



矢量分析
导论

第 1 章 矢量分析

电磁场与电磁波理论涉及电场和磁场的研究,电场和磁场都是矢量,它们的特性由麦克斯韦方程组决定。研究和讨论麦克斯韦方程组及其相关应用,都需要首先学习与矢量运算有关的基本规则。鉴于此,本章将研究矢量分析。首先学习与坐标系无关的矢量运算的基本规则、标量场和矢量场的概念;然后介绍三种常见的正交坐标系即直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系及其微分元。在此基础上,分析和介绍了标量场的梯度、矢量场的散度和旋度、亥姆霍兹定理。在本章的最后部分,利用 MATLAB 对梯度、散度、旋度的特性进行了分析和讨论。

1.1 矢量和矢量运算

1.1.1 标量与矢量

仅具有大小的量称为标量,如质量、温度和电荷都是标量。既有大小又有方向的量称为矢量,如速度、加速度和力都是矢量。而其他的量如电压和电流都是标量,电场和磁场都是矢量。矢量用黑斜体表示,如 $\mathbf{A}$ 。标量用白斜体字符来表示,如 A 。

矢量 $\mathbf{A}$ 的几何表示是一条有向线段,线段的长度表示矢量 $\mathbf{A}$ 的大小,指向表示矢量 $\mathbf{A}$ 的方向,矢量 $\mathbf{A}$ 的大小或模用 $|\mathbf{A}|$ 或 A 表示。那么,矢量 $\mathbf{A} = A\mathbf{a}_A = |\mathbf{A}|\mathbf{a}_A$,其中 $\mathbf{a}_A$ 称为矢量 $\mathbf{A}$ 的单位矢量,即 $\mathbf{a}_A$ 的大小是 1,方向与 $\mathbf{A}$ 相同。

1.1.2 矢量运算

矢量运算包括矢量的加减法、矢量的数乘、点乘和叉乘。

1. 矢量加减法

两矢量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 相加,可采用平行四边形法则或三角形法则,如图 1-1-1 所示。两矢量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的始端重合,以 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 为邻边做平行四边形,其对角线即为和矢量 $\mathbf{A}+\mathbf{B}$;或把 $\mathbf{B}$ 矢量的起点放在 $\mathbf{A}$ 矢量的末端,从 $\mathbf{A}$ 矢量的起点到 $\mathbf{B}$ 矢量的末端的连线即为和矢量。矢量的减法是矢量加法的特殊情况,因有 $\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{A}+(-\mathbf{B})$,其中 $-\mathbf{B}$ 是与 $\mathbf{B}$ 大小相等、方向相反的矢量,同样可以利用平行四边形法则或三角形法则做加法运算,即可得到差矢量 $\mathbf{A}-\mathbf{B}$,如图 1-1-2 所示。

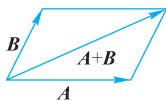


图 1-1-1 矢量加法

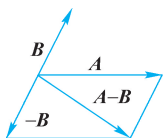
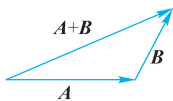


图 1-1-2 矢量减法

矢量加法服从加法的交换律和结合律,即

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \quad (1-1-1)$$

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \quad (1-1-2)$$

2. 矢量的数乘

一个矢量 $\mathbf{A}$ 和一个标量 k 相乘,结果是一个矢量,即

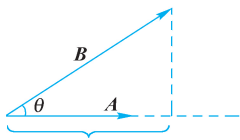
$$\mathbf{B} = k\mathbf{A} \quad (1-1-3)$$

而 $\mathbf{B}$ 的模值是 $\mathbf{A}$ 的 k 倍, $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{A}$ 方向是否相同取决于 k 的正负。

3. 两矢量的标量积

两矢量的标量积也称点积或点乘。两个矢量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的标量积是一个标量,它的值等于 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的幅值与 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 之间夹角余弦的乘积,记作 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ 。即

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta \quad (1-1-4)$$



其中, θ 为矢量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 之间较小的夹角,如图 1-1-3 所示。

在直角坐标系中,三个坐标的单位矢量分别为 $\mathbf{a}_x$ 、 $\mathbf{a}_y$ 、 $\mathbf{a}_z$,若矢量 $\mathbf{r}$ 与 x 、 y 、 z 坐标轴的夹角分别为 α 、 β 、 γ ,则 $\mathbf{r}$ 在直角坐标系中可表示为

图 1-1-3 矢量的标量积

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}_x r \cos \alpha + \mathbf{a}_y r \cos \beta + \mathbf{a}_z r \cos \gamma \quad (1-1-5)$$

$\mathbf{r}$ 的单位矢量为

$$\mathbf{a}_r = \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{a}_x \cos \alpha + \mathbf{a}_y \cos \beta + \mathbf{a}_z \cos \gamma \quad (1-1-6)$$

其中, $\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$ 和 $\cos \gamma$ 称为矢量 $\mathbf{r}$ 的方向余弦。

利用式 (1-1-4) 也可求出两个非零矢量之间的夹角:

$$\theta = \arccos \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB} \quad (1-1-7)$$

当 $\theta = 90^\circ$ 时, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$, 因此, 两矢量的标量积是否为零可作为两矢量垂直的判据, 即

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} \perp \mathbf{B} \quad (1-1-8)$$

当 $\mathbf{B} = \mathbf{A}$ 时, $\theta = 0^\circ$, 可求出矢量 $\mathbf{A}$ 的模:

$$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} \quad (1-1-9)$$

标量积的运算服从交换律和分配律, 即

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (1-1-10)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \quad (1-1-11)$$

4. 两矢量的矢量积

两矢量的矢量积也称叉积或叉乘。两个矢量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的矢量积或叉积是一个矢量,它的幅值等于 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的幅值与 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 之间所夹锐角 θ 正弦的乘积,它的方向是从 $\mathbf{A}$ 到 $\mathbf{B}$ 按右手螺旋旋转 θ 前进的方向,如图 1-1-4 所示,记作 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$,即:

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB \sin \theta \quad (1-1-12)$$

当 $\theta = 0^\circ$ 或 180° 时, $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ 。因此,两矢量的矢量积是否为零矢量可作为两矢量平行的判据,即

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{A} // \mathbf{B} \quad (1-1-13)$$

当 $\mathbf{B} = \mathbf{A}$ 时, $\theta = 0^\circ$, 有

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (1-1-14)$$

矢量积的运算服从分配律,但不服从交换律,即

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \quad (1-1-15)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (1-1-16)$$

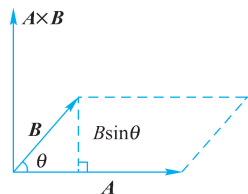


图 1-1-4 矢量的矢量积

5. 三矢量的混合积

三个矢量 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$ 的混合积定义为

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = ABC \sin \theta \cos \varphi \quad (1-1-17)$$

