第4篇

波动与波动光学

振动在介质中的传播过程称为波动，简称波。波动是自然界中一种常见的物质运动形式。声波、水面波、绳中的波以及地震波等都是机械振动在介质中的传播过程，统称机械波。光波是电磁振荡（变化的电磁场）在空间的传播过程，属于电磁波。可见，波是自然界中极为常见的现象。

尽管各种波的性质不同，但所有的波动都具有一些共同的特征和相似的规律。本篇将讨论振动与波动所遵循的一些基本规律。在第 11 章，从讨论简谐振动的基本规律入手，讨论振动的合成等问题；在第 12 章，主要以平面简谐波为例讨论机械波的描述、能量传播、干涉和衍射等，最后简单介绍声波的多普勒效应；在第 13 章，定量讨论以可见光为主的电磁波的波动现象，主要内容有光源、光波的传播、光波的干涉、衍射和偏振等。

第 11 章　机械振动

在我们周围的世界中,物质运动的形式多种多样,振动是常见的一种运动形式。物体在平衡位置附近作来回往复的运动,称为**机械振动**(mechanical vibration),简称**振动**。振动现象非常普遍,例如:拨一下琴弦,可以看到琴弦在平衡位置附近往复运动;一阵微风吹过,我们能够感觉到树梢在微风中来回摇摆。此外,心脏的搏动、海浪的起伏、钟摆的摆动以及固体晶格点阵中的原子或分子的运动都是振动。

值得注意的是,振动并不限制在机械运动范围以内。任一物理量(如位移、电流、电压等)在某一数值附近反复变化,称为**广义振动**。虽然各种振动的本质不同,但形式上它们遵循类似的规律,对它们进行描述所需要的数学形式也都是相同的。机械振动作为一种普遍的运动形式,其基本原理是声学、光学、电工学、无线电学等科学技术的理论基础。

为了分析复杂振动的特点,采用"**简谐振动**"(simple harmonic motion)这个理想模型。之所以采用这个理想模型,是因为许多振动接近简谐振动,如弹簧振子在阻力很小时的振动、单摆在摆角很小时的振动、音叉的振动、弦的振动、轮船在海上的轻微颠簸,等等。而那些复杂的振动往往可以分解成许多简谐振动。这种从简单到复杂、从特殊到一般的研究方法是我们在学习物理时经常使用的。

11.1 简谐振动

【思考 11-1】

(1) 分析下列三类运动的特点,它们是振动吗?想一想生活中你都接触过哪些振动,并分析形成振动的必要因素。

① 拍皮球;

② 荡秋千;

③ 敲击鼓面。

(2) 在中学物理中学过的弹簧振子的运动和单摆的运动有哪些共同点?

简谐振动是最简单、最基本的振动,常见的一些振动可近似视为简谐振动,许多复杂振动也都可以看作多个简谐振动合成的结果。因此,掌握简谐振动的特征和规律非常重要。比如,当研究一个质点沿直线的简谐振动时,可以结合其动力学特征作如下分析:①物体在

怎样的力(或力矩)的作用下才能作简谐振动；②根据力(或力矩)与运动状态变化之间的关系,求出简谐振动的动力学方程。

首先建立线性回复力(restoring force)的概念。若质点在某位置所受的分解力(或沿运动方向所受的力)等于零,则此位置称作**平衡位置**。若作用于质点的分解力的大小总是与质点相对于平衡位置的位移大小成正比,且方向指向平衡位置,则此作用力称为**线性回复力**。在线性回复力的作用下,质点围绕平衡位置的运动叫作**简谐振动,又称为简谐运动**。

11.1.1 简谐振动的特征及其表达式

研究简谐振动常用的理想模型是弹簧振子(spring oscillator)。一个质量可以忽略不计且劲度系数(即弹性系数)为 k 的弹簧一端固定,另一端系一质量为 m 的可视为质点的物体,二者所构成的系统叫作弹簧振子模型。

