第 5 章 时变电磁场

CHAPTER 5

5.1 内容提要及学习要点

时变的电场和磁场可以相互转换并摆脱源的束缚而向外传播，即电磁波。借助于波动方程可以融合电场与磁场的耦合；而借助于复矢量，可以简化对时间变量的分析。本章主要掌握麦克斯韦方程组的表述、物理意义及典型应用，掌握将矢量方程转化为标量方程的方法；理解时变电场和时变磁场的相互转化规律，掌握时变电磁场的复数形式及其在分析电磁场问题中的应用；熟练掌握坡印亭定理及其应用；理解电磁场的边界条件，理解能量守恒与转化定律、位函数及波动方程等；理解传导电流、运流电流和位移电流的含义。

5.1.1 麦克斯韦方程组

电磁波是电磁场的运动形式。麦克斯韦方程组描述了电磁场的变化规律，以及场与源的关系。麦克斯韦电磁理论的基础是库仑定律、毕奥-萨伐尔定律（或安培定律）及法拉第电磁感应定律等三大实验定律，其主要内容包括法拉第电磁感应定律、广义安培环路定律、高斯定律、磁通连续性原理及一些本构关系等。

散度定理和斯托克斯定理是建立联系麦克斯韦方程组微分形式和积分形式的桥梁。

1. 麦克斯韦方程组的积分形式

$$\begin{cases}\oint_l \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\iint_S\left(\boldsymbol{J}+\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\\ \oint_l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\dfrac{\partial}{\partial t}\iint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\\ \oiint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint_V \rho \mathrm{d}V\\ \oiint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0\end{cases} \tag{5-1}$$

通常，无源的情况是指外加电流源 $\boldsymbol{J}$、电荷源 ρ 为零。但需注意，在有耗媒质中的 $\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$ 不能视为源。

2. 麦克斯韦方程组的微分形式

$$\begin{cases}\nabla\times \boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\\[2ex]\nabla\times \boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\\[2ex]\nabla\cdot \boldsymbol{D}=\rho\\\nabla\cdot \boldsymbol{B}=0\end{cases}\tag{5-2}$$

位移电流

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{d}}=\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}=\varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}\tag{5-3}$$

注意,位移电流 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{d}}$ 由变化的电场产生,是一种电流密度。

通过麦克斯韦方程组可以得到结论:时变电场有旋也有散,电场线可以闭合,也可以不闭合;而时变磁场有旋无散,磁感线总是闭合的。闭合的电场线和闭合的磁感线相互铰链,不闭合的电场线从正电荷出发,而终止于负电荷或无穷远处。闭合的磁感线要么与电流铰链,要么与电场线铰链。在没有电荷及电流源的区域,时变电场和时变磁场都是有旋无散的,电场线和磁感线相互铰链,自行闭合。

3. 媒质的本构方程

$$\begin{cases}\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}\\\boldsymbol{B}=\mu_0(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{P}_{\mathrm{m}})\\\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}\end{cases}\tag{5-4}$$

在均匀、线性、各向同性的媒质中

$$\begin{cases}\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}\\\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}\end{cases}\tag{5-5}$$

4. 时变电磁场的特点

(1) 电场和磁场互为对方的涡旋(旋度)源。交变磁场的源包括交变的电场和电流(电流包括外加电流源和传导电流等),场源之间是右手螺旋关系;交变电场的源包括交变的磁场和电荷,场和涡旋源之间是左手螺旋关系。

(2) 电场和磁场共存,不可分割。

(3) 电场线和磁感线相互环绕。

5.1.2 时变电磁场的边界条件

边界条件包括法向和切向两类,记忆和理解方法与静态场的情况类似。

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}\cdot(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)=\rho_{\mathrm{s}}\\\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}\cdot(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2)=0\\\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}\times(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2)=0\\\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)=\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}\end{cases}\tag{5-6}$$

对于理想导体表面而言,其边界条件为

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_{\mathrm{n}} \times \boldsymbol{E} = 0 \\ \boldsymbol{e}_{\mathrm{n}} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_{\mathrm{s}} \\ \boldsymbol{e}_{\mathrm{n}} \cdot \boldsymbol{D} = \rho_{\mathrm{s}} \\ \boldsymbol{e}_{\mathrm{n}} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \end{cases} \tag{5-7}$$

复矢量形式的边界条件与瞬时表示形式的边界条件在形式上完全一样。注意，电磁场法向分量的边界条件和电磁场切向分量的边界条件并不独立。

另外，磁场的切向分量与电流密度之间是相互铰链的关系，既同时位于分界面的切平面上，又相互垂直正交，因此，在应用磁场的切向分量的边界条件时还要注意方向，即积分回路的方向与电流方向呈右手螺旋关系。

5.1.3　时谐电磁场及麦克斯韦方程组的复数形式

麦克斯韦方程组的复数形式为

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \mathrm{j}\omega \boldsymbol{D} \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega \boldsymbol{B} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla \cdot \boldsymbol{J} + \mathrm{j}\omega\rho = 0 \end{cases} \tag{5-8}$$

常用运算符：$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \mathrm{j}\omega$，$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow -\omega^2$。

5.1.4　时变电磁场的能量及功率

1. 坡印亭定理

坡印亭定理描述了电磁能量的流动和能量转化的关系，即

$$-\oint\!\!\!\oint_{S'} (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}' = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H} + \frac{1}{2}\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E} \right) \mathrm{d}V + \iiint_V (\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E}) \mathrm{d}V \tag{5-9}$$

物理意义：穿过闭合面 S' 流入体积 V 内的电磁功率，等于体积 V 内单位时间内增加的电磁能量与传导电流损耗的功率之和，是电磁场能量守恒的具体体现。

2. 坡印亭矢量

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \tag{5-10}$$

表示单位时间内通过垂直于电磁能量流动方向的单位面积的电磁能量，又称能量流密度(功率密度)。

复坡印亭矢量

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^* \tag{5-11}$$

它与时间无关，表示复功率密度，其实部为平均功率密度(有功功率密度)，虚部为无功功率密度。式中的电场强度和磁场强度是复振幅值而不是有效值；平均能流密度矢量或平均坡印亭矢量为

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}} = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^* \right] = \mathrm{Re}[\boldsymbol{S}] \tag{5-12}$$

如果闭合曲面为导电壁，则

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\iiint_V(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E})\mathrm{d}V=0$$

这说明，体积 V 内的电磁功率等于传导电流的损耗功率，即等效为一个有耗的二阶RLC 电路；如果 σ 等于零，则等效为无耗的 LC 振荡电路。

5.1.5 时变电磁场的唯一性定理、位函数及波动方程

1. 时变电磁场的唯一性定理

在以闭合曲面 S' 为边界的有界区域 V 中，如果给定 $t=0$ 时刻的电场强度和磁场强度的初始值，并且在 $t\geqslant 0$ 时，给定边界上电场强度的切向分量或者磁场强度的切向分量，那么在 $t>0$ 时，区域 V 中的电磁场由麦克斯韦方程唯一地确定。

2. 交变场的位函数

交变场与标量电位 φ、矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 等位函数的关系为

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\tag{5-13}$$

洛伦兹规范

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=-\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 和标量电位 φ 的波动方程为

$$\begin{cases}\nabla^2\boldsymbol{A}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\mu\boldsymbol{J}\\[2ex]\nabla^2\varphi-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\dfrac{\rho}{\varepsilon}\end{cases}\tag{5-14}$$

对于时谐场，上述达朗贝尔方程可以表示为

$$\begin{cases}\nabla^2\boldsymbol{A}+k^2\boldsymbol{A}=-\mu\boldsymbol{J}\\[1ex]\nabla^2\varphi+k^2\varphi=-\dfrac{\rho}{\varepsilon}\end{cases}\tag{5-15}$$

其中，$k^2=\omega^2\mu\varepsilon$。波动方程有时便于问题的求解，但方程的阶数比麦克斯韦方程高一阶。所以通常直接用麦克斯韦方程求解。

5.2 典型例题解析

【例题 5-1】 在直角坐标系中，$z>0$ 的区域为自由空间，$z\leqslant 0$ 的区域为理想导体。若在自由空间中存在的磁场为

$$\boldsymbol{H}=3\boldsymbol{e}_x\cos(3\times10^9t-10z)+4\boldsymbol{e}_y2.63\times10^{-5}\cos(3\times10^9t-10z)$$

试求理想导体表面的电流密度。

解：分界面的法向为 $\boldsymbol{e}_z$，因此理想导体表面的电流密度为

$$\boldsymbol{J}_s=\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{H}=3\boldsymbol{e}_y\cos(3\times10^9t-10z)-4\boldsymbol{e}_x2.63\times10^{-5}\cos(3\times10^9t-10z)$$

【例题 5-2】 某无限大理想导体板放置在填充空气的无源空间中 $x=0$ 的平面上，在 $x>0$ 空间中时变电磁场为 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_y\sin(4\pi x)\cos(15\pi\times10^8t-kz)\mathrm{V/m}$。试求：

(1) 相移常数 k；

(2) 导体板上的自由面电荷和自由电流分布；

(3) 平均坡印亭矢量。

解：(1) 电场的复数形式为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_y\sin(4\pi x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\ \mathrm{V/m}$$

根据复数形式的麦克斯韦第二方程，得

$$\boldsymbol{H}=\frac{\nabla\times\boldsymbol{E}}{-\mathrm{j}\omega\mu_0}=-\boldsymbol{e}_x\frac{k}{\omega\mu_0}\sin(4\pi x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}-\boldsymbol{e}_z\frac{4\pi}{\mathrm{j}\omega\mu_0}\cos(4\pi x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\ \mathrm{A/m}$$

再根据麦克斯韦第一方程 $\nabla\times\boldsymbol{H}=\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=\frac{\nabla\times\boldsymbol{H}}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_0}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_0}\nabla\times\left\{-\boldsymbol{e}_x\frac{k}{\omega\mu_0}\sin(4\pi x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}-\boldsymbol{e}_z\frac{4\pi}{\mathrm{j}\omega\mu_0}\cos(4\pi x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\right\}\\&=\frac{1}{\omega^2\varepsilon_0\mu_0}\left[\boldsymbol{e}_yk^2\sin(4\pi x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}+\boldsymbol{e}_y(4\pi)^2\sin(4\pi x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\right]\\&=\boldsymbol{e}_y\frac{k^2+(4\pi)^2}{\omega^2\varepsilon_0\mu_0}\sin(4\pi x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\ \mathrm{V/m}\end{aligned}$$

因此，比较上面两个电场的系数，得

$$\omega^2\varepsilon_0\mu_0=k^2+(4\pi)^2$$

于是，相移常数为

$$k=\sqrt{\omega^2\varepsilon_0\mu_0-(4\pi)^2}=3\pi$$

(2) 由电场的表达式可知，在 $x=0$ 边界处电位移矢量的法向分量为零，因此导体板上的自由电荷密度为零。

在 $x=0$ 边界处，磁场的切向分量为

$$\boldsymbol{H}=-\boldsymbol{e}_z\frac{4\pi}{\mathrm{j}\omega\mu_0}\cos(4\pi x)\cos(15\pi\times10^8t-3\pi z)\mathrm{A/m}$$

所以，导体板上的自由电流密度为

$$\boldsymbol{J}_s|_{x=0}=\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_y\frac{1}{150\pi}\sin(15\pi\times10^8t-3\pi z)\mathrm{A/m}$$

(3) 平均坡印亭矢量。

因为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_y\sin(4\pi x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\pi z}$$

$$\boldsymbol{H}=-\boldsymbol{e}_x\frac{3\pi}{\omega\mu_0}\sin(4\pi x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\pi z}-\boldsymbol{e}_z\frac{4\pi}{\mathrm{j}\omega\mu_0}\cos(4\pi x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\pi z}$$

所以平均坡印亭矢量为

$$S_{\mathrm{av}}=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\right]=\boldsymbol{e}_z\frac{3\pi}{2\omega\mu_0}\sin^2(4\pi x)=\boldsymbol{e}_z\frac{\sin^2(4\pi x)}{400\pi}\mathrm{W/m^2}$$

【例题 5-3】 已知自由空间中平面波的电场为 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_z120\pi\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+kx)}$。试求：

(1) 与之对应的磁场；

(2) 坡印亭矢量的瞬时值；

(3) 若电场存在于某一均匀的漏电介质中，其参量为 $(\varepsilon_0,\mu_0,\sigma)$，并且在频率为 9kHz

处其激发的传导电流与位移电流的幅度相等,此时电导率是多少?