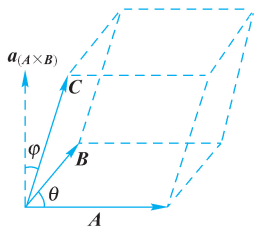


图 1-1-5 矢量的混合积

其中, θ 是矢量 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 间的夹角, φ 是矢量 $\mathbf{C}$ 与 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ 间的夹角。从标量积和矢量积的定义来看,三矢量的混合积表示以这三个矢量为邻边的平行六面体的体积,如图 1-1-5 所示。

三矢量的混合积和二重矢量积分别满足下面的恒等式,即

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = -\mathbf{C} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) \\ &= -\mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) = -\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (1-1-18)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (1-1-19)$$

1.2 标量场和矢量场

1.2.1 场的分类

一个场与空间区域有关,如果一个物理现象与空间的点有关,即认为在这个区域中存在场,场是具有某种意义的物理量在空间的分布。如地球周围的温度场、湿度场和重力场。场在数学上用函数表示,场中任一个点都有一个确定的标量值或矢量。场量在占有空间区域中,除有限个点和某些线、面外,是处处连续的、可微的。

场分为标量场和矢量场、静态场和时变场。标量场和矢量场取决于所关心的物理量是标

量还是矢量,静态场和时变场取决于所关心的物理量是独立的还是随时间变化的。

标量场的场量是标量,即场域内每个点对应的物理量是一个数,如温度场、电位场等。

矢量场的场量是矢量,即场域内每个点对应的物理量必须同时用大小和方向来描述,如速度场、加速度场、重力场、电场和磁场等。

静态场的场量不随时间变化,如由静止电荷产生的静电场和恒定电流产生的恒定电场及恒定磁场。

时变场的场量随时间变化,如时变电磁场和电磁波都是时变场。

1.2.2 场的表示

1. 函数表示法

标量场用标量函数表示,如温度场可表示为 $T(x, y, z)$, 密度场可表示为 $\rho(x, y, z, t)$ 。

矢量场用矢量函数表示。在正交坐标系中,一个矢量可以用沿着三个坐标轴的分量表示,如在直角坐标系中,矢量 $\mathbf{E}$ 可表示为

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{a}_x E_x(x, y, z) + \mathbf{a}_y E_y(x, y, z) + \mathbf{a}_z E_z(x, y, z) \quad (1-2-1)$$

2. 场图表示法

标量场可用等值线或等值面来表示场的分布。等值线或等值面就是函数值相等的点所构成的曲线或曲面。例如,标量场 $u(x, y, z) = x + y + z$ 的等值面方程为

$$u(x, y, z) = x + y + z = c \text{ (常数)} \quad (1-2-2)$$

这是一族平行平面,如图 1-2-1(a) 所示。又如二维标量场 $u(x, y) = x - y^2$ 的等值线方程为

$$u(x, y) = x - y^2 = c \quad (1-2-3)$$

这是一族抛物线,如图 1-2-1(b) 所示。

矢量场在空间的分布可用矢量线来表示,矢量线上每一点的切线方向表示该点场量的方向,场量的大小则用矢量线的疏密程度来表示,矢量线越密集,则表示场量的模值越大,如图 1-2-1(c) 所示。

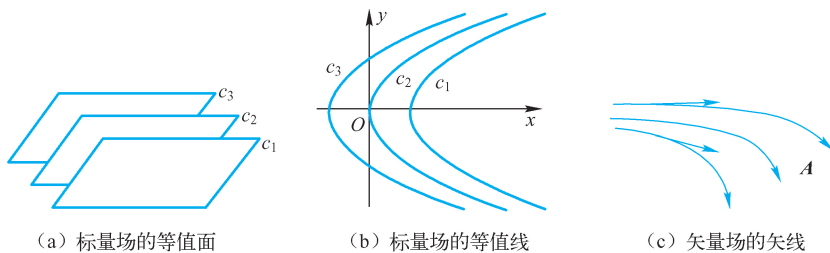


图 1-2-1 场图表示

对于时变场,场图只能表示每一时刻的场的分布。

1.3 正交坐标系与微分元

空间某点的矢量可以根据矢量在该点沿着三个相互垂直方向的分量来表示,为了说明空间某一点的矢量与空间其他点的矢量的关系,必须定义空间每一个点的一组参考方向,即需要建立坐标系。虽然有多种不同的坐标系,本节只介绍三种最常见的正交坐标系:直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系。

1.3.1 直角坐标系

1. 基本定义与运算

直角坐标系是由三个相互正交的平面来确定。这三个平面的交点就是坐标的原点 O 。每一对平面相交一条直线,三个平面就可以确定坐标轴的三条直线,称为 x 轴、 y 轴和 z 轴。它们的方向指向各自坐标值增加的方向,用箭头表示,如图 1-3-1 所示。 x 、 y 和 z 称为坐标变量,它们的值可从原点测量,这样,原点的坐标就是 $O(0,0,0)$,某点 P 的坐标可表示为 $P(x,y,z)$ 。三个坐标变量的变化范围均为 $(-\infty, +\infty)$ 。 x 、 y 和 z 对应的一组单位矢量为 $\mathbf{a}_x$ 、 $\mathbf{a}_y$ 和 $\mathbf{a}_z$,它们的大小和方向均与空间坐标无关,故都是常矢量。 x 、 y 和 z 的方向选择是按右手系统的,即满足 $\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z$ 。

由原点指向 P 点的矢量称为位置矢量,用 $\mathbf{r}$ 表示为

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}_x x + \mathbf{a}_y y + \mathbf{a}_z z \quad (1-3-1)$$

矢量 $\mathbf{A}$ 在相应的三个坐标轴上的坐标分量为 A_x 、 A_y 和 A_z ,矢量 $\mathbf{A}$ 可表示为

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_x A_x + \mathbf{a}_y A_y + \mathbf{a}_z A_z \quad (1-3-2)$$

那么,矢量 $\mathbf{A}$ 的模值: $A = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ 。

矢量 $\mathbf{B}$ 在相应的三个坐标轴上的坐标分量为 B_x 、 B_y 和 B_z ,即矢量 $\mathbf{B}$ 可表示为

$$\mathbf{B} = \mathbf{a}_x B_x + \mathbf{a}_y B_y + \mathbf{a}_z B_z \quad (1-3-3)$$

相应的,可求出直角坐标系下两矢量的加减、矢量的点积和叉积,即有

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \mathbf{a}_x (A_x \pm B_x) + \mathbf{a}_y (A_y \pm B_y) + \mathbf{a}_z (A_z \pm B_z) \quad (1-3-4)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1-3-5)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{a}_x (A_y B_z - A_z B_y) + \mathbf{a}_y (A_z B_x - A_x B_z) + \mathbf{a}_z (A_x B_y - A_y B_x) \quad (1-3-6)$$