图 11-1-1 所示为一个弹簧振子。弹簧质量与物体(即小球)的质量 m 相比很小,可以不计；设弹簧振子在光滑的水平面上振动,不考虑物体所受的空气阻力及与支撑面的摩擦力。当弹簧自由伸展时,物体所在的位置 O 点为该振动系统的平衡位置。以 O 为原点,建立 Ox 坐标系。将物体自 O 点向右移动一初始位移 A,然后静止释放,可以观察到物体向 O 点作变加速运动；在此过程中加速度与速度同向,但其大小逐渐减小为零,过 O 点时物体速度达到最大值；物体通过 O 点继续向左作变减速运动,此过程中加速度与速度反向,其大小逐渐增大,到速度为零时,物体的加速度和位移均达到最大值；继而物体又加速运动回到 O 点后减速回到起点,如此往复运动。设物体在弹性限度内运动,当物体的位置坐标为 x 时,根据胡克定律得

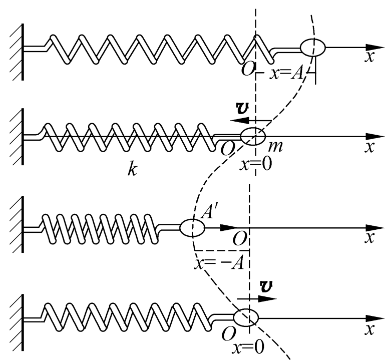

图 11-1-1

$$F=-kx \tag{11-1-1a}$$

式中,k 为弹簧的劲度系数,与弹簧的材料、形状、大小有关；负号表示力的方向与位移的方向相反。由牛顿第二定律得

$$a=\frac{F}{m}=-\frac{k}{m}x \tag{11-1-1b}$$

对于给定的弹簧振子,k 和 m 都是正的常量,可令

$$\omega^2=\frac{k}{m} \tag{11-1-2}$$

代入式(11-1-1b)得

$$a=-\omega^2 x \tag{11-1-3}$$

式(11-1-1a)表明,弹簧振子所受的力符合线性回复力的特征,所以弹簧振子作简谐振动。此时,弹簧振子的加速度大小与对应的位移大小 x 成正比,而方向相反。凡是加速度大小与位移大小成正比而方向相反的振动都称为简谐振动,这也可视为简谐振动的另一种定义。因为 $a=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$,所以式(11-1-3)也可以写成

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0 \tag{11-1-4}$$

式(11-1-4)是简谐振动的微分方程。求解该微分方程,得其通解为

$$x=A\cos(\omega t+\varphi) \tag{11-1-5}$$

式中,A、φ 为两个积分常数,它们的物理意义将在后文讨论。式(11-1-5)为简谐振动的运动学方程,也称简谐振动的振动方程。

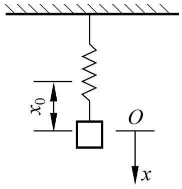

图 11-1-2

【讨论 11-1-1】

讨论竖直悬挂的弹簧振子与水平放置的弹簧振子的运动特点,并总结简谐振动的特点。

【分析】

设一个劲度系数为 k 的轻质弹簧竖直悬挂,下端挂一质量为 m 的物体(图 11-1-2)。今将物体向下拉一段距离后再放开,物体将开始振动。其运动与水平放置的弹簧振子运动的比较见表 11-1-1。

表 11-1-1 竖直悬挂的弹簧振子与水平放置的弹簧振子的运动比较

项　　目	水平放置的弹簧振子	竖直悬挂的弹簧振子	物理意义
平衡位置	弹簧的原长处	弹簧伸长为 x_0 处,且满足 $mg=kx_0$	平衡位置指的是振动系统的振子所受合外力为零的位置
坐标系	以系统的平衡位置为坐标原点,水平向右为正,如图 11-1-1 所示	以系统的平衡位置为坐标原点,竖直向下为正,如图 11-1-2 所示	坐标 x 的意义为振动物体离开平衡位置的位移
位移为 x 时的动力学方程	$F=-kx$ $a=\frac{F}{m}=-\frac{k}{m}x$	$F=mg-k(x+x_0)=-kx$ $a=\frac{F}{m}=-\frac{k}{m}x$	振动物体所受的合外力(或者加速度 a)的大小与离开其平衡位置的位移 x 成正比,与位移的方向相反
位移为 x 时的动力学微分方程	$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$ $\omega^2=\frac{k}{m}$		微分方程为一元二阶齐次常微分方程,且系数相同(表明振动周期相同,分析见 11.1.2 节)
位移为 x 时的运动学方程	$x=A\cos(\omega t+\varphi)$		振动物体离开平衡位置的位移满足余弦规律