解:(1) 根据复数形式的麦克斯韦第二方程,得

$$\boldsymbol{H}=\frac{\nabla\times\boldsymbol{E}}{-\mathrm{j}\omega\mu_0}=\boldsymbol{e}_y\frac{k}{\omega\mu_0}120\pi\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+kx)}=\boldsymbol{e}_y\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+kx)}$$

(2) 电场和磁场的瞬时表达式为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_z120\pi\cos(\omega t+kx),\quad \boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_y\cos(\omega t+kx)$$

故有

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=-\boldsymbol{e}_x120\pi\cos^2(\omega t+kx)$$

(3) 当传导电流与位移电流的幅度相等时,

$$\sigma E=\omega\varepsilon_0E$$

故有

$$\sigma=\omega\varepsilon_0=2\pi\times9\times10^3\times\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}=5\times10^{-7}\ \mathrm{S/m}$$

【例题 5-4】 若无界理想媒质(ε、μ_0)中的电场为 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_y2\mathrm{e}^{\mathrm{j}(6000\pi t+4\pi\times10^{-5}z)}$。试求:

(1) 该介质的相对介电常数;

(2) 与电场对应的磁场强度;

(3) 对应的坡印亭矢量平均值。

解:(1) 因为 $k^2=\omega^2\mu\varepsilon$,因此

$$\sqrt{\varepsilon_r}=k/(\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0})=\frac{4\pi\times10^{-5}\times3\times10^8}{6000\pi}=2$$

故介质的相对介电常数 $\varepsilon_r=4$。

(2) 根据复数形式的麦克斯韦第二方程,得

$$\boldsymbol{H}=\frac{\nabla\times\boldsymbol{E}}{-\mathrm{j}\omega\mu_0}=\boldsymbol{e}_x\frac{k}{\omega\mu_0}2\mathrm{e}^{\mathrm{j}(6000\pi t+4\pi\times10^{-5}z)}=\boldsymbol{e}_x\frac{1}{30\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(6000\pi t+4\pi\times10^{-5}z)}$$

或者,由于传播方向 $-\boldsymbol{e}_z$ 与电场方向 $\boldsymbol{e}_y$ 垂直,结合表达式易知电磁波为均匀平面波,因此

$$\boldsymbol{H}=\frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{\eta_0}(-\boldsymbol{e}_z)\times E=\frac{2}{120\pi}(-\boldsymbol{e}_z)\times\boldsymbol{e}_y2\mathrm{e}^{\mathrm{j}(6000\pi t+4\pi\times10^{-5}z)}=\boldsymbol{e}_x\frac{1}{30\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(6000\pi t+4\pi\times10^{-5}z)}$$

(3) 坡印亭矢量平均值为

$$\begin{aligned}S_{av}&=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\right]=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{e}_y2\mathrm{e}^{\mathrm{j}(6000\pi t+4\pi\times10^{-5}z)}\times\boldsymbol{e}_x\frac{1}{30\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(6000\pi t+4\pi\times10^{-5}z)}\right]\\&=\boldsymbol{e}_z\frac{-1}{30\pi}\end{aligned}$$

【例题 5-5】 在由 $x=0$ 和 $x=a$ 两个无限大理想导电板构成的区域内存在电场 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_yE_0\sin(k_xx)\cos(\omega t-\beta z)$。试求:

(1) 该区域中的磁场强度;

(2) 这个电磁场应满足的边界条件及 k_x 的值;

(3) 两导体表面的电流密度。

解:(1) 由复数形式的麦克斯韦第二方程,得

$$\boldsymbol{H}=\frac{\nabla\times\boldsymbol{E}}{-\mathrm{j}\omega\mu}=-\boldsymbol{e}_z\frac{k_xE_0}{\omega\mu_0}\cos(k_xx)\sin(\omega t-\beta z)-\boldsymbol{e}_x\frac{\beta E_0}{\omega\mu_0}\sin(k_xx)\cos(\omega t-\beta z)$$

(2) 由于理想导体表面电场的切向分量为零，磁场的法向分量为零，因此

$$k_x=\frac{\pi}{a}$$

(3) 导体表面的电流密度

$$\boldsymbol{J}_s|_{x=0}=\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{H}=3\boldsymbol{e}_y\frac{k_xE_0}{\omega\mu_0}\cos(k_xx)\sin(\omega t-\beta z)$$

$$\boldsymbol{J}_s|_{x=a}=-\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{H}=-3\boldsymbol{e}_y\frac{k_xE_0}{\omega\mu_0}\cos(k_xx)\sin(\omega t-\beta z)$$

【例题 5-6】 在理想导体壁($\sigma=\infty$)上限定的区域内($0\leqslant x\leqslant a$)存在如下的电磁场：

$$E_y=H_0\omega\mu\frac{a}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin(kz-\omega t)$$

$$H_x=H_0k\frac{a}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin(kz-\omega t)$$

$$H_z=H_0\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos(kz-\omega t)$$

试问：

(1) 该电磁场所满足的边界条件如何？

(2) 导电壁上的电流密度的值如何？

解：在 $x=0$ 处，$E_y=0$，$H_x=0$，$H_z=H_0\cos(kz-\omega t)$，得

$$\boldsymbol{J}_s|_{x=0}=\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{H}=-\boldsymbol{e}_yH_0\cos(kz-\omega t)$$

$$\rho_s|_{x=0}=\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_y\varepsilon E_y=0$$

在 $x=0$ 处，$\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{e}_x$ 电磁场所满足的边界条件为

$$\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{H}=-\boldsymbol{e}_yH_0\cos(kz-\omega t),\quad \boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{E}=0$$

$$\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{B}=0,\quad \boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{D}=0$$

同理，在 $x=a$ 处，$\boldsymbol{e}_n=-\boldsymbol{e}_x$，得

$$\boldsymbol{J}_s|_{x=a}=-\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{H}=-\boldsymbol{e}_yH_0\cos(kz-\omega t)$$

$$\rho_s|_{x=a}=-\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{D}=-\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_y\varepsilon E_y=0$$

$$\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{H}=-\boldsymbol{e}_yH_0\cos(kz-\omega t),\quad \boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{E}=0$$

$$\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{B}=0,\quad \boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{D}=0$$

【例题 5-7】 设 $z=0$ 为两种媒质的分界面，$z>0$ 为磁导率为 $\mu_1=3.0$ 的媒质 1，$z<0$ 为磁导率为 $\mu_2=2.0$ 的媒质 2。已知分界面上的电流密度为 $\boldsymbol{J}_s=3\boldsymbol{e}_y$，媒质 1 中的磁场强度为 $\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{e}_x+3\boldsymbol{e}_y+2\boldsymbol{e}_z$，试求媒质 2 中的磁场强度。

解：设媒质 2 中的磁场强度为

$$\boldsymbol{H}_2=H_{2x}\boldsymbol{e}_x+H_{2y}\boldsymbol{e}_y+H_{2z}\boldsymbol{e}_z$$

根据磁感应强度法向分量的边界条件，有

$$B_{2z}=\mu_2H_{2z}=\mu_1H_{1z}$$

所以

$$H_{2z}=\frac{\mu_1}{\mu_2}H_{1z}=\frac{2\mu_1}{\mu_2}=3$$

根据磁场强度切向分量的边界条件,有

$$\boldsymbol{e}_z\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)=3\boldsymbol{e}_y$$

即

$$H_{1x}-H_{2x}=3,\quad H_{1y}-H_{2y}=0,\quad 故\ H_{2x}=-2,\quad H_{2y}=3$$

因此

$$\boldsymbol{H}_2=H_{2x}\boldsymbol{e}_x+H_{2y}\boldsymbol{e}_y+H_{2z}\boldsymbol{e}_z=-2\boldsymbol{e}_x+3\boldsymbol{e}_y+3\boldsymbol{e}_z$$

【例题 5-8】 有一同轴线的内外导体半径分别为 a、b,长度为 L。假设同轴线内部填充理想介质,两端用理想导体短路。已知在 $a\leqslant r\leqslant b$,$0\leqslant z\leqslant L$ 的区域内的电磁场为:$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_r\dfrac{A}{r}\sin kz$,$\boldsymbol{H}=\dfrac{B}{r}\boldsymbol{e}_\theta\cos kz$。试求:

(1) A 与 B 之间的关系;

(2) k;

(3) 内外导体表面的电荷及电流密度。

解:(1) 由麦克斯韦第二方程$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{B}$,得

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_\theta\frac{\partial E_\mathrm{r}}{\partial z}=\boldsymbol{e}_\theta\frac{Ak}{r}\cos kz=-\mathrm{j}\omega\mu H\boldsymbol{e}_\theta$$

因此

$$\frac{A}{B}=\frac{-\mathrm{j}\omega\mu}{k}$$

(2) 根据麦克斯韦第一方程$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\mathrm{j}\omega\boldsymbol{D}$,得

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\nabla\times\frac{B}{r}\boldsymbol{e}_\theta\cos kz=\frac{1}{r}\left[-\boldsymbol{e}_r\frac{\partial(rH_\theta)}{\partial z}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial(rH_\theta)}{\partial r}\right]=\boldsymbol{e}_r\frac{Bk}{r}\sin kz=\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}$$

所以

$$\frac{A}{B}=\frac{k}{\mathrm{j}\omega\varepsilon}$$

即

$$\frac{k}{\mathrm{j}\omega\varepsilon}=\frac{-\mathrm{j}\omega\mu}{k},\quad k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

(3) 将同轴线的内外导体视为理想导体,则利用边界条件得

$$\boldsymbol{J}_\mathrm{s}\Big|_{r=a}=\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{H}\Big|_{r=a}=\boldsymbol{e}_z\frac{B}{a}\cos kz$$

$$\rho_\mathrm{s}\Big|_{r=a}=\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{D}\Big|_{r=a}=\frac{\varepsilon A}{a}\sin kz$$

$$\boldsymbol{J}_\mathrm{s}\Big|_{r=b}=-\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{H}\Big|_{r=b}=-\boldsymbol{e}_z\frac{B}{b}\cos kz$$

$$\rho_\mathrm{s}\Big|_{r=b}=-\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{D}\Big|_{r=b}=\frac{\varepsilon A}{b}\sin kz$$

【例题 5-9】 已知真空中的电场为 $E=\boldsymbol{e}_xE_0\cos k_0(z-ct)+\boldsymbol{e}_yE_0\sin k_0(z-ct)$,其中

$k_0=\frac{\omega}{c}$。试求：

（1）磁场强度和坡印亭矢量的瞬时值；

（2）确定电场的变化轨迹；

（3）磁场能量密度、电场能量密度和坡印亭矢量的平均值。

解：（1）由麦克斯韦第二方程$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$，得

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{e}_x\frac{\partial E_y}{\partial z}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial E_x}{\partial z}=-\boldsymbol{e}_x k_0E_0\cos[k_0(z-ct)]-\boldsymbol{e}_y k_0E_0\sin[k_0(z-ct)]=-\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}$$

对上式积分，得到磁场为

$$\boldsymbol{H}=-\boldsymbol{e}_x\frac{E_0}{\mu_0 c}\sin[k_0(z-ct)]+\boldsymbol{e}_y\frac{E_0}{\mu_0 c}\cos[k_0(z-ct)]$$

因此，坡印亭矢量的瞬时值为

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_z\frac{E_0^2}{\mu_0 c}$$

（2）电场的变化轨迹。由于

$$|\boldsymbol{E}|=\sqrt{E_x^2+E_y^2}=E_0$$

$$\theta=\arctan\left(\frac{E_y}{E_x}\right)=k_0(z-ct)$$

故电场随时间变化的轨迹是圆。

（3）磁场能量密度、电场能量密度和坡印亭矢量的平均值：

$$S_{\mathrm{av,e}}=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}\boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{E}(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}\varepsilon_0\boldsymbol{E}(t)\cdot\boldsymbol{E}(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\varepsilon_0E_0^2$$

$$S_{\mathrm{av,m}}=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{H}(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{H}(t)\cdot\boldsymbol{H}(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\varepsilon_0E_0^2$$

将电场和磁场表示为复数形式，得

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_xE_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0z}+\boldsymbol{e}_yE_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(-\frac{\pi}{2}-k_0z\right)},\quad \boldsymbol{H}=-\boldsymbol{e}_x\frac{E_0}{\mu_0c}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(-\frac{\pi}{2}-k_0z\right)}+\boldsymbol{e}_y\frac{E_0}{\mu_0c}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0z}$$

因此，坡印亭矢量的平均值为

$$S_{\mathrm{av}}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*]=\boldsymbol{e}_z\frac{E_0^2}{\mu_0c}$$

【例题 5-10】 半径为 a 的圆形平行板电容器，电极距离为 d，其间填充电导率为 σ、介电常数为 ε、磁导率为 μ 的非理想均匀电介质，极板间的电压为 $u=U_0\cos\omega t$，略去边缘效应。试用坡印亭定理计算电容器的储能和耗能。

解：在略去边缘效应的情况下，电场可以视为均匀分布，设电容器轴向为 z 方向，则

$$\boldsymbol{E}=\frac{U_0\cos\omega t}{d}\boldsymbol{e}_z$$

所以传导电流为

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{c}}=\sigma\boldsymbol{E}=\sigma\frac{U_0\cos\omega t}{d}\boldsymbol{e}_z$$

位移电流为

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{d}}=\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}=-\varepsilon\omega\frac{U_0\sin\omega t}{d}\boldsymbol{e}_z$$

根据全电流定律$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\iint_S\left(\boldsymbol{J}+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，得

$$2\pi rH_\phi=(J_{\mathrm{d}}+J_{\mathrm{c}})\pi r^2=\left(\sigma\frac{U_0\cos\omega t}{d}-\varepsilon\omega\frac{U_0\sin\omega t}{d}\right)\pi r^2$$

故磁场为

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_\phi\frac{U_0}{2d}r\left[\sigma\cos\omega t-\varepsilon\omega\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

利用电场和磁场的复数形式

$$\boldsymbol{E}=\frac{U_0}{d}\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_\phi\frac{U_0}{2d}r[\sigma-\varepsilon\omega\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}]$$

因此，复坡印亭矢量为

$$\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*=-\boldsymbol{e}_r\frac{U_0^2}{4d^2}r[\sigma-\mathrm{j}\varepsilon\omega]$$

则电容器吸收的功率为(考虑柱面围成的表面)

$$\begin{aligned}P&=-\frac{1}{2}\iint_S\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{e}_r\mathrm{d}S=\frac{U_0^2}{4d^2}a[\sigma-\mathrm{j}\varepsilon\omega](2\pi ad)\\&=\frac{\pi a^2U_0^2}{2d}[\sigma-\mathrm{j}\varepsilon\omega]=\frac{U_0^2}{2R}-\mathrm{j}\frac{1}{2}C\omega U_0^2\end{aligned}$$

其中，$\frac{U_0^2}{2R}$为电容器电阻吸收的平均功率，而$\frac{1}{2}C\omega U_0^2$为无功功率，即平均储能。

【例题 5-11】 电力变压器由原边绕组、副边绕组和铁芯等构成，长度为 D。试用坡印亭定理说明变压器铁芯的能量传输情况。

解：设副边绕组的匝数为 N_2，电流为 i_2，则感应电动势为

$$\mathcal{E}_2=-N_2\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

于是，副边的输出功率为 $P=i_2\mathcal{E}_2$。原边的电场与副边的关系为

$$\oint_l\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\frac{\partial}{\partial t}\iint_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

其中，电场的方向与电流方向一致(线圈绕向 $\boldsymbol{e}_\phi$)，建立圆柱坐标系，设磁场沿 z 轴方向，则对上式左边积分得

$$\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{e}_\phi\frac{1}{2\pi r}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

原边的磁场为

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_z\frac{i_2N_2}{D}$$

因此，原边的功率密度为

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_r\frac{i_2}{2\pi Dr}\mathcal{E}_2$$

对圆柱面积分,得到原边到副边传输的功率为

$$P=\iint_S\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{e}_r\mathrm{d}S=\int_0^D S\cdot 2\pi r\mathrm{d}z\boldsymbol{e}_r=i_2\mathcal{E}_2$$

因此,原边传输到副边的电磁能量等于副边的输出功率。

【例题 5-12】 一个由圆形极板构成的平行电容器,其半径为 a,极板间的距离为 $d(a\ll d)$。假设在极板上的电荷均匀分布,并且 $\rho_s=\pm\rho_0\cos\omega t$,忽略边缘效应,求极板间的电场和磁场,该场是否满足电磁场基本方程?

