数学培优竞赛讲座

(高一年级,第 2 版)

朱华伟　程汉波　编著

清華大学出版社
北　京

内容简介

本书以高考数学难题、著名大学强基计划招生和国内外高中数学竞赛为背景，按照普通高中高一年级数学教科书的进度分专题编写，在内容的安排上力求与课堂教学同步，在夯实基础的同时，通过新颖、有趣的数学问题，构建通往高考数学、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛的捷径；在有利于学生把高中数学教科书的知识巩固深化的同时，恰到好处地为学生拓宽著名大学强基计划招生和竞赛数学的知识；以著名大学强基计划招生和高中数学竞赛中的热点、难点问题为载体，介绍竞赛数学中令人耳目一新的解题方法与技巧，激发学生创新与发现的灵感，开发智力，提高水平去参加高考数学、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛.

本书配套《数学培优竞赛一讲一练(高一年级，第2版)》(ISBN：9787302665069)可以帮助学生自我检测，《数学培优竞赛一讲一练》与《数学培优竞赛讲座》配套使用，能达到更好的学习效果.

本书可供高中准备参加高考数学、大学自主招生和高中数学竞赛的学生学习使用，也可供中学数学教师、数学爱好者、高等师范院校数学教育专业大学生、研究生及数学教师参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

数学培优竞赛讲座. 高一年级 / 朱华伟，程汉波编著. --2版. --北京 ：清华大学出版社，2024. 6.

ISBN 978-7-302-66508-3

Ⅰ. G634.603

中国国家版本馆CIP数据核字第2024T5G861号

责任编辑： 王　定
封面设计： 周晓亮
版式设计： 思创景点
责任校对： 成凤进
责任印制： 丛怀宇

出版发行： 清华大学出版社
网　　址： https://www.tup.com.cn，https://www.wqxuetang.com
地　　址： 北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编：** 100084
社 总 机： 010-83470000　　**邮　　购：** 010-62786544
投稿与读者服务： 010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈： 010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者： 大厂回族自治县彩虹印刷有限公司
经　　销： 全国新华书店
开　　本： 185mm×260mm　　**印　　张：** 23.5　　**字　　数：** 527千字
版　　次： 2022年8月第1版　　2024年7月第2版　　**印　　次：** 2024年7月第1次印刷
定　　价： 89.80元

产品编号：106697-01

前　　言

从1985年我国第一次派队参加国际数学奥林匹克竞赛(简称IMO)以来,中国代表队参加了38次IMO(1985年派两名队员参赛,1998年因故没有参赛),24次获总分第一(有15次六位队员都得金牌),8次第二,2次第三,第四、六、八名各1次,224人次参赛,共获金牌180块,银牌36块,铜牌6块.早在1994年,中国科学院数学物理学部王梓坤院士就讲到,近年来,我国中学生在IMO中"连续获得团体冠军,个人金牌数也名列前茅,消息传来,全国振奋.我国数学,现在有能人,后继有强手,国内外华人无不欢欣鼓舞".这对青少年学好数学无疑是极大的鼓励和鞭策,极大地激发了青少年学习数学的热情.

为了给对数学有兴趣的高中生提供一个扩展知识视野、提高解题能力和培养创新精神的平台,我们以高考数学难题、著名大学强基计划招生和国内外高中数学竞赛为背景,根据多年辅导高中生参加高考数学、大学自主招生、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛所积累下来的经验、体会和素材,编写了这套《数学培优竞赛讲座》(高一年级、高二年级、高三年级),以及配套的《数学培优竞赛一讲一练》(高一年级、高二年级、高三年级).

《数学培优竞赛讲座》按照普通高中数学教科书的进度分专题编写,在内容的安排上力求与课堂教学同步,采用从课内到课外逐步引申扩充、由浅入深、由易到难、循序渐进的教学方法;在夯实基础的同时,通过新颖、有趣的数学问题,构建通往高考数学、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛的捷径;尽可能地帮助学生扩展知识视野,提高思维能力;在有利于学生把高中数学教材的知识巩固深化的同时,又恰到好处地为学生拓宽有关强基计划和竞赛数学的知识;以高考数学、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛中的热点、难点问题为载体,介绍竞赛数学中令人耳目一新的解题方法与技巧,激发学生创新与发现的灵感,帮助学生开发智力,提高水平去参加高考数学、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛.

《数学培优竞赛讲座》以专题讲座的形式编写,每讲的主要栏目如下.

名人名言欣赏:以名人名言开宗明义,开启每讲的数学学习之旅.

知识方法述要:详细归纳相关的知识、方法与技巧,突出重点、难点和考点.对于高中数学教科书没有的内容,尽可能给出新知识、新方法的产生背景.对给出的知识、方法与技巧尽可能做到系统、完整.

例题精讲:含"分析""解"和"评注",从易到难,拾级而上,由基础题、提高题、综合题组成.本丛书中很多例题的解答之后有评注,评注是对某些问题或解答过程中意犹未尽之处进行阐述分析,以起到画龙点睛的作用;对可进一步深入研究的问题予以拓展引申,意在引导学生去创造;对一题多解的问题提出相关的解法,发现特技与通法之间的联系.总之,评注的目的在于,一方面揭示问题的背景和来源,另一方面启迪学生发现解决问题的思路及通过合理猜测提

出解决问题的新方法,使学生不仅知其然,更知其所以然,以期达到授之以渔的目的.