由表 11-1-1 可见,竖直悬挂的弹簧振子与水平放置的弹簧振子具有相同的动力学方程(式(11-1-1))、微分方程(式(11-1-4))和运动学方程(式(11-1-5)),它们所作的振动都是简谐振动。要证明一个振动物体是否作简谐振动,只需证明上述三个式子中的一个即可,由其中的一个可以推出另外两个。

11.1.2 简谐振动的振幅、周期及频率

式(11-1-5)是有界的、周期性的余弦函数,表明简谐振动具有有界性和周期性。为了描述其有界性和周期性,引入振幅、周期和频率等物理量。

在机械振动的研究中,常用振动质点离开其平衡位置的位移来表示振动质点的位置。在简谐振动方程式(11-1-5)中,A 表示质点离开平衡位置($x=0$)的最大位移的绝对值,称为简谐振动的**振幅**(amplitude)。

又因 $\cos(\omega t+\varphi)$是时间 t 的周期函数,所以简谐振动是周期运动,周期性是简谐振动的基本特征。每隔一个最短的固定时间间隔 T,简谐振动重复一次。这个最短的固定时间间隔 T 称为简谐振动的**周期**(period),有

$$T=\frac{2\pi}{\omega} \tag{11-1-6}$$

振动学中,常把 2π 秒内的振动周期数(物体所作完全振动的次数)称为**角频率**(angular frequency)(也叫**圆频率**),用 ω 表示。把单位时间内物体所作完全振动的次数称为振动的**频率**(frequency),通常用 ν 表示。根据这个定义,角频率 ω 与频率 ν 以及周期 T 三者之间的关系为

$$\omega=2\pi\nu=\frac{2\pi}{T} \tag{11-1-7}$$

在国际单位制(SI)中,周期 T 的单位是秒,符号为 s;频率 ν 的单位是赫兹,符号为 Hz($1\text{Hz}=1\text{s}^{-1}$);**角频率** ω 是 ν 的 2π 倍,单位为弧度每秒,符号为 rad/s,也可以用每秒表示,符号为 s^{-1}。

对于弹簧振子,由式(11-1-2)得

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{11-1-8}$$

因此,弹簧振子的振动周期和频率可写为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{11-1-9}$$

$$\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{11-1-10}$$

对于给定的弹簧振子,k 和 m 都是正的常量,其作简谐振动的周期和频率完全由弹簧振子本身的性质(即弹簧振子的周期和频率与振动系统的弹性(k)和惯性(m)有关)决定,与初始条件无关,因此这种周期和频率分别称为**固有周期**和**固有频率**。

11.1.3 简谐振动的 *x*-*t* 图线

简谐振动可以用振动曲线(又称为谐振曲线)来描述,如图 11-1-3 所示,图中振动的振幅 $A=0.02\text{m}$,周期 $T=0.4\text{s}$。

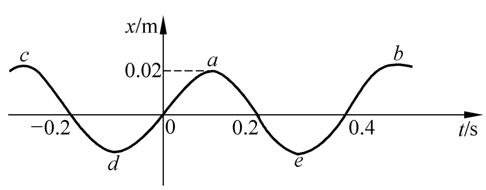

图 11-1-3

11.1.4 简谐振动的速度和加速度

将简谐振动方程(11-1-5)对时间求导数,得作简谐振动的质点的振动速度为

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)=\omega A\cos\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right) \tag{11-1-11a}$$

上式也可写成

$$v=v_{\mathrm{m}}\cos\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right) \tag{11-1-11b}$$

式中,$v_{\mathrm{m}}=A\omega$ 是最大振动速度的绝对值,称为速度的振幅。

将式(11-1-11a)对时间再次求导数,得作简谐振动的质点的振动加速度为

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2A\cos(\omega t+\varphi) \tag{11-1-12}$$

