

第一回

河图洛书 中华文明起源头

数字奇巧 金字塔里有谜团

——上古文明的神秘数学

数学,是伴随着人类的进化而出现的。当人类进化到原始部落阶段,统计猎物并进行分配已经成为一件必须要解决的事情,因此,数学就应运而生了。发明了十进制计数,是人类的第一个数学成就;而 $1+1=2$,则是人类发现的第一个运算法则。这些在我们看来简单得可笑的数学,也是经过漫长的时间才被我们的祖先发现的。

正所谓“道生一,一生二,二生三,三生万物”。一旦掌握了 $1+1=2$,加减运算就不是什么难事了。史前数学发展到什么程度,由于那时候没有文字,也没有记录,我们无从得知。但是,我们从考古发掘的甲骨文中发现,在殷商时期我们的祖先已经有了很大数目的统计,已经出现了百、千、万这样的计数单位,已经出现了“八日辛亥允戈伐二千六百五十六人”(八日辛亥那天的战争中,消灭了敌方 2656 人)这样的记录。可见,在那个时代,人们对于计数已经非常熟练了。

夏商周时期已经形成了国家的概念,土地开垦、田租赋税、劳役徭役、兵甲物资等方方面面的统计与分配都需要数学。这时候,不只出现了乘除法运算,就连分数也出现了。最晚在周朝,人们已经发明了用小竹棍做成的算筹来进行计算。在春秋战国时期,九九乘法表就已经被广泛利用,在当时的许多著作中,都有乘法口诀的片段。不过那时候的九九表,是从“九九八十一”开始往回背,到“二二得四”为止,和我们现在的顺序刚好相反。因为口诀开头两个字是“九九”,因此叫作“九九表”。

在几何学方面,由于人类要制造器物,营造建筑,兴建水利,所以逐渐掌

握了一些基本的几何学知识,同时还发明了一些用于几何测量的工具。我们的祖先很早就发明了规、矩、准、绳这四种工具,“规”用来画圆,类似于我们现在用的圆规;“矩”用来画直角或方形(所以长方形还叫矩形),和现在木工所用的角尺相似,是由长短两根木条组成的 L 形直角尺(图 1-1);“准”是一种水平测量仪,是古代用的水准器,说不定我们现在使用的水准仪就是直接传承自古代;“绳”则是垂直测量仪,这个很简单,绳子吊一个重物悬垂,就能准确确定与地面垂直的方向,也就是我们现在所说的铅垂线。简单来说,规矩是用以成圆成方的工具,准绳是用来确定横平竖直的工具。时至今日,我们还有“无规矩不成方圆”的俗语。

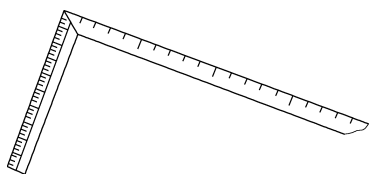


图 1-1 矩(由长短两尺合成,短尺叫勾,长尺叫股)

据《史记·夏本纪》记载,大禹治水时就已经广泛使用了这四种工具,其原文为:“陆行乘车,水行乘舫,泥行乘橇,山行乘橧。左准绳,右规矩,载四时,以开九州,通九道,陂九泽,度九山。”由此可见,大禹不但是治水的总负责人,运筹帷幄、指挥策划,他还是一位“高级工程师”,可以

熟练使用这些工具来指导水利设施的建设。

相传在大禹治水时期,洛水和伊水泛滥成灾。大禹采取以疏导为主的办法,首先疏通了洛水,使之注入黄河,然后率众在洛阳凿开了龙门山,使伊水在龙门南形成湖,湖水再流入洛水。当湖水快要流干时,从湖底浮出了一只巨大的神龟,顺流而下缓缓游入洛水。大禹见此龟不是凡物,立即乘船追赶过去。赶到近处,只见神龟的龟壳被深深的纹路分为九块,每一块中都有有一些黑点和白点,大禹认为这是天赐神图,赶忙命人把这幅图案(图 1-2(a))记录下来,带回去流传后世,后人称之为“洛书”。

