的精度跟随给定信号的变化。因此,常用给定稳态误差来衡量随动系统的控制精度。对于恒值控制系统,给定量通常是不变的,需要研究的是扰动输入对系统稳态响应的影响,因此,常用扰动稳态误差来衡量恒值控制系统的控制精度。

### 3.6.1 误差与稳态误差的定义

#### 1. 误差的定义

控制系统的典型结构如图 3.33 所示。系统的误差可以有两种定义方法。

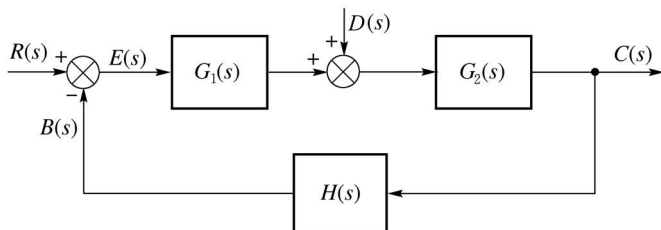


图 3.33 控制系统的典型结构

(1) 从输入端定义:系统的误差被定义为给定输入信号  $r(t)$  与反馈信号  $b(t)$  之差,即

$$e(t) = r(t) - b(t) \quad (3.55)$$

用这种方法定义的误差,又常称为偏差。由于它是可以测量的,因而在应用中具有实际意义。

(2) 从输出端定义:系统的误差被定义为输出量的期望值  $c_o(t)$  和实际值  $c(t)$  之差,即

$$\epsilon(t) = c_o(t) - c(t) \quad (3.56)$$

在如图 3.33 所示的系统中,有

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} = \frac{1}{1 + G_K(s)} \quad (3.57)$$

$$\epsilon(s) = \frac{R(s)}{H(s)} - \frac{G_1(s)G_2(s)R(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} = \frac{E(s)}{H(s)} \quad (3.58)$$

由式(3.58)可知,从输出端定义的误差  $\epsilon(s)$  与从输入端定义的误差  $E(s)$  具有一一对应的关系。对于单位反馈系统  $\epsilon(s) = E(s)$ ,在以下的分析中,我们将采用第一种方法定义的误差来分析稳态误差。

#### 2. 稳态误差的定义

当时间  $t \rightarrow \infty$  时,系统的误差称为稳态误差,以  $e_{ss}$  表示,即

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \quad (3.59)$$

由拉普拉斯变换终值定理可得

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \quad (3.60)$$

如图 3.33 所示,系统同时受到输入信号  $r(t)$  和扰动量  $d(t)$  的作用,输出的拉普拉斯变换为

$$C(s) = G_1(s)G_2(s)[R(s) - H(s)C(s)] + D(s)G_2(s)$$

$$C(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}R(s) + \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}D(s)$$

误差  $e(t)$  的拉普拉斯变换为

$$E(s) = R(s) - H(s)C(s)$$

$$= \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}R(s) - \frac{G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}D(s) \quad (3.61)$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \frac{s}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}R(s) - \frac{sG_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}D(s) \quad (3.62)$$

上式表明,稳态误差既与外作用  $r(t)$  和  $d(t)$  有关,也与系统的结构参数有关。

### 3.6.2 控制系统的型别

由于稳态误差与系统的结构有关,这里介绍一种控制系统按开环结构中积分环节个数来分类的方法。

设系统的开环传递函数有下列形式:

$$G_K(s) = \frac{K}{s^\nu} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (\tau_i s + 1) \prod_{k=1}^{m_2} (\tau_k^2 s^2 + 2\zeta_k \tau_k s + 1)}{\prod_{j=1}^{n_1} (T_j s + 1) \prod_{l=1}^{n_2} (T_l^2 s^2 + 2\zeta_l T_l s + 1)} \quad (3.63)$$

式中,  $K$  为系统的开环传递系数;  $\nu$  为系统的开环传递函数中所含积分环节的个数。

工程中,控制系统根据  $\nu$  的数值可以分为下列类型:

当  $\nu=0$  时,称为 0 型系统;

当  $\nu=1$  时,称为 I 型系统;

当  $\nu=2$  时,称为 II 型系统;

⋮

由于当  $\nu > 2$  时,对系统的稳定性是不利的,因此一般不采用,这里就不介绍了。

### 3.6.3 给定输入下的稳态误差

当只有输入  $r(t)$  作用时,系统的稳态误差称为给定稳态误差,用  $e_{ssr}$  表示。设系统的结构图如图 3.34 所示。

如果系统只受到给定输入的作用(扰动量  $d(t)=0$ ),式(3.61)变成

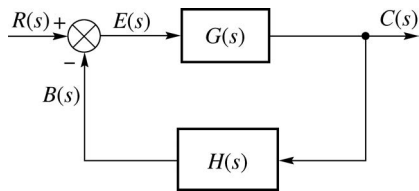


图 3.34  $d(t)=0$  时系统的典型结构图

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} R(s) \quad (3.64)$$

式中,  $G(s) = G_1(s)G_2(s)$ 。系统的给定稳态误差为

$$e_{\text{ssr}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)H(s)} R(s) \quad (3.65)$$

下面分别讨论在几种典型输入信号的作用下,不同类型系统的给定稳态误差。

### 1. 单位阶跃函数输入

当  $r(t) = 1(t)$  时, 则  $R(s) = \frac{1}{s}$ , 由式(3.65)知稳态误差为

$$e_{\text{ssr}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)H(s)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{K_p} \quad (3.66)$$

式中,  $K_p = 1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)$ ,  $K_p$  称为稳态位置误差系数。

对于 0 型系统,  $K_p = 1 + K$ ,  $e_{\text{ssr}} = \frac{1}{1 + K}$ ;

对于 I 型和 II 型系统,  $K_p \rightarrow \infty$ ,  $e_{\text{ssr}} = 0$ 。

可见,对于阶跃输入,所有 0 型系统的稳态误差为有限值,且稳态误差随开环传递系数  $K$  的增大而减小; I 型及以上系统的稳态误差为零,是无差系统。

### 2. 单位斜坡函数输入

当  $r(t) = t \cdot 1(t)$  时, 则  $R(s) = \frac{1}{s^2}$ 。稳态误差为

$$e_{\text{ssr}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot \frac{1}{s^2}}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s)H(s)}$$