或

$$a=\omega^2A\cos(\omega t+\varphi\pm\pi)=a_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi\pm\pi)$$

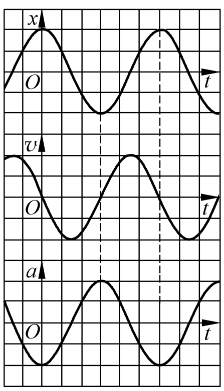

图 11-1-4

式中,$a_{\mathrm{m}}=\omega^2A$ 是最大振动加速度的绝对值,称为加速度的振幅。

将式(11-1-5)与式(11-1-12)比较,可以得到一个重要的结果,即

$$a=-\omega^2x \tag{11-1-13}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2x=0$$

式(11-1-13)再次表明,作简谐振动的质点的加速度和位移恒成正比且两者方向相反。这是简谐振动的运动学特征。

图 11-1-4 给出了简谐振动的 x、v、a 随时间 t 变化的关系曲线。物体作简谐振动时,不但位移是周期性的,而且其速度、加速度也都是周期性变化的。

11.1.5 简谐振动的相位

在简谐振动方程(11-1-5)中,$\omega t+\varphi$ 称为简谐振动在 t 时刻的**相位**(phase),它是表示振动物体的位置和运动状态的物理量。假设已知简谐振动的振幅 A 和相位 $\omega t+\varphi$,由式(11-1-5)即可求出 t 时刻振动物体的位移 x,同样可由式(11-1-11)和式(11-1-12)确定物体的速度和加速度。

简谐振动方程中的 φ 是 $t=0$ 时的相位,称为**初相位**(initial phase),简称初相,它由振动物体的初始状态决定。

如果在 $t=0$ 时,振动物体的位移 x_0 和初速度 v_0(即所谓初始条件)为已知,我们就可以完全确定这一简谐振动的振幅和初相。将初始条件代入式(11-1-5)和式(11-1-11a),可得 $x_0=A\cos\varphi$ 和 $v_0=-\omega A\sin\varphi$,由此得到简谐振动的振幅 A 和初相 φ 分别为

$$A=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \tag{11-1-14a}$$

$$\tan\varphi=-\frac{v_0}{\omega x_0} \tag{11-1-14b}$$

作简谐振动的物体从 t_1 时刻到 t_2 时刻的过程中，相位从 $\varphi_1=\omega t_1+\varphi$ 变化到 $\varphi_2=\omega t_2+\varphi$，其相位变化为 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\omega(t_2-t_1)=\omega\Delta t$。从 t_1 到 t_2 的相位变化称为相位差，等于角频率(此处可理解为相位变化的速率)与经历的时间之积。相位差可进一步记作 $\Delta\varphi=\omega\Delta t=\frac{2\pi}{T}\Delta t$。

【讨论 11-1-2】

相位差与时间差的关系还常常用于讨论两个振动的步调。设有两个同方向、同频率的简谐振动，它们的运动学方程分别为

$$x_1=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$$
$$x_2=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

讨论以下问题：

(1) 两个振动在 t 时刻的相位及其初相位；

(2) 两者在 t 时刻的相位差；

(3) 当 $\varphi_2-\varphi_1=\pm 2k\pi(k=0,1,2,\cdots)$，$\varphi_2-\varphi_1=\pm(2k+1)\pi(k=0,1,2,\cdots)$ 以及其他值时，两个振动有何特点？

【分析】

第一个振动的相位为 $\omega t+\varphi_1$，其中 φ_1 为其初相位；第二个振动的相位为 $\omega t+\varphi_2$，其中 φ_2 为其初相位。在任意时刻 t，它们之间的相位差(简称相差)为

$$\Delta\varphi=(\omega t+\varphi_2)-(\omega t+\varphi_1)=\varphi_2-\varphi_1$$

这一结果表明，在同一时刻，两个同方向、同频率的简谐振动的相位差取决于两者之间的初相差，而与时刻无关。

当 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\pm 2k\pi(k=0,1,2,\cdots)$，这两个振动的步调一致，它们的振子位移同时到达各自的极大值位置，同时越过原点并同时到达极小值位置，称为同相。