同步训练:含选择题、填空题、解答题,为方便自学,在书后每题均给出详细解答过程.

《数学培优竞赛一讲一练》是《数学培优竞赛讲座》的配套练习册,可以为使用者提供自我检测;书后附有详细解答,可以检验使用者对数学知识的理解水平和掌握程度.《数学培优竞赛一讲一练》与《数学培优竞赛讲座》配套使用,能达到更好的学习效果.

本丛书注重数学基础知识的巩固提高和数学思想方法的渗透,凸显科学精神和人文精神的融合,加强对学生学习兴趣、创新精神、应用意识和分析问题、解决问题能力的培养.希望通过对本丛书的学习,学生能够发现数学的美丽和魅力,体会数学的思想和方法,感受数学的智慧和创新,体验经过不懈的探索而获得成功的兴奋和乐趣,进而激发学习数学的兴趣.

数学大师陈省身教授为 2002 年 8 月在北京举行的第 24 届国际数学家大会题词:“数学好玩.”我们深信本书能让学生品味到数学的无穷乐趣.著名数学家陈景润说:“数学的世界是变幻无穷的世界,其中的乐趣只有那些坚持不懈的人才能体会得到!”

本丛书是高中生参加数学竞赛的宝典,是冲刺著名大学强基计划招生、破解高考数学压轴题的利器,是中学数学教师进行数学竞赛辅导、进修的益友.

在本丛书的编写过程中,笔者参考并引用了有关资料中的优秀题目,为求简明,书中未一一注明出处,在此,谨向原题编者表示感谢.由于笔者水平有限,书中难免会有疏漏之处,诚挚欢迎读者批评与指正.

朱华伟

2024 年 5 月于深圳中学新校区

目　　录

第 1 讲　集合与逻辑

> 没有人能把我们从康托尔为我们创造的乐园(集合论)中驱逐出去.
>
> ——D. 希尔伯特(德国)

知识方法述要

1. 运算律　设全集为 I,$\overline{A}=\{x \mid x \in I, 且\ x \notin A\}$.

结合律　$A \cup (B \cup C)=(A \cup B) \cup C$,

$A \cap (B \cap C)=(A \cap B) \cap C$;

分配律　$A \cup (B \cap C)=(A \cup B) \cap (A \cup C)$,

$A \cap (B \cup C)=(A \cap B) \cup (A \cap C)$;

吸收律　$A \cup (A \cap B)=A, A \cap (A \cup B)=A$;

反演律　$\overline{A \cup B}=\overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B}=\overline{A} \cup \overline{B}$.

2. n 阶集合　一个 n 阶集合(即由 n 个元素组成的集合)有 2^n 个不同的子集,其中有 2^n-1 个非空子集,也有 2^n-1 个真子集.

3. 集合的划分　若 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n=I$,且 $A_i \cap A_j=\varnothing(1 \leqslant i, j \leqslant n, i \neq j)$,则这些子集的全集叫 I 的一个 n－划分.

4. 简易逻辑的基础知识

(1) 命题:能够判断真假的语句.

(2)"非""且""或".

"非 p"形式复合命题的真假与 p 的真假相反;

"p 且 q"形式复合命题当 p 与 q 同为真时为真,其他情况时为假;

"p 或 q"形式复合命题当 p 与 q 同为假时为假,其他情况时为真.

(3) 四种命题的形式.

原命题:若 p 则 q;

逆命题:若 q 则 p;

否命题:若非 p 则非 q;

逆否命题:若非 q 则非 p.

(4) 一个命题的否命题与该命题的逆命题互为逆否命题. 互为逆否命题的两个命题真假性相同.

(5) 如果已知 $p\Rightarrow q$,那么我们说 p 是 q 的充分条件,q 是 p 的必要条件. 若 $p\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$,则称 p 是 q 的充要条件,记为 $p\Leftrightarrow q$.

例题精讲

【例 1-1】 已知 S 是由实数组成的数集,且满足:

(i) $1\notin S$;

(ii) 若 $a\in S$,则 $\frac{1}{1-a}\in S$.

请回答下列问题.

(1) 证明:若 $2\in S$,则 S 中至少还含有其他两个元素;若 $a\in S$,则 $1-\frac{1}{a}\in S$.

(2) 试问:集合 S 可否为单元素集?

解:(1) 证明:当 $a=2$ 时,$\frac{1}{1-a}=\frac{1}{1-2}=-1$. 根据(ii)知,当 $2\in S$ 时,$-1\in S$. 又当 $a=-1$ 时,$\frac{1}{1-a}=\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}$. 所以当 $-1\in S$ 时,有 $\frac{1}{2}\in S$. 以上说明,当 $2\in S$ 时,S 中至少还含有元素 -1,$\frac{1}{2}$.

若 $a\in S$,根据(ii)知,$\frac{1}{1-a}\in S$. 由(i)知 $a\neq 0$,进而可知

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1-a}}=\frac{1-a}{-a}=1-\frac{1}{a}\in S.$$

(2) 因为 $1\notin S$,所以当 $a\in S$ 时,有意义. 若 S 为单元素集,唯有 $a=\frac{1}{1-a}$,即

$$a^2-a+1=0. \quad ①$$

然而 ① 无实数解,所以 S 不可能为单元素集.

评注 我们知道,所谓集合就是指某些对象的全体. 集合最重要的特征是要能明确判断任何一个对象是不是该集合的元素. 换句话说,对于一个对象 a 和集合 A,$a\in A$ 与 $a\notin A$ 二者必居其一.