洛书中有黑白点 45 个,用线段连成 9 个数字,奇数用白点,偶数用黑点,并构成方阵。稍加分析,就会发现这个图案类似于 3×3 的格子,将 1~9 这 9 个数字放在格子中(图 1-2(b)),它的每一行、每一列及对角线加起来的和都相等,都等于 15。现在我们知道,这种九宫格是世界上最早出现的幻方。在一个 $n \times n$ 的正方形格子中,从 1 开始往里填整数,最后任意一行、一列及对角线的几个数之和都相等,这就是 n 阶幻方,对它的研究属于一个数学分

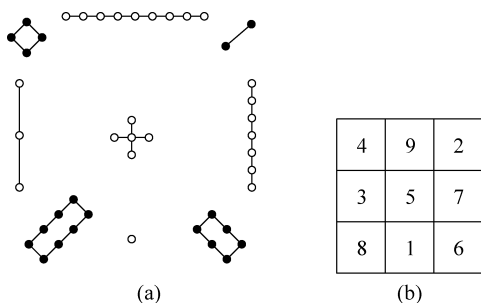


图 1-2 洛书

(a) 洛书图案；(b) 洛书对应的九宫格

支——组合数学。显然，洛书是一个 3 阶幻方，这显示出我国古人对数字的排列组合有深入的研究。欧洲人直到 14 世纪才开始研究幻方，比我国晚了很多年。

在古代传说中，还有一幅比洛书更古老的数学图案，那就是河图。《易·系辞上》记载：“河出图，洛出书，圣人则之。”

相传上古时期，伏羲善于观物取象，通过观察天地万物认识自然。有一天，他正在黄河边观察大自然，突然，从河中跳出一匹龙马，伏羲仔细一瞧，发现这匹龙马身上的图案不一般，其中暗含天机，于是连忙把这幅图案记了下来，这就是“河图”（图 1-3）。伏羲潜心研究这幅图案，最后据此创造出了八卦图，正所谓“太极生两仪，两仪生四象，四象生八卦”。

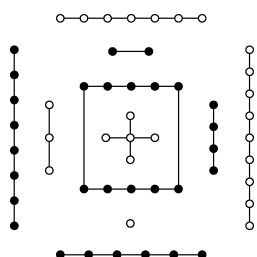


图 1-3 河图

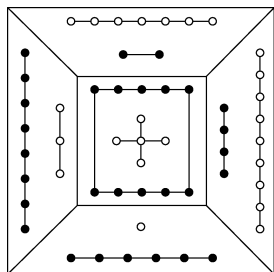


图 1-4 河图中的数学规律

河图中有黑白点 55 个，用线段连成 1~10 这 10 个数字，奇数为阳用白点表示，偶数为阴用黑点表示。这 10 个数字排布顺序为“一六居下，二七居上，三八居左，四九居右，五十居中”。这幅图案蕴含着什么秘密，伏羲如何据此创造八卦图，目前还不是很清楚，不过，我们可以看到其中蕴藏着一些简单的数学规律。按照图案中数字的位置，可以把这幅图分成 5 个区域，如图 1-4 所

示。每个区域里都有阴阳 2 数,大数在外,小数在内,奇偶对立,阴阳互抱,且大数减去小数结果都是 5。就像老子说的:“万物负阴而抱阳,冲气以为和。”其中还有哪些数学规律,读者可自行分析,这就像一个数字谜题,颇为有趣。

对于上古时期的人来说,能发现河图、洛书这样的数字排列组合规律,殊为不易,说明当时人们已经熟练地掌握了十进制的计数系统和加减运算法则,这是文明起源的标志。因此,河图、洛书也成了中华上古文明的代名词。