令  $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)$ ,  $K_v$  称为系统的稳态速度误差系数。系统的稳态误差为

$$e_{\text{ssr}} = \frac{1}{K_v}$$

对于 0 型系统,  $K_v = 0$ ,  $e_{\text{ssr}} \rightarrow \infty$ ;

对于 I 型系统,  $K_v = K$ ,  $e_{\text{ssr}} = \frac{1}{K}$ ;

对于 II 型系统,  $K_v \rightarrow \infty$ ,  $e_{\text{ssr}} = 0$ 。

可见,0 型系统不能正常跟踪斜坡函数输入信号。

### 3. 单位抛物线函数输入

当  $r(t) = \frac{1}{2}t^2 \cdot 1(t)$  时, 则  $R(s) = \frac{1}{s^3}$ 。稳态误差为

$$e_{\text{ssr}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot \frac{1}{s^3}}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)}$$

令  $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)$ ,  $K_a$  称为系统的稳态加速度误差系数。系统的稳态误差为

$$e_{\text{ssr}} = \frac{1}{K_a}$$

对于 0 型和 I 型系统,  $K_a = 0, e_{ssr} \rightarrow \infty$ ;

对于 II 型系统,  $K_a = K, e_{ssr} = \frac{1}{K}$ 。

可见, 0 型和 I 型系统均不能正常跟踪抛物线函数输入信号。

$K_p, K_v, K_a$  分别反映了系统跟踪阶跃输入信号、斜坡输入信号和抛物线输入信号的能力。 $K_p, K_v, K_a$  越大, 相应的稳态误差越小, 精度越高。误差系数  $K_p, K_v, K_a$  与系统性能一样, 均是从系统本身的结构特征上体现系统消除稳定误差的能力, 反映了系统跟踪典型输入信号的精度。

表 3.3 列出了各型系统在不同输入信号时的稳态误差系数和给定稳态误差值。

表 3.3 输入信号作用下的稳态误差

系统型别	稳态误差系数			阶跃输入 $r(t) = A \cdot 1(t)$	斜坡输入 $r(t) = Bt \cdot 1(t)$	抛物线输入 $r(t) = \frac{C}{2}t^2 \cdot 1(t)$
	$K_p$	$K_v$	$K_a$	$e_{ssr} = \frac{A}{K_p}$	$e_{ssr} = \frac{B}{K_v}$	$e_{ssr} = \frac{C}{K_a}$
0	$1+K$	0	0	$\frac{A}{K_p}$	$\infty$	$\infty$
I	$\infty$	$K$	0	0	$\frac{B}{K_v}$	$\infty$
II	$\infty$	$\infty$	$K$	0	0	$\frac{C}{K_a}$

例 3.13 单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{10(4s + 1)}{s^2(s + 1)}$$

若输入信号  $r(t) = (1 + 2t + 3t^2) \cdot 1(t)$ , 试求系统的稳态误差。

解 (1) 应首先判别系统的稳定性。若系统不稳定, 响应不会趋于稳态, 稳态误差是没有意义的。

系统的闭环特征方程为

$$s^3 + s^2 + 40s + 10 = 0$$

列出劳斯表为

$s^3$	1	40
$s^2$	1	10
$s^1$	30	0
$s^0$	10	

劳斯表的第一列均为正数, 所以系统稳定。

(2) 求稳态误差。

由开环传递函数可知, 该系统为 II 型系统, 开环放大倍数为  $K = 10$ 。因此, 当输入  $r(t) = 1(t)$  时,  $e_{ssr1} = 0$ 。当输入  $r(t) = 2t \cdot 1(t)$  时,  $e_{ssr2} = 0$ 。当输入  $r(t) = 3t^2 \cdot 1(t)$  时,  $e_{ssr3} = 6/K$ , 所以系统的稳态误差:

$$e_{ss} = e_{ssr1} + e_{ssr2} + e_{ssr3} = 6/K = 0.6$$

由上面的分析可见, 掌握了系统结构特征与输入信号之间的规律性联系后, 就可以直接

由表 3.3 得出稳态误差,而不需要再利用终值定理逐步计算。但是值得注意的是:

- 系统必须是稳定的,否则计算误差没有意义,即分析误差之前必须首先判断系统的稳定性。
- 这种规律性的联系只适用于输入信号作用下的稳态误差,而不适用于其他信号(如扰动信号)作用下的稳态误差。
- 上述公式中的  $K$  指的是系统的开环增益,即开环传递函数应化为式(3.63)所示的标准形式,各典型环节的  $s^0$  项的系数必须为 1。
- 上述规律只适用于误差定义为式  $e(t)=r(t)-b(t)$  和单位负反馈时的  $e(t)=r(t)-c(t)$ ,若误差定义有变,则必须将系统误差化成满足上述定义的形式才能使用上述公式。

### 3.6.4 扰动作用下的稳态误差

系统在扰动作用下的稳态误差的大小,反映了系统的抗扰动能力。由于给定输入与扰动信号作用在系统的不同位置上,即使系统对某一给定输入的稳态误差为零,对同一形式的扰动作用的稳态误差未必是零;同一系统对同一形式的扰动作用,由于扰动的作用点不同,其稳态误差也不一定相同。

图 3.35 所示系统是一个 I 型系统,而且是二阶系统,所以系统是稳定的。当扰动为零时,对单位阶跃输入信号  $r(t)=1(t)$ ,系统是无差的。由于扰动作用点不同,相同的扰动会引起不同的稳态误差。