解:设对称轴沿 z 轴方向,在忽略边缘效应时电场均匀分布,则对于上极板,根据电荷密度求得电场为

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{D}}{\varepsilon_0}=-\boldsymbol{e}_z\frac{\rho_s}{\varepsilon_0}=-\boldsymbol{e}_z\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\cos\omega t$$

故位移电流为

$$\boldsymbol{J}_d=\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\boldsymbol{e}_z\frac{\omega\rho_0}{\varepsilon_0}\sin\omega t$$

根据安培环路定理

$$\int_l\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\pi r^2\boldsymbol{J}_d\text{,则 }\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_\phi\frac{\omega\rho_0}{2\varepsilon_0}r\sin\omega t$$

由于

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\frac{1}{r}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_r & \rho\boldsymbol{e}_\phi & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\phi} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & -\dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0}\cos\omega t\end{vmatrix}=0$$

而

$$\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}=\boldsymbol{e}_\phi\mu_0\frac{\omega^2\rho_0}{2\varepsilon_0}r\cos\omega t$$

所以$\nabla\times\boldsymbol{E}\neq\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$,因此该场不满足电磁场基本方程。

【例题 5-13】 在平行板电容器的两圆形极板之间,填充介电常数分别为 ε_1 和 ε_2,电导率分别为 σ_1 和 σ_2 的两层介质片,厚度分别为 d_1 和 d_2,如图 5-1 所示。已知加在两平行板间的电压为 $U=U_0\cos\omega t$。求两层介质片中的磁场强度。

解:忽略边缘效应,设两层介质的电场分别为 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$,电流密度分别为 $\boldsymbol{J}_1$ 和 $\boldsymbol{J}_2$,方向均向下。根据分界面电流密度矢量的边界条件,有 $\boldsymbol{J}_1=\boldsymbol{J}_2=\boldsymbol{J}$,则

$$\boldsymbol{J}=\sigma_1\boldsymbol{E}_1=\sigma_2\boldsymbol{E}_2$$

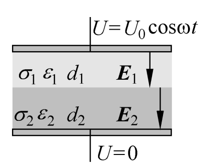

图 5-1　例题 5-13 图

又 $d_1E_1+d_2E_2=U$,由此可得电流密度大小为

$$J=\frac{\sigma_2\sigma_1 U}{\sigma_1 d_2+\sigma_2 d_1}$$

根据位移电流密度为 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{d}}=\varepsilon\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$,因此两种介质中电流密度大小为

$$J_{\mathrm{d1}}=\varepsilon_1\frac{\partial E_1}{\partial t}=\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}\frac{\partial J}{\partial t}=-\frac{\varepsilon_1\sigma_2\omega U_0\sin\omega t}{\sigma_1 d_2+\sigma_2 d_1}$$

$$J_{\mathrm{d2}}=\varepsilon_2\frac{\partial E_2}{\partial t}=\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2}\frac{\partial J}{\partial t}=-\frac{\varepsilon_2\sigma_1\omega U_0\sin\omega t}{\sigma_1 d_2+\sigma_2 d_1}$$

由于电场的旋度为零,因此根据积分形式的麦克斯韦第一方程

$$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\iint_S\left(\boldsymbol{J}+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

由于磁场的方向为 $\boldsymbol{e}_\phi$,取半径为 r 的环路积分,可得到两种介质的磁场强度为

$$H_{\phi 1}=\frac{\pi r^2}{2\pi r}(J+J_{\mathrm{d1}})=r\frac{\sigma_2 U_0(\sigma_1\cos\omega t-\varepsilon_1\omega\sin\omega t)}{2(\sigma_1 d_2+\sigma_2 d_1)}$$

$$H_{\phi 2}=\frac{\pi r^2}{2\pi r}(J+J_{\mathrm{d2}})=r\frac{\sigma_1 U_0(\sigma_2\cos\omega t-\varepsilon_2\omega\sin\omega t)}{2(\sigma_1 d_2+\sigma_2 d_1)}$$

【例题 5-14】 对于线性、均匀和各向同性的导电媒质,设媒质参数为 ε、μ、σ。试证明在无源区中时谐场满足的波动方程为

$$\nabla^2\boldsymbol{E}+k^2\boldsymbol{E}=\mathrm{j}\omega\mu\sigma\boldsymbol{E}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{H}+k^2\boldsymbol{H}=\mathrm{j}\omega\mu\sigma\boldsymbol{H}$$

证明:由于 $\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}=\nabla\times(-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H})=-\mathrm{j}\omega\mu(\nabla\times\boldsymbol{H})$,而$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$,左边利用恒等式 $\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\nabla^2\boldsymbol{E}=-\nabla^2\boldsymbol{E}$,并将$\nabla\times\boldsymbol{H}=\sigma\boldsymbol{E}+\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}$ 代入上式,得

$$-\nabla^2\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\mu(\sigma\boldsymbol{E}+\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E})=-\mathrm{j}\omega\mu\sigma\boldsymbol{E}+\omega^2\mu\varepsilon\boldsymbol{E}$$

由于 $k^2=\omega^2\mu\varepsilon$,因此

$$\nabla^2\boldsymbol{E}+k^2\boldsymbol{E}=\mathrm{j}\omega\mu\sigma\boldsymbol{E}$$

同理可得

$$\nabla^2\boldsymbol{H}+k^2\boldsymbol{H}=\mathrm{j}\omega\mu\sigma\boldsymbol{H}$$

【例题 5-15】 由麦克斯韦方程组出发,导出毕奥-萨伐尔定律。

解:由于

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J},\quad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\quad \boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$$

在库仑规范下,$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$,因此

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}=-\nabla^2\boldsymbol{A}$$

所以

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=-\nabla^2\boldsymbol{A}$$

又

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\nabla\times\mu\boldsymbol{H}=\mu\boldsymbol{J}$$

所以

$$\nabla^2\boldsymbol{A}=-\mu\boldsymbol{J}$$

考虑到$\nabla^2\varphi=-\dfrac{\rho}{\varepsilon}$的解为 $\varphi=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\displaystyle\iiint_V\frac{\rho}{r}\mathrm{d}V$,因此$\nabla^2\boldsymbol{A}=-\mu\boldsymbol{J}$ 的解为

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \frac{\boldsymbol{J}}{r}\mathrm{d}V$$

对于线电流

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu}{4\pi}\oint_l \frac{I}{r}\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

于是

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla\times\frac{\mu}{4\pi}\oint_l \frac{I}{r}\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{\mu I}{4\pi}\oint_l \nabla\left(\frac{1}{r}\right)\times\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\frac{\mu I}{4\pi}\oint_l \boldsymbol{e}_r\frac{1}{r^2}\times\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{\mu I}{4\pi}\oint_l \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{e}_r}{r^2}$$

即为毕奥-萨伐尔定律。

【例题 5-16】 设在真空中有一个导体球，半径为 a，电导率为 σ，介电常数为 ε，在 $t=0$ 时刻，导体球内在 $r\leqslant b(b<a)$ 的球内有一均匀的净体电荷分布，密度为 ρ_0，如图 5-2 所示。试求在 t 时刻：

（1）导体球中各处的净体电荷密度 $\rho(t)$；

（2）空间各点的电场强度；

（3）导体球表面的电荷密度；

（4）导体球中各处的传导电流密度。

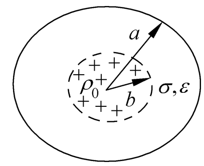

图 5-2　例题 5-16 图

解：根据电流连续性方程 $\nabla\cdot\boldsymbol{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$、欧姆定律 $\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$ 及高斯定理 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}$，可以得到关于电荷密度 ρ 的方程：

$$-\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho$$

其解为

$$\rho=\rho_0\mathrm{e}^{-(\sigma/\varepsilon)t}$$

（1）由于电荷分布是动态平衡的，所以在 a 和 b 之间的区域无静电荷分布。在 $r\leqslant b$ 区域

$$\rho=\rho_0\mathrm{e}^{-(\sigma/\varepsilon)t}$$

（2）根据高斯定理 $\oiint_S \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{\iiint_V\rho\,\mathrm{d}V}{\varepsilon}=\frac{Q}{\varepsilon}$，得

$$\boldsymbol{E}_1(t)=\boldsymbol{e}_r\frac{r\rho_0\mathrm{e}^{-(\sigma/\varepsilon)t}}{3\varepsilon},\quad r\leqslant b$$

$$\boldsymbol{E}_2(t)=\boldsymbol{e}_r\frac{b^3\rho_0\mathrm{e}^{-(\sigma/\varepsilon)t}}{3\varepsilon r^2},\quad b<r\leqslant a$$

$$\boldsymbol{E}_3(t)=\boldsymbol{e}_r\frac{b^3\rho_0}{3\varepsilon_0 r^2},\quad r>a$$

（3）在 $r=a$ 表面

$$\rho_s(t)=D_{1n}(t)-D_{2n}(t)=\frac{b^3\rho_0}{3a^2}(1-\mathrm{e}^{-(\sigma/\varepsilon)t})$$

（4）根据 $\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$，传导电流密度为

$$\boldsymbol{J}_1(t)=\boldsymbol{e}_r\frac{\sigma r\rho_0\mathrm{e}^{-(\sigma/\varepsilon)t}}{3\varepsilon},\quad r\leqslant b$$

$$\boldsymbol{J}_2(t)=\boldsymbol{e}_r\frac{\sigma b^3\rho_0\mathrm{e}^{-(\sigma/\varepsilon)t}}{3\varepsilon r^2},\quad b<r\leqslant a$$

【例题 5-17】 设真空中电量为 q 的点电荷以速度 v 沿 z 轴方向匀速运动，在 $t=0$ 时刻经过坐标原点，计算任一点的位移电流密度。

解：点电荷在空间任一点产生的电位移矢量为

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{R}\frac{q}{4\pi R^3}$$

而

$$\boldsymbol{R}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+(z-vt)\boldsymbol{e}_z$$

因此

$$\boldsymbol{D}=\frac{q}{4\pi[x^2+y^2+(z-vt)^2]^{3/2}}[x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+(z-vt)\boldsymbol{e}_z]$$

故任一点的位移电流密度为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}&=\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{q}{4\pi[x^2+y^2+(z-vt)^2]^{3/2}}[x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+(z-vt)\boldsymbol{e}_z]\right\}\\&=\frac{q}{4\pi}\frac{3v(z-vt)(x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y)+[2v(z-vt)^2-vx^2-vy^2]\boldsymbol{e}_z}{[x^2+y^2+(z-vt)^2]^{5/2}}\end{aligned}$$

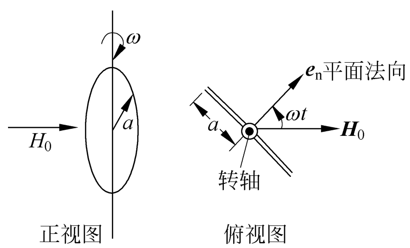

图 5-3 例题 5-18 图

【例题 5-18】 一个半径为 a 的圆金属线圈，在恒定磁场 $\boldsymbol{H}_0$ 中，以角速度 ω 绕自身的一个垂直于 $\boldsymbol{H}_0$ 的直径转动，试求金属线圈内的电流。

解：如图 5-3 所示，设 $t=0$ 时，线圈平面与 $\boldsymbol{H}_0$ 垂直，即 $\theta_0=0$，则此时磁通为

$$\Phi_0=BS=\mu_0H_0\pi a^2$$

任意时刻 t 的磁通为

$$\Phi=BS\cos\omega t=\mu_0H_0\pi a^2t\cos\omega t$$

则产生的感应电动势为

$$\mathcal{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[BS\cos\omega t]=BS\omega\sin\omega t$$

把上式用复数表示，即

$$\mathcal{E}=\mathrm{Im}[\pi a^2\mu_0H_0\omega\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

设金属线圈的电阻为 R，自感为 L，则线圈的阻抗为 $Z=R+\mathrm{j}\omega L$，通过回路中的电流为

$$I=\mathrm{Im}[\mathcal{E}/Z]=\mathrm{Im}\left[\frac{\pi a^2\mu_0H_0\omega\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}{R+\mathrm{j}\omega L}\right]=\mathrm{Im}\left\{\frac{\pi a^2\mu_0H_0\omega\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\varphi)}}{[R^2+(\omega L)^2]^{1/2}}\right\}=\frac{\pi a^2\mu_0H_0\omega\sin(\omega t-\varphi)}{[R^2+(\omega L)^2]^{1/2}}$$