数学知识的积累,是每一个文明诞生的推动力,中华文明如是,其他文明也是如此。古埃及人、古印度人和古巴比伦人也都各自掌握了很多数学知识,其中,古埃及的金字塔就体现了当时人们丰富的几何学知识。

大约从公元前 29 世纪起,古埃及的法老们开始为自己营造巨大的陵墓——金字塔。在几百年的时间里,金字塔前前后后共造了 90 多座,而其中最大也是最有名的,是建于约公元前 27 世纪的胡夫金字塔。

胡夫金字塔也称大金字塔,位于埃及首都开罗西南约 10 公里的吉萨高地。胡夫金字塔是一座巨大的正四棱锥建筑(图 1-5),由大约 230 万块巨石堆积而成,有 40 层楼那么高。它的底座是正方形,四个侧面是等腰三角形。胡夫金字塔的神奇之处在于,它的底面是一个非常完美的正方形,四个直角和四条边长的误差全部小于

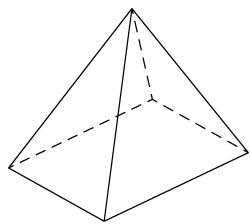


图 1-5 金字塔的正四棱锥结构

0.1%,而且四个侧面分别正对着东、南、西、北四个方向,可知古埃及人的几何测量已经达到了很高的精度。

更有意思的是,胡夫金字塔原高 146.5 米,底面每边长 230.5 米(由于风雨侵蚀等原因,现高 136.5 米,底边长 227 米),侧面与底面的夹角为 51.85° 。人们经过测算发现,其侧面三角形的面积正好等于其高度的平方,这很难说是巧合。

鉴于当时古埃及人只有原始的劳动工具,现代人很难相信如此浩大精准的工程能由那个时代的人们来完成,人们似乎更愿意相信这是“天外来客”的作品,于是,关于金字塔的神秘传说越来越多。比如说,有人发现胡夫金字塔底面周长的一半除以金字塔的高约等于 3.147,与圆周率很接近,就

猜测古埃及人已经掌握了比较精确的圆周率数值。但实际上,从比金字塔还要晚 1000 多年的文物中发现,当时古埃及人用的圆周率还是 3,所以这只是一个巧合。再比如下面这个传说,则更为神秘。

据说,有人在金字塔内发现了一组神奇的数字——142857,经过研究,发现这组数字隐藏着很多不可思议的秘密。我们先把它从 1 乘到 6 来看看,结果是:

$$142857 \times 1 = 142857$$

$$142857 \times 2 = 285714$$

$$142857 \times 3 = 428571$$

$$142857 \times 4 = 571428$$

$$142857 \times 5 = 714285$$

$$142857 \times 6 = 857142$$

比较上面的乘积,你会发现,所有的积都是 1、4、2、8、5、7 这几个数字,就像走马灯一样轮换。

那么把它乘以 7 是多少呢? 我们会惊讶地发现,积是 999999,似乎是完成了一个轮回。

142857 这个数字还有一个秘密,那就是它单数和是 9,双数和是 99,三数和是 999,具体如下:

$$1 + 4 + 2 + 8 + 5 + 7 = 27, 2 + 7 = 9$$

$$14 + 28 + 57 = 99$$

$$142 + 857 = 999$$

最后,我们发现 $142857 \times 142857 = 20408122449$,这个乘积的前 5 位加上后 6 位的得数是多少呢? 请看结果:

$$20408 + 122449 = 142857$$

你一定会惊叹,这组数字真是太神奇了,古埃及人是如何发现它的呢? 事实上,这是后人为了增加金字塔的神秘性而穿凿附会上去的,并没有证据表明金字塔内有这样一组数字。不过,如此奇特的一组数字,可以让我们更好地欣赏数学的神奇与美妙,把它安在金字塔身上,倒也无伤大雅。正是:

一四二八五和七,走马轮换数它奇。

若问此数如何记,且看小数七除一。

第二回

周公问对 商高阐述勾股弦

相似三角 希腊先贤巧测高

——古人对三角形的认识与运用

在 3000 多年以前，中华文明进入西周时期。这时候，人们已经掌握了一些更为复杂的数学规律，在社会上，也出现了一些专门研究数学及天文的学者。西周早期的商高就是这样一位学者。

话说周武王伐纣成功，推翻商朝，建立了周朝。但是，由于日夜操劳，灭商两年后，周武王就生了一场大病，病情反复几次，终于一病不起，撒手而去。武王死后，其子尚幼，就由他的弟弟周公代为执政。周公姓姬名旦，曾是武王治理天下的得力助手，他执政后，一心为公，礼贤下士，求贤若渴，善待各种人才，正所谓“周公吐哺，天下归心”。

有一天，周公听说商高在数学和天文方面颇有见识，便命人把商高请到宫里来，想当面请教一番。

二人按君臣之礼坐定后，周公说道：“我听说，先生很精通数的法门，那么我有一个问题想请教。”

商高拱手说道：“明公请讲。”

周公说：“古代的伏羲观象于天，观法于地，通过观测太阳的周天运行规律，从而制定了天文历法，但是，天高得没有梯子可以攀上去，地大得无法用尺子来测量。那么请问，伏羲是怎么观测这些天象数字的？”

商高回答说：“天是圆的，地是方的，天圆地方。因此，数的法门出自圆和方。圆出于方，方出于矩，矩出于九九八十一。”

周公说：“愿闻其详。”

商高解释道：“把一个矩拿来测量，就会发现如果勾长三，股长四，那么

弦长一定是五,也就是说,以三、四、五为边可构成一个矩(直角三角形)。这其中有什么奥妙呢?你会发现,三三得九,四四一十六,五五二十五,九加十六正好等于二十五,因此三、四、五这三个数就能构成一个矩,这就叫积矩。所以说,矩出于九九八十一,也就是数字与自身相乘得到的平方数,勾和股的平方和加起来正好等于弦的平方。”(图 2-1)

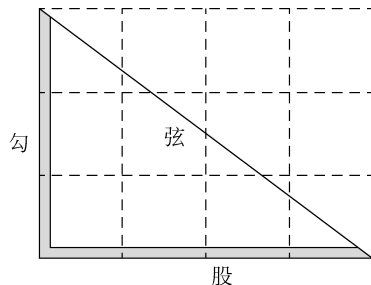


图 2-1 矩的勾、股、弦

周公佩服地说道:“原来如此,矩果然出于九九八十一。那么圆和方又是如何出于矩的呢?”

商高微微一笑,继续解释道:“圆的直径是 1 的话,周长就是 3(当时人们认为圆周率是 3),正方形的边长是 1 的话,周长就是 4,而 3 和 4 恰好是矩的勾和股,所以说,圆出于方,方出于矩。”

周公叹道:“数的法门真是奇妙啊!”

商高说:“当年大禹之所以能治水,望山川之形,定高下之势,除滔天之灾,全凭用矩进行测量规划。要知道,差之毫厘,谬以千里,如果没有准确的测量工具,治水就没法取得成功。这都是在数的指导下取得的成就。”

周公感叹道:“数真是太了不起了!先生能否给我讲讲矩的用法?”

商高侃侃而谈:“把矩的一边与铅垂线贴合,另一边就是水平方向,据此可以用来校准横平竖直;把矩像瞄准一样立在眼前,一边水平放置,根据远处高物在另一边上的视刻度,就可以测算物体的高度;与测高同理,把矩倒过来可以测量深度,把矩平放可以测量距离;把矩的一端固定,另一端旋转就能画出一个圆;把两个矩合起来,就能构成长方形。”(见图 2-2、图 2-3)

商高接着又阐述了一番天圆地方的道理,最后总结道:“圣人们就是靠着矩和数来丈量天地的,矩和数就是指导和约束万物的东西。”

周公赞叹道:“这真是太妙了!”