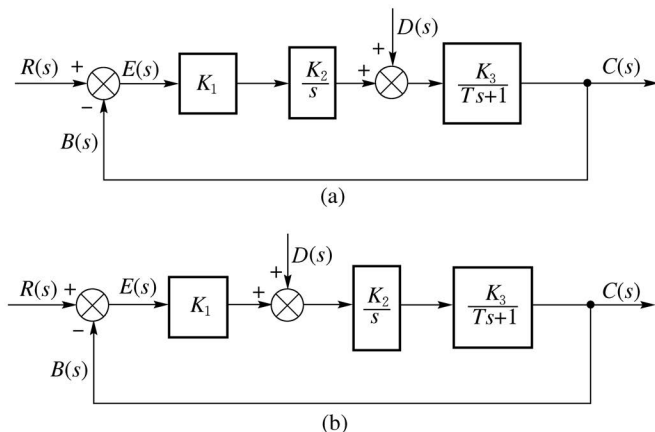


图 3.35 扰动作用下的控制系统

如果仅有单位阶跃扰动  $d(t)=1(t)$  作用于系统,根据式(3.61)可求得图 3.35(a)所示系统的扰动稳态误差为

$$e_{\text{ssd}} = -\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{\frac{K_3}{Ts+1}}{1 + \frac{K_1 K_2 K_3}{s(Ts+1)}} \cdot \frac{1}{s} = 0$$

即系统对于阶跃扰动作用的稳态误差为零。

对于图 3.35(b)所示系统仅有单位阶跃扰动作用,即  $d(t)=1(t)$ 。由式(3.61)可求得

其稳态误差为

$$e_{\text{ssd}} = -\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{K_2 K_3}{s(Ts+1)}}{1 + \frac{K_1 K_2 K_3}{s(Ts+1)}} \cdot \frac{1}{s} = -\frac{1}{K_1}$$

即系统的稳态误差与  $K_1$  成反比。增大  $K_1$  可以减小稳态误差。但是  $K_1$  过大对系统的平稳性和稳定性不利。

为了满足该系统对稳定性的要求,可将比例环节  $K_1$  用传递函数为  $K_1 \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$  的环节来代替,即将比例控制改为比例积分(PI)控制。如图 3.36 所示,这一系统对阶跃扰动是无差的。在单位斜坡扰动的作用下,其稳态误差

$$e_{\text{ssd}} = -\lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_{\text{DE}}(s) D(s) = -\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{\frac{K_2 K_3}{s(Ts+1)}}{1 + K_1 \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) \frac{K_2 K_3}{s(Ts+1)}} \cdot \frac{1}{s^2} = -\frac{T_i}{K_1}$$

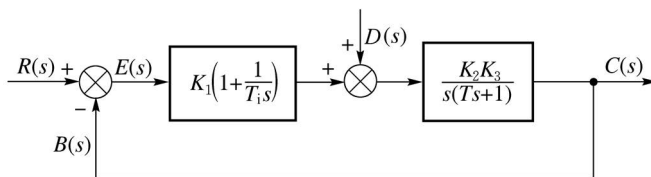


图 3.36 比例加积分控制系统

**例 3.14** 系统结构图如图 3.37 所示。已知  $r(t) = d(t) = 1(t)$ , 试设计传递函数  $G(s)$  使系统稳态误差为零。

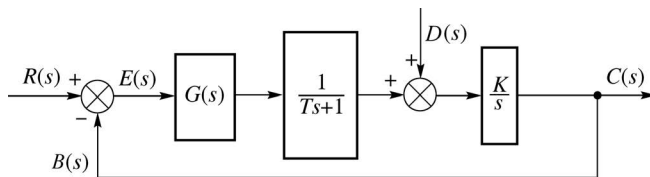


图 3.37 系统结构图

**解** 系统偏差传递函数为

$$\Phi_E(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + \frac{KG(s)}{s(Ts+1)}} = \frac{s(Ts+1)}{s(Ts+1) + KG(s)}$$

$$\Phi_{\text{DE}}(s) = \frac{E(s)}{D(s)} = \frac{\frac{-K}{s}}{1 + \frac{KG(s)}{s(Ts+1)}} = \frac{-K(Ts+1)}{s(Ts+1) + KG(s)}$$

$$e_{\text{ss}} = \lim_{s \rightarrow 0} s [\Phi_E(s)R(s) + \Phi_{\text{DE}}(s)D(s)]$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(Ts + 1)(s - K)}{s(Ts + 1) + KG(s)} = \frac{-1}{\lim_{s \rightarrow 0} G(s)}$$

令  $e_{ss} = 0$ , 得  $\lim_{s \rightarrow 0} G(s) \rightarrow \infty$ , 只要取  $G(s) = \frac{1}{s}$  即可。

### 3.6.5 改善系统稳态精度的方法

从前面的分析可知,为了减小系统的给定输入稳态误差,可以增加前向通路积分环节的个数,或增大开环传递系数。为了减小系统的扰动误差,应增加  $E(s)$  至扰动作用点之间的积分环节个数,或加大开环增益。但一般系统的串联积分环节不能超过两个,开环增益过大会使系统动态性能变坏,甚至使系统不稳定。为了解决这一问题,可以采用复合控制(或称顺馈控制、前馈控制),对误差进行补偿。

#### 1. 按给定输入补偿的复合控制

系统的结构如图 3.38 所示。 $G_1(s)$  和  $G_2(s)$  分别为系统的控制器和被控对象的传递函数,补偿器  $G_b(s)$  在系统的回路之外。因此可以先设计系统的闭环回路,以保证其良好的动态性能,然后再设计补偿器  $G_b(s)$ ,以提高系统对典型输入信号的稳态精度。

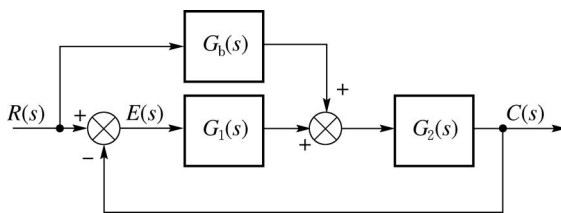


图 3.38 按给定输入补偿的复合控制

由图 3.38 知

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{[G_1(s) + G_b(s)]G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

给定误差为

$$E(s) = R(s) - C(s) = [1 - \Phi(s)]R(s) = \frac{1 - G_2(s)G_b(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}R(s)$$