或

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1-3-7)$$

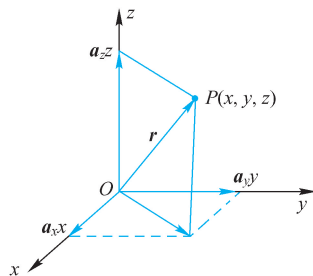


图 1-3-1 直角坐标系

三个单位矢量相互正交,任意两个点积为

$$\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z = 1 \quad (1-3-8)$$

或

$$\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_x = 0 \quad (1-3-9)$$

三个单位矢量 $\mathbf{a}_x$ 、 $\mathbf{a}_y$ 和 $\mathbf{a}_z$ 之间呈右手螺旋关系,其叉积为

$$\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_z = \mathbf{0} \quad (1-3-10)$$

$$\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z, \quad \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x, \quad \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y \quad (1-3-11)$$

2. 微分元

在矢量分析中,经常需要对矢量函数进行微分与积分运算,这种运算需要坐标变量的微分变化对应于微分长度、微分面积、微分体积的变化,其中微分长度是重点。

设直角坐标系中一点 P 沿任意方向移动了一小段微分距离 $d\mathbf{l}$ 到达 Q 点,两个顶点 PQ 之间的距离矢量 $d\mathbf{l}$ 称为矢量线元,如图 1-3-2(a) 所示。矢量线元 $d\mathbf{l}$ 在 x 、 y 、 z 轴上的投影分别是 dx 、 dy 和 dz ,它们分别表示从 P 点移动到 Q 点时, x 、 y 、 z 三个坐标变量的微分变化。因此矢量线元 $d\mathbf{l}$ 可写为

$$d\mathbf{l} = \mathbf{a}_x dx + \mathbf{a}_y dy + \mathbf{a}_z dz \quad (1-3-12)$$

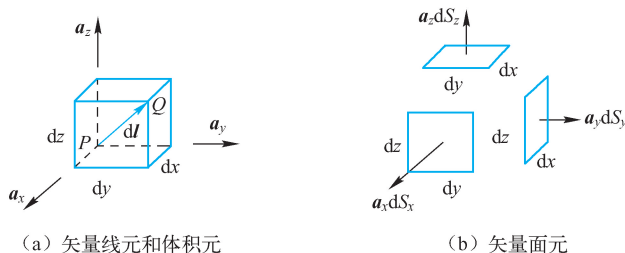


图 1-3-2 直角坐标系中的微分元

任意两个方向的线元相乘可以得到三个坐标方向的标量面元,如图 1-3-2(b) 所示。即有

$$dS_x = dydz, \quad dS_y = dx dz, \quad dS_z = dx dy \quad (1-3-13)$$

那么,矢量面元 $d\mathbf{S}$ 可写为

$$d\mathbf{S} = \mathbf{a}_x dS_x + \mathbf{a}_y dS_y + \mathbf{a}_z dS_z \quad (1-3-14)$$

从上式可以看出,任意的矢量面元 $d\mathbf{S}$ 在直角坐标系中三个坐标面的投影即是三个标量面元。

全部三个方向的线元相乘可以得到体积元,如图 1-3-2(a) 所示,即

$$d\tau = dx dy dz \quad (1-3-15)$$

1.3.2 圆柱坐标系

1. 基本定义与运算

圆柱坐标系由一个圆柱面、一个半无限大平面及一个无限大平面构成。某点 P 的坐标可表示为 $P(\rho, \varphi, z)$ 。三个坐标变量为 ρ, φ, z , 其中 ρ 是点 P 到 z 轴的垂直距离, $\rho \in [0, +\infty)$, ρ 坐标面是半径 ρ 为常数的圆柱面; φ 是点 P 的位置矢量 $\mathbf{r}$ 在 xOy 平面上的投影与正 x 轴之间的夹角, $\varphi \in [0, 2\pi]$, φ 坐标面是 φ 角为常数且过 z 轴的半平面, 如图 1-3-3(a) 所示。 ρ, φ, z 对应的一组单位矢量为 $\mathbf{a}_\rho, \mathbf{a}_\varphi$ 和 $\mathbf{a}_z$, $\mathbf{a}_\rho$ 指向 ρ 增加的方向, $\mathbf{a}_\varphi$ 指向圆柱坐标面与 z 坐标面相交出的圆的切线方向, 如图 1-3-3(b) 所示。 $\mathbf{a}_\rho$ 和 $\mathbf{a}_\varphi$ 的模值都是 1, 但方向却随 φ 角的不同而变化, 是 φ 的函数, 因此 $\mathbf{a}_\rho$ 和 $\mathbf{a}_\varphi$ 不是常矢量。

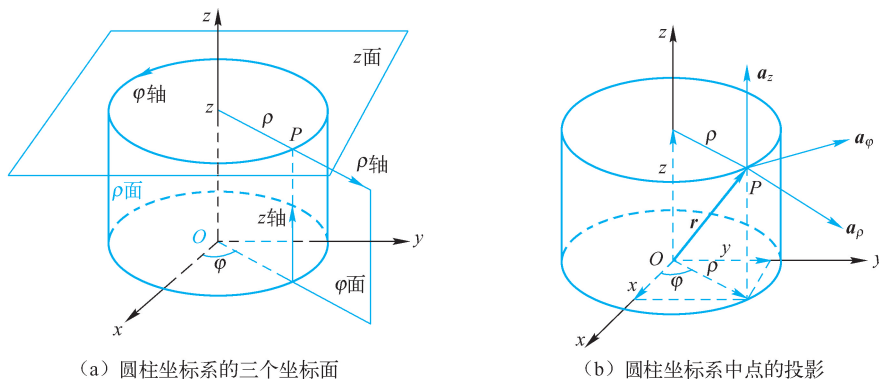


图 1-3-3 圆柱坐标系

从图 1-3-3(b) 中可以得出圆柱坐标和直角坐标变量之间的关系:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi \quad (1-3-16)$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x} \quad (1-3-17)$$

位置矢量 $\mathbf{r}$ 可表示为

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}_\rho \rho + \mathbf{a}_z z \quad (1-3-18)$$

三个单位矢量 $\mathbf{a}_\rho, \mathbf{a}_\varphi$ 和 $\mathbf{a}_z$ 之间呈右手螺旋关系, 因此其叉积为

$$\mathbf{a}_\rho \times \mathbf{a}_\varphi = \mathbf{a}_\varphi \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_\rho = \mathbf{0} \quad (1-3-19)$$

$$\mathbf{a}_\rho \times \mathbf{a}_\varphi = \mathbf{a}_z, \quad \mathbf{a}_\varphi \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_\rho, \quad \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_\rho = \mathbf{a}_\varphi \quad (1-3-20)$$