这是一段记载在《周髀算经》中的故事,这说明远在商周时代,人们已经认识到了勾股定理。

《周髀算经》在记载了周公与商高的对话后,直接转到另一篇章,即荣方与陈子的一段对话。荣方与陈子是公元前六七世纪的人,荣方听闻陈子懂得

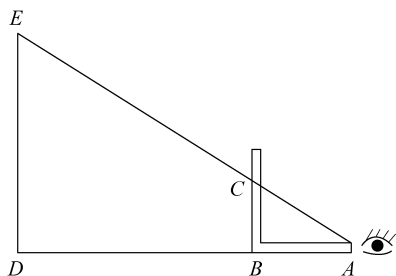


图 2-2 用矩测高示意图($\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 相似, 测量 AD 之间距离, 即可计算 DE 的高度)

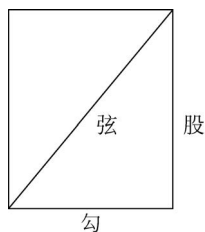


图 2-3 合矩以为方

商高的勾股之术, 特来求教如何测量地面上不同地点到太阳的距离。

陈子通过立杆测影来给荣方讲解测量的原理, 具体细节此处不表, 但是其中有一句非常重要的话: “若求邪至日者, 以日下为勾, 日高为股, 勾股各自乘, 并而开方除之, 得邪至日。”(邪通斜, 邪至日即弦长)

“勾股各自乘, 并而开方除之”就是对于任意直角三角形都适用的普遍的勾股定理: 先各自计算勾的平方和股的平方, 然后相加, 最后再开方, 就能得到弦长。陈子在说这句话的时候没有任何解释, 说明这已经是当时数学家普遍掌握的知识。而且陈子用勾股定理计算的都是高达几十万的数字, 可见当时人们对于此类数学知识的运用熟练程度。

在《周髀算经》中, 陈子还进行了很多相当复杂的分数计算。在计算过程中, 用到了通分等计算方法, 而且分数的概念是很清楚的, 与现在的分数概念一致, 这是领先于当时世界其他地区的。但是, 陈子还没有约分的概念。

陈子是公元前六七世纪的人, 因此不知道约分, 但是成书于约公元前 200 年的《算数书》则全面介绍了分数的性质及其运算法则, 包括通分、约分、分数的扩大与缩小及四则运算等, 这表明我国是世界上较早全面掌握分数性质的国家, 甚至可能远远领先于其他国家。

《周髀算经》实际上是一部使用数学工具来解释当时天文历法的天文学著作, 成书年代已不可考。书中把夏至日道(称为内衡, 是一个以天北极为中心, 半径为 119000 里(1 里=500 米)的圆)和冬至日道(称为外衡, 是以天北极为中心, 半径为 238000 里的圆)之间的区域画出 7 个同心圆和 6 个间隔, 称为七衡六间, 根据这个平面图, 就可以说明一年中太阳每日绕天极运

行的情况。

七衡六间理论是基于盖天说。古人在构建宇宙结构时,假想了一个与地球同心同轴的天球,日月星辰全部位于球面上,以北天极为中心自东向西旋转。这个模型有明确的结构,可以进行有效的演绎推理,去描述各种天象。《周髀算经》中计算了夏至点、冬至点、春分点和秋分点四个位置太阳到北天极的距离,按现代天文学推算,春分和秋分的数据分毫不差,夏至和冬至的误差不超过 0.7%。由此可以看出人们当时所掌握的数学和天文知识是很先进的。

大约在与陈子相同的时代,欧亚大陆另一端的古希腊也出现了一位对数学颇有研究的学者——泰勒斯(Thales,约公元前 625 年—约公元前 547 年)。

通常所说的古希腊,地理范围包括希腊半岛、爱琴海群岛和小亚细亚西岸一带。古希腊一直没有形成一个统一的国家,长期以来,它由许多大大小小的城邦组成。泰勒斯出生在米利都,这座城市位于小亚细亚半岛的西海岸,是一座海滨城市,当时是古希腊的众多城邦之一,现在属于土耳其。