由上式,若设置补偿通道使得

$$G_b(s) = \frac{1}{G_2(s)} \quad (3.67)$$

则补偿后  $E(s) = 0$  或  $C(s) = R(s)$ , 即不管输入信号形式如何,均可实现系统对给定作用的完全复现。工程上将式(3.67)称为给定作用下的全补偿条件。

#### 2. 按扰动补偿的复合控制

设干扰可以直接测量,系统的结构如图 3.39 所示,其中  $G_n(s)$  是补偿器的传递函数。仅有扰动作用时( $r(t) = 0$ )系统的输出为

$$C(s) = \frac{[1 - G_1(s)G_n(s)]G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}D(s) \quad (3.68)$$

当满足  $G_n(s) = 1/G_1(s)$  时,系统的输出完全不受扰动的影响。这种补偿方法利用了双通道原理,干扰信号一路经  $G_n(s)$ 、 $G_1(s)$  到达  $G_2(s)$  之前的综合点,另一路直接到达该

点。当满足  $G_n(s) = 1/G_1(s)$  时,两条通道的信号到达此综合点时正好大小相等、方向相反,互相完全抵消,从而实现了干扰的全补偿。但是由于  $G_n(s)$  的可实现性,实际上也只能实现近似的补偿。

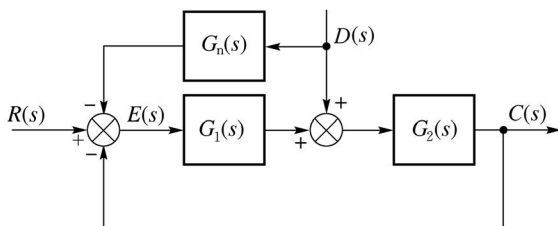


图 3.39 按扰动输入补偿的复合控制

## 3.7 控制系统时域分析的 MATLAB 应用

### 3.7.1 基于 Toolbox 工具箱的时域分析

MATLAB 的 Toolbox 工具箱提供了大量对控制系统的时域特征进行分析的函数,对连续系统和离散控制系统均能进行分析。

控制系统常用的输入为单位阶跃函数和脉冲激励函数。在 MATLAB 的控制系统工具箱中提供了求取两种输入下系统典型响应的函数,它们分别是 `step()` 和 `impulse()`,均有多种函数调用格式。

如绘制系统的阶跃响应,常见用法如下:

```
step(sys)
```

sys 是闭环系统模型名称,可为 tf、zpk、ss 模型。

**例 3.15** 某系统闭环特征方程如下,判断该系统的闭环稳定性。

$$A(s) = s^4 + 2s^3 + s^2 + 7s + 6$$

如果采用传统分析方法,要通过劳斯判据进行一系列的运算,而且系统阶次越高,计算越复杂。而利用 MATLAB,只需一个求特征根的指令便可判断,并可求出所有的闭环特征根。

```
p=[1 2 1 7 6];      %生成多项式 A(s)
roots(p)           %求多项式的特征根
```

输出为

```
ans =
    0.6160+1.6011i
    0.6160-1.6011i
   -2.3727
   -0.8592
```

特征根说明该系统有两个负实根,并有一对具有正实部的共轭复根,此系统不稳定。利用 MATLAB,可以精确求出高阶系统的闭环零点、极点,从而直接判断系统的稳定性。

**例 3.16** 典型二阶系统闭环传递函数如下,求单位阶跃响应。

$$\Phi(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 8}$$

输入指令为

```
num=[1];
den=[1 4 8];
step(num,den)    %输出响应曲线
grid            %加比例栅格
```

输出曲线如图 3.40 所示。将鼠标指针移至曲线上任意一点并单击,图形将自动显示此点对应的响应时间与幅值大小,拖曳鼠标在响应曲线上移动,可以显示任意点对应的响应时间与幅值大小。由响应曲线可见,由于该系统闭环传递系数为  $1/8=0.125$ ,故响应稳态值为 0.125,响应过程略带超调,最大超调量  $\sigma\%=(0.13-0.125)/0.125 \times 100\%=4\%$ ,调节时间  $t_s=1s$ 。

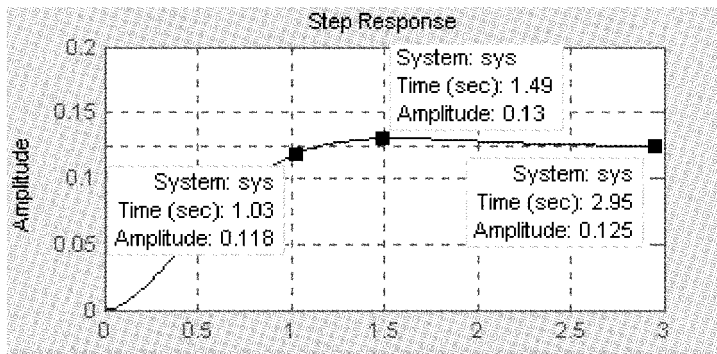


图 3.40 二阶系统的单位阶跃响应曲线

### 例 3.17 典型二阶系统

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

绘制: (1)  $\omega_n=8, \zeta$  分别取 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 1.0, 2.0 时的单位阶跃响应; (2)  $\zeta=8, \omega_n$  分别取 2, 4, 6, 8, 10, 12 时的单位脉冲响应。

解 在命令窗口中用 zeta 表示  $\zeta$ , wn 表示  $\omega_n$ , 指令如下:

```
wn=8;
num=wn^2;                %wn^2 表示 ωn 的平方
zeta=[0.1:0.2:0.7,1.0,2.0]; %ζ 的取值范围,由行向量生成.0.1 是第一个元素,0.2 是步长,
                             %0.7 是最后一个元素.0.1:0.2:0.7 表示元素: 0.1,0.3,0.5,0.7

figure(1)
hold on                  %输出一个图形(1),绘制以下循环中产生的每条曲线
for i=1:6
    den=[1,2*zeta(i)*wn,wn^2]; %分母系数
    step(num,den)            %输出单位阶跃响应曲线
end
title('step response')    %标定输出图形的名称
hold off                 %图形完成
zeta=0.707;
```

```

wn=[2:2:12]; % $\omega_n$  的取值范围,由行向量生成
figure(2)
hold on
for j=1:6
    num=wn(j)^2;
    den=[1,2*zeta*wn(j),wn(j)^2];
    impulse(num,den) %输出单位脉冲响应曲线
end
end
title('impulse response')
hold off