2. 单位矢量的坐标变换

将空间任意一点投影到 xOy 平面上, 单位矢量 $\mathbf{a}_\rho, \mathbf{a}_\varphi$ 沿 x 和 y 轴分解及 $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y$ 沿 ρ 和 φ 轴分解示意图如图 1-3-4 所示, 即有

$$\begin{cases} \mathbf{a}_\rho = \mathbf{a}_x \cos\varphi + \mathbf{a}_y \sin\varphi \\ \mathbf{a}_\varphi = -\mathbf{a}_x \sin\varphi + \mathbf{a}_y \cos\varphi \end{cases} \quad (1-3-21)$$

和

$$\begin{cases} \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_\rho \cos\varphi - \mathbf{a}_\varphi \sin\varphi \\ \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_\rho \sin\varphi + \mathbf{a}_\varphi \cos\varphi \end{cases} \quad (1-3-22)$$

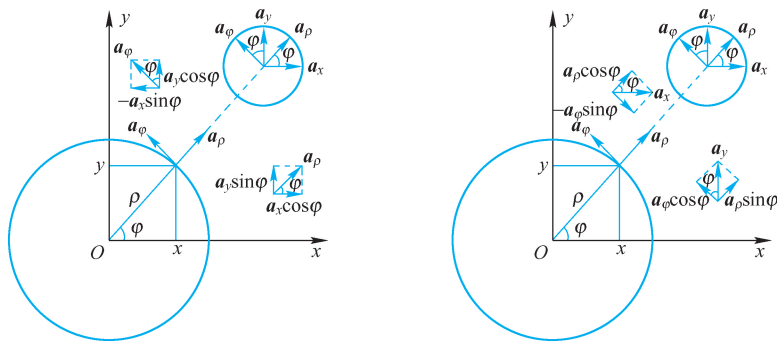


图 1-3-4 单位矢量的分解示意图

单位矢量 $\mathbf{a}_\rho$ 和 $\mathbf{a}_\varphi$ 是坐标 φ 的函数,因此再次证明 $\mathbf{a}_\rho$ 和 $\mathbf{a}_\varphi$ 不是常矢量,且其导数为

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{a}_\rho}{d\varphi} = -\mathbf{a}_x \sin\varphi + \mathbf{a}_y \cos\varphi = \mathbf{a}_\varphi \\ \frac{d\mathbf{a}_\varphi}{d\varphi} = -\mathbf{a}_x \cos\varphi - \mathbf{a}_y \sin\varphi = -\mathbf{a}_\rho \end{cases} \quad (1-3-23)$$

3. 微分元

圆柱坐标系中,两个顶点 P 、 Q 之间的距离矢量 $d\mathbf{l}$ 在 ρ 、 φ 、 z 轴上的投影也即所构成微分六面体的边长,分别是 $d\rho$ 、 $\rho d\varphi$ 和 dz ,如图 1-3-5(a) 所示,与直角坐标不同, φ 向边长为弧线。因此, $d\rho$ 、 $\rho d\varphi$ 和 dz 分别表示从 P 点移动到 Q 点时, ρ 、 φ 、 z 三个坐标变量的微分对应的长度变化。因此矢量线元可写为

$$d\mathbf{l} = \mathbf{a}_\rho d\rho + \mathbf{a}_\varphi \rho d\varphi + \mathbf{a}_z dz \quad (1-3-24)$$

任意两个方向的线元相乘可以得到三个坐标方向的标量面元,如图 1-3-5(b) 所示。即有

$$dS_\rho = \rho d\varphi dz, \quad dS_\varphi = d\rho dz, \quad dS_z = \rho d\rho d\varphi \quad (1-3-25)$$

任意的矢量面元 $d\mathbf{S}$ 可写为

$$d\mathbf{S} = \mathbf{a}_\rho dS_\rho + \mathbf{a}_\varphi dS_\varphi + \mathbf{a}_z dS_z \quad (1-3-26)$$

任意的矢量面元 $d\mathbf{S}$ 在圆柱坐标系中三个坐标面的投影即是三个标量面元。

全部三个方向的线元相乘可以得到体积元,如图 1-3-5(a) 所示,即

$$d\tau = \rho d\rho d\varphi dz \quad (1-3-27)$$

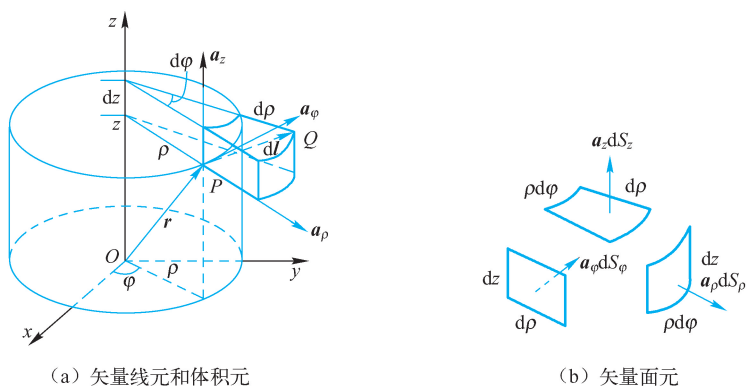


图 1-3-5 圆柱坐标系中的微分元

1.3.3 球坐标系

1. 基本定义与运算

球坐标系由一个球面、一个锥面和一个半无限大的平面构成。某点 P 的坐标可表示为 $P(r, \theta, \varphi)$ 。三个坐标变量为 r 、 θ 和 φ ，其中变量 r 是坐标原点到 P 点的距离， $r \in [0, +\infty)$ ， r 坐标面是半径 r 为常数的球面；变量 θ 是 P 点的位置矢量 $\mathbf{r}$ 与 $+z$ 轴之间的夹角，规定 P 点与 $+z$ 轴重合时 θ 为零， P 点向 $-z$ 轴旋转时 θ 角增大， $\theta \in [0, \pi]$ ， θ 坐标面是 θ 角为常数所形成的以 z 轴为轴线的圆锥面。 r 、 θ 和 φ 对应一组单位矢量： $\mathbf{a}_r$ 、 $\mathbf{a}_\theta$ 和 $\mathbf{a}_\varphi$ ， $\mathbf{a}_r$ 指向 r 增加的方向， $\mathbf{a}_\theta$ 指向 φ 坐标面（半平面）与 r 坐标面（球面）相交出的半圆的切线方向，如图 1-3-6 所示。 $\mathbf{a}_r$ 和 $\mathbf{a}_\theta$ 是坐标 θ 和 φ 的函数， $\mathbf{a}_\varphi$ 是坐标 φ 的函数， $\mathbf{a}_r$ 、 $\mathbf{a}_\theta$ 和 $\mathbf{a}_\varphi$ 均不是常矢量。