【例 1-2】 已知集合 $U=\mathbf{R}$,$A=\{x,xy,\sqrt{xy-1}\}$,$B=\{0,|x|,y\}$,若集合 $A\cap B=B$,且 $A\cap \complement_U B=\varnothing$,求 $\left(x+\frac{1}{y}\right)+\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)+\cdots+\left(x^{2017}+\frac{1}{y^{2017}}\right)$ 的值.

分析 要求值归结于求出 x,y,需从已知条件中导出两个独立的等量关系,由 $A\cap B=B$ 得,$B\subseteq A$. 由 $A\cap \complement_U B=\varnothing$ 得,$A\subseteq B$,所以 $A=B$.

由题意可得,$A=B$. 因为 $0\in B$,所以 $0\in A$. 又由 $xy\geqslant 1$,所以有 $xy=1$,则 $A=\{x,1,0\}=B=\{0,|x|,y\}$,所以 $\begin{cases}|x|=1,\\ y=x,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}y=1,\\ |x|=x.\end{cases}$ 结合 $xy=1$ 及集合的互异性,可求得 $x=$

$y=-1$,所以$\left(x+\frac{1}{y}\right)+\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)+\cdots+\left(x^{2017}+\frac{1}{y^{2017}}\right)=-2+2-2+2+\cdots+2-2=-2$.

评注　例 1-2 主要考查有限集相等的概念和性质,做题时切勿陷入繁琐的分类讨论之中.

【例 1-3】　设 $f(x)$ 是区间$[a,b]$上的函数,如果对任意满足 $a\leqslant x\leqslant y\leqslant b$ 的 x,y 都有 $f(x)\leqslant f(y)$,则称 $f(x)$ 是$[a,b]$上的递增函数,那么 $f(x)$ 是$[a,b]$上的非递增函数应满足(　　).

A. 存在满足 $x<y$ 的 $x,y\in[a,b]$,使得 $f(x)>f(y)$

B. 不存在 $x,y\in[a,b]$ 满足 $x<y$ 且 $f(x)\leqslant f(y)$

C. 对任意满足 $x<y$ 的 $x,y\in[a,b]$,都有 $f(x)>f(y)$

D. 存在满足 $x<y$ 的 $x,y\in[a,b]$,使得 $f(x)\leqslant f(y)$

解:选 A.

考虑原命题的等价命题.问题等价于命题"如果对于任意满足 $a\leqslant x\leqslant y\leqslant b$ 的 x 都有 $f(x)\leqslant f(y)$,则称 $f(x)$ 是$[a,b]$上的递增函数"的逆否命题.即"存在满足 $x<y$ 的 $x,y\in[a,b]$,使得 $f(x)>f(y)$",因此"任意"的否定形式是"存在".所以选 A.

【例 1-4】　求所有的有限集 $M\subset\mathbf{R}$,$|M|\geqslant 2$,满足下列条件:对所有的 $a,b\in M$,$a\neq b$,数$a^3-\frac{4}{9}b$ 也属于M.

解:设 $|M|=m$,M 中的所有元素从小到大依次为 $a_1,a_2,\cdots,a_m$,则

$$a_1^3-\frac{4}{9}a_m<a_1^3-\frac{4}{9}a_{m-1}<\cdots<a_1^3-\frac{4}{9}a_2.$$

$$a_2^3-\frac{4}{9}a_1<a_3^3-\frac{4}{9}a_1<\cdots<a_m^3-\frac{4}{9}a_1.$$

再由$\left(a_2^3-\frac{4}{9}a_1\right)-\left(a_1^3-\frac{4}{9}a_2\right)=(a_2-a_1)\left(a_1^2+a_1a_2+a_2^2+\frac{4}{9}\right)>0$知,上面的 $2m-2$ 个数互不相同,且由条件知这些数都是 M 的元素,所以 $2m-2\leqslant m$,即 $m\leqslant 2$,因此 $m=2$.

由于$a_1^3-\frac{4}{9}a_2<a_2^3-\frac{4}{9}a_1$,所以$a_1^3-\frac{4}{9}a_2=a_1$,$a_2^3-\frac{4}{9}a_1=a_2$.将这两式相减及相加分别得

$$(a_1-a_2)\left(a_1^2+a_1a_2+a_2^2-\frac{5}{9}\right)=0. \qquad ①$$

$$(a_1+a_2)\left(a_1^2-a_1a_2+a_2^2-\frac{13}{9}\right)=0. \qquad ②$$

由 ① 知$a_1^2+a_1a_2+a_2^2=\frac{5}{9}$,由 ② 知 $a_1+a_2=0$ 或$a_1^2-a_1a_2+a_2^2=\frac{13}{9}$.若 $a_1+a_2=0$,则 $a_1^2=\frac{5}{9}$,解得 $a_1=-\frac{\sqrt{5}}{3}$,$a_2=\frac{\sqrt{5}}{3}$;若 $a_1^2-a_1a_2+a_2^2=\frac{13}{9}$,则 $a_1^2+a_2^2=1$,$a_1a_2=-\frac{4}{9}$,所以 $(a_1+a_2)^2=\frac{1}{9}$,即 $a_1+a_2=\pm\frac{1}{3}$,分别解得$\{a_1,a_2\}=\left\{\frac{1-\sqrt{17}}{6},\frac{1+\sqrt{17}}{6}\right\}$ 及$\{a_1,a_2\}$

$=\left\{\dfrac{-1-\sqrt{17}}{6},\dfrac{-1+\sqrt{17}}{6}\right\}$.

