第 5 章 传感器和执行器容错控制

CHAPTER 5

在控制系统设计中，当系统的传感器和执行器发生故障时，传统的反馈控制设计会导致较差的性能，甚至整个闭环系统失去稳定性[1]，因此，控制系统的容错控制研究得到了广泛的重视。研究控制系统的容错控制具有重要意义。

5.1 执行器自适应容错滑模控制

在实际系统中，由于执行器繁复的工作，所以执行器是控制系统中最容易发生故障的部分。一般的执行器故障类型包括卡死故障、部分或完全失效故障、饱和故障、浮动故障。对于非线性系统执行器故障的容错控制问题已经有很多有效的解决方法，其中，自适应补偿控制是一种行之有效的方法。

5.1.1 控制问题描述

本节针对控制系统中执行器容错的情况进行探讨，控制系统框图如图 5.1 所示。

考虑如下 SISO 系统：

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = bu + d(t)\end{cases} \tag{5.1}$$

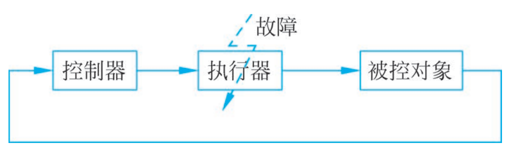


图 5.1 执行器容错下的控制系统

其中，u 为控制输入，x_1 和 x_2 分别为位置和速度信号，b 为未知常数且符号已知，$d(t)$为扰动，$|d(t)| \leqslant D$。

取

$$u = \sigma u_c \tag{5.2}$$

其中，$0 < \sigma < 1$ 为未知常数。

取位置指令为 x_d，跟踪误差为 $e = x_1 - x_d$，则 $\dot{e} = x_2 - \dot{x}_d$。控制任务为在执行器出现故障时，通过设计控制律，实现 $t \to \infty$ 时，$e \to 0$，$\dot{e} \to 0$。

5.1.2 控制律的设计与分析

设计滑模函数为

$$s = ce + \dot{e}$$

其中，$c>0$。则

$$\dot{s}=c\dot{e}+\ddot{e}=c\dot{e}+\dot{x}_2-\ddot{x}_d=c\dot{e}+b\sigma u_c+d(t)-\ddot{x}_d=c\dot{e}+\theta u_c+d(t)-\ddot{x}_d$$

其中，$\theta=b\sigma$。

取 $p=\frac{1}{\theta}$，设计 Lyapunov 函数为

$$V=\frac{1}{2}s^2+\frac{|\theta|}{2\gamma}\tilde{p}^2$$

其中，$\tilde{p}=\hat{p}-p$，$\gamma>0$。则

$$\dot{V}=s\dot{s}+\frac{|\theta|}{\gamma}\tilde{p}\dot{\hat{p}}=s(c\dot{e}+\theta u_c+d(t)-\ddot{x}_d)+\frac{|\theta|}{\gamma}\tilde{p}\dot{\hat{p}}$$

取

$$\alpha=ks+c\dot{e}-\ddot{x}_d+\eta\mathrm{sgn}s,\quad k>0,\eta\geqslant D \tag{5.3}$$

则 $c\dot{e}-\ddot{x}_d=\alpha-ks-\eta\mathrm{sgn}s$，从而

$$\dot{V}=s(\alpha-ks-\eta\mathrm{sgn}s+\theta u_c+d(t))+\frac{|\theta|}{\gamma}\tilde{p}\dot{\hat{p}}\leqslant s(\alpha-ks+\theta u_c)+\frac{|\theta|}{\gamma}\tilde{p}\dot{\hat{p}}$$

设计控制律和自适应律为

$$u_c=-\hat{p}\alpha \tag{5.4}$$

$$\dot{\hat{p}}=\gamma s\alpha\,\mathrm{sgn}b \tag{5.5}$$

其中，$\mathrm{sgn}b=\mathrm{sgn}\theta$。则

$$\begin{aligned}\dot{V}&\leqslant s(\alpha-ks-\theta\hat{p}\alpha)+\frac{|\theta|}{\gamma}\tilde{p}\gamma s\alpha\,\mathrm{sgn}\theta\\&\leqslant s(\alpha-ks-\theta\hat{p}\alpha+\theta\alpha\tilde{p})\\&\leqslant s(\alpha-ks-\theta\alpha p)\leqslant -ks^2\leqslant 0\end{aligned}$$

由于 $V\geqslant0$，$\dot{V}\leqslant0$，则 V 有界，从而 s 和 $\tilde{p}$ 有界。

由 $\dot{V}\leqslant -ks^2$ 可得

$$\int_0^t\dot{V}\mathrm{d}t\leqslant -k\int_0^t s^2\mathrm{d}t$$

即

$$V(\infty)-V(0)\leqslant -k\int_0^\infty s^2\mathrm{d}t$$

当 $t\to\infty$ 时，由于 $V(\infty)$ 有界，则 s、$\dot{s}$ 和 $\int_0^\infty s^2\mathrm{d}t$ 有界，则由 Barbalat 引理（引理 5.2），当 $t\to\infty$ 时，$s\to0$，从而 $e\to0$，$\dot{e}\to0$。

5.1.3 仿真实例

被控对象取式（5.1），$d(t)=10\sin t$，$b=0.10$，取位置指令为 $x_d=\sin t$，对象的初始状态为［0.5，0］，取 $c=15$，采用控制律式（5.3）、式（5.4）和自适应律式（5.5），$k=5$，$\gamma=10$，$\eta=$

10.10。取 $\hat{p}(0)=1.0$。

为了防止抖振，控制器中采用饱和函数 sat(s)代替符号函数 sgn(s)，即

$$\mathrm{sat}(s)=\begin{cases}1, & s>\Delta \\ ks, & |s|\leqslant\Delta, \quad k=1/\Delta \\ -1, & s<-\Delta\end{cases}$$