式中，$\varphi=\arctan\dfrac{\omega L}{R}$。

【例题 5-19】 在无损耗的各向同性媒质中，$\boldsymbol{E}$ 的波动方程为

$$\nabla^2\boldsymbol{E}+\omega^2\mu\varepsilon\boldsymbol{E}=0$$

问：在满足什么条件时，$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ 是波动方程的解，该电场作为麦克斯韦方程的解的条件是什么？

解：令

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_x x+\boldsymbol{e}_y y+\boldsymbol{e}_z z$$

$$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{e}_x k_x+\boldsymbol{e}_y k_y+\boldsymbol{e}_z k_z$$

则

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=k_x x+k_y y+k_z z$$

因而

$$\nabla^2\boldsymbol{E}=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}=-\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}(k_x^2+k_y^2+k_z^2)=-k^2\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

可见，如果 $k^2=\omega^2\mu\varepsilon$，则 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ 满足波动方程 $\nabla^2\boldsymbol{E}+\omega^2\mu\varepsilon\boldsymbol{E}=0$。

因为该齐次波动方程是麦克斯韦方程在代入 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$ 的条件下导出的，所以 $\boldsymbol{E}$ 作为麦克斯韦方程的解的条件是 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$。

【例题 5-20】 设 $\boldsymbol{E}$ 为电场强度矢量，$\boldsymbol{H}$ 为磁场强度矢量，$\boldsymbol{B}$ 为磁感应强度矢量，$\boldsymbol{D}$ 为电位移矢量，$\boldsymbol{P}$ 为极化强度矢量，$\boldsymbol{M}$ 为磁化强度矢量。通常光纤中的线性均匀介质为非磁性介质，其中没有自由电流和自由电荷。已知光纤介质内部有如下关系：$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M}$，试证明

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}-\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{P}}{\partial t^2}$$

其中，c 为光速。

证明：由于光纤中的介质为非磁性介质，其中没有自由电流和自由电荷，因此 $\boldsymbol{M}=0$。此时，介质中的麦克斯韦方程组为

$$\begin{cases}\nabla\times\boldsymbol{H}=\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=\varepsilon_0\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\dfrac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t}\\[2mm]\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=-\mu_0\dfrac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}\\[2mm]\nabla\cdot\boldsymbol{D}=0\\\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}&=-\mu_0\left(\nabla\times\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}\right)=-\mu_0\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{H})\\&=-\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t}\right)=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}-\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{P}}{\partial t^2}\end{aligned}$$

其中，$c=\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon_0\mu_0}}$。

5.3 主教材习题解答

【5-1】 试根据麦克斯韦方程导出电流连续性方程 $\nabla\cdot\boldsymbol{J}=-\dfrac{\partial\rho}{\partial t}$。

解：对麦克斯韦第一方程 $\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\partial\boldsymbol{D}/\partial t$ 两边取散度，得

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H})=\nabla\cdot\boldsymbol{J}+\nabla\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=0$$

又因为$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$,所以

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

【5-2】 试根据麦克斯韦方程导出静电场中点电荷的电场强度公式和泊松方程。

解:对于静电场,不存在位移电流,由麦克斯韦方程,有

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=0,\quad \nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$$

即

$$\iiint_V\nabla\cdot\boldsymbol{D}\mathrm{d}V=\oint_S\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint_V\rho\mathrm{d}V=q$$

根据上式,利用球坐标,则对于孤立的、位于原点的点电荷 q 有 $\varepsilon E\cdot 4\pi r^2=q$,所以距离该点电荷 r 处的电场强度为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_r\frac{q}{4\pi r^2\varepsilon}$$

静电场是无旋场,因此有 $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$,则

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\varepsilon\,\nabla\cdot\boldsymbol{E}=-\varepsilon\,\nabla\cdot\nabla\varphi=-\varepsilon\nabla^2\varphi=\rho$$

所以有

$$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon}$$

即泊松方程。

【5-3】 已知在空气中电场强度矢量 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_y0.1\sin(10\pi x)\cos(6\pi\times10^9t-kz)$,求磁场强度矢量 $\boldsymbol{H}$ 和常数 k。

解:首先把电场强度写成复数形式 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_y0.1\sin(10\pi x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$,并求出磁场强度。

$$\boldsymbol{H}=-\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu_0}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & E_y & 0\end{vmatrix}$$

$$=-\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu_0}[\boldsymbol{e}_x\mathrm{j}0.1k\sin(10\pi x)+\boldsymbol{e}_z0.1\times10\pi\cos(10\pi x)]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

再对上式取旋度,由于空气中没有传导电流,则有

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_0}\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_y\frac{0.1}{\omega^2\mu_0\varepsilon_0}[(10\pi)^2+k^2]\sin(10\pi x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

将此式与题中给出的 $\boldsymbol{E}$ 的表达式相比,则有

$$(10\pi)^2+k^2=\omega^2\mu_0\varepsilon_0=\frac{(6\pi\times10^9)^2}{c^2}=400\pi^2$$

可以解得

$$k=\sqrt{300}\,\pi\approx54.41\mathrm{rad/m}$$

【5-4】 一长为 l 的圆柱形电容器,其内外导体半径分别为 a、b,极板间理想介质的介电常数为 ε。当外加电压为 $U=U_\mathrm{m}\sin\omega t$ 时,求介质中的位移电流密度及穿过半径为 $r(a<r<$

b)的圆柱面的位移电流。证明该位移电流等于电容器引线中的传导电流。

解：设内外导体间电流为 I,用恒定电场与静电场相比拟求 E_r。对于恒定电场,因为

$$E_r=\frac{J_r}{\sigma}=\frac{1}{\sigma}\frac{I}{2\pi rl}$$

所以

$$U=\int_a^b E_r\mathrm{d}r=\frac{I}{2\pi rl\sigma}r\ln\frac{b}{a}=E_r r\ln\frac{b}{a}$$

故

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_r\frac{U_\mathrm{m}\sin\omega t}{r\ln(b/a)}$$

因此位移电流密度为

$$\boldsymbol{J}_\mathrm{d}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\boldsymbol{e}_r\frac{\varepsilon\omega U_\mathrm{m}\cos\omega t}{r\ln(b/a)}$$

则穿过半径为 r 的柱面的位移电流为

$$I_\mathrm{d}=\iint_S\boldsymbol{J}_\mathrm{d}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{J}_\mathrm{d}\cdot 2\pi rl=\frac{2\pi l\varepsilon\omega U_\mathrm{m}\cos\omega t}{\ln(b/a)}$$

又由于同轴电容器的电容 $C=2\pi l\varepsilon/\ln(b/a)$,则连线中的传导电流为

$$I_\mathrm{c}=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=C\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=\frac{2\pi l\varepsilon\omega U_\mathrm{m}\cos\omega t}{\ln(b/a)}$$

所以有

$$I_\mathrm{d}=I_\mathrm{c}$$

【5-5】 设在有耗色散媒质中的物质本构方程为 $\boldsymbol{D}(\omega)=\varepsilon(\omega)\boldsymbol{E}(\omega)$,$\boldsymbol{J}(\omega)=\sigma(\omega)\boldsymbol{E}(\omega)$;对于等效复相对介电常数,试证明在时谐场的情况下有 $\varepsilon_\mathrm{r}^e=\varepsilon_\mathrm{r}-\dfrac{\mathrm{j}\sigma(\omega)}{\varepsilon_0\omega}$。

证明：根据复数形式的麦克斯韦第一方程的微分形式

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\mathrm{j}\omega\boldsymbol{D}$$

将 $\boldsymbol{J}=\sigma(\omega)\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}=\varepsilon(\omega)\boldsymbol{E}$ 等方程代入上式,可得

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=(\sigma(\omega)+\mathrm{j}\omega\varepsilon(\omega))\boldsymbol{E}=\mathrm{j}\omega\varepsilon^\mathrm{e}\boldsymbol{E}$$

则等效复介电常数为

$$\varepsilon^\mathrm{e}=\varepsilon(\omega)-\mathrm{j}\frac{\sigma(\omega)}{\omega}$$

因此,等效复相对介电常数为

$$\varepsilon_\mathrm{r}^\mathrm{e}(\omega)=\varepsilon_\mathrm{r}(\omega)-\mathrm{j}\frac{\sigma(\omega)}{\varepsilon_0\omega}$$

【5-6】 已知在金属铜($\varepsilon_\mathrm{r}=1$,$\sigma=5.8\times10^7\mathrm{S/m}$)中某处的电场强度为 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{E}_\mathrm{m}\cos(2\pi\times10^{10}t)$。试计算该点处的传导电流密度幅度与位移电流密度幅度之比;如果将铜换成淡水($\varepsilon_\mathrm{r}=81$,$\sigma=4\mathrm{S/m}$),重新计算传导电流密度幅度与位移电流密度幅度之比。

解：在铜中,传导电流密度为

$$J_\mathrm{c}=\sigma E=\sigma E_\mathrm{m}\cos(2\pi\times10\times10^9t)$$

位移电流密度为

$$J_d=\frac{\partial D}{\partial t}=\varepsilon\frac{\partial E}{\partial t}=-\omega\varepsilon E_m\cos(2\pi\times10\times10^9 t)$$

传导电流密度幅度和位移电流密度幅度之比为

$$\frac{|J_{cm}|}{|J_{dm}|}=\frac{\sigma E_m}{\omega\varepsilon E_m}=\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}=\frac{5.8\times10^7}{2\pi\times10^{10}\times1\times8.854\times10^{-12}}=1.04\times10^8$$

同理,在淡水中

$$\frac{|J_{cm}|}{|J_{dm}|}=\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}=\frac{4}{2\pi\times10^{10}\times81\times8.854\times10^{-12}}=0.089$$

【5-7】 在线性、均匀、各向同性的导电媒质中,证明:$\nabla^2\boldsymbol{H}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}-\mu\sigma\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}=0$。

证明:在线性、均匀、各向同性的导电媒质中,麦克斯韦旋度方程为

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\sigma\boldsymbol{E}+\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

两边取旋度得

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{H}=\sigma\nabla\times\boldsymbol{E}+\nabla\times\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

上式左边利用矢量恒等式$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A}-\nabla^2\boldsymbol{A}$,并考虑到在均匀导电媒质中$\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0$,将上式右端代入麦克斯韦方程$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}$,得

$$\nabla^2\boldsymbol{H}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}-\sigma\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}=0$$

【5-8】 设在法线方向为$\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{e}_x\cos\alpha+\boldsymbol{e}_y\sin\alpha$($\alpha$为法线与$x$轴的夹角),介质参数为$\varepsilon_1,\mu_1$和$\varepsilon_2,\mu_2$的两种理想介质的分界面上有$\boldsymbol{E}_1=E_{x1}\boldsymbol{e}_x+E_{y1}\boldsymbol{e}_y+E_{z1}\boldsymbol{e}_z$,求$\boldsymbol{E}_2$。

解:设

$$\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{E}_{x2}\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{E}_{y2}\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{E}_{z2}\boldsymbol{e}_z$$

根据两种理想介质分界面上的电场强度的边界条件

$$\varepsilon_1\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{e}_n=\varepsilon_2\boldsymbol{E}_2\cdot\boldsymbol{e}_n$$

$$\boldsymbol{E}_1\times\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{E}_2\times\boldsymbol{e}_n$$

由$\varepsilon_1\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{e}_n=\varepsilon_2\boldsymbol{E}_2\cdot\boldsymbol{e}_n$,$\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{e}_x\cos\alpha+\boldsymbol{e}_y\sin\alpha$,得

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}(E_{x1}\cos\alpha+E_{y1}\sin\alpha)=E_{x2}\cos\alpha+E_{y2}\sin\alpha \tag{5-16}$$

由$\boldsymbol{E}_1\times\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{E}_2\times\boldsymbol{e}_n$,$\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{e}_x\cos\alpha+\boldsymbol{e}_y\sin\alpha$,得

$$E_{z1}=E_{z2} \tag{5-17}$$

$$E_{x1}\sin\alpha-E_{y1}\cos\alpha=E_{x2}\sin\alpha-E_{y2}\cos\alpha \tag{5-18}$$

式(5-16)/$\sin\alpha$ 加式(5-18)/$\cos\alpha$,得

$$E_{x2}=\frac{1}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}\left[\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)E_{x1}+\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}-1\right)E_{y1}\right] \tag{5-19}$$

式(5-16)/$\cos\alpha$ 减去式(5-18)/$\sin\alpha$,得

$$E_{y2}=\frac{1}{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}\left[\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}-1\right)E_{x1}+\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)E_{y1}\right]$$

由式(5-17)得

$$E_{z1}=E_{z2}$$

即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_2=&\frac{1}{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}\left[\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)E_{x1}+\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}-1\right)E_{y1}\right]\boldsymbol{e}_x+\\&\frac{1}{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}\left[\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}-1\right)E_{x1}+\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)E_{y1}\right]\boldsymbol{e}_y+E_{z2}\boldsymbol{e}_z\end{aligned}$$

【5-9】 在法线方向为 $\boldsymbol{e}_z$ 的理想导体表面上，电流密度为 $\boldsymbol{J}_s=\boldsymbol{e}_xJ_{x0}\sin\omega t-\boldsymbol{e}_yJ_{y0}\cos\omega t$，求导体表面的切向磁场。

解：设导体表面上的切向磁场 $\boldsymbol{H}_t$ 为

$$\boldsymbol{H}_t=\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{H}_x+\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{H}_y$$

由理想导体表面上的边界条件

$$\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}_s$$

得

$$H_x=J_{Sy}$$
$$H_y=-J_{Sx}$$

因此，导体表面上的 $\boldsymbol{H}_t$ 为

$$\boldsymbol{H}_t=-\boldsymbol{e}_xJ_{y0}\cos\omega t-\boldsymbol{e}_yJ_{x0}\sin\omega t$$