综上所述,M 为 $\left\{-\dfrac{\sqrt{5}}{3},\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right\}$,$\left\{\dfrac{1-\sqrt{17}}{6},\dfrac{1+\sqrt{17}}{6}\right\}$ 或 $\left\{\dfrac{-1-\sqrt{17}}{6},\dfrac{-1+\sqrt{17}}{6}\right\}$.

【例 1-5】 已知集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$,集合 $B=\{a_1^2,a_2^2,a_3^2,a_4^2,a_5^2\}$,其中,$a_i\in\mathbf{N}_+$ $(i=1,2,3,4,5)$,如果 $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$,$A\cap B=\{a_1,a_4\}$,$a_1+a_4=10$,且 $A\cup B$ 中所有元素之和为 224,求集合 A.

分析 可根据交集的概念及题设条件确定 a_1,a_4 的值,再根据并集的概念和整数的范围确定 a_2,a_3,a_5 的值.

解: 因为 $A\cap B=\{a_1,a_4\}$,所以 $a_1,a_4\in B$,a_1,a_4 是两个完全平方数.

又知 $a_1+a_4=10$,且 $a_1<a_4$,所以 $a_1=1,a_4=9$.

因为 $A\cup B$ 中所有元素之和为 224,所以

$$a_2+a_3+a_5+a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2=224.$$

而 $a_1^2+a_4^2=82$,所以 $a_2+a_3+a_5+a_2^2+a_3^2+a_5^2=142$.

因为 $a_4<a_5$,且 $a_4=9\in B$,所以 a_2,a_3 中必有一个是 3,且 $a_5\geqslant 10$.

设 a_2,a_3 中另一个为 x,若 $a_5\geqslant 11$,则

$$142=a_2+a_3+a_5+a_2^2+a_3^2+a_5^2\geqslant 3+x+11+9+x^2+121>144,$$

这是不可能的,所以 $a_5=10$,则 $3+x+11+9+x^2+100>144$,解得 $x=4$(另一根 $x=-5$ 舍去).所以 $a_2=3,a_3=4,A=\{1,3,4,9,10\}$.

评注 例 1-5 解题的关键是先确定 a_1,a_4 的值,从而缩小问题的研究范围.

【例 1-6】 设 A 是两个整数完全平方和的集合,即

$$A=\{x\mid x=m^2+n^2,m,n\in\mathbf{Z}\},$$

(1) 证明:若 $s,t\in A$,则 $st\in A$;

(2) 证明:若 $s,t\in A$,$t\neq 0$,则 $\dfrac{s}{t}=p^2+q^2$,其中 p,q 是有理数.

分析 欲证 $st\in A$,只需要证明 st 具有集合 A 的性质,也即证明 st 可以表示为两个整数的平方和.

证明: (1) 由 $s,t\in A$,则可设 $s=m_1^2+n_1^2$,$t=m_2^2+n_2^2$,其中,m_1,n_1,m_2,n_2 都是正整数,于是

$$\begin{aligned}st&=(m_1^2+n_1^2)(m_2^2+n_2^2)=m_1^2m_2^2+n_1^2n_2^2+m_1^2n_2^2+m_2^2n_1^2\\&=(m_1m_2+n_1n_2)^2+(m_1n_2-m_2n_1)^2,\end{aligned}$$

即 st 是两个正数的平方和,从而 $st\in A$.

(2) 由 $s,t\in A$,$st\in A$,于是可设 $st=m^2+n^2$,其中 m,n 都是正整数,于是,对于 $t\neq 0$,有

$$\frac{s}{t}=\frac{st}{t^2}=\frac{m^2+n^2}{t^2}=\left(\frac{m}{t}\right)^2+\left(\frac{n}{t}\right)^2,$$

其中，$\frac{m}{t}$，$\frac{n}{t}$ 均为有理数，从而命题得证.

评注 如果集合 A 使用描述性语言表达，如 $A=\{x \mid x$ 具有性质 $P\}$，那么判断对象 a 是否为集合 A 的元素的基本方法，就是检验 a 是否具有性质 P.

例 1-6 的背景是斐波那契恒等式：

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2.$$

【例 1-7】 对于函数 $f(x)$，若 $f(x)=x$，则称 x 为 $f(x)$ 的"不动点"，若 $f(f(x))=x$，则称 x 为 $f(x)$ 的"稳定点"，函数 $f(x)$ 的"不动点"和"稳定点"的集合分别记为 A 和 B，即 $A=\{x \mid f(x)=x\}$，$B=\{x \mid f(f(x))=x\}$.

(1) 求证：$A\subseteq B$；

(2) 若 $f(x)=ax^2-1(a\in\mathbf{R},x\in\mathbf{R})$，且 $A=B\neq\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

分析 要证明 $A\subseteq B$，只需要证明：对任意 $x\in A$，有 $x\in B$. 若要在 $A\subseteq B$ 的前提下使得 $A=B\neq\varnothing$，则还需要 $B\subseteq A$.

解：(1) 证明：若 $A=\varnothing$，则 $A\subseteq B$ 显然成立；若 $A\neq\varnothing$，设 $t\in A$，则 $f(t)=t$，$f(f(t))=f(t)=t$，即 $t\in B$，从而 $A\subseteq B$.