其中，Δ 为边界层。

取 $\Delta=0.05$。当仿真时间 $t=5$ 时，取 $\sigma=0.20$，仿真结果如图 5.2 和图 5.3 所示。

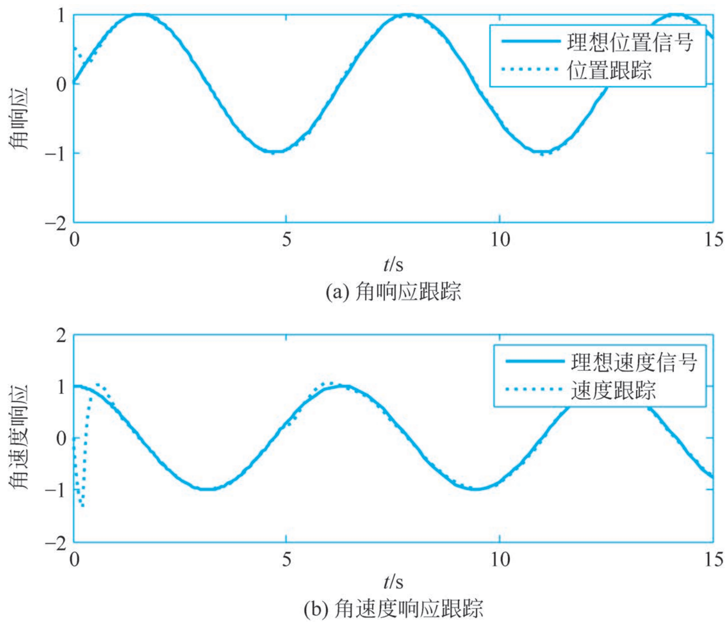


图 5.2　被控对象取式(5.1)的位置和速度跟踪

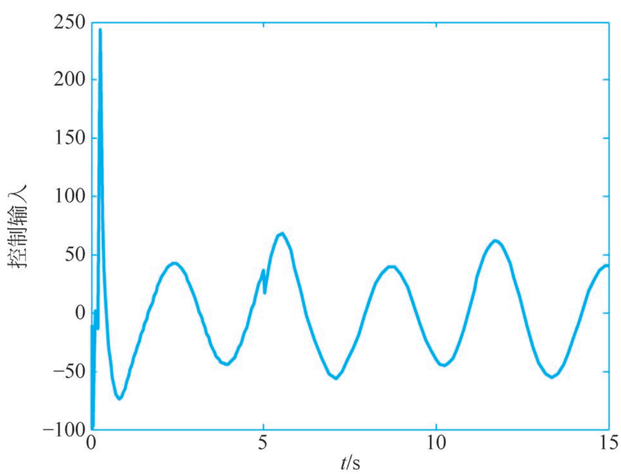
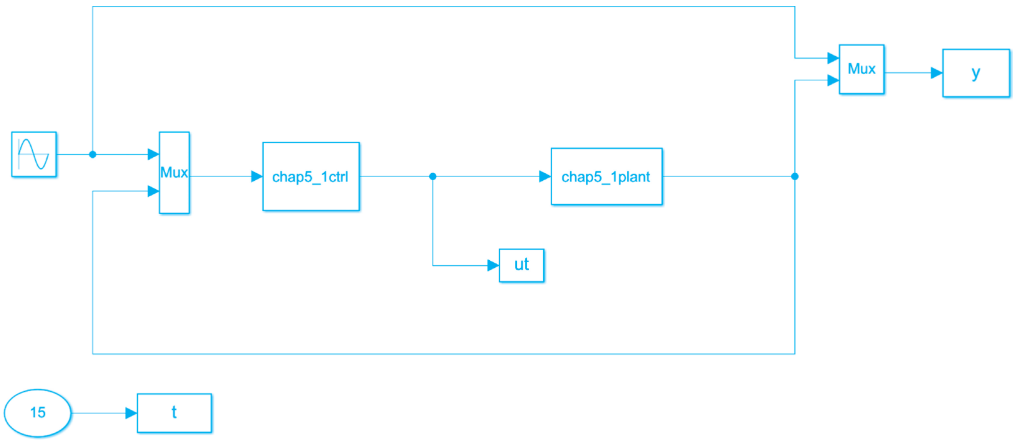


图 5.3　被控对象取式(5.1)的控制输入

仿真程序：

(1) Simulink 主程序：chap5_1sim. mdl。



(2) 控制器 S 函数：chap5_1ctrl. m。

(3) 被控对象 S 函数：chap5_1plant. m。

(4) 作图程序：chap5_1plot. m。

5.2 基于传感器和执行器容错的滑模控制

本节针对控制系统中传感器和执行器同时容错的情况进行探讨，控制系统框图如图 5.4 所示。

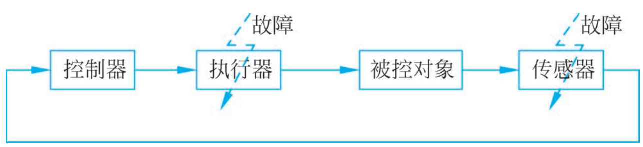


图 5.4 传感器和执行器同时容错下的控制系统

5.2.1 系统描述

考虑如下二阶模型

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u + d(t) \end{cases} \tag{5.6}$$

传感器和执行器的容错取

$$x_i^{\mathrm{F}} = \rho_i x_i, \quad i = 1, 2 \tag{5.7}$$

$$u = \rho_0 v \tag{5.8}$$

其中，$d(t)$为加在输入上的扰动，$|d(t)| \leqslant D$，ρ_0 和 ρ_i 为未知常数，$0 < \rho_{i0} \leqslant \rho_i \leqslant 1$，$0 < \rho_{00} \leqslant \rho_0 \leqslant 1$。

传感器实测输出为 x_1^{F} 和 x_2^{F}。控制目标为：(1)设计控制律 v，使得闭环系统内所有信号有界；(2)$t \to \infty$时，$x_1 \to 0$，$x_2 \to 0$。

5.2.2 控制器设计与分析

采用滑模控制算法设计控制律,定义滑模函数为

$$s=cx_1^{\mathrm{F}}+x_2^{\mathrm{F}},\quad c>0 \tag{5.9}$$

则

$$s=c(\rho_1x_1)+\rho_2x_2=c\rho_1x_1+\rho_2\dot{x}_1=\rho_2\left(c\frac{\rho_1}{\rho_2}x_1+\dot{x}_1\right)$$

显然,$s\to0$ 时,$x_1\to0$,$x_2\to0$ 且指数收敛。

由于$\dot{x}_2^{\mathrm{F}}=\rho_2\dot{x}_2=\rho_2(u+d)=\rho_2\rho_0v+\rho_2d$,$\dot{x}_1^{\mathrm{F}}=\rho_1x_2=\dfrac{\rho_1}{\rho_2}x_2^{\mathrm{F}}$,则

$$\dot{s}=c\dot{x}_1^{\mathrm{F}}+\dot{x}_2^{\mathrm{F}}=c\dot{x}_1^{\mathrm{F}}+\rho_2\rho_0v+\rho_2d=c\frac{\rho_1}{\rho_2}x_2^{\mathrm{F}}+\rho_2\rho_0v+\rho_2d$$

取 $\phi=c\dfrac{\rho_1}{\rho_2}$,$\mu=\rho_2\rho_0$,则

$$\dot{s}=\phi x_2^{\mathrm{F}}+\mu v+\rho_2d$$

由于 ϕ 未知,采用自适应估计方法,设计 Lyapunov 函数为

$$V=\frac{1}{2}s^2+\frac{1}{2\gamma_1}\tilde{\phi}^2$$

其中,$\tilde{\phi}=\hat{\phi}-\phi$,$\gamma_1>0$。则

$$\dot{V}=s\dot{s}+\frac{1}{\gamma_1}\dot{\hat{\phi}}\tilde{\phi}=s(\phi x_2^{\mathrm{F}}+\mu v+\rho_2d)+\frac{1}{\gamma_1}\dot{\hat{\phi}}\tilde{\phi}$$