```

运行结果如图 3.41 所示,由图可以直观地看出  $\omega_n$ 、 $\zeta$  变化对系统响应的影响。

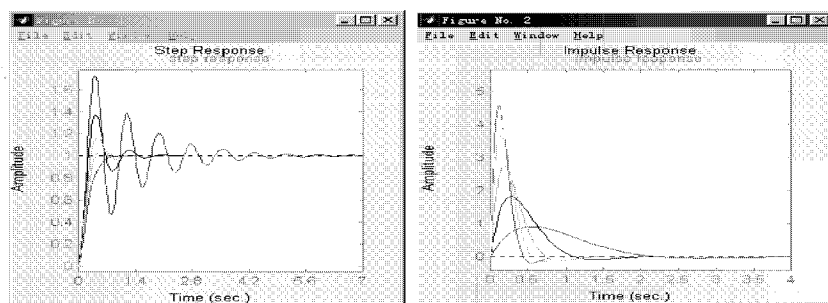



图 3.41 典型二阶系统的单位阶跃响应和单位冲击响应曲线

与大多数计算机语言一样, MATLAB 的基本程序结构有顺序、循环、分支三种。实现循环结构的方式为 for-end(指定循环次数)和 while-end(不指定循环次数);实现分支结构的方式为 if-else-then 和 switch-case 语句, else 子句中也可嵌套 if 语句,形成 else if 结构,以实现多路选择。

### 3.7.2 Simulink

#### 1. Simulink 简介

Simulink 是建立控制系统第 4 种数学模型-动态结构图的软件包,可建立起直观形象的系统模型,实现动态系统建模、仿真、分析,它使 MATLAB 的功能得到进一步的扩展和增强。可在实际系统制作之前,实时调试及整定系统,提高系统的性能,减少设计系统过程中反复修改的时间,高效率地开发系统。并可实现多工作环境图文件互用和数据交换,如 Simulink 与 MATLAB, Simulink 与 FORTRAN、C 和 C++,从而把理论研究和工程实践有机地结合在一起。

建立模型是进行仿真的前提。在 Simulink 命令窗口中运行 Simulink,或选择命令窗口中 File|New|Model 命令,或直接单击图标 ,都可以进入 Simulink 浏览器即仿真器或模块库,如图 3.42 所示。

该模型库包括 Continuous(连续系统)、Discrete(离散时间模型)、Function&Tables(函数与表)、Sources(信号源)、Sinks(输出方式)、Nonlinear(非线性环节)等模型库。每个标准模块库中存储有多个相应的基本功能模块,单击某个模块即可选择并打开相应的基本功能

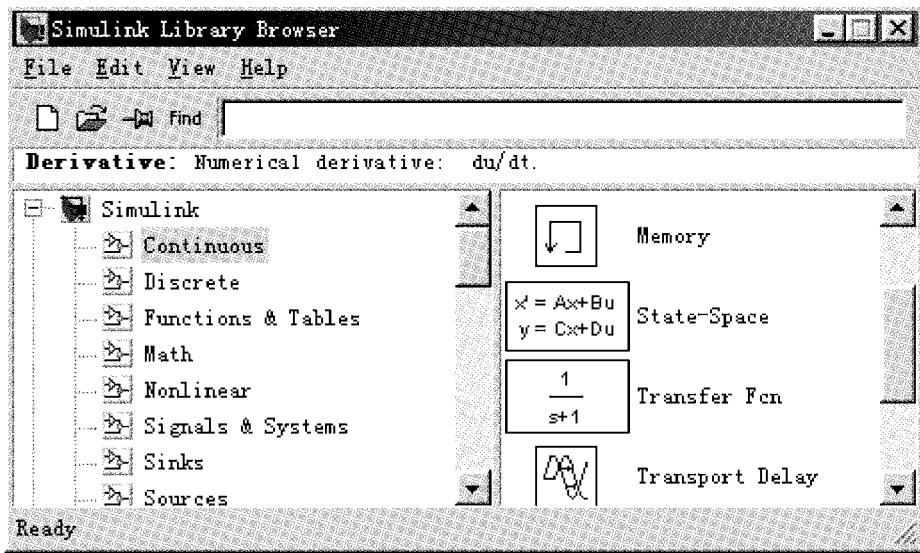


图 3.42 Simulink 模块库窗口

模块。

常用模块及功能见附表 B.1~附表 B.6。

## 2. 模型建立与仿真

### (1) 模型创建。

打开 Simulink 模块库窗口,并出现新建窗口 Untitled。根据要建立的动态结构图,从模块库中选择所需模块,按住鼠标左键拖入建模窗口后松开,即建立该模块。

按照模块之间的关系,单击前一模块的输出端,光标变为(+)后,拖曳十字图符到下一模块的输入端,然后释放鼠标键,即可将模块连接在一起。用鼠标左键选中该模块,拖曳模块的四个边角,即可随意设置其大小;模块也可移动、删除、复制,方法与 Windows 基本操作相同。

### (2) 仿真结果输出。

输出模块库提供了几个实用的输出模块。其中,Scope、XY Graph 和 Display 是用来直接观察仿真输出的。

Scope: 将信号显示在类似示波器的窗口内,可以放大、缩小窗口,也可以打印仿真结果的波形曲线。

XY Graph: 绘制 X-Y 二维的曲线图形,两个坐标刻度范围可以设置。

Display: 将仿真结果的数据以数字形式显示出来。

只要将这三种示波器图标放在控制系统模型结构图的输出端,就可以在系统仿真时,同时看到三种示波器的仿真结果。Display 将数据结果直接显示在模块窗口中,而 Scope 和 XY Graph 会自动产生新的窗口。