(2) A 中元素是方程 $f(x)=x$ 即 $ax^2-1=x$ 的实根.

由 $A\neq\varnothing$ 知 $a=0$ 或 $\begin{cases}a\neq 0,\\ \Delta=1+4a\geqslant 0,\end{cases}$ 即 $a\geqslant -\frac{1}{4}$.

B 中元素是方程 $a(ax^2-1)^2-1=x$ 即 $a^3x^4-2a^2x^2-x+a-1=0$ 的实根.

由 $A\subseteq B$，知上面方程左边含有一个因式 ax^2-x-1，即方程可化为

$$(ax^2-x-1)(a^2x^2+ax-a+1)=0.$$

因此，要 $A=B$，即要方程 $a^2x^2+ax-a+1=0$ ① 要么没有实根，要么实根是方程 $ax^2-x-1=0$ ② 的根.

若 ① 没有实根，则 $\Delta_2=a^2-4a^2(1-a)<0$，解得 $a<\frac{3}{4}$.

若 ① 有实根且 ① 的实根是 ② 的实根，则由 ② 有 $a^2x^2=ax+a$，代入 ① 有 $2ax+1=0$.

解得 $x=-\frac{1}{2a}$，再代入 ② 得 $\frac{1}{4a}+\frac{1}{2a}-1=0$，解得 $a=\frac{3}{4}$.

综上所述，a 的取值范围是 $\left[-\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$.

评注 例 1-7 借用"不动点"和"稳定点"这两个概念来描述方程的解集问题，关键是对 $f(f(x))-x$ 进行因式分解. 由于 $f(x)$ 不一定是二次函数，所以要考虑 a 是否等于 0.

【例 1-8】 如果存在 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，使得 $k+a_k(k=1,2,\cdots,n)$ 都是完全平方数，则称 n 为"好数". 问：在集合 $\{11,13,15,17,19\}$ 中，哪些是"好数"，哪些不是"好数"，说明理由.

分析 由于 $\{11,13,15,17,19\}$ 是有限集，且该集合只含五个元素，所以可以对这些元素

逐一进行讨论.

解:(1) 11 不是“好数”,因为 4 只能与 5 相加得 3^2,而 11 也只能与 5 相加得 4^2,从而不存在满足要求的排列.

(2) 13 是“好数”,因为在如下排列中,$k+a_k(k=1,2,\cdots,13)$ 均为完全平方数.

k:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
a_k:	8	2	13	12	11	10	9	1	7	6	5	4	3

(3) 15 是“好数”,因为在如下排列中,$k+a_k(k=1,2,\cdots,15)$ 均为完全平方数.

k:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_k:	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

(4) 17 是“好数”,因为在如下排列中,$k+a_k(k=1,2,\cdots,17)$ 均为完全平方数.

k:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
a_k:	3	7	6	5	4	10	2	17	16	15	14	13	12	11	1	9	8

(5) 19 是“好数”,因为在如下排列中,$k+a_k(k=1,2,\cdots,19)$ 均为完全平方数.

k:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
a_k:	8	7	6	5	4	3	2	1	16	15	14	13	12	11	10	9	19	18	17

综上可知,集合 $\{11,13,15,17,19\}$ 中除 11 外,其他元素均为“好数”.

评注 例 1-8 解答的本质是组合构造,读者可以对正整数集 $\mathbf{Z}_+$ 进行讨论.原题的推广可见本讲同步训练第 13 题.

同步训练

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{1,3,5,7\}$,$B=\{2,4,6,8,20\}$,若 $C=\{s\mid s=a+b,a\in A,b\in B\}$,则集合 C 的元素个数为(　　).

A. 9　　B. 11　　C. 13　　D. 20

2. 已知 $\mathbf{Z}$ 为整数集,集合 $A=\{x\mid |x-3|<\pi,x\in\mathbf{Z}\}$,$B=\{x\mid x^2-11x+5<0,x\in\mathbf{Z}\}$,$C=\{x\mid |2x^2-11x+10|\geqslant|3x-2|,x\in\mathbf{Z}\}$,$\bar{C}$ 是 C 在 $\mathbf{Z}$ 中的补集,则 $A\cap B\cap\bar{C}$ 的真子集的个数为(　　).

A. 7　　B. 8　　C. 15　　D. 16

3. 集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$,$C=\{x\mid x^2-mx+2=0\}$,$A\cap C=C$,则实数 m 的值为(　　).

A. 3　　B. 3 或 $-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$

C. $-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$　　D. 以上都不对

4. 12 支球队进行循环赛,每队都恰与其他各队比赛一场,每一场比赛的结局可能是一队获胜或两队平手,获胜队可得 2 分,平手则两队各得 1 分.那么下列有关 12 队的积分记录叙述

中，错误的是(　　).

A. 一定有偶数支球队其积分为奇数

B. 一定有偶数支球队其积分为偶数

C. 不可能有两队积分为 0 分

D. 所有积分的总和至少为 100 分

E. 积分最高者至少可得 12 分

5. 定义全集 X 的真子集 $A \subsetneqq X$ 的特征函数为 $f_A(x)=\begin{cases}1, & x \in A,\\ 0, & x \notin A.\end{cases}$ 那么，对不同集合 A，$B \subsetneqq X$，下列命题中不正确的是(　　).