泰勒斯出生于贵族家庭,他对天文学和数学有浓厚的兴趣,因此在年轻的时候四处求学。他游历于埃及和巴比伦,学会了埃及人用几何技术测量距离和面积的方法,也学会了巴比伦人的天文学和六十进制记数系统的使用方法。

据说,泰勒斯在埃及游学,有一次,他在当地贵族的陪同下游览金字塔。正当大家为胡夫金字塔的雄伟壮观而赞叹不已时,有人提出了一个问题——金字塔到底有多高?

这个看似简单的问题难倒了一众人。对于当时的埃及人来说,胡夫金字塔已经建成了 2000 多年,最后一座金字塔也建于 1000 多年前,当年的建造资料早已丧失殆尽,还真没有人知道胡夫金字塔到底有多高。

就在众人面面相觑之际,泰勒斯低头思索,突然,他灵机一动,想出了一个绝妙的办法,他微笑着对众人说:“很简单,量一量就知道了。”

贵族们不明所以,反问道:“底座这么大,绳子又垂不下来,怎么量?”

泰勒斯卖了个关子,他笑道:“不用上塔顶,只要在地面上丈量,就能得到塔高。”

众人哄然大笑,感情这泰勒斯莫不是在说疯话?从来没听说过在地面

上量高度的。

泰勒斯见众人纷纷摇头,不慌不忙地指着地上的人影说道:“诸位请看,答案就藏在这影子里。”

听他这么一说,贵族们立时安静下来,他们意识到,泰勒斯不是瞎扯。泰勒斯笑着说:“你们看,随着太阳的转动,物体的影子长度在不断变化。我们在地面上立一根木杆,随时测量它的影子长度,当某一时刻,影长与杆长正好相等时,这时候去测量金字塔的影长,就是金字塔的高度。”

众人都明白过来,原来真的可以在地面上测量金字塔的高度,大家赞叹不已。

提问的人最积极,他立刻让仆人找来一根木杆立在地上,开始测量影子的长度,并让仆人们准备好测量金字塔的影长。随着时间的推移,太阳光的照射角度缓慢地变化着,木杆的影长与杆长越来越接近。当光线的照射角度正好达到 45° 时,他大喊一声:“时刻到了!开始测量!”

仆人们听到号令,立刻把绳子的一端对准金字塔尖的影子,朝金字塔中心拉去。可是,没走多远就犯难了,金字塔底座太大,中心点根本达不到,侧面巨大的石壁挡住了去路,仆人们望着横亘在面前的障碍,无计可施。

贵族们脸上的笑容都凝固了,泰勒斯眉头紧锁,一言不发,苦苦思索。他意识到,要想测量金字塔影子长度,只有一个办法,就是塔尖的影子刚好落在底面中心和底面边长中点的连线上(图 2-4 中 OF 连线),这样,影子长度就是底边长的一半加上塔外影长($OF + FG$),可是,这时候影子很难和塔高等长,怎么办呢?

“有了!”泰勒斯的脑海中灵光一闪,“在同一时刻,不同高度的物体影子长短不同,但是它们的比例是一样的!”他的脸上重新露出了笑容,他对大家说:“明天,我一定给大家一个满意的答案!”

第二天一大早,贵族们就簇拥着泰勒斯来到金字塔下。听说泰勒斯要测量金字塔的高度,当地很多民众也赶来看热闹,金字塔下站满了围观的人群。

只见泰勒斯看好太阳的方位,让人把金字塔一条底边(图 2-4 中 AB)的中垂线画出来,然后在旁边立了一根杆子(ML)。随着影子的移动,塔尖的影子正好落在了中垂线上,泰勒斯立刻让人记下塔尖影子位置(G 点),并记