### (3) 仿真操作。

模型创建完成后,如果模块参数不合适,可双击该模块打开模块属性表,修改模块的内部参数,然后单击 Apply 按钮和 Close 按钮,完成修改。模块的标题也可修改:单击标题,使之增亮反显,输入新的名称,然后在窗口其他任意地方单击一下。

Simulink 中动态仿真数据的计算是由数值积分实现的,必须根据需要选取适当的算法和参数。可选择 Simulink|Parameters 命令,打开算法和参数控制面板,对算法、仿真的起止时间、积分步长、允许误差等进行设置。

当参数调整合适后,选择建模窗口中 Simulink|Start 命令启动仿真过程,就可在选中的输出设备上看到仿真结果。

(4) 模型保存。

在建模窗口中选择 File|Save 命令保存文件。以后在 MATLAB 指令窗中直接输入模型文件名字,就可打开该模型的方框图窗口,对其进行编辑、修改和仿真。在模块库窗口中,单击“打开”图标也可打开已存在的模型。

### 3. 基于 Simulink 的时域分析

#### 例 3.18 典型控制系统的仿真。

某单位负反馈系统开环传递函数如下,建立该闭环系统的动态结构图,并求出单位阶跃响应曲线。

$$G_K(s) = \frac{2}{s(s^2 + 4s + 1)}$$

(1) 建立用于分析的控制系统模型——动态结构图(如图 3.43 所示)。

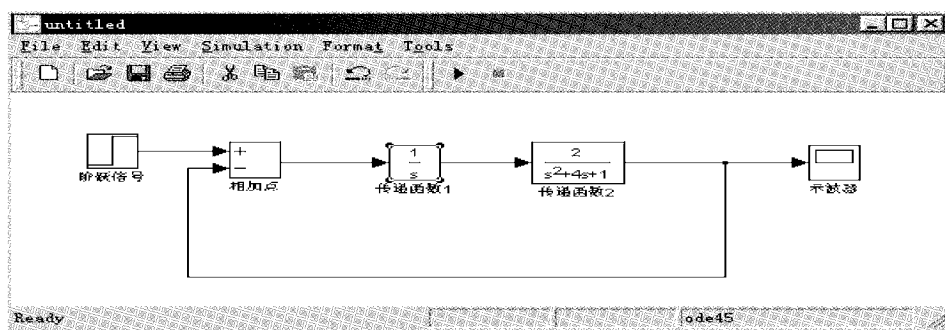


图 3.43 控制系统仿真的动态结构图

由两个传递函数模块 Transfer Fcn、一个输入信号模块——阶跃信号 Step、一个输出模块——示波器 Scope 和一个相加点模块 Sum,就可构成一个标准的闭环控制系统。

各个模块的参数可以随意改动,例如,可将 Simulink 给定的阶跃响应输入模块的跳跃时间从 1 改为 0 时刻。首先,双击阶跃输入模块的图标,弹出如图 3.44 所示的对话框。用户可以将其中的 Step time(阶跃时刻)后面的文本框内的参数改为“0”;同时,也可以修改 Initial value(初始值)和 Final value(终止值)后面的文本框内容,根据需要定义阶跃信号。

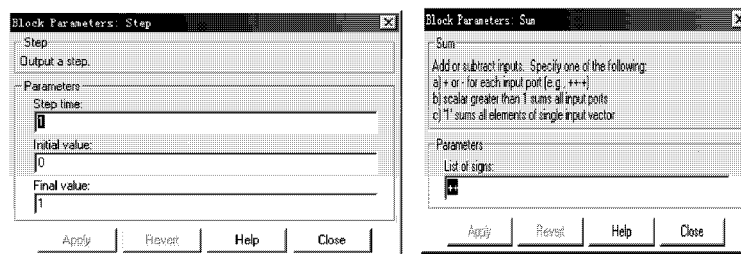


图 3.44 阶跃输入模块和加法器的属性表

由于本系统为负反馈系统,所以需要修改加法器内的符号(默认值为+ +)进行修改。双击加法器图标,弹出属性对话框,在 List of signs 后面的文本框内输入“+ -”,这时,新的加法器的两个输入信号将一正一负,实现负反馈的连接方式。

控制对象由传递函数模块给出,在 Linear 模块库中选择传递函数模块的图标,并将其拖放到模块窗口中。此时的传递函数的默认值为  $1/(s+1)$ ,如果需要改变参数,双击图标弹出如图 3.45 所示的对话框,并分别在 Numerator(分子)和 Denominator(分母)后面的文本框内输入所需传递函数的分子和分母多项式系数,阶次从高到低,如某项不存在,该项系数为 0。

## (2) 系统仿真。

### ① 单位阶跃响应。

启动系统仿真,双击“示波器”图标,打开示波器窗口,输出波形如图 3.46 所示。

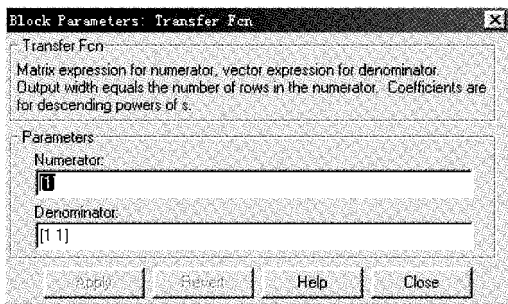


图 3.45 传递函数模块的属性表

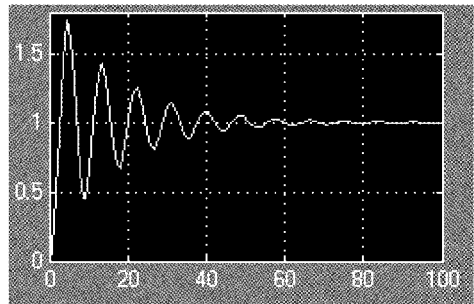


图 3.46 单位阶跃响应波形

观察“示波器”中的波形,可研究系统的时域性能,为方便读数,可利用示波器的坐标调整功能,简单地用鼠标在需要细化的坐标处单击一下,示波器将自动使波形显示的范围更合适。