由于 μ 未知,设计控制律为

$$\alpha=k_1s+\hat{\phi}x_2^{\mathrm{F}}+\eta\operatorname{sgn}s,\quad k_1>0,\eta\geqslant D \tag{5.10}$$

$$\bar{v}=-k_2s+\alpha,\quad k_2>0 \tag{5.11}$$

$$v=N(k)\bar{v} \tag{5.12}$$

$$\dot{k}=\gamma_2s\bar{v},\quad \gamma_2>0 \tag{5.13}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}&=s(\alpha-(k_1s+\hat{\phi}x_2^{\mathrm{F}}+\eta\operatorname{sgn}s)+\phi x_2^{\mathrm{F}}+\mu N(k)\bar{v}+\rho_2d)+\frac{1}{\gamma_1}\dot{\hat{\phi}}\tilde{\phi}+\frac{1}{\gamma_2}\dot{k}-\frac{1}{\gamma_2}\dot{k}\\
&=s(\alpha-(k_1s+\hat{\phi}x_2^{\mathrm{F}}+\eta\operatorname{sgn}s)+\phi x_2^{\mathrm{F}}+\mu N(k)\bar{v}+\rho_2d)+\frac{1}{\gamma_1}\dot{\hat{\phi}}\tilde{\phi}+\frac{1}{\gamma_2}\dot{k}-s(-k_2s+\alpha)\\
&=s(-k_1s-\eta\operatorname{sgn}s-\tilde{\phi}x_2^{\mathrm{F}}+\mu N(k)\bar{v}+\rho_2d)+\frac{1}{\gamma_1}\dot{\hat{\phi}}\tilde{\phi}+\frac{1}{\gamma_2}\dot{k}+k_2s^2
\end{aligned}$$

设计自适应律为

$$\dot{\hat{\phi}}=\gamma_1sx_2^{\mathrm{F}} \tag{5.14}$$

由于$\dfrac{1}{\gamma_2}\dot{k}=s\bar{v}$,则

$$\begin{aligned}
\dot{V}&=s(-k_1s-\eta\operatorname{sgn}s+\mu N(k)\bar{v}+\rho_2d)+\frac{1}{\gamma_2}\dot{k}+k_2s^2\leqslant-k_1s^2+\mu N(k)\frac{1}{\gamma_2}\dot{k}+\frac{1}{\gamma_2}\dot{k}+k_2s^2\\
&=-(k_1-k_2)s^2+\mu N(k)\frac{1}{\gamma_2}\dot{k}+\frac{1}{\gamma_2}\dot{k}
\end{aligned}$$

对上式等号两边积分可得

$$V(t)-V(0)+(k_1-k_2)\int_0^t s^2(\tau)\mathrm{d}\tau \leqslant \int_0^t \frac{1}{\gamma_2}\mu N(k(\tau))\dot{k}(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_0^t \frac{1}{\gamma_2}\dot{k}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

取足够大的 k_1，使得下式成立

$$k_1-k_2>0 \tag{5.15}$$

则根据引理 5.1，$V(t)-V(0)+(k_1-k_2)\int_0^t s^2(\tau)\mathrm{d}\tau$ 有界，则 s^2、$\int_0^t s^2\mathrm{d}t$ 和 $\tilde{\phi}$ 有界，则由 Barbalat 引理(引理 5.2)，当 $t\to\infty$ 时，$s\to 0$，即 $x_1\to 0$，$x_2\to 0$。

需要说明的是，由于无法设计带有跟踪误差的滑模函数，本方法无法解决跟踪控制问题。取位置指令为 y_{d}，滑模函数为

$$s=c(x_1^{\mathrm{F}}-y_{\mathrm{d}})+(x_2^{\mathrm{F}}-\dot{y}_{\mathrm{d}})=c\rho_1 x_1+\rho_2\dot{x}_1-cy_{\mathrm{d}}-\dot{y}_{\mathrm{d}}$$

上式中，当 $s\to 0$ 时，无法保证 $x_1\to y_{\mathrm{d}}$，$x_2\to\dot{y}_{\mathrm{d}}$。

5.2.3 仿真实例

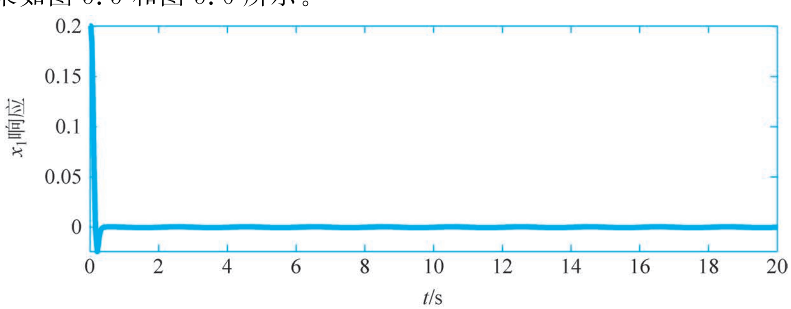
考虑模型式(5.6)，取 $d=\sin\pi t$，$\rho_0=0.50$，$\rho_1=0.95$，$\rho_1=0.95$，参数设计为：取 $c=20$，为满足不等式(5.15)，取 $k_1=4$，$k_2=1$，采用控制律式(5.10)～式(5.12)和自适应律式(5.14)，自适应律式(5.13)中的初值取 1.0，$\gamma_1=1.0$，自适应律式(5.14)中取 $\gamma_1=1.0$，控制律式(5.10)中，取 $\eta=D+0.10=1.1$。

为了防止抖振，控制器中采用饱和函数 $\mathrm{sat}(s)$ 代替符号函数 $\mathrm{sgn}(s)$，即

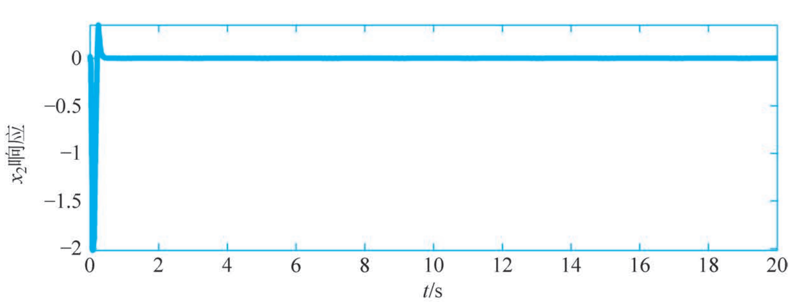
$$\mathrm{sat}(s)=\begin{cases}1, & s>\Delta\\ Ms, & |s|\leqslant\Delta, \quad M=1/\Delta\\ -1, & s<-\Delta\end{cases}$$