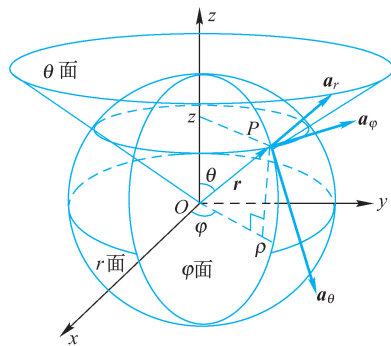


图 1-3-6 球坐标系

从图 1-3-6 中可得出球坐标与直角坐标的关系：

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta \quad (1-3-28)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan(\sqrt{x^2 + y^2}/z), \quad \varphi = \arctan(y/x)$$

位置矢量在球坐标系中的表达式为

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}_r r \quad (1-3-29)$$

三个单位矢量 $\mathbf{a}_r$ 、 $\mathbf{a}_\theta$ 和 $\mathbf{a}_\varphi$ 之间呈右手螺旋关系，因此其叉积为

$$\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_\theta \times \mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_\varphi \times \mathbf{a}_\varphi = \mathbf{0} \quad (1-3-30)$$

$$\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_\varphi, \quad \mathbf{a}_\theta \times \mathbf{a}_\varphi = \mathbf{a}_r, \quad \mathbf{a}_\varphi \times \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_\theta \quad (1-3-31)$$

2. 单位矢量的坐标变换

将空间任意一点处的单位矢量 $\mathbf{a}_r$ 、 $\mathbf{a}_\theta$ 和 $\mathbf{a}_\varphi$ 沿 x 、 y 和 z 轴分解,如图 1-3-7 所示($\mathbf{a}_\varphi$ 的分解同圆柱坐标),可得

$$\begin{cases} \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_\rho \sin\theta + \mathbf{a}_z \cos\theta = \mathbf{a}_x \sin\theta \cos\varphi + \mathbf{a}_y \sin\theta \sin\varphi + \mathbf{a}_z \cos\theta \\ \mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_\rho \cos\theta - \mathbf{a}_z \sin\theta = \mathbf{a}_x \cos\theta \cos\varphi + \mathbf{a}_y \cos\theta \sin\varphi - \mathbf{a}_z \sin\theta \\ \mathbf{a}_\varphi = -\mathbf{a}_x \sin\varphi + \mathbf{a}_y \cos\varphi \end{cases} \quad (1-3-32)$$

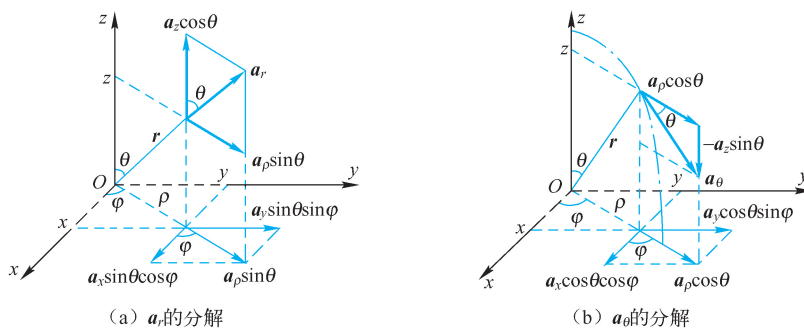


图 1-3-7 单位矢量的分解示意图

单位矢量 $\mathbf{a}_r$ 和 $\mathbf{a}_\theta$ 是坐标 θ 和 φ 的函数, $\mathbf{a}_\varphi$ 是坐标 φ 的函数,再次证明 $\mathbf{a}_r$ 、 $\mathbf{a}_\theta$ 和 $\mathbf{a}_\varphi$ 均不是常矢量。

3. 微分元

球坐标系中,两个顶点 P 、 Q 之间的距离矢量 $d\mathbf{l}$ 在 r 、 θ 、 φ 轴上的投影也即所构成微分六面体的边长,分别是 dr 、 $r d\theta$ 和 $r \sin\theta d\varphi$,如图 1-3-8(a) 所示,与直角坐标不同, θ 、 φ 向边长均为弧线。因此, dr 、 $r d\theta$ 和 $r \sin\theta d\varphi$ 分别表示从 P 点移动到 Q 点时, r 、 θ 和 φ 三个坐标变量的微分对应的长度变化。因此矢量线元可写为

$$d\mathbf{l} = \mathbf{a}_r dr + \mathbf{a}_\theta r d\theta + \mathbf{a}_\varphi r \sin\theta d\varphi \quad (1-3-33)$$

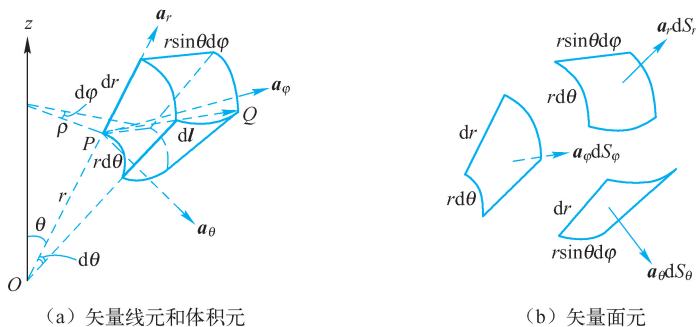


图 1-3-8 球坐标系中的微分元

任意两个方向的线元相乘可以得到三个坐标方向的标量面元,如图1-3-8(b)所示。即有

$$dS_r = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi, \quad dS_\theta = r \sin\theta dr d\varphi, \quad dS_\varphi = r dr d\theta \quad (1-3-34)$$

任意的矢量面元 $d\mathbf{S}$ 可写为

$$d\mathbf{S} = \mathbf{a}_r dS_r + \mathbf{a}_\theta dS_\theta + \mathbf{a}_\varphi dS_\varphi \quad (1-3-35)$$