A. $A \subsetneqq B \Leftrightarrow f_A(x) \leqslant f_B(x), \forall x \in X$

B. $f_{\complement_X A}(x)=1-f_A(x), \forall x \in X$

C. $f_{A \cap B}(x)=f_A(x) f_B(x), \forall x \in X$

D. $f_{A \cup B}(x)=f_A(x)+f_B(x), \forall x \in X$

二、解答题

6. 对 $S_n=\{1,2,\cdots,n\}$ 的每一个非空子集 A，我们将 A 中每一个元素 $k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 都乘以 $(-1)^k$，然后求和，则所有的这些和的总和是多少？

7. 设 $M=\{x \mid f(x)=x\}$，$N=\{x \mid f(f(x))=x\}$.

(1) 求证：$M \subseteq N$；

(2) 当 $f(x)$ 为单调递增函数时，是否有 $M=N$？证明之.

8. 请写出命题“要使函数 $f(x) \geqslant 0$，只要 x 不在区间 $[a,b]$ 内就可以了”对应的逆否命题.

9. 设 $x_i \in\{\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1\}$，$i=1,2,3,\cdots,2010$，令 $S=x_1 x_2+x_3 x_4+\cdots+x_{2009} x_{2010}$.

(1) S 能否等于 2010？证明你的结论；

(2) S 能取到多少个不同的整数值？

10. 对于集合 S，设 $|S|$ 表示 S 中的元素个数，而令 $n(s)$ 表示包括空集和 S 自身在内的 S 的子集的个数. 如果 A, B, C 三个集合满足 $n(A)+n(B)+n(C)=n(A \cup B \cup C)$，$|A|=|B|=100$，求 $|A \cap B \cap C|$ 的最小可能值.

11. 给定集合 $I=\{1,2,3,\cdots,n\}$ 的 k 个子集：$A_1, A_2, \cdots, A_k$ 满足任何两个子集的交集非空，并且再添加 I 的任何一个其他子集后将不再具有该性质，求 k 的值.

12. 定义闭集合 S，若 $a, b \in S$，则 $a+b \in S$，$a-b \in S$.

(1) 举一例，真包含于 $\mathbf{R}$ 的无限闭集合；

(2) 求证：对任意两个闭集合 S_1、$S_2 \subsetneqq \mathbf{R}$，存在 $c \in \mathbf{R}$，但 $c \notin S_1 \cup S_2$.

13. 如果存在 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，使 $k+a_k(k=1,2,\cdots,n)$ 都是完全平方数，则称 n 为“好数”. 问：在正整数集合中，哪些是“好数”，哪些不是“好数”，并说明理由.

14. 设 S 是一个集合，$\circ$ 和 $\bigstar$ 是 S 上的两个二元运算，并满足：对于任意的 $x, y \in S$，

$$(x \circ y) \circ(y \bigstar x)=y=(x \bigstar y) \bigstar(y \circ x).$$

求证：

$$(x \bigstar y) \circ(y \circ x)=y=(x \circ y) \bigstar(y \bigstar x)$$

对所有 $x, y \in S$ 成立.

第 2 讲　基本不等式

今天，不等式在数学的所有领域里都起着重要的作用，并且提供了一个非常活跃而有吸引力的研究领域.

——密特利诺维奇(南斯拉夫)

知识方法述要

1. 基本不等式

(1) 设 $x \in \mathbf{R}$，则 $x^2 \geqslant 0$，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立.

(2) 设 $a, b \in \mathbf{R}$，则 $a^2+b^2 \geqslant 2ab$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立.

(3) 设 $a, b, c \in \mathbf{R}$，则 $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$，当且仅当 $a=b=c$ 时，等号成立.

事实上，$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2] \geqslant 0$.

2. 算术-几何平均不等式

(1) 设 $a, b \in \mathbf{R}_+$，则 $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立.

(2) 设 $a, b, c \in \mathbf{R}_+$，则 $\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$，当且仅当 $a=b=c$ 时，等号成立.

证明如下：

因为 $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$，

若 $x, y, z>0$，则

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=\frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2] \geqslant 0,$$

即

$$x^3+y^3+z^3 \geqslant 3xyz.$$

如果 a, b, c 是正数，设 $x=\sqrt[3]{a}$，$y=\sqrt[3]{b}$，$z=\sqrt[3]{c}$，那么

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc},$$

当且仅当 $a=b=c$ 时，等号成立.

例题精讲

【例 2-1】 设 $x, y \in \mathbf{R}_+$，求证：$\frac{x^4}{y^4}+\frac{y^4}{x^4}-\frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{x^2}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geqslant 2$.

分析　我们知道两个实数大小的比较可通过考查两数的差与 0 的大小关系来实现，因此，要证明一个不等式也就可以如同进行实数大小比较一样，采用作差、变形、确定符号的方式进行.

证明：作差

$$\begin{aligned}&\frac{x^4}{y^4}+\frac{y^4}{x^4}-\frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{x^2}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\\&=\left[\left(\frac{x^2}{y^2}\right)^2-2\frac{x^2}{y^2}+1\right]+\left[\left(\frac{y^2}{x^2}\right)^2-2\frac{y^2}{x^2}+1\right]+\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2-2\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]\\&\quad+\left[\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2-2\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot\sqrt{\frac{x}{y}}+\left(\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2\right]\\&=\left(\frac{x^2}{y^2}-1\right)^2+\left(\frac{y^2}{x^2}-1\right)^2+\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2\geqslant 0,\end{aligned}$$

所以$\frac{x^4}{y^4}+\frac{y^4}{x^4}-\frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{x^2}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 2$.