其中，Δ 为边界层，取 $\Delta=0.05$。

仿真结果如图 5.5 和图 5.6 所示。



(a) x_1响应



(b) x_2响应

图 5.5 考虑模型式(5.6)的状态响应

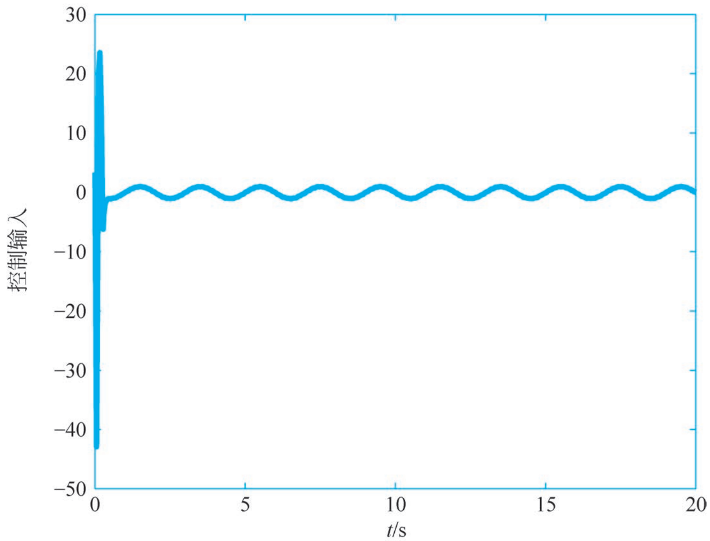
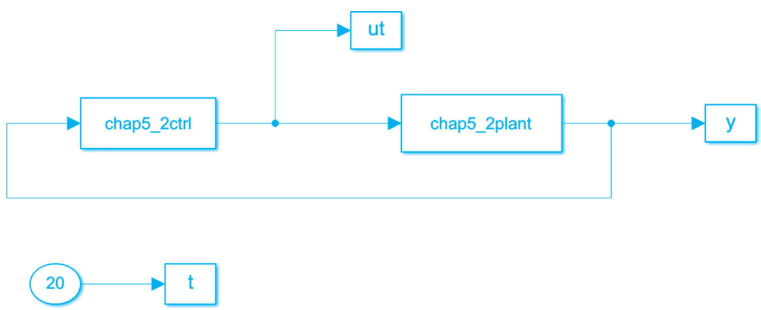


图 5.6 考虑模型式(5.6)的控制输入

仿真程序：

(1) Simulink 主程序：chap5_2sim.mdl。



(2) 控制器 S 函数：chap5_2ctrl.m。

(3) 被控对象 S 函数：chap5_2plant.m。

(4) 作图程序：chap5_2plot.m。

5.3 执行器时变容错下的跟踪控制——下界方法

5.3.1 问题描述

在实际工程中，由于电池供电能力下降、设备老化和操作失误等原因，可能存在执行器时变故障。因此，需要设计执行器时变容错下的控制算法。

考虑如下动力学模型：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2) + u \end{cases} \tag{5.16}$$

其中，x_1 和 x_2 分别为位置和速度，$f(x_1, x_2)$为已知函数，执行器存在时变故障：

$$u = b(t)v + \delta(t) \tag{5.17}$$

满足如下假设：

假设 1：$b(t)$ 和 $\delta(t)$ 连续有界，$0 < b_{\min} \leqslant b(t) \leqslant b_{\max}$，$|\delta(t)| \leqslant \bar{\delta}$，$\forall t \geqslant 0$。

假设 2：x_{d} 连续可导，且各阶导数连续有界。

则

$$\dot{x}_2 = b(t)v + \delta(t) + f(x_1, x_2)$$

控制目标为给定位置指令信号 x_{d}，通过设计控制律 v，实现 x_{d} 的跟踪，即 $t \to \infty$ 时，$x_1 \to x_{\mathrm{d}}$，$x_2 \to \dot{x}_{\mathrm{d}}$。

5.3.2 控制算法设计与分析

定义 $e = x_1 - x_{\mathrm{d}}$，则

$$\dot{e} = x_2 - \dot{x}_{\mathrm{d}}$$

$$\ddot{e} = b(t)v + \delta(t) + f(x_1, x_2) - \ddot{x}_{\mathrm{d}}$$

取辅助变量

$$s = he + \dot{e}$$

其中，$h > 0$，为待设计参数。

定义如下辅助变量：

$$\bar{\omega} = h(x_2 - \dot{x}_{\mathrm{d}}) + f(x_1, x_2) - \ddot{x}_{\mathrm{d}} + cs + \frac{1}{2}s \tag{5.18}$$

其中，$c > 0$，为待设计参数。

定义 $\mu = \dfrac{1}{b_{\min}}$，$\hat{\mu}$ 为 μ 估计值，$\tilde{\mu} = \hat{\mu} - \mu$，设计控制律和自适应律如下：

$$v = -\frac{s\hat{\mu}^2\bar{\omega}^2}{s\hat{\mu}\bar{\omega}\tanh\left(\dfrac{s\hat{\mu}\bar{\omega}}{\tau}\right) + \rho} \tag{5.19}$$

$$\dot{\hat{\mu}} = \gamma s\bar{\omega} - \gamma\eta\hat{\mu} \tag{5.20}$$

其中，$\tau, \rho, \gamma, \eta > 0$ 为待设计参数。由于

$$\dot{s} = h\dot{e} + \ddot{e} = h(x_2 - \dot{x}_{\mathrm{d}}) + b(t)v + \delta(t) + f(x_1, x_2) - \ddot{x}_{\mathrm{d}}$$

由式(5.18)得 $h(x_2 - \dot{x}_{\mathrm{d}}) + f(x_1, x_2) - \ddot{x}_{\mathrm{d}} = \bar{\omega} - cs - \dfrac{1}{2}s$，则

$$\dot{s} = b(t)v + \delta(t) + \bar{\omega} - cs - \frac{1}{2}s$$

构造 Lyapunov 函数为

$$V = \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2\gamma\mu}\tilde{\mu}^2$$

则

$$\dot{V} = s\dot{s} + \frac{1}{\gamma\mu}\tilde{\mu}\dot{\hat{\mu}} = s\left(b(t)v + \bar{\omega} - cs - \frac{1}{2}s\right) + s\delta(t) + \frac{1}{\gamma\mu}\tilde{\mu}\dot{\hat{\mu}} \leqslant s\left(b(t)v + \bar{\omega} - cs - \frac{1}{2}s\right) + \frac{1}{2}(s^2 + \bar{\delta}^2) + \frac{1}{\gamma\mu}\tilde{\mu}\dot{\hat{\mu}} = s(b(t)v + \bar{\omega} - cs) + \frac{1}{2}\bar{\delta}^2 + \frac{1}{\gamma\mu}\tilde{\mu}\dot{\hat{\mu}}$$

将控制律式(5.19)和自适应律式(5.20)代入上式，可得 $\dot{V}$ 不等式为

$$\dot{V} \leqslant s\left(-\frac{b(t)s\hat{\mu}^2\bar{\omega}^2}{s\hat{\mu}\bar{\omega}\tanh\left(\frac{s\hat{\mu}\bar{\omega}}{\tau}\right)+\rho}+\bar{\omega}-cs\right)+\frac{1}{2}\bar{\delta}^2+\frac{1}{\mu}\tilde{\mu}(s\bar{\omega}-\eta\hat{\mu})$$

由于 $\mu=\frac{1}{b_{\min}}$，则

$$b(t)s^2\hat{\mu}^2\bar{\omega}^2 \geqslant \frac{1}{\mu}s^2\hat{\mu}^2\bar{\omega}^2 \geqslant \frac{1}{\mu}s^2\hat{\mu}^2\bar{\omega}^2-\frac{1}{\mu}\rho^2=\frac{1}{\mu}(|s\hat{\mu}\bar{\omega}|-\rho)(|s\hat{\mu}\bar{\omega}|+\rho)$$