【5-10】 在真空中，已知电场强度的复数形式为 $\boldsymbol{E}=(E_{x0}\boldsymbol{e}_x+\mathrm{j}E_{y0}\boldsymbol{e}_y)\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}$，分别求出磁场强度和电场强度的瞬时表达式、能量密度及能量流密度的平均值。

解：由 $\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{e}_xE_{x0}+\boldsymbol{e}_y\mathrm{j}\boldsymbol{H}_{y0})\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}$ 和 $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}$ 得磁场强度的复数形式为

$$\boldsymbol{H}=-\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu}\nabla\times\boldsymbol{E}=\frac{k}{\omega\mu}(-\boldsymbol{e}_yE_{x0}+\boldsymbol{e}_x\mathrm{j}E_{y0})\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}$$

由 $\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{e}_xE_{x0}+\boldsymbol{e}_y\mathrm{j}H_{y0})\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}$ 得电场强度的瞬时表达式为

$$\boldsymbol{E}(z,t)=\boldsymbol{e}_xE_{x0}\cos(\omega t+kz)-\boldsymbol{e}_yE_{y0}\sin(\omega t+kz)$$

由 $\boldsymbol{H}=\dfrac{k}{\omega\mu}(-\boldsymbol{e}_yE_{x0}+\boldsymbol{e}_x\mathrm{j}E_{y0})\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}$ 得磁场强度的瞬时表达式为

$$\boldsymbol{H}(z,t)=-\boldsymbol{e}_y\frac{k}{\omega\mu}E_{x0}\cos(\omega t+kz)-\boldsymbol{e}_x\frac{k}{\omega\mu}E_{y0}\sin(\omega t+kz)$$

能量密度的平均值为

$$\bar{\omega}=\bar{\omega}_e+\bar{\omega}_m=\frac{1}{4}\varepsilon_0|\boldsymbol{E}|^2+\frac{1}{4}\mu_0|\boldsymbol{H}|^2=\frac{1}{4}\varepsilon_0(E_{x0}^2+E_{y0}^2)+\frac{1}{4}\frac{k^2}{\omega^2\mu_0}(E_{x0}^2+E_{y0}^2)$$

能流密度矢量的平均值为

$$\boldsymbol{S}_{av}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{S}_c]=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*]=-\boldsymbol{e}_z\frac{1}{2}\frac{k}{\omega\mu_0}(E_{x0}^2+E_{y0}^2)$$

【5-11】 半径为 a 的导线通以直流电流 I,导线单位长度的电阻为 R。试应用坡印亭矢量计算该导线单位长度的损耗功率。

解:由于 R 为导线单位长度的电阻,于是 IR 代表单位长度导线的电压降,即电场强度,所以

$$E_z = IR$$

而由电流 I 在导线表面产生的磁场强度按照安培环路定律可得

$$H_\phi = I/(2\pi a)$$

于是,相应的坡印亭矢量为

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{e}_z E_z \times \boldsymbol{e}_\phi H_\phi = -\boldsymbol{e}_r E_z H_\phi = -\boldsymbol{e}_r \frac{I^2 R}{2\pi a}$$

该能流密度垂直穿过导线单位外表面积,流入导体内部而不是传向负载。这部分能量形成了导线传输中的热损耗。所以单位长度导线的损耗功率应为

$$P_L = -\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{S}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{I^2 R}{2\pi a}\cdot 2\pi a \cdot \mathbf{1} = I^2 R$$

【5-12】 已知无源($\rho=0, J=0$)自由空间($\mu_r=\varepsilon_r=1, \sigma=0$)中的电场为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_y E_0 \sin(\omega t - kz)$$

(1) 求磁场强度。

(2) 试证明 ω/k 等于光速 c。

(3) 求平均功率密度。

解:(1) $\boldsymbol{E}$ 的复数形式为 $\boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\boldsymbol{e}_y E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$,将 $\boldsymbol{E}$ 代入麦克斯韦第二方程,得

$$\boldsymbol{H} = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{E} = \mathrm{j}\boldsymbol{e}_x \frac{k}{\omega\mu_0}E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

其瞬时值为

$$\boldsymbol{H} = \mathrm{Re}\left(\mathrm{j}\boldsymbol{e}_x \frac{k}{\omega\mu_0}E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\right) = -\boldsymbol{e}_x \frac{k}{\omega\mu_0}E_0 \sin(\omega t - kz)$$

(2) **证明**:自由空间中,只考虑位移电流,则将 $\boldsymbol{H}$ 代入麦克斯韦第一方程,得

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \nabla\times\left(\mathrm{j}\boldsymbol{e}_x \frac{k}{\omega\mu_0}E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\right) = \boldsymbol{e}_y\left(\frac{\partial H_x}{\partial z}\right) = \boldsymbol{e}_y k\frac{k}{\omega\mu_0}E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} = \mathrm{j}\omega\varepsilon_0\boldsymbol{E}$$

所以

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\boldsymbol{e}_y \frac{k^2}{\omega^2\mu_0\varepsilon_0}E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

与已知的 $\boldsymbol{E}$ 表达式对照,可知 $k^2/(\omega^2\mu_0\varepsilon_0)=1$,所以

$$\frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = c$$

(3) 坡印亭矢量的平均值即平均功率密度为

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[(-\mathrm{j}\boldsymbol{e}_y E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz})\times\left(\mathrm{j}\boldsymbol{e}_x \frac{k}{\omega\mu_0}E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\right)^*\right]$$

$$= \boldsymbol{e}_z \frac{1}{2}\frac{k}{\omega\mu_0}E_0^2$$

【5-13】 半径为 a 的圆形平行板电容器,电极距离为 d,其间填充电导率为 σ 的非理想

均匀电介质,极板间的电压为 U_0,略去边缘效应。

(1) 计算极板间的电磁场及能流密度。

(2) 证明用坡印亭矢量和用电路理论计算出的损耗功率相同。

解:(1) 在两极板间的电场强度为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_z\frac{U_0}{d}$$

相应的电流密度可求得

$$\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_z\frac{\sigma U_0}{d}$$

根据安培环路定律

$$H(2\pi r)=J\pi r^2=\frac{\pi\sigma U_0 r^2}{d}$$

故两极板间的磁场强度为

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_\phi\frac{\sigma U_0 r}{2d}$$

能流密度

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_z\frac{U_0}{d}\times\boldsymbol{e}_\phi\frac{\sigma U_0 r}{2d}=-\boldsymbol{e}_r\frac{\sigma U_0^2 r}{2d^2}$$

(2) 根据题意可以求出两极板间的电阻

$$R=\frac{d}{\pi a^2\sigma}$$

由电路理论知,电容器的损耗功率为

$$P=\frac{U_0^2}{R}=\frac{\pi a^2\sigma}{d}U_0^2$$

再用坡印亭矢量计算损耗功率

$$P\big|_{r=a}=\int\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{\sigma U_0^2}{2d^2}a(2\pi ad)=\frac{\pi a^2\sigma}{d}U_0^2$$

所以,两种方法计算出的损耗功率相同。

【5-14】 证明无源自由空间中仅随时间变化的场 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0\sin\omega t$,不满足麦克斯韦方程。若将 t 换成 $(t-y/c)$,则它可以满足麦克斯韦方程。

证明:根据麦克斯韦第一方程,在无源自由空间中

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$$

将 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0\sin\omega t$ 代入上式,并根据电磁场仅随时间变化的条件,得

$$\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=\nabla\times\boldsymbol{H}=\nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{B}_0\sin\omega t}{\mu}\right)=0$$

积分得 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}_0$,为一常矢量,故

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\nabla\times\frac{\boldsymbol{D}}{\varepsilon}=0$$

又根据麦克斯韦第二方程

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=-\boldsymbol{B}_0\omega\sin\omega t\neq0$$

所以,这样的场不满足麦克斯韦方程。

若将 t 换成 $(t-y/c)$,则有

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0\sin\omega(t-y/c)=\boldsymbol{e}_zB_0\sin(\omega t-ky)$$

其中,$\boldsymbol{B}_0=\boldsymbol{e}_zB_0$ 是为计算方便定为 $\boldsymbol{e}_z$ 方向,又 $k=\omega/c$,将上式代入,根据麦克斯韦第一方程,得

$$\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\nabla\times\boldsymbol{H}=\nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{e}_zB_0\sin(\omega t-ky)}{\mu}\right)=-\boldsymbol{e}_z\frac{k}{\mu}B_0\cos(\omega t-ky)$$

所以有

$$\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{e}_z\frac{k}{\omega\mu\varepsilon}B_0\sin(\omega t-ky)=-\boldsymbol{e}_z\frac{B_0}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sin(\omega t-ky)$$

将 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别代入麦克斯韦第二方程 $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\partial\boldsymbol{B}/\partial t$ 两边,得

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{E}&=\frac{\partial}{\partial y}\left[-\boldsymbol{e}_z\frac{B_0}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sin(\omega t-ky)\right]=-\boldsymbol{e}_z\frac{kB_0}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\cos(\omega t-ky)\\&=-\boldsymbol{e}_zB_0\omega\cos(\omega t-ky)\end{aligned}$$

$$-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=-\boldsymbol{e}_zB_0\omega\cos(\omega t-ky)=\nabla\times\boldsymbol{E}$$

可见,$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足麦克斯韦第一、第二方程,很容易证明,它们也满足第三、第四方程。

【5-15】 已知空气中某一区域的电场为 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_y10\sin(\pi x)\sin(3\pi\times10^8t-\pi z)$。

(1) 求复坡印亭矢量及有功功率密度。

(2) 计算平均电能密度和平均磁能密度。

解:(1) 将电场强度表达式写为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=-\boldsymbol{e}_y10\sin(\pi x)\cos\left(3\pi\times10^8t-\pi z+\frac{\pi}{2}\right)$$

得到电场的复矢量

$$\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{e}_y10\sin(\pi x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}-\pi z\right)}$$

相应的磁场复矢量为

$$\boldsymbol{H}=-\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu_0}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x&\boldsymbol{e}_y&\boldsymbol{e}_z\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\0&-10\sin(\pi x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}-\pi z\right)}&0\end{vmatrix}$$

$$=-\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu_0}\left[-\boldsymbol{e}_x10\mathrm{j}\pi\sin(\pi x)-\boldsymbol{e}_z10\pi\cos(\pi x)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}-\pi z\right)}$$

所以

$$\boldsymbol{H}^*=\frac{1}{\omega\mu_0}\left[\boldsymbol{e}_x10\pi\sin(\pi x)+\boldsymbol{e}_z10\mathrm{j}\pi\cos(\pi x)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}-\pi z\right)}$$

复坡印亭矢量为

$$\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^{*}=\frac{1}{2}[-\boldsymbol{e}_y 10\sin(\pi x)]\times\frac{1}{\omega\mu_0}[\boldsymbol{e}_x 10\pi\sin(\pi x)+\boldsymbol{e}_z 10\mathrm{j}\pi\cos(\pi x)]$$

$$=\boldsymbol{e}_z\frac{50\pi}{\omega\mu_0}\sin^2(\pi x)-\boldsymbol{e}_x\frac{\mathrm{j}50\pi}{\omega\mu_0}\sin(\pi x)\cos(\pi x)$$

$$=-\boldsymbol{e}_x\frac{5\mathrm{j}}{24\pi}\sin(2\pi x)+\boldsymbol{e}_z\frac{5}{12\pi}\sin^2(\pi x)$$

平均坡印亭矢量,即有功功率密度为

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}}=\mathrm{Re}(\boldsymbol{S})=\boldsymbol{e}_z\frac{5}{12\pi}\sin^2(\pi x)$$

(2)平均能量密度为

$$\bar{\omega}_{\mathrm{e}}+\bar{\omega}_{\mathrm{m}}=\frac{1}{4}\varepsilon_0|\boldsymbol{E}_0|^2+\frac{1}{4}\mu_0|\boldsymbol{H}_0|^2$$

平均电能密度为

$$\bar{\omega}_{\mathrm{e}}=\frac{1}{4}\varepsilon_0|\boldsymbol{E}_0|^2=25\varepsilon_0\sin^2(\pi x)$$

平均磁能密度为

$$\bar{\omega}_{\mathrm{m}}=\frac{1}{4}\mu_0|\boldsymbol{H}_0|^2=\frac{\mu_0}{(24\pi)^2}$$

【5-16】 已知真空中正弦电磁场的磁场复矢量是 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_\phi H_{\mathrm{m}}\dfrac{\sin\theta}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}$,式中,$H_{\mathrm{m}}$、$k$ 均为实常数。试求坡印亭矢量的瞬时值和平均值。

解:根据磁场复矢量可以求出电场复矢量

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{\nabla\times\boldsymbol{H}}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_0}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_0}\cdot\frac{H_{\mathrm{m}}}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial_\phi}\\ 0 & 0 & r\sin\theta\dfrac{\sin\theta}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_0}\cdot\frac{H_{\mathrm{m}}}{r^2\sin\theta}[\boldsymbol{e}_r 2\cos\theta\sin\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}-\boldsymbol{e}_\theta r(-\mathrm{j}k)\sin^2\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}]$$

$$=\frac{H_{\mathrm{m}}}{r^2\omega\varepsilon_0}[\boldsymbol{e}_r(-2\mathrm{j})\cos\theta+\boldsymbol{e}_\theta rk\sin\theta]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}$$

所以磁场强度和电场强度的瞬时值

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{e}_\phi H_{\mathrm{m}}\frac{\sin\theta}{r}\cos(\omega t-kr)$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\frac{H_{\mathrm{m}}}{r^2\omega\varepsilon_0}\left[\boldsymbol{e}_r 2\cos\theta\cos\left(\omega t-kr-\frac{\pi}{2}\right)+\boldsymbol{e}_\theta kr\sin\theta\cos(\omega t-kr)\right]$$