当 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\pm(2k+1)\pi(k=0,1,2,\cdots)$，它们的步调正好相反，一个振动的振子到达极大值位置时，另一个将到达极小值位置，它们同时越过原点但方向相反，并同时到达各自的另一个极值位置。这样的两个振动称为两者反相。

当 $\Delta\varphi$ 为其他值时，我们一般说，两者不同相。例如，下面两个简谐振动：

$$x_1=A\cos\omega t$$
$$x_2=A\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)=A\cos\left[\omega\left(t+\frac{T}{4}\right)\right]$$

它们的相差为 $\Delta\varphi=\frac{\pi}{2}$，即振动 x_2 的相位始终比振动 x_1 的相位大$\frac{\pi}{2}$，称振动 x_2 比 x_1 超前$\frac{\pi}{2}$或 x_1 比 x_2 滞后$\frac{\pi}{2}$。

图 11-1-5 描出了这两个同方向、同频率的简谐振动曲线(图中实线表示 x_1，虚线表示 x_2)。从图中可以看出，在 $t=0$ 时，x_1 振动的相位 $\varphi_1=0$，对应的振动位移 $x_{10}=A$，$v_{10}=0$，x_2 振动的相位为$\frac{\pi}{2}$，对应的振动位移 $x_{20}=0$，$v_{20}<0$；在 $t=$

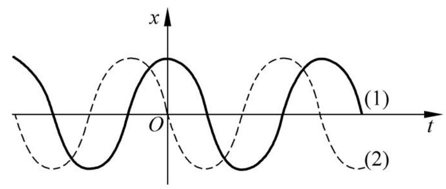

图 11-1-5

$T/4$ 时，x_1 振动的相位变为$\frac{\pi}{2}$，而 x_2 振动的相位则变为 π。对于这种情况，我们说 x_2 振动在相位上超前 x_1 振动$\frac{\pi}{2}$，或者说 x_1 振动滞后于 x_2 振动$\frac{\pi}{2}$。即将两个振动比较，相位大的振动称为超前，相位小的振动则称为滞后。从时间上看，我们可以说 x_2 振动超前 x_1 振动 $T/4$，即 x_1 振动必须在 $t+T/4$ 时刻才能到达 x_2 振动 t 时刻的状态。也就是说，两个振动比较，时间因子大的振动称为超前，时间因子小的振动称为滞后。两个同频率的简谐振动的相位差 $\Delta\varphi$ 和时间差 Δt 的关系仍然可以表示为 $\Delta\varphi=\omega\Delta t=\frac{2\pi}{T}\Delta t$，它们的另一个物理定义是：一个振动的时间每超前一个周期，则它的相位就超前 2π。

记录地震时引起振动情况的仪器称为地震仪。通过观测振动参数(如振幅、频率等)的变化判断地震的强弱，以起到监测作用，从而进行地震的防护和预警。世界上最早的地震仪是我国东汉科学家张衡在公元 132 年创制的候风地动仪，用于确定地震发生的大体方位。1700 多年后，欧洲人才制造出“第一台”地动仪。

例 11-1-1 图 11-1-3 所示为一个简谐振动的振动曲线。求：

(1) 该简谐振动的振动方程；

(2) 该简谐振动任意时刻的速度和加速度的表达式。

解：振幅 A、角频率 ω 和初相 φ 是描述简谐振动的三个特征量。这三个量一旦确定，简谐振动方程及其振动速度和振动加速度就确定了。对给定的振动系统，周期由系统本身的性质决定，振幅和初相由初始条件决定。

对本题而言，由图 11-1-3 可知，振幅 $A=0.02\text{m}$，周期 $T=0.4\text{s}$，角频率 $\omega=\frac{2\pi}{T}=5\pi\text{rad/s}$。