上式两边同时除以 $|s\hat{\mu}\bar{\omega}|+\rho$，可得

$$-\frac{b(t)s^2\hat{\mu}^2\bar{\omega}^2}{|s\hat{\mu}\bar{\omega}|+\rho} \leqslant \frac{1}{\mu}(\rho-|s\hat{\mu}\bar{\omega}|) \leqslant \frac{1}{\mu}(\rho-s\hat{\mu}\bar{\omega})$$

由于 $|\tanh(x)|\leqslant 1$，则

$$|s\hat{\mu}\bar{\omega}| \geqslant s\hat{\mu}\bar{\omega}\tanh\left(\frac{s\hat{\mu}\bar{\omega}}{\tau}\right)$$

可得

$$-\frac{b(t)s^2\hat{\mu}^2\bar{\omega}^2}{s\hat{\mu}\bar{\omega}\tanh\left(\frac{s\hat{\mu}\bar{\omega}}{\tau}\right)+\rho} \leqslant -\frac{b(t)s^2\hat{\mu}^2\bar{\omega}^2}{|s\hat{\mu}\bar{\omega}|+\rho}$$

则

$$-\frac{b(t)s^2\hat{\mu}^2\bar{\omega}^2}{s\hat{\mu}\bar{\omega}\tanh\left(\frac{s\hat{\mu}\bar{\omega}}{\tau}\right)+\rho} \leqslant \frac{1}{\mu}(\rho-s\hat{\mu}\bar{\omega})$$

将上式代入 $\dot{V}$ 不等式中，可得

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leqslant \frac{1}{\mu}(\rho-s\hat{\mu}\bar{\omega})+s(\bar{\omega}-cs)+\frac{1}{2}\bar{\delta}^2+\frac{1}{\mu}\tilde{\mu}(s\bar{\omega}-\eta\hat{\mu})=-cs^2+\frac{1}{2}\bar{\delta}^2+\\ &\quad \frac{1}{\mu}(\rho-s\hat{\mu}\bar{\omega}+\mu s\bar{\omega}+\tilde{\mu}s\bar{\omega}-\eta\tilde{\mu}\hat{\mu})=-cs^2+\frac{1}{2}\bar{\delta}^2+\frac{1}{\mu}(\rho-\eta\tilde{\mu}\hat{\mu})\end{aligned}$$

由于

$$-\tilde{\mu}\hat{\mu}=-\tilde{\mu}(\tilde{\mu}+\mu)=-\tilde{\mu}^2-\tilde{\mu}\mu \leqslant -\tilde{\mu}^2+\frac{1}{2}\tilde{\mu}^2+\frac{1}{2}\mu^2=-\frac{1}{2}\tilde{\mu}^2+\frac{1}{2}\mu^2$$

则

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leqslant -cs^2+\frac{1}{2}\bar{\delta}^2+\frac{1}{\mu}\left(\rho-\frac{\eta}{2}\tilde{\mu}^2+\frac{\eta}{2}\mu^2\right)\\ &=-cs^2-\frac{\eta}{2\mu}\tilde{\mu}^2+\frac{1}{2}\bar{\delta}^2+\frac{\rho}{\mu}+\frac{\eta}{2}\mu \leqslant -\chi V+d\end{aligned}$$

其中，$\chi=\min\{2c,\eta\gamma\}$，$d=\frac{1}{2}\bar{\delta}^2+\frac{\rho}{\mu}+\frac{\eta}{2}\mu$。

求解不等式 $\dot{V}\leqslant-\chi V+d$，可得

$$0 \leqslant V(t) \leqslant \frac{d}{\chi}+\left(V(0)-\frac{d}{\chi}\right)\mathrm{e}^{-\chi t}$$

则

$$\lim_{t\to\infty}V(t) \leqslant \frac{d}{\chi}$$

因此 $\forall t \in [0, +\infty)$，$V(t)$有界，通过选取合适的控制器参数，可调整 $V(t)$的最终收敛范围，尽可能保证收敛范围在零点的小邻域内。

对 $\forall \varepsilon > \sqrt{\dfrac{2d}{\chi}}$，存在有限时间 t_0，使得 $t > t_0$ 时，$|s| < \varepsilon$，即 $|he + \dot{e}| < \varepsilon$，可证 $t \to \infty$ 时，$|e| < \dfrac{\varepsilon}{h}$，又由 $|he + \dot{e}| < \varepsilon$ 可得 $|\dot{e}| < 2\varepsilon$，即位置跟踪误差和速度跟踪误差一致有界，如果 ε 足够小，则 $t \to \infty$ 时，$e \to 0$，$\dot{e} \to 0$。证明详见本章附录。

5.3.3 仿真实例

针对被控对象式(5.16)，$f(x_1, x_2) = 3x_2$，被控对象的初始值为$[0.20, 0]$，取 $b(t) = 10 + \sin t$，$\delta(t) = 10\sin 0.1t$。采用控制律和自适应律为式(5.19)和式(5.20)，取 $x_d = \sin t$，$\hat{\mu}(0) = 0$。参数选取 $h = 10$，$c = 10$，$\rho = 1.0$，$\tau = 0.10$，$\gamma = 10$，$\eta = 1.0$，仿真结果如图 5.7 和图 5.8 所示。