任意的矢量面元 $d\mathbf{S}$ 在球坐标系中三个坐标面的投影即是三个标量面元。

全部三个方向的线元相乘可以得到体积元,如图1-3-8(a)所示,则

$$d\tau = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \quad (1-3-36)$$

为了能对各种正交坐标系进行微分运算,引入一个度量系数 $h_i (i=1,2,3)$, h_i 与正交坐标系的三个坐标变量 u_i 对应,表示长度元 dl_i 与对应的坐标变量微分元 du_i 之间的比值,即

$$h_i = \frac{dl_i}{du_i} \quad (i=1,2,3) \quad (1-3-37)$$

则对任一个正交坐标系,利用度量系数,即可写出

$$d\mathbf{l} = \mathbf{a}_1 h_1 du_1 + \mathbf{a}_2 h_2 du_2 + \mathbf{a}_3 h_3 du_3 \quad (1-3-38)$$

$$dS_1 = \mathbf{a}_1 h_2 h_3 du_2 du_3 \quad dS_2 = \mathbf{a}_2 h_1 h_3 du_1 du_3 \quad dS_3 = \mathbf{a}_3 h_1 h_2 du_1 du_2 \quad (1-3-39)$$

$$d\tau = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3 \quad (1-3-40)$$

其中,直角坐标系:

$$h_1 = h_2 = h_3 = 1 \quad (1-3-41)$$

圆柱坐标系:

$$h_1 = 1, \quad h_2 = \rho, \quad h_3 = 1 \quad (1-3-42)$$

球坐标系:

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r \sin\theta \quad (1-3-43)$$

1.4 标量场的方向导数和梯度

标量场可用等值线或等值面来表示场的分布,但这种分布仅表示标量场的总体分布,如果了解标量场的局部特性,就需要引入方向导数的概念。

1.4.1 方向导数

标量场中各点标量的大小可能不同,因此某点标量沿着各个方向的变化率也有可能不同,标量场自该点沿某一方向的变化率称为该点的方向导数。

设 P 为标量场 $\Phi(P)$ 中的一点,如图1-4-1所示,标量场 Φ 在 P 点沿 $\mathbf{l}$ 方向的方向导数定义为

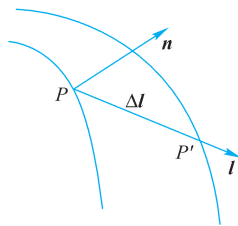


图1-4-1 方向导数

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial l} \right|_P = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Phi(P') - \Phi(P)}{\Delta l} \quad (1-4-1)$$

其中, Δl 为 P 点与 P' 点之间的距离。

在直角坐标系中, 标量场 Φ 在 P 点沿任意方向 l 的方向导数可写为

$$\frac{\partial \Phi}{\partial l} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial l} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial l} \quad (1-4-2)$$

而矢量 l 的单位矢量 a_l 为

$$a_l = a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma$$

则式(1-4-2)可写为

$$\frac{\partial \Phi}{\partial l} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cos \gamma \quad (1-4-3)$$

1.4.2 标量场的梯度

方向导数给出了标量场在给定点沿某一方向的变化率, 然而从场中给定点出发, 可以有无穷多个方向。从图 1-4-1 可以看出, 沿等值面的法线方向 n , 标量场的变化率最大, 即方向导数有最大值。方向导数的最大值及取最大值的方向组成的矢量称为标量场的梯度 (gradient)。下面推导梯度的计算公式。

利用两个矢量的点积公式, 可将式(1-4-3)改写为

$$\frac{\partial \Phi}{\partial l} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \cdot (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \quad (1-4-4)$$

令

$$\begin{aligned} \text{grad} \Phi &= a_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + a_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + a_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial l} &= \left(a_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + a_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + a_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \cdot a_l \end{aligned} \quad (1-4-5)$$

则有

$$\frac{\partial \Phi}{\partial l} = \text{grad} \Phi \cdot a_l \quad (1-4-6)$$

其中, $\text{grad} \Phi$ 称为标量场 Φ 的梯度, 且标量场 Φ 的梯度是一个矢量场。由式(1-4-6)可见, 当 a_l 的方向与梯度方向一致时, 方向导数 $\frac{\partial \Phi}{\partial l}$ 取得最大值。因此, 标量场在某点梯度的大小等于该点的最大方向导数, 梯度的方向为该点具有最大方向导数的方向, 即垂直于过该点的等值面, 且指向等值面增加的方向。

为了方便, 引入一个矢量微分算子:

$$\nabla = a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1-4-7)$$

也称为那勃勒算子,读作 nabla。矢量微分算子 ∇ 本身并没有什么意义,只是一个运算符号,同时它又是一个矢量算子。根据式(1-4-5),标量场的梯度可表示为矢量微分算子 ∇ 与标量 Φ 的乘积,即有

$$\text{grad}\Phi = \nabla\Phi = \mathbf{a}_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (1-4-8)$$

方向导数也可写为

$$\frac{\partial \Phi}{\partial l} = \text{grad}\Phi \cdot \mathbf{a}_l = \nabla\Phi \cdot \mathbf{a}_l \quad (1-4-9)$$

同理,在圆柱坐标系中:

$$\nabla\Phi = \mathbf{a}_\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \mathbf{a}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \mathbf{a}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (1-4-10)$$

在球坐标系中:

$$\nabla\Phi = \mathbf{a}_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \mathbf{a}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \mathbf{a}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \quad (1-4-11)$$

由以上推导,可归纳出下列标量场梯度的性质:

- (1) 一个标量场的梯度是一个矢量场;
- (2) 标量场的梯度垂直于该标量场的等值面;
- (3) 梯度的方向与取得最大方向导数的方向一致,且由数值较低的等值面指向数值较高的等值面;
- (4) 梯度的模值是方向导数的最大值;
- (5) 标量场在任意点沿某一方向的方向导数是其梯度在该方向上的投影。

【例 1-4-1】 求函数 $f=12x^2+yz^2$ 在点 $P(-1,0,1)$ 向点 $Q(1,1,1)$ 方向的变化率。

【解】 点 P 、 Q 间的距离矢量为

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P = \mathbf{a}_x(1+1) + \mathbf{a}_y(1-0) + \mathbf{a}_z(1-1) \\ &= \mathbf{a}_x 2 + \mathbf{a}_y \end{aligned}$$

其单位矢量:

$$\mathbf{a}_R = \frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{\mathbf{a}_x 2 + \mathbf{a}_y}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \mathbf{a}_x \frac{2}{\sqrt{5}} + \mathbf{a}_y \frac{1}{\sqrt{5}}$$

依据式(1-4-6), f 在点 P 向点 Q 方向的变化率为

$$\begin{aligned} \left. \frac{df}{dR} \right|_P &= \left(\mathbf{a}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial f}{\partial z} \right) \Big|_P \cdot \mathbf{a}_R \\ &= (\mathbf{a}_x 24x + \mathbf{a}_y z^2 + \mathbf{a}_z 2yz) \Big|_{(-1,0,1)} \cdot \left(\mathbf{a}_x \frac{2}{\sqrt{5}} + \mathbf{a}_y \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = -\frac{47\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

【例 1-4-2】 计算场 $f(r) = x^2 y^2 z$ 沿 $\mathbf{A} = \mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$ 方向的方向导数,以及在点 $(2,1,0)$ 处,沿 $\mathbf{B} = 2\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$ 方向的方向导数。