坡印亭矢量的瞬时值

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\frac{H_{\mathrm{m}}^2}{r^3\omega\varepsilon_0}[-\boldsymbol{e}_\theta\sin\theta\cos\theta\sin2(\omega t-kr)+\boldsymbol{e}_r rk\sin^2\theta\cos^2(\omega t-kr)]$$

坡印亭矢量的平均值

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*]=\frac{\mathrm{Re}}{2}\left\{\frac{H_{\mathrm{m}}^2\sin\theta}{r^3\omega\varepsilon_0}\{[\boldsymbol{e}_r(-2\mathrm{j})\cos\theta]\times\boldsymbol{e}_\phi+(\boldsymbol{e}_\theta rk\sin\theta)\times\boldsymbol{e}_\phi\}\right\}$$

$$=\frac{H_{\mathrm{m}}^2k\sin^2\theta}{2r^2\omega\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_r$$

【5-17】 位于原点的天线所辐射的电磁场在球坐标系中表示为 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_\theta\dfrac{120\pi}{r}\sin\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}$，$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_\phi\dfrac{\sin\theta}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}$。求空间任一点的坡印亭矢量的瞬时值和穿过半球面($r=1\mathrm{km}, 0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$)的平均功率。

解：根据电场和磁场的复矢量可以得到相应的瞬时值：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{e}_\theta\frac{120\pi}{r}\sin\theta\cos(\omega t-kr)$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{e}_\phi\frac{1}{r}\sin\theta\cos(\omega t-kr)$$

那么，空间任一点的坡印亭矢量的瞬时值

$$\boldsymbol{S}(t)=\boldsymbol{E}(t)\times\boldsymbol{H}(t)=\boldsymbol{e}_r\frac{120\pi}{r^2}\sin^2\theta\cos^2(\omega t-kr)$$

坡印亭矢量的平均值

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*]=\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_r\frac{120\pi}{r^2}\sin^2\theta=\boldsymbol{e}_r\frac{60\pi}{r^2}\sin^2\theta$$

所以穿过半球面的平均功率

$$\bar{P}=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{60\pi}{r^2}\sin^2\theta r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\phi=120\pi^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\mathrm{d}(-\cos\theta)$$

$$=120\pi^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2\theta-1)\mathrm{d}(\cos\theta)=80\pi^2$$

【5-18】 假设与 zOy 平面平行的相距为 d 的两无限大理想导体板之间的电场复矢量为 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_xE_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$。

(1) 求磁场强度矢量。

(2) 求导体板上的分布电荷及分布电流的瞬时值。

解：(1) 先由复麦克斯韦方程求出磁场强度的复矢量：

$$\boldsymbol{H}=-\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{E}=\frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_0}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ E_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$=\frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_0}[\boldsymbol{e}_yE_{\mathrm{m}}(-\mathrm{j}k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}]=\boldsymbol{e}_y\frac{kE_{\mathrm{m}}}{\omega\mu_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

所以磁场强度的瞬时值

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{e}_y\frac{kE_{\mathrm{m}}}{\omega\mu_0}\cos(\omega t-kz)$$

（2）利用边界条件可以求得导体板上的分布电荷及分布电流的瞬时值：

$$\rho_s|_{x=0}=\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{D}=\boldsymbol{e}_x\cdot[\varepsilon_0E_m\boldsymbol{e}_x\cos(\omega t-kz)]=\varepsilon_0E_m\cos(\omega t-kz)$$

$$\rho_s|_{x=d}=\boldsymbol{e}_n'\cdot\boldsymbol{D}=(-\boldsymbol{e}_x)\cdot[\varepsilon_0E_m\boldsymbol{e}_x\cos(\omega t-kz)]=-\varepsilon_0E_m\cos(\omega t-kz)$$

$$J_s|_{x=0}=\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_x\times\left[\boldsymbol{e}_y\frac{kE_m}{\omega\mu_0}\cos(\omega t-kz)\right]=\boldsymbol{e}_z\frac{kE_m}{\omega\mu_0}\cos(\omega t-kz)$$

$$J_s|_{x=d}=\boldsymbol{e}_n'\times\boldsymbol{H}=(-\boldsymbol{e}_x)\times\left[\boldsymbol{e}_y\frac{kE_m}{\omega\mu_0}\cos(\omega t-kz)\right]=-\boldsymbol{e}_z\frac{kE_m}{\omega\mu_0}\cos(\omega t-kz)$$

【5-19】 已知在沿子轴无限长理想导体板所围成的区域内（$0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant b$）电场复矢量为 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_yE_m\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}\sin\frac{m\pi x}{a}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$，求：

（1）磁场强度复矢量；

（2）坡印亭矢量的瞬时值和平均值；

（3）穿过任一横截面的平均功率。

解：（1）利用复麦克斯韦方程求出磁场强度的复矢量：

$$\boldsymbol{H}=-\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{E}=\frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_0}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & E_m\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}\sin\frac{m\pi x}{a}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} & 0\end{vmatrix}$$

写成分量形式为

$$H_x=\frac{\mathrm{j}E_m\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}\sin\frac{m\pi x}{a}}{\omega\mu}[(+\mathrm{j}\beta)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}]=\frac{\mathrm{j}E_m\sin\frac{m\pi x}{a}}{\omega\mu}\beta\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$$

$$H_y=0$$

$$H_z=\frac{E_m\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}}{\omega\mu}\left[\frac{m\pi}{a}\cos\frac{m\pi x}{a}\right]$$

所以

$$\boldsymbol{H}=E_m\left[\boldsymbol{e}_x\frac{\mathrm{j}\beta}{\omega\mu}\sin\frac{m\pi x}{a}+\boldsymbol{e}_z\frac{m\pi}{a\omega\mu}\cos\frac{m\pi x}{a}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$$

（2）根据电场和磁场的复矢量可以得到相应的瞬时值：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{e}_yE_m\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\left(\omega t-\beta z-\frac{\pi}{2}\right)=\boldsymbol{e}_yE_m\sin\frac{m\pi x}{a}\sin(\omega t-\beta z)$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=-\boldsymbol{e}_x\frac{E_m\beta}{\omega\mu_0}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin(\omega t-\beta z)+\boldsymbol{e}_z\frac{E_m m\pi}{a\omega\mu_0}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos(\omega t-\beta z)$$

坡印亭矢量的瞬时值

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)&=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\\&=\boldsymbol{e}_z\frac{E_m^2\beta}{\omega\mu_0}\sin^2\frac{m\pi x}{a}\sin^2(\omega t-\beta z)+\boldsymbol{e}_x\frac{E_m^2m\pi}{2a\omega\mu_0}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin2(\omega t-\beta z)\end{aligned}$$

坡印亭矢量的平均值

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*]=\boldsymbol{e}_z\frac{E_{\mathrm{m}}^2\beta}{2\omega\mu_0}\sin^2\frac{m\pi x}{a}$$

(3) 穿过任一横截面的平均功率

$$P=\int_0^b\mathrm{d}y\int_0^a\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}}\cdot\mathrm{d}x=b\int_0^a\frac{E_{\mathrm{m}}^2\beta}{2\omega\mu_0}\sin^2\frac{m\pi x}{a}\mathrm{d}x=\frac{E_{\mathrm{m}}^2\beta b}{2\omega\mu_0}\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{E_{\mathrm{m}}^2\beta ab}{4\omega\mu_0}$$

【5-20】 已知 $\sigma=0$ 的均匀媒质中的矢量磁位为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_z\cos kx\cos\omega t$，试求：

(1) 标量电位；

(2) 电场强度；

(3) 磁场强度。

解：(1) 矢量磁位的复矢量为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{e}_z\cos kx$$

于是，根据洛伦兹规范

$$\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=-\frac{1}{\mu\varepsilon}\nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=0$$

又复标量电位

$$\varphi(\boldsymbol{r},t)=-\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu\varepsilon}\nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=-\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu\varepsilon}\nabla\cdot(\boldsymbol{e}_z\cos kx)=0$$

所以标量电位 φ 是与时间、空间都无关的常量。

(2) 电场强度

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{e}_z\cos kx\cos\omega t)=\boldsymbol{e}_z\omega\cos kx\sin\omega t$$

(3) 磁场强度

$$\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu}=\frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{1}{\mu}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & \omega\cos kx\sin\omega t\end{vmatrix}=\boldsymbol{e}_y\frac{k}{\mu}\sin kx\cos\omega t$$

【5-21】 已知球坐标系中时谐场任意点的矢量磁位为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{e}_r\cos\theta-\boldsymbol{e}_\theta\sin\theta)\dfrac{A_0}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}$，其中 A_0 为常数。试求电场强度和磁场强度矢量。

解：磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的复矢量为

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{A_0}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\phi}\\ \dfrac{\cos\theta}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr} & r\left(-\dfrac{\sin\theta}{r}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr} & 0\end{vmatrix}$$

$$=\frac{A_0}{r^2\sin\theta}r\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi\left[\frac{\partial}{\partial r}(-\sin\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr})-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\cos\theta}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\right)\right]$$

$$=\boldsymbol{e}_\phi\frac{A_0\sin\theta}{r}\left(\mathrm{j}k+\frac{1}{r}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}$$

所以磁场强度的复矢量为

$$\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu}=\boldsymbol{e}_{\phi}\frac{A_0\sin\theta}{\mu r}\left(\mathrm{j}k+\frac{1}{r}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}$$

电场强度的复矢量可以根据复麦克斯韦方程求出：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon}\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu\varepsilon}\nabla\times\boldsymbol{B}=\frac{\omega}{\mathrm{j}k^2r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi}\\ 0 & 0 & A_0\sin^2\theta\left(\mathrm{j}k+\frac{1}{r}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{\omega A_0}{\mathrm{j}k^2r^2\sin\theta}\left\{\boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin^2\theta\left(\mathrm{j}k+\frac{1}{r}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\right]-r\boldsymbol{e}_\theta\frac{\partial}{\partial r}\left[\sin^2\theta\left(\mathrm{j}k+\frac{1}{r}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\right]\right\}$$

$$=\frac{\omega A_0}{\mathrm{j}k^2r^2\sin\theta}\left\{\boldsymbol{e}_r2\sin\theta\cos\theta\left(\mathrm{j}k+\frac{1}{r}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}+r\boldsymbol{e}_\theta\sin^2\theta\left(\frac{1}{r^2}-k^2+\frac{\mathrm{j}k}{r}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\right\}$$

$$=\frac{\omega A_0}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\left\{\boldsymbol{e}_r2\cos\theta\left(\frac{1}{kr}-\frac{\mathrm{j}}{kr^2}\right)+\boldsymbol{e}_\theta\sin\theta\left(\mathrm{j}+\frac{1}{kr}-\frac{\mathrm{j}}{k^2r^2}\right)\right\}$$

【5-22】 真空中有一点电荷 q 以速度 $v(v<c)$ 沿 z 轴匀速运动。试证明它产生的电磁场满足麦克斯韦方程组。

证明：根据题意知，除电荷所在点的空间任意点电荷密度和电流密度都有

$$\rho_e=0,\quad \boldsymbol{J}=0$$

于是问题就转化为证明由运动电荷产生的电磁场满足

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\qquad\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=0\qquad\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$

选取柱坐标系，设 $t=0$ 时，电荷位于坐标原点，则 t 时刻电荷位于 $(0,0,vt)$ 处，那么空间点 (ρ,ϕ,z) 处的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 和电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 为

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{R}}{R^3}=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{q\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{R}}{R^3}=\frac{\mu_0qv\rho}{4\pi R^3}\boldsymbol{e}_\phi=\boldsymbol{e}_\phi\frac{\mu_0qv\rho}{4\pi[\rho^2+(z-vt)^2]^{3/2}}$$

$$\boldsymbol{D}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\boldsymbol{e}_\rho\rho+\boldsymbol{e}_z(z-vt)}{[\rho^2+(z-vt)^2]^{3/2}}$$

那么磁场的旋度

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\nabla\times\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}=\nabla\times\left(\frac{qv\rho}{4\pi R^3}\boldsymbol{e}_\phi\right)=\frac{qv}{4\pi}\nabla\times\left(\frac{\rho}{R^3}\boldsymbol{e}_\phi\right)$$

$$=\frac{qv}{4\pi}\left[-\boldsymbol{e}_\rho\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho}{R^3}\right)+\boldsymbol{e}_z\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\rho}{R^3}\right)\right]$$

$$=\frac{qv}{4\pi}\left[\boldsymbol{e}_\rho\frac{3\rho(z-vt)}{R^5}+\boldsymbol{e}_z\frac{2(z-vt)^2-\rho^2}{R^5}\right]$$

电位移矢量的变化率为

$$\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=\frac{qv}{4\pi}\left[\boldsymbol{e}_\rho\frac{3\rho(z-vt)}{R^5}+\boldsymbol{e}_z\frac{2(z-vt)^2-\rho^2}{R^5}\right]$$

所以，$\nabla\times\boldsymbol{H}=\partial\boldsymbol{D}/\partial t$，麦克斯韦第一方程得证。

电场强度的旋度为

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\nabla\times\frac{\boldsymbol{D}}{\varepsilon_0}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\times\left\{\frac{\boldsymbol{e}_\rho\rho+\boldsymbol{e}_z(z-vt)}{[\rho^2+(z-vt)^2]^{3/2}}\right\}$$
$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\boldsymbol{e}_\phi\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho}{R^3}\right)-\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{z-vt}{R^3}\right)\right)\right]$$
$$=\boldsymbol{e}_\phi\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3\rho(z-vt)}{R^5}-\frac{3\rho(z-vt)}{R^5}\right]=0$$