评注　根据实数的有序性，在证明不等式 $A>B$ 或 $A<B$ 时，直接把 $A-B$ 与 0 比较大小，最后推演出结论. 作差后实行配方是常采取的步骤.

【例 2-2】　设 $a,b,c,d>0$，且 $abcd=1$. 求证：

$$\frac{1}{a+b+2}+\frac{1}{b+c+2}+\frac{1}{c+d+2}+\frac{1}{d+a+2}\leqslant 1.$$

证明：由算术-几何平均不等式，$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，那么

$$\frac{1}{a+b+2}+\frac{1}{c+d+2}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{ab}+2}+\frac{1}{2\sqrt{cd}+2}.$$

令$\sqrt{ab}=x$. 由已知条件知$\sqrt{cd}=\frac{1}{x}$. 于是

$$\frac{1}{2\sqrt{ab}+2}+\frac{1}{2\sqrt{cd}+2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{x}{1+x}\right)=\frac{1}{2}.$$

所以

$$\frac{1}{a+b+2}+\frac{1}{c+d+2}\leqslant\frac{1}{2}.$$

类似地，有

$$\frac{1}{b+c+2}+\frac{1}{d+a+2}\leqslant\frac{1}{2}.$$

将这两个不等式相加，即得证. 当 $a=b=c=d=1$ 时，等号成立.

【例 2-3】　设 $x,y,z>0$，且满足$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{xyz}$. 求证：

$$\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{2y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{2z}{\sqrt{1+z^2}}<3.$$

证明: 注意到

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{xyz}\Rightarrow xy+yz+xz<1,$$

因此

$$\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}<\frac{2x}{\sqrt{x^2+xy+xz+yz}}=\frac{2x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}.$$

根据算术-几何平均不等式,得

$$\frac{2x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}\leqslant\frac{x}{x+y}+\frac{x}{x+z}.$$

同理,

$$\frac{2y}{\sqrt{1+y^2}}\leqslant\frac{y}{y+z}+\frac{y}{y+x},\frac{2z}{\sqrt{1+z^2}}\leqslant\frac{z}{z+x}+\frac{z}{z+y}.$$

将上面三个不等式相加就得到我们要证明的不等式.

【例 2-4】 设 a,b 是正数,求证:$\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{4}(a+b)\geqslant a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$.

证明: 根据算术-几何平均不等式$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$,可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{4}(a+b)-a\sqrt{b}-b\sqrt{a}\\=&\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{4}(a+b)-\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})\\\geqslant&\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{4}(a+b)-\frac{a+b}{2}(\sqrt{a}+\sqrt{b})\\=&\frac{a+b}{2}\left(a+b+\frac{1}{2}-\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\\=&\frac{a+b}{2}\left[\left(\sqrt{a}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{b}-\frac{1}{2}\right)^2\right]\geqslant 0.\end{aligned}$$

所以$\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{4}(a+b)\geqslant a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$.

【例 2-5】 已知 a,b,c 为非负实数,求证:$a^3+b^3+c^3\geqslant a^2b+b^2c+c^2a$.

证明: 由算术-几何平均不等式,有

$$\frac{a^3+a^3+b^3}{3}\geqslant\sqrt[3]{a^3\cdot a^3\cdot b^3}=a^2b.$$

类似地,

$$\frac{b^3+b^3+c^3}{3}\geqslant b^2c,\quad\frac{c^3+c^3+a^3}{3}\geqslant c^2a.$$

将上面三个不等式相加,就得到了所需的结果.

评注 将已知不等式相加或相乘,推出欲证不等式是证明不等式的常用手段.

【例 2-6】　求 $f(x)=x\sqrt{1-3x}$ 的最大值.

解：首先考虑到函数有意义，需 $1-3x\geqslant 0$，即 $x\leqslant\dfrac{1}{3}$.

若 $x\leqslant 0$ 及 $x=\dfrac{1}{3}$，$f(x)\leqslant 0$.

若 $0<x<\dfrac{1}{3}$，则根据算术-几何平均不等式，有

$$\begin{aligned}(x\sqrt{1-3x})^2&=x^2(1-3x)\\&=\frac{4}{9}\times\frac{3}{2}x\times\frac{3}{2}x\times(1-3x)\\&\leqslant\frac{4}{9}\left[\frac{\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}x+(1-3x)}{3}\right]^3=\frac{4}{243},\end{aligned}$$

所以 $x\sqrt{1-3x}\leqslant\dfrac{2\sqrt{3}}{27}$，当且仅当 $\dfrac{3}{2}x=\dfrac{3}{2}x=1-3x$，即 $x=\dfrac{2}{9}$ 时，等号成立.

所以，当 $x=\dfrac{2}{9}$ 时，$f(x)$ 取最大值 $\dfrac{2\sqrt{3}}{27}$.

评注　例 2-6 中求 $x^2(1-3x)$ 的最大值需要消去变量 x，运用三元平均值不等式，配系数，变形为 $\dfrac{3}{2}x\cdot\dfrac{3}{2}x\cdot(1-3x)$ 即可，同时要注意等号成立的条件.

【例 2-7】　设非负实数 a,b,c 满足 $a+b+c=3$. 求

$$S=(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)$$

的最大值.

解：不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$，显然有 $b^2-bc+c^2\leqslant b^2$，$c^2-ca+a^2\leqslant a^2$.