由图 11-1-3 还可知，$t=0$ 时刻，振动质点的位移和初速度分别为 $x_0=0$ 和 $v_0>0$。由式(11-1-14b)，或者将式(11-1-5)和式(11-1-11)联立，均可求得初相 $\varphi=-\frac{\pi}{2}$或$\frac{3\pi}{2}$。故该简谐振动的振动方程为

$$x=0.02\cos\left(5\pi t-\frac{\pi}{2}\right)\text{(SI)}$$

其速度和加速度的表达式分别为

$$v=-\frac{\pi}{10}\sin\left(5\pi t-\frac{\pi}{2}\right)\text{(SI)}$$

$$a=-\frac{\pi^2}{2}\cos\left(5\pi t-\frac{\pi}{2}\right)\text{(SI)}$$

【练习 11-1】

11-1-1 下列运动中哪些是机械振动? 哪些是简谐振动? 哪些可以近似看成简谐振动?

(1) 拍皮球的运动；

(2) 荡秋千；

(3) 完全弹性球在地面上不断地弹跳；

(4) 小球在一个半球形碗底附近来回滚动；

(5) 把液体灌入 U 形管内，液柱的振荡。

11-1-2 表 11-1-1 比较了水平方向和竖直方向的弹簧振子的平衡位置、合外力特点、微分方程和运动学方程的特点以及它们的角频率 ω。继续讨论以下问题：

(1) 把弹簧振子放置在斜面上，弹簧振子作振动时的平衡位置、合外力、微分方程和运动方程以及其角频率 ω 各是多少？

(2) 对于竖直方向或者在斜面上的弹簧振子，能否取弹簧原长处为坐标原点？这时它还作简谐振动吗？

(3) 两个轻质弹簧(劲度系数分别为 k_1 和 k_2)串联(图 11-1-6(a))或者并联(图 11-1-6(b))后可视为一个劲度系数为等效值的弹簧振子，这个弹簧振子的周期、频率和角频率如何表示？

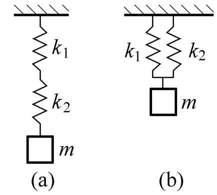

图 11-1-6

11-1-3 轻弹簧上端固定，下端系一质量为 m_1 的物体，稳定后在 m_1 的下边又系一质量为 m_2 的物体，于是弹簧又伸长了 Δx。若将 m_2 移去，并令其振动，试求该系统的振动周期。

11-1-4 两个质点各自作简谐振动，它们的振幅相同、周期相同。第一个质点的振动方程为 $x_1=A\cos(\omega t+\alpha)$，在 $t=0$ 时第一个质点位于最大位移的一半处且向正 x 方向运动。当第一个质点从相对平衡位置的正位移处回到平衡位置时，第二个质点正在最大位移处。

(1) 求第二个质点的初相位；

(2) 求第二个质点的振动方程；

(3) 设振幅为 12.0cm，周期为 2.0s，求 $t=0.5$s 时，两个质点的位置、速度和加速度。

11-1-5 要证明一个振动物体是否作简谐振动，只要证明物体振动满足动力学方程(式(11-1-1))、微分方程(式(11-1-4))和运动学方程(式(11-1-5))三个式子中的一个即可。其中常用的方法是对振动物体进行受力分析，得到物体所受的合外力满足线性回复力的关系(式(11-1-1a))。按照这种方法，解决以下问题：

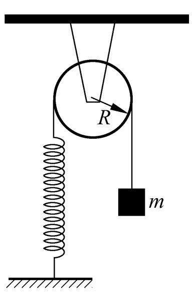

图 11-1-7

(1) 证明单摆(摆球质量为 m、摆长为 l)的小角度的摆动是简谐振动，并求其系统固有周期。进一步分析单摆作大角度摆动的特点，可得出什么结论？

(2) 定滑轮的半径为 R，转动惯量为 J，轻绳绕过滑轮，一端与固定的轻弹簧连接，弹簧的劲度系数为 k；另一端挂一质量为 m 的物体，如图 11-1-7 所示。现将物体从平衡位置向下拉一微小距离后放手，试证物体作简谐振动，并求其振动周期。(设绳与滑轮间无滑动，轴的摩擦及空气阻力忽略不计。)