磁感应强度的变化率为

$$\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=\boldsymbol{e}_\phi\frac{\mu_0qv}{4\pi}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho}{R^3}\right)=\boldsymbol{e}_\phi\frac{\mu_0qv}{4\pi}\cdot\frac{1}{R^6}\left[(-\rho)\cdot\frac{3}{2}R\cdot2(z-vt)\cdot(-v)\right]$$
$$=\boldsymbol{e}_\phi\frac{(\varepsilon_0\mu_0)qv^2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{3\rho(z-vt)}{R^5}=\boldsymbol{e}_\phi\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{v^2}{c^2}\cdot\frac{3\rho(z-vt)}{R^5}$$

由 $v\ll c$，可得$\partial\boldsymbol{B}/\partial t=0$，即$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\partial\boldsymbol{B}/\partial t$，麦克斯韦第二方程得证。磁感应强度的散度为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0qv}{4\pi}\nabla\cdot\left(\boldsymbol{e}_\phi\frac{\rho}{R^3}\right)=0$$

因此，麦克斯韦第三方程得证。

电位移矢量的散度为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\frac{q}{4\pi}\nabla\cdot\left[\frac{\boldsymbol{e}_\rho\rho+\boldsymbol{e}_z(z-vt)}{R^3}\right]=\frac{q}{4\pi}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\rho}{R^3}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z-vt}{R^3}\right)\right]$$
$$=\frac{q}{4\pi}\left[\frac{2R^2-3\rho^2}{R^5}+\frac{R^2-3(z-vt)^2}{R^5}\right]=0$$

于是，麦克斯韦第四方程得证。

5.4 典型考研试题解析

【考研题 5-1】 (西安电子科技大学 2004 年)在真空中，已知电场 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_yE_0\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$，其中 $\boldsymbol{e}_y$ 为 y 方向单位矢量，求磁场 $\boldsymbol{H}$。

解：根据复数形式的麦克斯韦第二方程，得

$$\boldsymbol{H}=\frac{\nabla\times\boldsymbol{E}}{-\mathrm{j}\omega\mu_0}=\frac{1}{-\mathrm{j}\omega\mu_0}\left[\boldsymbol{e}_z\frac{\partial E_y}{\partial x}-\boldsymbol{e}_x\frac{\partial E_y}{\partial z}\right]=-\boldsymbol{e}_z\frac{E_0\frac{\pi}{a}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}}{\mathrm{j}\omega\mu_0}-\boldsymbol{e}_x\frac{E_0\beta\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}}{\omega\mu_0}$$

【考研题 5-2】 (国防科技大学 2002 年)一个绕在空心骨架上的电感线圈，在不改变线圈匝数的前提条件下，如何使该线圈电感量增加或者减小，并说明理由。

解：由于铁芯是铁磁物质，在线圈通电时能够起到汇聚磁感线的作用，使得线圈的磁通量变大，因此，在空心骨架线圈中加入铁芯，可使线圈电感量增加。由于铜芯是抗磁物质，因此在空心骨架线圈中加入铜芯，可使线圈电感量减小。

【考研题 5-3】 (电子科技大学 2006 年)写出坡印亭定理的积分形式并说明其物理意义。

解：坡印亭定理的积分形式为

$$-\oiint_{S'}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}'=\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}+\frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\right)\mathrm{d}V+\iiint_V(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E})\mathrm{d}V$$

物理意义：等式左边为穿过闭合面 S' 流入体积 V 内的电磁能量，它等于体积 V 内单位时间内增加的电磁能量（等式右边第一项）与传导电流损耗的功率之和（等式右边第二项），是电磁场能量守恒的具体体现。

【考研题 5-4】（北京航空航天大学 2000 年）设在均匀理想介质（μ,ε）中的时谐电磁场量为 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}$，$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}$。试导出 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的关系式（式中，k 为常矢量）。

解：无源均匀理想介质中的时谐电磁场满足的麦克斯韦方程为

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}$$

因此

$$\boldsymbol{H}=\frac{\nabla\times\boldsymbol{E}}{-\mathrm{j}\omega\mu}=\frac{1}{-\mathrm{j}\omega\mu}\nabla\times(\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr})=\frac{1}{-\mathrm{j}\omega\mu}\{\nabla\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\times\boldsymbol{E}_0+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\nabla\times\boldsymbol{E}_0\}$$

在式中，由于 $\boldsymbol{E}_0$ 为常量，$\nabla\times\boldsymbol{E}_0=0$；又 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=kr=k_xx+k_yy+k_zz$，则

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{-\mathrm{j}\omega\mu}\nabla\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\times\boldsymbol{E}_0=\frac{\mathrm{j}}{\mathrm{j}\omega\mu}(k_x\boldsymbol{e}_x+k_y\boldsymbol{e}_y+k_z\boldsymbol{e}_z)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\times\boldsymbol{E}_0=\frac{\mathrm{j}\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{\mathrm{j}\omega\mu}(\boldsymbol{e}_k\times\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr})$$

其中，$\omega\sqrt{\mu\varepsilon}=k$。因此

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}(\boldsymbol{e}_k\times\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr})=\frac{1}{\eta}(\boldsymbol{e}_k\times\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr})$$

其中，$\eta=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ 为波阻抗。

同理

$$\boldsymbol{E}=\eta\boldsymbol{H}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\times\boldsymbol{e}_k$$

【考研题 5-5】（清华大学 2003 年）证明：无损耗介质中，沿任意方向传输的均匀平面波在任何时刻、任何点处，电场储能密度等于磁场储能密度。

证明：不失一般性，设平面波沿 z 方向传播，磁场的表达式为

$$\boldsymbol{H}=(H_{0x}\boldsymbol{e}_x+H_{0y}\boldsymbol{e}_y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

其中，$k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ 为波数。则根据平面波电场和磁场的关系，电场的表达式为

$$\boldsymbol{E}=\eta\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{e}_z=(\eta H_{0y}\boldsymbol{e}_x-\eta H_{0x}\boldsymbol{e}_y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

磁场和电场的瞬时值形式为

$$\boldsymbol{H}=(H_{0x}\boldsymbol{e}_x+H_{0y}\boldsymbol{e}_y)\cos(\omega t-kz)$$

$$\boldsymbol{E}=(\eta H_{0y}\boldsymbol{e}_x-\eta H_{0x}\boldsymbol{e}_y)\cos(\omega t-kz)=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}(H_{0y}\boldsymbol{e}_x-H_{0x}\boldsymbol{e}_y)\cos(\omega t-kz)$$

因此，磁场的储能为

$$w_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}\mu|\boldsymbol{H}|^2=\frac{1}{2}\mu(H_{0x}^2+H_{0y}^2)\cos^2(\omega t-kz)$$

电场的储能为

$$w_e=\frac{1}{2}\varepsilon|\boldsymbol{E}|^2=\frac{1}{2}\varepsilon\sqrt{\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)}^2(H_{0x}^2+H_{0y}^2)\cos^2(\omega t-kz)$$
$$=\frac{1}{2}\mu(H_{0x}^2+H_{0y}^2)\cos^2(\omega t-kz)$$

可见，$w_e=w_m$，故均匀平面波在任何时刻、任何点处，电场储能密度等于磁场储能密度。

【考研题 5-6】 （西安电子科技大学 2006 年）相对磁导率为 $\mu_r=1$ 的理想介质中传播电场瞬时值为 $\boldsymbol{E}(r,t)=30\pi(\sqrt{3}\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_z)\cos[3\pi\times10^8t-\pi(x-\sqrt{3}z)]\mathrm{V/m}$。试求：

（1）该波的波长；

（2）理想介质的相对介电常数；

（3）该波的坡印亭矢量平均值。

解：（1）由题意知

$$\omega=3\pi\times10^8,\quad f=1.5\times10^8$$

因为 $\boldsymbol{k}=k\boldsymbol{e}_k=\pi(\boldsymbol{e}_x-\sqrt{3}\boldsymbol{e}_z)$，$k=2\pi$，故波长为

$$\lambda=\frac{2\pi}{k}=1\mathrm{m}$$

（2）因为 $k^2=\omega^2\mu\varepsilon$，因此

$$\sqrt{\varepsilon_r}=k/(\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0})=\frac{2\pi\times3\times10^8}{3\pi\times10^8}=2$$

故介质的相对介电常数 $\varepsilon_r=4$。

（3）根据复数形式的麦克斯韦第二方程，得

$$\boldsymbol{H}=\frac{\nabla\times\boldsymbol{E}}{-\mathrm{j}\omega\mu_0}=\frac{1}{-\mathrm{j}\omega\mu_0}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ E_x & 0 & E_z\end{vmatrix}=-\boldsymbol{e}_y\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi(x-\sqrt{3}z)}\ \mathrm{A/m}$$

因此，坡印亭矢量平均值为

$$\boldsymbol{S}_{av}=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\right]=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[30\pi(\sqrt{3}\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_z)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi(x-\sqrt{3}z)}\times(-\boldsymbol{e}_y\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi(x-\sqrt{3}z)})\right]$$
$$=15\pi(\boldsymbol{e}_x-\sqrt{3}\boldsymbol{e}_z)\mathrm{W/m^2}$$

【考研题 5-7】 （电子科技大学 2001 年）写出介质中的麦克斯韦方程组，简要叙述位移电流的引入过程，并说明位移电流的物理意义。

解：麦克斯韦方程组的积分形式如下：

$$\begin{cases}\oint_l\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\iint_S\left(\boldsymbol{J}+\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\ \oint_l\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\dfrac{\partial}{\partial t}\iint_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\ \oint\!\!\!\oint_S\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint_V\rho\mathrm{d}V\\ \oint\!\!\!\oint_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0\end{cases}$$

位移电流的引入过程如下：麦克斯韦发现，将恒定场中的安培环路定理$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}$，应用于时变电磁场时出现了矛盾，即

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H})=\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0$$

而

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

因此，提出了位移电流的假设。即

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{d}}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$$

就是说变化的电场本身也是一种特殊的电流形式。例如，研究一个端接交流电源的电容器，设电路的电流为i，在电路的横截面上取两个不同截面，其中S_1与电路相截，而S_2穿过电容器极板。此时，通过S_1的电流为i；而通过S_2的电流为零，显然出现了矛盾。

麦克斯韦认为，在电容器极板间存在着另一种形式的电流，其大小等于i。根据电流连续性原理，有

$$\iint_S\boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

将$\oiint_S\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=q$代入上式，得

$$\iint_S\boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\iint_S\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\iint_S\boldsymbol{J}_{\mathrm{d}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

其中，$\boldsymbol{J}_{\mathrm{d}}=\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=\varepsilon\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$称为位移电流密度（$\mathrm{A/m^2}$）。它是由于电位移矢量的变化而引起的真实的电的流动。所以，一般情况下，空间同时存在由于电荷运动引起的电流和由于电场变化引起的电流。故安培环路定理修正如下：

$$\oint_l\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\iint_S\left(\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

此即麦克斯韦第一方程式。位移电流的假设表明，变化的电场产生磁场，并在后来得到证实。位移电流由两部分组成，第一部分由变化的电场产生；第二部分由电介质极化后其变化的电偶极矩产生。

【考研题 5-8】（北京邮电大学 2007 年）真空中平面波磁场的瞬时值为$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_yH_0\cos[\omega t+\pi x-\pi/4)]$，试求：

（1）频率f；

（2）电场的瞬时值形式及复数形式；

（3）坡印亭矢量的平均值。

解：（1）由题意可知，$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=-\pi x$，所以

$$k\boldsymbol{e}_k=-\pi\boldsymbol{e}_x,\quad k=\pi$$

故有

$$\lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi}{\pi}=2\mathrm{m}$$

由于平面波在真空中传播，所以频率为

$$f=c/\lambda=\frac{3\times10^8}{2}=1.5\times10^8\,\mathrm{Hz}$$

(2) 磁场的复数形式为

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_y H_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi(-x+1/4)}$$

在真空中,根据$\nabla\times\boldsymbol{H}=\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$,得到电场的复数形式:

$$\boldsymbol{E}=\frac{\nabla\times\boldsymbol{H}}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_0}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_0}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 0 & H_y & 0\end{vmatrix}=\boldsymbol{e}_z\frac{\pi H_0}{\omega\varepsilon_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi(-x+1/4)}=\boldsymbol{e}_z\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}H_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi(-x+1/4)}$$

于是,电场的瞬时值形式为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_z\frac{\pi H_0}{\omega\varepsilon_0}\cos(3.0\times 10^8\pi t+\pi x-\pi/4)$$

(3) 坡印亭矢量的平均值为

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}}=\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\right)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\boldsymbol{e}_z\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}H_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi(-x+1/4)}\times\boldsymbol{e}_y H_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi(-x+1/4)}\right)=-\boldsymbol{e}_x\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{H_0^2}{2}$$

【考研题 5-9】 (北京邮电大学 2005 年)试写出:

(1) 静态电场及恒定磁场的场与位的关系式;

(2) 交变场的位与场的关系式;

(3) 理想导体边界条件的矢量表示式。

解:(1) 静态电场的电场与电位的关系:设电位参考点选无穷远处

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi,\quad \varphi_a=\int_a^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

其中,φ_a 表示 a 点的电位。电场强度是电位函数的负梯度,电场强度与电位线(面)处处正交,并且指向电位减小最快的方向。

矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 与磁感应强度的关系:$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$。

矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 的旋度源即磁场。在无电流区域,磁场强度与标量磁位的关系:$\boldsymbol{H}=-\nabla\varphi_{\mathrm{m}}$。

(2) 交变场的位与场的关系式:

交变场与标量电位 φ、矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 等位函数的关系为

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$$

(3) 理想导体边界条件的矢量表示式:

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}\times\boldsymbol{E}=0\\ \boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}\\ \boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}\cdot\boldsymbol{D}=\rho_{\mathrm{s}}\\ \boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}\cdot\boldsymbol{B}=0\end{cases}$$

【考研题 5-10】 (北京邮电大学 2008 年)简答和推导题(注意:本题中每小题前后关联)。

(1) 写出均匀、各向同性、无源、无损耗的介质中微分形式的麦克斯韦方程;