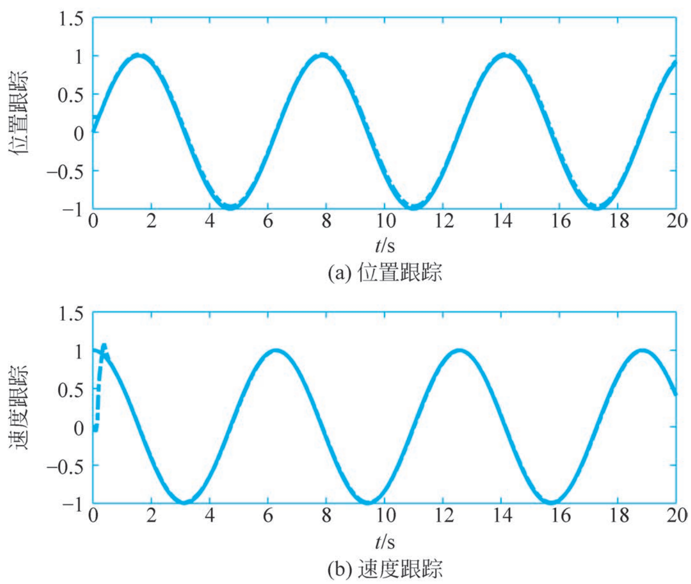


图 5.7 针对被控对象式(5.16)的位置和速度跟踪

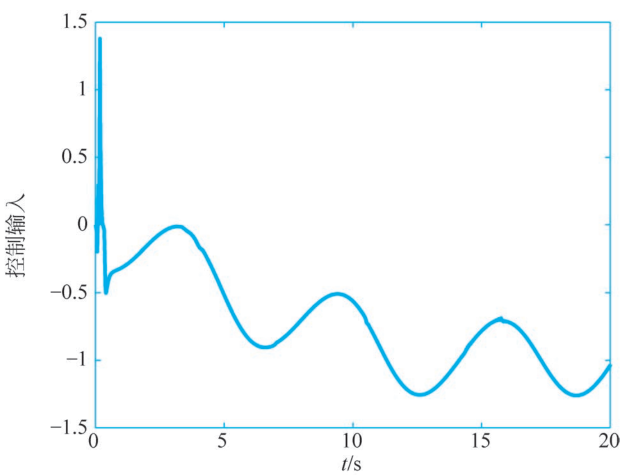
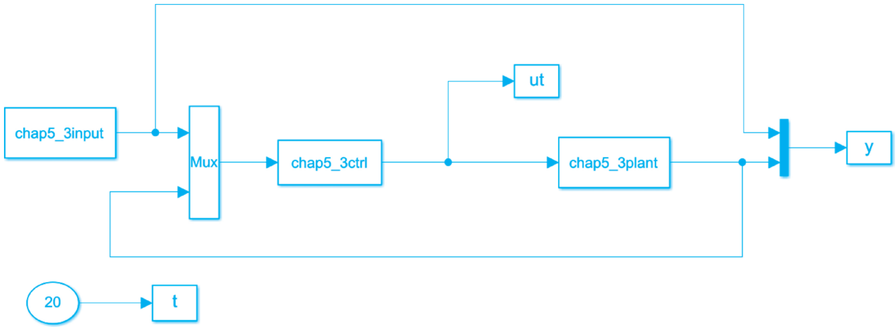


图 5.8 针对被控对象式(5.16)的控制输入

仿真程序：

（1）Simulink 主程序：chap5_3sim. mdl。



（2）输入信号子程序：chap5_3input. m。

（3）控制器子程序：chap5_3ctrl. m。

（4）被控对象子程序：chap5_3plant. m。

（5）作图程序：chap5_3plot. m。

5.4　执行器时变故障下轨迹跟踪控制——N 函数方法

5.4.1　问题描述

在实际工程中，由于电池供电能力下降、设备老化和操作失误等原因，可能存在执行器时变故障。因此，需要设计执行器时变容错下的控制算法。

考虑动力学模型

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2) + u \end{cases} \tag{5.21}$$

其中，x_1 和 x_2 分别为位置和速度，$f(x_1, x_2)$为已知函数，执行器存在时变故障：

$$u = b(t)v + \delta(t)$$

其中，$b(t)$和 $\delta(t)$连续有界。则

$$\dot{x}_2 = b(t)v + \delta(t) + f(x_1, x_2) \tag{5.22}$$

控制目标为给定位置指令信号 x_d，通过设计控制律 v，实现 x_d 的跟踪，即 $t \to \infty$时，$x_1 \to x_d$，$x_2 \to \dot{x}_d$。

5.4.2　控制算法设计与分析

定义 $e = x_1 - x_d$，则

$$\dot{e} = x_2 - \dot{x}_d$$

$$\ddot{e} = b(t)v + \delta(t) + f(x_1, x_2) - \ddot{x}_d$$

取辅助变量

$$s = he + \dot{e} \tag{5.23}$$

其中，$h > 0$，为待设计参数。则

$$\dot{s} = h\dot{e} + \ddot{e} = h\dot{e} + b(t)v + \delta(t) + f(x_1, x_2) - \ddot{x}_d$$

定义 $\mu=\sup\limits_{t\geqslant 0}|\delta(t)|$，$\hat{\mu}$ 为 μ 估计值，$\tilde{\mu}=\hat{\mu}-\mu$。定义如下辅助变量

$$\bar{\omega}=cs+\hat{\mu}\,\mathrm{sgn}s+h\dot{e}+f(x_1,x_2)-\ddot{x}_\mathrm{d} \tag{5.24}$$

其中，$c>0$，为待设计参数。

设计控制律和自适应律如下：

$$\dot{\hat{\mu}}=\gamma\,|\,s\,| \tag{5.25}$$

$$v=-M(k)\bar{\omega} \tag{5.26}$$

其中，$\gamma>0$，为待设计参数，$M(k)$ 为 Nussbaum 函数，定义如下：

$$M(k)=e^{k^2}\cos(k)$$

其中，k 由下式产生：

$$\dot{k}=\rho s\bar{\omega} \tag{5.27}$$

其中，$\rho>0$，为待设计参数。

构造 Lyapunov 函数为

$$V=\frac{1}{2}s^2+\frac{1}{2\gamma}\tilde{\mu}^2 \tag{5.28}$$

则

$$\dot{V}=s\dot{s}+\frac{1}{\gamma}\tilde{\mu}\dot{\hat{\mu}}=s(h\dot{e}+b(t)v+\delta(t)+f(x_1,x_2)-\ddot{x}_\mathrm{d})+\frac{1}{\gamma}\tilde{\mu}\dot{\hat{\mu}}$$

根据定义，有

$$s\delta\leqslant\mu\,|\,s\,|=\mu s\cdot\mathrm{sgn}s$$

则

$$\begin{aligned}\dot{V}&\leqslant s(h\dot{e}+b(t)v+\mu\,\mathrm{sgn}s+f(x_1,x_2)-\ddot{x}_\mathrm{d})+\frac{1}{\gamma}\tilde{\mu}\dot{\hat{\mu}}\\&\leqslant s(h\dot{e}+b(t)v+\hat{\mu}\,\mathrm{sgn}s-\tilde{\mu}\,\mathrm{sgn}s+f(x_1,x_2)-\ddot{x}_\mathrm{d})+\frac{1}{\gamma}\tilde{\mu}\dot{\hat{\mu}}\\&=s(h\dot{e}+b(t)v+\hat{\mu}\,\mathrm{sgn}s+f(x_1,x_2)-\ddot{x}_\mathrm{d})+\frac{1}{\gamma}\tilde{\mu}(\dot{\hat{\mu}}-\gamma\,|\,s\,|)\end{aligned}$$

将控制律式(5.26)和自适应律式(5.31)代入上式，可得

$$\dot{V}\leqslant-cs^2-sb(t)M(k)\bar{\omega}+s\bar{\omega}$$

由自适应律式(5.27)可知，$s\bar{\omega}=\dfrac{\dot{k}}{\rho}$，则

$$\dot{V}\leqslant-cs^2-\frac{\dot{k}}{\rho}(b(t)M(k)-1)$$

对上式两边积分，可得

$$\begin{aligned}V(t)-V(0)&\leqslant-\int_0^t cs^2(\lambda)\mathrm{d}\lambda-\frac{1}{\rho}\int_0^t\dot{k}(b(\lambda)M(k(\lambda))-1)\mathrm{d}\lambda\\&\leqslant-\int_0^t cs^2(\lambda)\mathrm{d}\lambda-\frac{1}{\rho}\int_{k(0)}^{k(t)}(b(\lambda)M(s)-1)\mathrm{d}s\\&\leqslant-\int_0^t cs^2(\lambda)\mathrm{d}\lambda+\frac{1}{\rho}\Delta(t)\end{aligned}$$

其中，$\Delta(t)=-\int_{k(0)}^{k(t)}(b(\lambda)M(s)-1)\mathrm{d}s$。

则

$$0\leqslant V(t)\leqslant-\int_0^t cs^2(\lambda)\mathrm{d}\lambda+\frac{1}{\rho}\Delta(t)+V(0)$$