【解】

$$\nabla f = \mathbf{a}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\mathbf{a}_A = \frac{\mathbf{A}}{A} = \mathbf{a}_x \frac{1}{3} + \mathbf{a}_y \frac{2}{3} + \mathbf{a}_z \frac{2}{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial A} = \nabla f \cdot \mathbf{a}_A = \frac{1}{3}y^2z + \frac{4}{3}xyz + \frac{2}{3}xy^2$$

$$\mathbf{a}_B = \frac{\mathbf{B}}{B} = \mathbf{a}_x \frac{2}{3} - \mathbf{a}_y \frac{1}{3} + \mathbf{a}_z \frac{2}{3}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial B} \right|_{(2,1,0)} = \nabla f \cdot \mathbf{a}_B \Big|_{(2,1,0)} = \frac{2}{3}y^2z - \frac{2}{3}xyz + \frac{2}{3}xy^2 \Big|_{(2,1,0)} = \frac{4}{3}$$

【例 1-4-3】 计算 $\nabla\left(\frac{1}{R}\right)$ 及 $\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)$ 。其中 R 为空间 $P(x, y, z)$ 点与 $P'(x', y', z')$ 点之间的距离,如图 1-4-2 所示。 ∇ 表示对 (x, y, z) 运算, ∇' 表示对 (x', y', z') 运算。

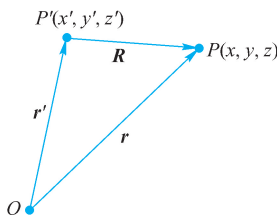


图 1-4-2 源点与场点

【解】 令 P 点的位置矢量为 $\mathbf{r}$, P' 点的位置矢量为 $\mathbf{r}'$, 则

$$\mathbf{r} = x \mathbf{a}_x + y \mathbf{a}_y + z \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{r}' = x' \mathbf{a}_x + y' \mathbf{a}_y + z' \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = (x - x') \mathbf{a}_x + (y - y') \mathbf{a}_y + (z - z') \mathbf{a}_z$$

$$|\mathbf{R}| = R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

$$\nabla f = \mathbf{a}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\nabla' f = \mathbf{a}_x \frac{\partial f}{\partial x'} + \mathbf{a}_y \frac{\partial f}{\partial y'} + \mathbf{a}_z \frac{\partial f}{\partial z'}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{x - x'}{R^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial R}{\partial y} = -\frac{y - y'}{R^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial R}{\partial z} = -\frac{z - z'}{R^3}$$

所以

$$\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{1}{R^3} [\mathbf{a}_x (x - x') + \mathbf{a}_y (y - y') + \mathbf{a}_z (z - z')]]$$

即

$$\nabla\left(\frac{1}{R}\right)=-\frac{\mathbf{R}}{R^3} \quad (1-4-12)$$

同理

$$\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)=\frac{\mathbf{R}}{R^3} \quad (1-4-13)$$

由此可见

$$\nabla\left(\frac{1}{R}\right)=-\nabla'\left(\frac{1}{R}\right) \quad (1-4-14)$$

上述结果在电磁场计算中经常用到,通常以 (x',y',z') 表示产生电磁场的源坐标, P' 点称为源点;以 (x,y,z) 表示空间电磁场的场坐标, P 点称为场点。在正交坐标系下,源点也可用位置矢量 $\mathbf{r}'$ 表示为 $P'(\mathbf{r}')$,场点用位置矢量 $\mathbf{r}$ 表示为 $P(\mathbf{r})$ 。

可以证明,梯度运算符合下列规则:

$$\nabla c=0 \quad (c \text{ 为常数}) \quad (1-4-15)$$

$$\nabla(c\phi)=c \nabla\phi \quad (1-4-16)$$

$$\nabla(\phi\pm\psi)=\nabla\phi\pm\nabla\psi \quad (1-4-17)$$

$$\nabla(\phi\psi)=\psi \nabla\phi+\phi \nabla\psi \quad (1-4-18)$$

$$\nabla\left(\frac{\phi}{\psi}\right)=\frac{1}{\psi^2}(\psi \nabla\phi-\phi \nabla\psi) \quad (1-4-19)$$

$$\nabla F(\phi)=F'(\phi)\nabla\phi \quad (1-4-20)$$

标量场的梯度是一个矢量场,该矢量场的量纲等于原标量场的量纲除以长度的量纲。

1.5 矢量场的通量和散度

1.5.1 通量和通量源

在1.3节,面元矢量定义为面元的面积与其法线方向的单位矢量的乘积。一个闭合线可以构成开表面,而一张闭合面则可以构成一个空间区域,如图1-5-1所示。对开表面的曲面方向,规定与其边界(必是一闭合曲线)的环绕方向呈右手螺旋关系的一侧的法线方向为矢量

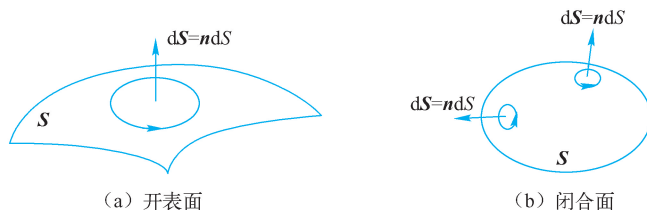


图 1-5-1 曲面的方向

面元的方向;对于闭合面的曲面方向,取其外法线方向为矢量面元的方向。

矢量场 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 沿某一有向曲面 S 的面积分称为矢量 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 通过该有向曲面 S 的通量,即

$$\int_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S A(\mathbf{r}) \cos\theta dS \quad (1-5-1)$$

若矢量场 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 是水的流速场 $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ (m/s),则该积分的物理意义表示水流 $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ 在单位时间内穿过曲面 $S(\text{m}^2)$ 的流量(m^3/s)。当通量大于零时,表示矢量场的方向与面积方向总体一致;当通量小于零时,表示矢量场的方向与面积方向总体相反,如图 1-5-2 所示。

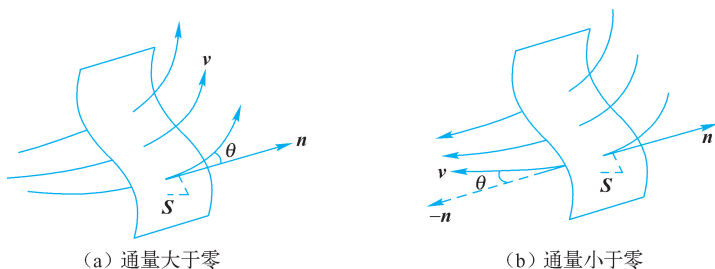


图 1-5-2 开表面的通量

若有向曲面 S 是闭合的,则矢量场 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 对闭合面 S 的通量可写为

$$\oint_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_S A(\mathbf{r}) \cos\theta dS \quad (1-5-2)$$