(2) 若电场为 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t-\gamma z}$,仅用 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 分别表示电场和磁场,写出(1)小题中

两个旋度方程的复数形式，并将其展开成平面直角坐标系下的标量形式；

(3) 对于(2)小题中的电磁波，用 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的 z 分量表示出其他分量。

解：(1) 均匀、各向同性、无源、无损耗的介质中微分形式的麦克斯韦方程：

$$\begin{cases}\nabla\times\boldsymbol{H}=\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\\[2mm] \nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\[2mm] \nabla\cdot\boldsymbol{D}=0\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\end{cases}$$

(2) 若电场为 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t-\gamma z}$，则两个旋度方程的复数形式为

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}$$

其平面直角坐标系下的标量形式为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial E_z}{\partial y}+\gamma E_y=-\mathrm{j}\omega\mu H_x\\[2mm] \dfrac{\partial E_z}{\partial x}+\gamma E_x=\mathrm{j}\omega\mu H_y\\[2mm] \dfrac{\partial E_y}{\partial x}-\dfrac{\partial E_x}{\partial y}=-\mathrm{j}\omega\mu H_z\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H_z}{\partial y}+\gamma H_y=\mathrm{j}\omega\varepsilon E_x\\[2mm] \dfrac{\partial H_z}{\partial x}+\gamma H_x=-\mathrm{j}\omega\varepsilon E_y\\[2mm] \dfrac{\partial H_y}{\partial x}-\dfrac{\partial H_x}{\partial y}=\mathrm{j}\omega\varepsilon E_z\end{cases}$$

(3) 用 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的 z 分量表示出其他分量为

$$\begin{cases}H_x=\dfrac{1}{k_{\mathrm{c}}^2}\left(\mathrm{j}\omega\varepsilon\dfrac{\partial E_z}{\partial y}-\gamma\dfrac{\partial H_z}{\partial x}\right)\\[2mm] H_y=\dfrac{-1}{k_{\mathrm{c}}^2}\left(\mathrm{j}\omega\varepsilon\dfrac{\partial E_z}{\partial x}+\gamma\dfrac{\partial H_z}{\partial y}\right)\\[2mm] E_x=\dfrac{-1}{k_{\mathrm{c}}^2}\left(\mathrm{j}\omega\mu\dfrac{\partial H_z}{\partial y}+\gamma\dfrac{\partial E_z}{\partial x}\right)\\[2mm] E_y=\dfrac{1}{k_{\mathrm{c}}^2}\left(\mathrm{j}\omega\mu\dfrac{\partial H_z}{\partial x}-\gamma\dfrac{\partial E_z}{\partial y}\right)\end{cases}$$

【考研题 5-11】(北京交通大学 2005 年)两块无限长的平行金属板相距为 a，如图 5-4 所示。已知其中传播的电磁波的电场、磁场各分量为

$$H_z=(A\cos k_{\mathrm{c}}x+B\sin k_{\mathrm{c}}x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z},\quad H_x=(C\cos k_{\mathrm{c}}x+D\sin k_{\mathrm{c}}x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$$

$$E_y=(E\cos k_{\mathrm{c}}x+F\sin k_{\mathrm{c}}x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z},\quad H_y=E_x=E_z=0$$

式中，A、B、C、D、E、F 是待定常数。

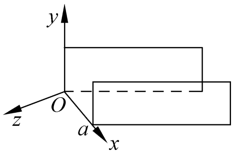

图 5-4　考研题 5-11 图

(1) 试利用边界条件和麦克斯韦方程确定 A(或 B)、C、D、E、F 及 k_c(其中 A、B 有一个取决于波源可不确定,作为已知量);

(2) 求金属板内表面的电流分布。

解:(1) 根据理想导体表面切向电场的边界条件,$E_y\big|_{x=0}=0$,故 $E=0$。根据理想导体表面法向磁场的边界条件,$H_x\big|_{x=0}=0$,故 $C=0$。当 $x=a$ 时,$E_y\big|_{x=a}=0$,故 $k_c a=n\pi$,$n=1,2,3,\cdots$,即

$$k_c=\frac{n\pi}{a},\quad n=1,2,3,\cdots$$

在理想导体表面,磁场为波腹,存在极大值,故其导数为零,即

$$\frac{\partial H_z}{\partial x}\bigg|_{x=0}=0,\quad \frac{\partial H_z}{\partial x}\bigg|_{x=a}=0$$

因为 A、B 为待定常数,故 $B=0$,所以电场、磁场各分量可表示为

$$H_z=A\cos k_c x\cdot e^{-j\beta z},\quad H_x=D\sin k_c x e^{-j\beta z}$$

$$E_y=F\sin k_c x\cdot e^{-j\beta z},\quad H_y=E_x=E_z=0$$

根据麦克斯韦方程组 $\nabla\times\boldsymbol{E}=-j\omega\mu_0\boldsymbol{H}$,得

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 0 & F\sin k_c x\cdot e^{-j\beta z} & 0\end{vmatrix}=j\beta F\sin k_c x\cdot e^{-j\beta z}\boldsymbol{e}_x+k_c F\cos k_c x\cdot e^{-j\beta z}\boldsymbol{e}_z$$

故有

$$j\beta F\sin k_c x\cdot e^{-j\beta z}=-j\omega\mu_0 D\sin k_c x\cdot e^{-j\beta z}$$

$$k_c F\cos k_c x\cdot e^{-j\beta z}=-j\omega\mu_0 A\cos k_c x\cdot e^{-j\beta z}$$

根据题意,设 A 为已知量,则

$$F=-\frac{j\omega\mu_0 A}{k_c}=-\frac{j\omega\mu_0 Aa}{n\pi}$$

$$D=\frac{j\beta Aa}{n\pi}$$

再由 $\nabla\times\boldsymbol{H}=j\omega\varepsilon\boldsymbol{E}$,得

$$Ak_c\sin k_c x\cdot e^{-j\beta z}-j\beta D\sin k_c x\cdot e^{-j\beta z}=j\omega\varepsilon_0 F\sin k_c x\cdot e^{-j\beta z}$$

整理得

$$\omega^2\mu_0\varepsilon_0=\beta^2+\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$$

(2) 金属板内表面的电流分布为

$x=0$ 时: $\boldsymbol{J}_y=\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_z H_z\big|_{x=0}=-\boldsymbol{e}_y A e^{-j\beta z}$

$x=a$ 时: $\boldsymbol{J}_y=-\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_z H_z\big|_{x=a}=\boldsymbol{e}_y A\cos(n\pi)e^{-j\beta z}=\boldsymbol{e}_y A(-1)^n e^{-j\beta z}$

【考研题 5-12】 (西安电子科技大学 2003 年)证明均匀媒质内,有源区域电场强度、磁场强度满足以下的波动方程:

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=\nabla\rho/\varepsilon+\mu\frac{\partial\boldsymbol{J}}{\partial t}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \boldsymbol{J}$$

证明：在有源空间，麦克斯韦方程组为

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \varepsilon \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon \\ \nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0 \end{cases}$$

对$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$两边取旋度，并将第二个旋度方程代入，得

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{H}) = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

因为$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = \nabla\nabla \cdot \boldsymbol{E} - \nabla^2 \boldsymbol{E}$，而$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon$，代入上式，得

$$\nabla\rho/\varepsilon - \nabla^2 \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

即

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \nabla\rho/\varepsilon + \mu \frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t}$$

同理，将$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \varepsilon \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$两边取旋度，并将$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$代入，得

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{H} = \nabla \times \boldsymbol{J} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{E}) = \nabla \times \boldsymbol{J} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2}$$

即

$$\nabla\nabla \cdot \boldsymbol{H} - \nabla^2 \boldsymbol{H} = \nabla \times \boldsymbol{J} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2}$$

而$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0$，故有

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \boldsymbol{J}$$

【考研题 5-13】 (北京理工大学 2008 年)写出传导电流密度$\boldsymbol{J}_{\mathrm{c}}$，磁化电流密度$\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}$和位移电流密度$\boldsymbol{J}_{\mathrm{d}}$与电场强度$\boldsymbol{E}$或者磁场强度$\boldsymbol{H}$的关系式，并简要说明 3 种电流密度物理意义的异同。

解：传导电流密度为

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{c}} = \sigma \boldsymbol{E}$$

它是由导体内载流子的定向移动产生的。

磁化电流密度为

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}} = \nabla \times \boldsymbol{P}_{\mathrm{m}} = \nabla \times (\chi_{\mathrm{m}} \boldsymbol{H}) = \nabla \times [(\mu_{\mathrm{r}} - 1)\boldsymbol{H}]$$

它是磁介质在外磁场的作用下磁化后产生的等效电流。

位移电流为

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{d}}=\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}=\varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}$$

位移电流由变化的电场产生。

3 种电流的相同之处在于,它们都可以产生磁场。

【考研题 5-14】 (北京理工大学 2008 年)在理想导体内部是否存在时变电磁场?为什么?写出时变电磁场在理想导体表面外侧的电场和磁场的边界条件。

解:在理想导体内部不会存在时变电磁场。如果存在时变电磁场,由于理想导体的电导率 $\sigma\to\infty$,根据欧姆定律 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{c}}=\sigma\boldsymbol{E}$,则会出现无穷大的电流,违背能量守恒定律。

理想导体表面的边界条件为

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}\times\boldsymbol{E}=0\\ \boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}\\ \boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}\cdot\boldsymbol{D}=\rho_{\mathrm{s}}\\ \boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}\cdot\boldsymbol{B}=0\end{cases}$$

【考研题 5-15】 (北京理工大学 2008 年)写出恒定磁场中矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 和标量磁位 φ_{m} 的定义及它们各自满足的微分方程。

解:由于磁场是无散场,根据 $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})\equiv 0$,定义矢量磁位:$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$。

在恒定磁场中,$\boldsymbol{A}$ 服从库仑规范,$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$,满足的微分方程为

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\mu\boldsymbol{J}$$

在无电流区域,因为 $\boldsymbol{J}=0$,有 $\nabla\times\boldsymbol{H}=0$,定义标量磁位:$\boldsymbol{H}=-\nabla\varphi_{\mathrm{m}}$ 标量位满足拉普拉斯方程,即

$$\nabla^2\varphi_{\mathrm{m}}=0$$

【考研题 5-16】 (北京邮电大学 2015 年)对均匀理想介质(μ,ε)填充的无源区域中的交变电磁场而言,已知其磁感应强度矢量的表达式为 $\boldsymbol{B}=B_0\cos(\omega t-kz)\boldsymbol{e}_x$,其中角频率 ω 为已知参数。试根据上述条件计算:

(1) 该区域中的位移电流;

(2) 表达式中的参数 k。

解:(1) 根据麦克斯韦第一方程,在无源区域有

$$\varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}=\nabla\times\boldsymbol{H}=\nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{e}_xB_0\cos(\omega t-kz)}{\mu}\right)$$
$$=\boldsymbol{e}_y\frac{k}{\mu}B_0\sin(\omega t-kz)$$

因此,位移电流密度为

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{d}}=\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}=\varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}=\boldsymbol{e}_y\frac{k}{\mu}B_0\sin(\omega t-kz)$$

(2) 对上面的电场微分方程积分,在交变场中令积分常数为零,得

$$\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{e}_y\frac{k}{\omega\mu\varepsilon}B_0\cos(\omega t-kz)$$

将 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 代入麦克斯韦第二方程 $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\partial\boldsymbol{B}/\partial t$ 两边,得

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{k}{\omega\mu\varepsilon}B_0\cos(\omega t-kz)\right]=\boldsymbol{e}_x\frac{k^2B_0}{\omega\mu\varepsilon}\sin(\omega t-kz)=-\partial\boldsymbol{B}/\partial t$$

对上式积分，在交变场中令积分常数为零，得到磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_x\frac{k^2}{\omega^2\mu\varepsilon}B_0\cos(\omega t-kz)$$

与已知其磁感应强度矢量的表达式 $\boldsymbol{B}=B_0\cos(\omega t-kz)\boldsymbol{e}_x$ 比较，得

$$k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

【考研题 5-17】（西安电子科技大学 2012 年）已知无源自由空间中的电场强度矢量为 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_yE_{\mathrm{m}}\sin(\omega t-kz)$。

(1) 试由麦克斯韦方程求磁场强度。

(2) 证明 ω/k 等于光速。

(3) 试求坡印亭矢量的时间平均值。

解：(1) 由于 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_yE_{\mathrm{m}}\sin(\omega t-kz)=\boldsymbol{e}_yE_{\mathrm{m}}\cos(\omega t-kz-\pi/2)$，所以电场强度矢量的复数形式为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_yE_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kz+\pi/2)}$$

根据麦克斯韦第二方程 $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\mu_0\boldsymbol{H}$，得

$$\boldsymbol{H}=\frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{e}_x\frac{k}{\omega\mu_0}E_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kz+\pi/2)}$$

磁场强度的时域形式为

$$\boldsymbol{H}=-\boldsymbol{e}_x\frac{k}{\omega\mu_0}E_{\mathrm{m}}\sin(\omega t-kz)\tag{5-20}$$

(2) 将以上磁场的表达式代入麦克斯韦第一方程 $\nabla\times\boldsymbol{H}=\mathrm{j}\omega\varepsilon_0\boldsymbol{E}$，得

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_0}\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_y\frac{k^2}{\omega^2\varepsilon_0\mu_0}E_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kz+\pi/2)}\tag{5-21}$$

比较式(5-20)和式(5-21)可得，$\dfrac{k^2}{\omega^2\varepsilon_0\mu_0}=1$，即

$$\omega/k=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=c$$

ω/k 等于光速。

(3) 坡印亭矢量的时间平均值

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}}=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\right]=\boldsymbol{e}_z\frac{kE_{\mathrm{m}}^2}{2\omega\mu_0}$$