根据文献[5]可知，$k(t)$有界，结合引理5.1，则$\Delta(t)$和$V(t)$有界，由式(5.28)可知，s和$\tilde{\mu}$有界，则e和$\dot{e}$有界。结合式(5.24)可知，$\tilde{\omega}$有界，根据式(5.26)可知，v有界，又由于$b(t)$和$\delta(t)$有界，则$\ddot{e}$有界，从而$\dot{s}$有界。综上分析，在所设计的控制律下，闭环信号全局一致有界。

由式$\Delta(t)$和$V(t)$有界可知，$\int_0^t s^2(\lambda)\mathrm{d}\lambda$有界，由于$s$和$\dot{s}$有界，根据Barbalat引理(引理5.2)可得$\lim\limits_{t\to\infty}s=0$，结合$s=he+\dot{e}$可知，$\lim\limits_{t\to\infty}e=0$，$\lim\limits_{t\to\infty}\dot{e}=0$。

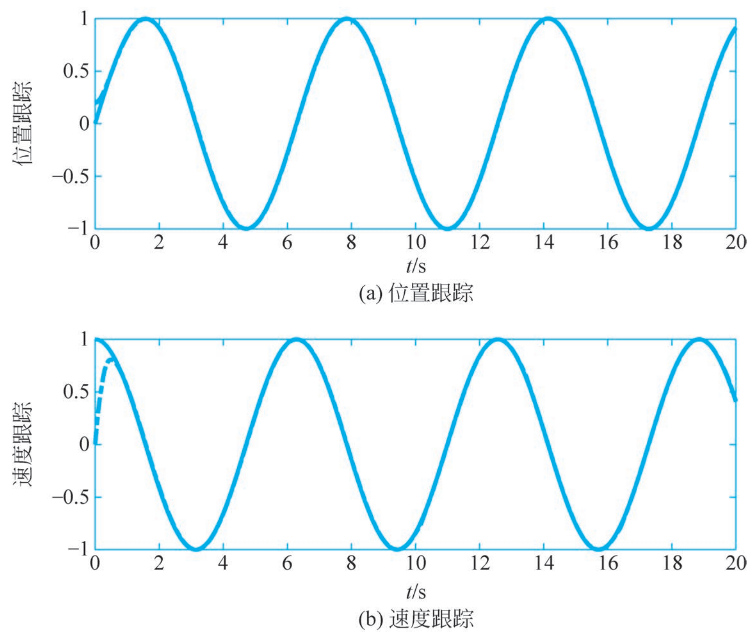
5.4.3　仿真实例

针对被控对象式(5.21)，取$b(t)=10+\sin t$，$\delta(t)=10\sin t$，$f(x_1,x_2)=3x_2$，被控对象的初始值为[0.20，0]，采用控制律和自适应律为式(5.25)、式(5.26)和式(5.27)，取$x_\mathrm{d}=\sin t$，$h=10$，$c=10$，$\rho=10$，$\gamma=10$，$\hat{\mu}(0)=0$，$k(0)=0$。为了防止抖振，控制器中采用饱和函数sat(s)代替符号函数sgn(s)，即

$$\operatorname{sat}(s)=\begin{cases}1, & s>\Delta\\ Ms, & |s|\leqslant\Delta,\quad M=1/\Delta\\ -1, & s<-\Delta\end{cases}$$

其中，Δ为边界层，取$\Delta=0.15$。

仿真结果如图5.9和图5.10所示。



(a) 位置跟踪

(b) 速度跟踪

图5.9　针对被控对象式(5.21)的位置和速度跟踪

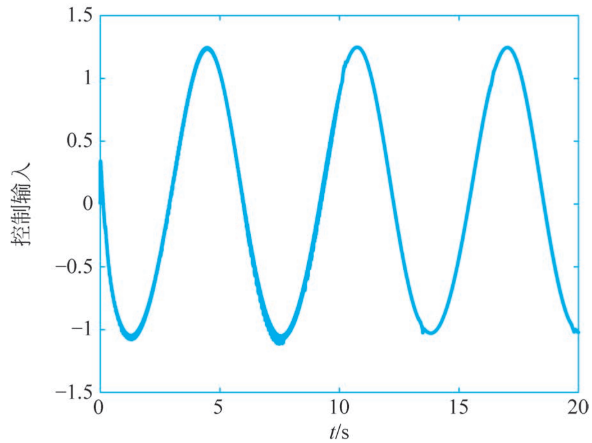
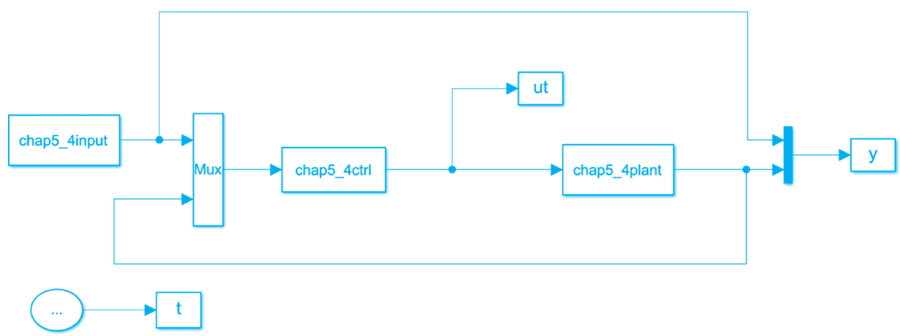


图 5.10　针对被控对象式(5.21)的控制输入

仿真程序：

(1) Simulink 主程序：chap5_4sim.mdl。



(2) 输入信号子程序：chap5_4input.m。

(3) 控制器子程序：chap5_4ctrl.m。

(4) 被控对象子程序：chap5_4plant.m。

(5) 作图程序：chap5_4plot.m。

附录

定义 5.1[4]　如果函数 $N(\chi)$满足下面条件，则 $N(\chi)$为 N 函数。N 函数满足如下双边特性

$$\lim_{k\to\pm\infty}\sup\frac{1}{k}\int_0^k N(s)\mathrm{d}s=\infty$$

$$\lim_{k\to\pm\infty}\inf\frac{1}{k}\int_0^k N(s)\mathrm{d}s=-\infty$$

根据 Nussbaum 函数定义[4]，定义 Nussbaum 函数为

$$N(k)=k^2\cos(k)$$

其中，k 为实数。

引理 5.1[2]　如果 $V(t)$ 和 $k(\cdot)$ 在 $\forall t\in[0,t_f)$ 上为光滑函数，$V(t)\geqslant 0$，$N(\cdot)$ 为光滑的 N 函数，θ_0 为非零常数，如果满足

$$V(t)\leqslant\int_0^t(\theta_0 N(k(\tau))+1)\dot{k}(\tau)\mathrm{d}\tau+\text{const},\quad \forall t\in[0,t_f)$$

则 $V(t)$、$k(t)$ 和 $\int_0^t(\theta_0 N(k(\tau))+1)\dot{k}(\tau)\mathrm{d}\tau$ 在 $\forall t\in[0,t_f)$ 上有界。