此系统的单位阶跃响应为衰减振荡,最大超调量  $\sigma\% = 75\%$ ,调节时间为 50s,稳态值为 1,稳态误差为 0,说明该系统为一阶无差度系统,型别为 I 型,有一个积分环节。

### ② 系统稳定性分析。

设置“传递函数 2”为振荡环节  $K/(s^2 + 4s + 1)$ ,由劳斯判据可得,  $K < 4$  时闭环系统稳定。分别取开环传递系数  $K = 4, 6$ ,示波器显示响应曲线分别为等幅振荡和发散振荡形式,符合理论分析(见图 3.47)。

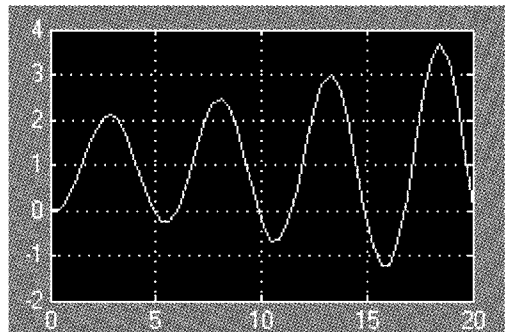
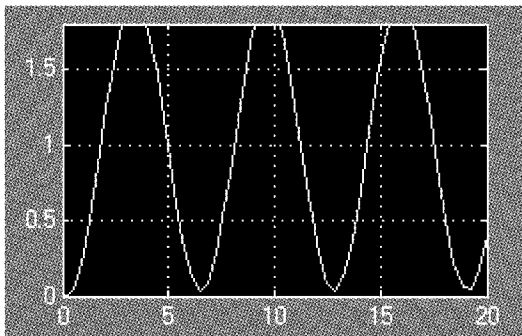


图 3.47 不同开环传递系数下的单位阶跃响应的平稳性比较

此外,还可修改传递函数 2 振荡环节的阻尼比  $\zeta$ ,根据仿真结果考查系统响应曲线受  $\zeta$  变化的影响,分析系统的动态性能。

利用 `linmod(linmods2)` 指令可以将 Simulink 中的动态结构图转换为状态空间模型(ss 模型),从而转换为传递函数或零点、极点模型,利用编程方法进行分析。

MATLAB 提供了丰富的虚拟仪器,用常规实验仪器可以完成的实验在 Simulink 中都能完成,而且有建模简单、参数调整方便、结果可视性好、分析手段多样等优点; Simulink 可以大大简化控制系统的仿真分析。

## 习题

3.1 已知有以下单位负反馈系统的开环传递函数:

$$(1) G_K(s) = \frac{20}{s(s+1)(s+5)} \quad (2) G_K(s) = \frac{10(s+1)}{s(s-1)(s+5)}$$

$$(3) G_K(s) = \frac{0.1(s+2)}{s(s+0.5)(s+0.8)(s+3)} \quad (4) G_K(s) = \frac{5s+1}{s^3(s+1)(s+2)}$$

试分别用劳斯判据判定系统的稳定性。

3.2 试用劳斯判据判定具有下列特征方程式的系统的稳定性。若系统不稳定,指出在  $s$  平面右半部的特征根的数目。

$$(1) s^3 + 20s^2 + 9s + 100 = 0 \quad (2) s^3 + 20s^2 + 9s + 200 = 0$$

$$(3) s^4 + 3s^3 + s^2 + 3s + 1 = 0 \quad (4) s^5 + s^4 + 4s^3 + 4s^2 + 2s + 1 = 0$$

$$(5) s^6 + 3s^5 + 5s^4 + 4s^3 + 3s^2 + 6s + 1 = 0$$

3.3 设单位负反馈系统的开环传递函数分别为

$$(1) G_K(s) = \frac{K}{(s+2)(s+4)} \quad (2) G_K(s) = \frac{K}{s(s-1)(0.2s+1)}$$

$$(3) G_K(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-1)(0.2s+1)}$$

试确定使系统稳定的  $K$  的取值范围。

3.4 已知单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G_K(s) = \frac{4}{2s^3 + 10s^2 + 13s + 1}$$

试用劳斯判据判断系统是否稳定和是否具有  $\sigma=1$  的稳定裕量。

3.5 设单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G_K(s) = \frac{Ks(s+12)}{(s+5)(s+3)(s+6)}$$

若要求闭环特征方程根的实部分别小于 0、-1、-2,试问  $K$  值应怎么选取?

3.6 系统结构图如图 3.48 所示。已知传递函数  $G(s) = \frac{10}{0.2s+1}$ ,现采用加负反馈的方法,将调节时间  $t_s$  减小为原来的 1/10,并保证总放大倍数不变。试确定参数  $K_h$  和  $K_0$  的数值。

3.7 某单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G_K(s) = \frac{K}{s(0.1s + 1)}$$

试分别求出  $K=10$  和  $K=20$  时,系统的阻尼比  $\zeta$  和无阻尼自然振荡角频率  $\omega_n$ ,以及单位阶跃响应的超调量  $\sigma\%$  和调节时间  $t_s$ 。并讨论  $K$  的大小对过渡过程性能指标的影响。

3.8 设图 3.49 为某控制系统的结构图,试确定参数  $K_1$  和  $K_2$ ,使系统的  $\omega_n = 6$ ,  $\zeta = 1$ 。

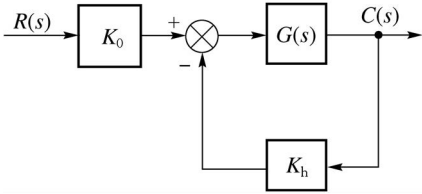


图 3.48 系统结构图

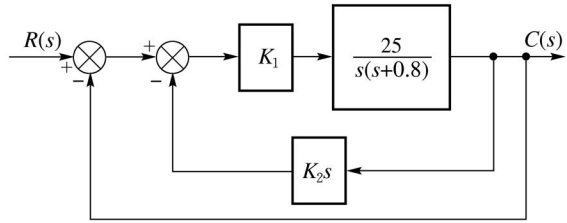


图 3.49 控制系统结构图

3.9 如图 3.50 所示,若某系统加入速度负反馈  $\tau s$ ,为使系统阻尼比  $\zeta = 0.5$ ,试确定:(1)  $\tau$  的取值;(2)系统的动态性能指标  $\sigma\%$  和  $t_s$ 。