(3) 设想沿地球直径开凿一条贯通地球的隧道，将质量为 m 的小球(视为质点)从洞口由静止释放，试证小球在此隧道内的运动为简谐振动，并求小球的振动周期。设地球平均半径为 R，且地球质量均匀分布，其密度为 ρ。(提示：质点 m 所受的万有引力完全来自处于该质点位置以内的这部分球体，而外层球壳对该质点的万有引力的合力为零。)

11-1-6 讨论 11-1-2 中比较了两个同方向、同频率的简谐振动的步调，给出了同相、反相以及超前和滞后的概念，试画出当同相、反相以及超前(或者滞后)时这两个振动的振动曲

线,并作比较分析。

11-1-7 定性解释以下现象:

(1) 火车检修工人常常手持榔头敲击火车的车轮等部位,通过被敲击的车轮等部位发出的声音来检测列车的关键部位是否有损伤,他们依据的是什么原理?

(2) 唐朝时,在洛阳某寺一僧人房中挂着的一件乐器经常莫名其妙地自动鸣响,僧人因此惊恐成疾。后来,他的一个朋友找到一把铁锉,在乐器上锉磨几下,乐器便再也不自动作响了。为什么?

11-1-8 绕不通过质心的水平转轴摆动的刚体称为复摆。复摆作小角度摆动也可视为简谐振动。船舶是一个复摆,查阅有关资料,了解复摆的振动分析,并定性讨论决定船舶稳定性的因素。

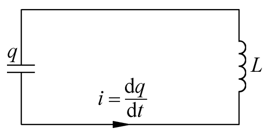

图 11-1-8

11-1-9 图 11-1-8 所示为一电磁振荡电路,试写出经过电路导线横截面的电荷的微分方程;与机械振动的微分方程作对比,证明电磁振动电路中的电荷和电流的变化都是广义振动,并写出它们的变化周期和频率。

11.2 旋转矢量法

【思考 11-2】

一质点作圆周运动,如果从侧面(沿圆周平面上任一直径方向)看,该质点的运动轨迹是怎样的?这样的运动轨迹与圆周运动有怎样的联系?

1610 年,伽利略用他新制作的望远镜发现了木星的四颗天然卫星。经过数周的观察发现,对他来说,每颗卫星似乎都在作相对于木星的来回运动,即现在我们所说的简谐振动。而实际上,卫星是绕木星在作匀速圆周运动。这说明简谐振动是从侧面看的匀速圆周运动。更准确地说,简谐振动是匀速圆周运动在所沿圆的一条直径上的投影。据此,我们引入研究简谐振动的矢量表示法(the rotating vector representation)——旋转矢量法。

如图 11-2-1 所示,矢量 $\boldsymbol{A}$ 为一长度保持不变的矢量,其始点在 Ox 坐标轴的原点 O 处。计时起点 $t=0$ 时,矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 Ox 轴的夹角为 φ,矢量 $\boldsymbol{A}$ 以角速度 ω 在 Oxy 平面内绕坐标原点作逆时针方向的匀速转动,其角速度等于简谐振动的角频率 ω。这个矢量就叫作旋转矢量。经过时间 t 后,旋转矢量 $\boldsymbol{A}$ 沿逆时针方向转过角度 ωt。此时,矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 Ox 轴的夹角为 $\omega t+\varphi$。此时,若用 x 表示矢量 $\boldsymbol{A}$ 在 Ox 轴上的投影,有

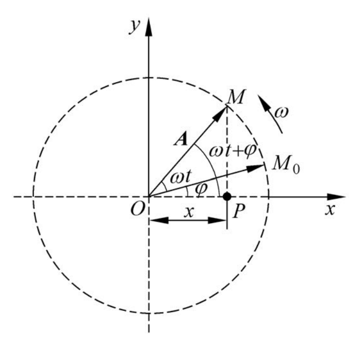

图 11-2-1

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

此式正是沿 Ox 轴作简谐振动的物体在 t 时刻离开其平衡位置(即坐标原点)的位移。因此,匀速旋转的矢量矢端 M 在坐标轴上的投影点 P 的运动即表示一特定的简谐振动。由此可体会到方法之妙,感受到旋转之美。于是我们可以按如下方法来描述简谐振动:旋转