引理 5.2[3]（Barbalat 引理）　对于函数 $f(t)$，若：(1) $f(t)$ 有界；(2) $\dot{f}(t)$ 有界；(3) $\int_0^\infty f^2(t)\mathrm{d}t$ 存在且有界。则有 $t\to\infty$ 时，$f(t)\to 0$。

引理 5.3　定义 $s(t)=\dot{x}(t)+cx(t)$，其中 $c>0$，如果 $s(t)$ 有界，且 $\lim\limits_{t\to\infty}|s(t)|\leqslant\varepsilon$，则

$$\lim_{t\to\infty}|x(t)|\leqslant\frac{\varepsilon}{c},\quad \lim_{t\to\infty}|\dot{x}|\leqslant 2\varepsilon$$

证明： 由于 $s(t)$ 有界，则对于 $\forall\varepsilon_1>0$，存在时间 $T_1>0$，使得当 $t>T_1$ 时，$|s(t)|\leqslant\varepsilon+\varepsilon_1$，则当 $t\to\infty$ 时，可取 $\varepsilon_1\to 0$。

针对式 $s(t)=\dot{x}(t)+cx(t)$，两边乘 e^{ct}，可得

$$s(t)\mathrm{e}^{ct}=\dot{x}(t)\mathrm{e}^{ct}+cx(t)\mathrm{e}^{ct}=\frac{\mathrm{d}[x(t)\mathrm{e}^{ct}]}{\mathrm{d}t}$$

对上式在 (T_1,t) 时间段上进行积分，得

$$\int_{T_1}^t s(\tau)\mathrm{e}^{c\tau}\mathrm{d}\tau=x(t)\mathrm{e}^{ct}-x(T_1)\mathrm{e}^{cT_1}$$

则

$$\begin{aligned}
x(t)&=x(T_1)\mathrm{e}^{c(T_1-t)}+\mathrm{e}^{-ct}\int_{T_1}^t s(\tau)\mathrm{e}^{c\tau}\mathrm{d}\tau\\
|x(t)|&=\left|x(T_1)\mathrm{e}^{c(T-t)}+\mathrm{e}^{-ct}\int_{T_1}^t s(\tau)\mathrm{e}^{c\tau}\mathrm{d}\tau\right|\\
&\leqslant|x(T_1)|\mathrm{e}^{c(T_1-t)}+\mathrm{e}^{-ct}\int_{T_1}^t|s(\tau)|\mathrm{e}^{c\tau}\mathrm{d}\tau\\
&\leqslant|x(T_1)|\mathrm{e}^{c(T_1-t)}+\mathrm{e}^{-ct}\int_{T_1}^t(\varepsilon+\varepsilon_1)\mathrm{e}^{c\tau}\mathrm{d}\tau\\
&=|x(T)_1|\mathrm{e}^{c(T_1-t)}+\frac{\varepsilon+\varepsilon_1}{c}\mathrm{e}^{-ct}(\mathrm{e}^{ct}-\mathrm{e}^{cT_1})\\
&=|x(T_1)|\mathrm{e}^{c(T_1-t)}+\frac{\varepsilon+\varepsilon_1}{c}[1-\mathrm{e}^{c(T_1-t)}]\\
&=\left(|x(T_1)|-\frac{\varepsilon+\varepsilon_1}{c}\right)\mathrm{e}^{c(T_1-t)}+\frac{\varepsilon+\varepsilon_1}{c}
\end{aligned}$$

由于 $\lim\limits_{t\to\infty}\left(|x(T_1)|-\frac{\varepsilon+\varepsilon_1}{c}\right)\mathrm{e}^{c(T_1-t)}=0$，对于 $\forall\varepsilon_2>0$，则存在 $T_2>T_1$，使得当 $t>T_2$ 时，$\left(|x(T_1)|-\frac{\varepsilon+\varepsilon_1}{c}\right)\mathrm{e}^{c(T_1-t)}\leqslant\varepsilon_2$，当 $t\to\infty$ 时，可取 $\varepsilon_2\to 0$，则

$$|x(t)|\leqslant\varepsilon_2+\frac{\varepsilon+\varepsilon_1}{c}\quad(t>T_2)$$

由于 $\varepsilon_1>0$ 和 $\varepsilon_2>0$ 可以任意选择，则对于 $\forall\varepsilon_3>0$，存在 $\varepsilon_1>0$ 和 $\varepsilon_2>0$ 满足 $\varepsilon_3=\varepsilon_2+\frac{\varepsilon_1}{c}>0$，当 $t\to\infty$ 时，可取 $\varepsilon_3\to 0$，则 $|x(t)|\leqslant\varepsilon_3+\frac{\varepsilon}{c}$，即 $\lim\limits_{t\to\infty}|x(t)|\leqslant\frac{\varepsilon}{c}$。

由 $\dot{x}=s-cx$ 可得 $|\dot{x}|\leqslant|s|+c|x|$，则

$$\lim_{t\to\infty}|\dot{x}|\leqslant\varepsilon+c\frac{\varepsilon}{c}=2\varepsilon$$

思考题

1. 传感器和执行器容错控制问题有何特点?
2. 传感器和执行器容错是怎么引起的? 简述其工程意义。
3. 传感器容错控制和执行器容错控制在控制律设计和分析上有何区别?
4. 在本章所介绍的容错控制律中，影响控制性能的参数有哪些? 如何调整这些参数使控制性能得到提升?
5. 当前解决控制容错控制问题有哪些方法? 每种方法有何优点和局限性?
6. 如果将模型式(5.1)改为非线性系统，如何设计控制器实现容错控制? 如何进行稳定性分析?
7. 作出包含传感器容错和执行器容错的控制系统框图和算法流程图。
8. 以 VTOL 飞行器的传感器和执行器容错控制为例，给出具体的算法，并仿真说明。
9. 在传感器容错中，如果 ρ_i 为未知时变但有界的系数，如何设计稳定的容错控制律?
10. 在执行器容错中，如果 ρ_0 为未知时变但有界的系数，如何设计稳定的容错控制律?
11. 执行器时变容错的特点如何? 与常系数容错有何区别?
12. 基于传感器时变容错的控制器如何设计和分析?

参考文献

[1] YU X H，WANG T，GAO H J. Adaptive neural fault-tolerant control for a class of strict-feedback nonlinear systems with actuator and sensor faults[J]. Neurocomputing，2020，380(7)：87-94.
[2] YE X D，JIANG J P. Adaptive nonlinear design without a priori knowledge of control directions[J]. IEEE Transactions on Automatic Control，1998，43(11)：1617-1621.
[3] IOANNOU P A，JING S. Robust adaptive control[M]. New Jersey：PTR Prentice-Hall，1996，75-76.
[4] NUSSBAUM R D. Some remark on the conjecture in parameter adaptive control[J]. Systems and Control Letters，1983，3(4)：243-246.
[5] WANG C L，WEN C Y，LIN Y. Adaptive actuator failure compensation for a class of nonlinear systems with unknown control direction[J]. IEEE Transactions on Automatic Control，2017，62(1)：385-392.