3.10 实验测得单位负反馈二阶系统的单位阶跃响应曲线如图 3.51 所示。试确定该系统的开环传递函数  $G_K(s)$ 。

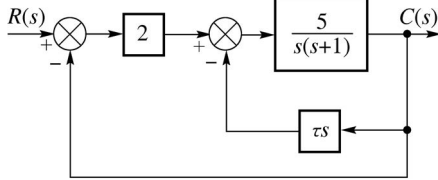


图 3.50 加入速度负反馈的系统

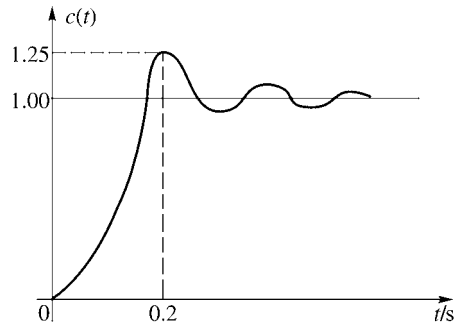


图 3.51 二阶系统的阶跃响应曲线

3.11 已知某系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10(s + 2.5)}{(s + 10)(s + 2.6)(s^2 + s + 1)}$$

试估算该系统的动态性能指标  $\sigma\%$  和  $t_s$ 。

3.12 已知单位负反馈系统开环传递函数

$$(1) G_K(s) = \frac{20}{(0.1s + 1)(s + 2)}$$

$$(2) G_K(s) = \frac{7(s + 1)}{s(s + 4)(s^2 + 2s + 2)}$$

$$(3) G_K(s) = \frac{10(s + 0.1)}{s^2(s^2 + 6s + 10)}$$

试分别求出各系统的稳态位置误差系数  $K_p$ 、稳态速度误差系数  $K_v$ 、稳态加速度误差系数  $K_a$ ; 计算当输入信号  $r(t) = (1 + t + t^2) \cdot 1(t)$  时的稳态误差  $e_{ssr}$ 。

3.13 系统如图 3.52 所示。试判断系统闭环稳定性,并确定系统的稳态误差  $e_{ssr}$  及  $e_{ssd}$ 。

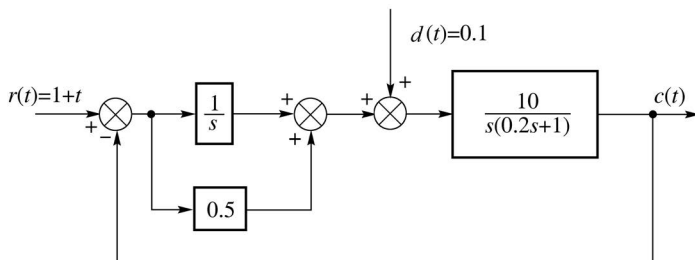


图 3.52 反馈控制系统

3.14 设控制系统的结构图如图 3.53 所示。系统的给定信号是斜坡函数  $r(t) = Rt \cdot 1(t)$ ; 扰动作用是阶跃函数  $d(t) = D \cdot 1(t)$ 。

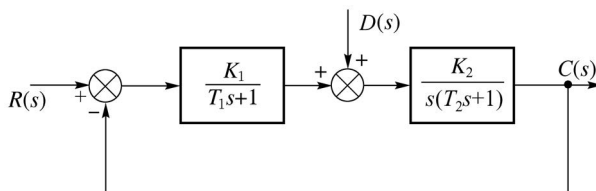


图 3.53 控制系统

- (1) 试计算系统的稳态误差。
- (2) 系统的环节增益  $K_1$ 、 $K_2$  均为可调参数,但是其约束条件为  $K_1 K_2 \leq K_0$ ,为了减小系统的总体稳态误差, $K_1$ 、 $K_2$  应如何调整?
- (3) 若采用按给定补偿的复合控制,使系统的型别数提高到 II 型,试确定补偿通道的传递函数  $G_b(s)$ 。
- (4) 若采用按扰动补偿的复合控制,使系统无稳态误差地响应任意形式的扰动信号,试确定扰动补偿通道的传递函数  $G_n(s)$ 。

## MATLAB 实验

M3.1 已知连续系统的开环传递函数为

$$G_K(s) = \frac{3s^4 + 2s^3 + 5s^2 + 4s + 6}{s^5 + 3s^4 + 4s^3 + 2s^2 + 7s + 2}$$

判断闭环系统稳定性。

M3.2 已知二阶系统的闭环传递函数如下所示:

$$\Phi(s) = \frac{9}{s^2 + 3s + 2}$$

- (1) 求该系统单位阶跃响应曲线;
- (2) 求该系统时域指标  $\sigma\%$  和  $t_s$ 。

M3.3 已知典型二阶系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

其中  $\omega_n = 6$ , 绘制系统在  $\zeta = 0.1, 0.2, \dots, 1.0, 2.0$  时的单位阶跃响应。

M3.4 已知三阶系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{100s + 200}{s^3 + 1.4s^2 + 100s + 100}$$

绘制系统的单位阶跃响应和单位脉冲响应曲线。

M3.5 对图 3.54 所示系统, 利用 Simulink 构建系统动态结构图, 分别求解当  $K = 10$  和  $K = 10^3$  时:

- (1) 系统的单位阶跃响应曲线;
- (2) 系统单位阶跃响应下的时域指标:  $\sigma\%$ 、 $t_s$  和稳态误差  $e_{ssr}$ 。

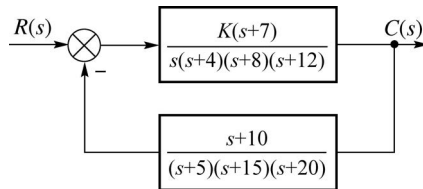


图 3.54 系统结构图