根据算术-几何平均不等式可得

$$\begin{aligned}S&\leqslant a^2b^2(a^2-ab+b^2)=\frac{4}{9}\cdot\frac{3ab}{2}\cdot\frac{3ab}{2}\cdot(a^2-ab+b^2)\\&\leqslant\frac{4}{9}\left[\frac{\frac{3ab}{2}+\frac{3ab}{2}+(a^2-ab+b^2)}{3}\right]^3\\&=\frac{4(a+b)^6}{3^5}\leqslant\frac{4(a+b+c)^6}{3^5}=12.\end{aligned}$$

所以 S 的最大值为 12，这时 $(a,b,c)=(2,1,0)$.

【例 2-8】　设 $x_1,\cdots,x_{100}$ 是非负实数，并且对于所有 $i=1,\cdots,100$，$x_i+x_{i+1}+x_{i+2}\leqslant 1$（令 $x_{101}=x_1$，$x_{102}=x_2$）. 求和式 $S=\sum\limits_{i=1}^{100}x_ix_{i+2}$ 的最大值.

解：对于所有 $i=1,\cdots,50$，令 $x_{2i}=0$，$x_{2i-1}=\dfrac{1}{2}$. 那么

$$S=50\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{2}.$$

我们断言,$\frac{25}{2}$ 即为所求最大值.证明如下:

对于任何 $1\leqslant i\leqslant 50$,由已知条件,有

$$x_{2i-1}\leqslant 1-x_{2i}-x_{2i+1} \text{ 和 } x_{2i+2}\leqslant 1-x_{2i}-x_{2i+1}.$$

将求和项用上面的不等式表示:

$$\begin{aligned}x_{2i-1}x_{2i+1}+x_{2i}x_{2i+2}&\leqslant(1-x_{2i}-x_{2i+1})x_{2i+1}+x_{2i}(1-x_{2i}-x_{2i+1})\\&=(x_{2i}+x_{2i+1})(1-x_{2i}-x_{2i+1}).\end{aligned}$$

由算术-几何平均不等式,得

$$(x_{2i}+x_{2i+1})(1-x_{2i}-x_{2i+1})\leqslant\left[\frac{(x_{2i}+x_{2i+1})+(1-x_{2i}-x_{2i+1})}{2}\right]^2=\frac{1}{4}.$$

所以 $x_{2i-1}x_{2i+1}+x_{2i}x_{2i+2}\leqslant\frac{1}{4}$.

最后,将题目中的和式改为可以应用上述不等式的形式,从而得到

$$S=\sum_{i=1}^{100}x_ix_{i+2}=\sum_{i=1}^{50}(x_{2i-1}x_{2i+1}+x_{2i}x_{2i+2})\leqslant 50\times\frac{1}{4}=\frac{25}{2}.$$

同步训练

1. 设 a 为任意实数,求证:$a^6-a^5+a^4+a^2-a+1>0$.
2. 设 $S=2x^2-xy+y^2+2x+3y$,其中 x,y 是实数,求 S 的最小值.
3. 已知实数 a,b,c 满足 $a^2+b^2+c^2=1$,求证:$-\frac{1}{2}\leqslant ab+bc+ca\leqslant 1$.
4. 设 $x>0,y>0$,求证:$\frac{x}{x^4+y^2}+\frac{y}{y^4+x^2}\leqslant\frac{1}{xy}$.
5. 求函数 $f(x)=\frac{5-4x+x^2}{2-x}$ 在 $(-\infty,2)$ 上的最小值.
6. 已知 x,y 都在区间 $(-2,2)$ 内,且 $xy=-1$,求函数 $u=\frac{4}{4-x^2}+\frac{9}{9-y^2}$ 的最小值.
7. 已知 $a,b,c,d>0$,求证:$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}\geqslant\sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}}$.
8. 证明:当 $x,y\in\mathbf{R}$ 时,$-\frac{1}{2}\leqslant\frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}\leqslant\frac{1}{2}$ 成立.
9. 设 $a,b,c>0$ 且 $abc=1$,求证:$ab^2+bc^2+ca^2\geqslant ab+bc+ca$.
10. 求表达式 $3^{x+y}(3^{x-1}+3^{y-1}-1)$ 的最小值,其中 $x,y\in\mathbf{R}$.
11. 设正数 a,b,c 满足 $ab+bc+ca=1$,求证:

$$a\sqrt{b^2+c^2+bc}+b\sqrt{c^2+a^2+ca}+c\sqrt{a^2+b^2+ab}\geqslant\sqrt{3}.$$

12. 设 x,y,z 是实数,求证:

$$(x^2+y^2+z^2)^2+xyz(x+y+z)\geqslant(xy+yz+zx)^2+(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2).$$

13. 已知正数 a,b,c,d 满足 $a+b+c+d=4$. 求证:

$$\frac{(a+\sqrt{b})^2}{\sqrt{a^2-ab+b^2}}+\frac{(b+\sqrt{c})^2}{\sqrt{b^2-bc+c^2}}+\frac{(c+\sqrt{d})^2}{\sqrt{c^2-cd+d^2}}+\frac{(d+\sqrt{a})^2}{\sqrt{d^2-da+a^2}}\leqslant 16.$$

14. 设 $x_1,x_2,x_3\in\mathbf{R}_+$,求证: $\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+\frac{x_1}{x_3}\leqslant\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3+\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^3+\left(\frac{x_3}{x_1}\right)^3$.