根据矢量通过该闭合面的通量可以判断该矢量是进入还是穿出该闭合面。当 $\oint_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} > 0$ 时,表示穿出闭合面的矢量线数量比穿入闭合面的矢量线数量多,因而闭合面内一定存在产生该矢量场的源,即正源;当 $\oint_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} < 0$ 时,表示穿入闭合面的矢量线数量比穿出闭合面的矢量线数量多,因而闭合面内一定存在汇聚该矢量场的洞或汇,即负源;当 $\oint_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0$ 时,表示穿入闭合面和穿出闭合面的矢量线数量相等,闭合面内或者没有矢量线的起始点,或者在闭合面内起始的矢量线根数相等,称无源,如图 1-5-3 所示。综上所述,式(1-5-2)表示矢量场 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 穿出闭合面 S 的净通量。

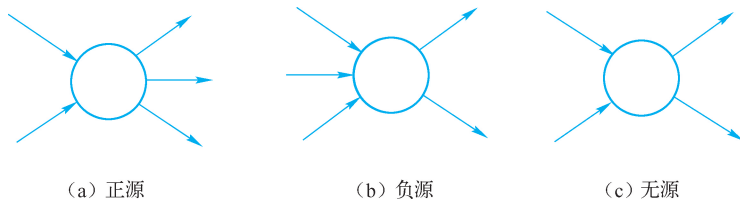


图 1-5-3 闭合面的通量

【例 1-5-1】 已知矢量场 $\mathbf{A} = \mathbf{a}_\rho (e^{-\alpha\rho}/\rho) + \mathbf{a}_z \cos \pi z$, α 为常数。有一个以 z 轴为轴线、半径为 2 的单位长度的圆柱面与 $z=0$ 、 $z=1$ 的平面构成的闭合面 S , 求 $\mathbf{A}$ 穿过 S 的通量。

【解】 此闭合面由三部分光滑曲面构成, 如图 1-5-4 所示。其中, 圆柱侧面的面元矢量 $d\mathbf{S}_\rho = \mathbf{a}_\rho \rho d\varphi dz$, 上底面 ($z=1$) 的面元矢量 $d\mathbf{S}_z = \mathbf{a}_z \rho d\varphi d\rho$, 下底面 ($z=0$) 的面元矢量 $d\mathbf{S}_z = -\mathbf{a}_z \rho d\varphi d\rho$, 则

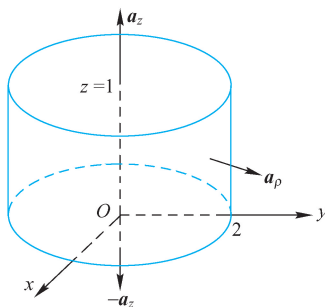


图 1-5-4 例 1-5-1 图

$$\begin{aligned}\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= \int_{S_\rho} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}_\rho + \int_{S_{z=1}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}_z + \int_{S_{z=0}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}_z \\ &= \int_{S_\rho} \frac{e^{-\alpha\rho}}{\rho} \rho d\varphi dz + \int_{S_{z=1}} \cos(\pi z) \rho d\varphi d\rho - \int_{S_{z=0}} \cos(\pi z) \rho d\varphi d\rho \\ &= \int_0^{2\pi} e^{-2\alpha} d\varphi \int_0^1 dz + \int_0^{2\pi} \cos \pi d\varphi \int_0^2 \rho d\rho - \int_0^{2\pi} \cos 0 d\varphi \int_0^2 \rho d\rho \\ &= 2\pi e^{-2\alpha} - 4\pi - 4\pi = 2\pi(e^{-2\alpha} - 4)\end{aligned}$$

【例 1-5-2】 计算面积分 $\int_S \frac{\mathbf{a}_r}{r^2} \cdot d\mathbf{S}$, 其中 S 是半锥角为 θ 的圆锥面在半径为 a 的球面上割出的球冠面积, 如图 1-5-5 所示。

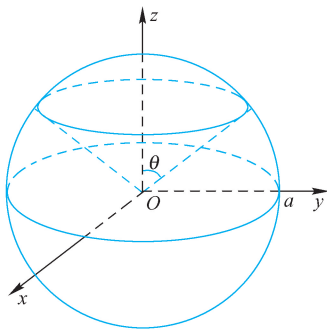


图 1-5-5 例 1-5-2 图

$$\begin{aligned}\text{【解】} \quad \int_S \frac{\mathbf{a}_r}{r^2} \cdot d\mathbf{S} &= \int_S \frac{1}{r^2} dS_r = \int_0^{2\pi} \int_0^\theta \frac{1}{a^2} a^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 2\pi \int_0^\theta \sin \theta d\theta \\ &= 2\pi(1 - \cos \theta)\end{aligned}$$

特别地, 当 $\theta = \pi$ 时, $\cos \theta = -1$ 。

$$\oint_S \frac{\mathbf{a}_r}{r^2} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi \quad (1-5-3)$$

该结论可推广到任意闭合面。

1.5.2 矢量场的散度

由上述讨论可知,根据矢量通过某一闭合面的通量性质可以判定闭合面中源的正负特性,以及源是否存在。但是,通量仅能表示闭合面中源的总量,它却不能反映源的分布特性。如果使包围某点的闭合面向该点无限收缩,那么,穿过此无限小闭合面的通量即可表示该点附近源的特性。因此,定义当闭合面 S 向某点无限收缩时,矢量 $\mathbf{A}$ 通过该闭合面 S 的通量与该闭合面包围的体积之比的极限称为矢量场 $\mathbf{A}$ 在该点的散度(divergence),以 $\text{div } \mathbf{A}$ 表示,即有

$$\text{div } \mathbf{A} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}}{\Delta\tau} \quad (1-5-4)$$

式中, $\Delta\tau$ 为闭合面 S 包围的体积。式(1-5-4)表明,散度是一个标量,其大小可理解为通过包围单位体积闭合面的通量。

为推导出矢量场的散度在直角坐标系中的表示式,在矢量场中取一个小的长方六面体,六面体的其中一个顶点为 P ,且六个表面分别与坐标面平行,六面体的边长分别为 Δx 、 Δy 和 Δz ,如图 1-5-6 所示。

设矢量场 $\mathbf{A}$ 在顶点 P 的分量为 (A_x, A_y, A_z) ,如图 1-5-7 所示。

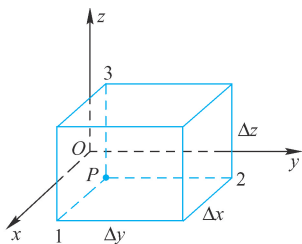


图 1-5-6 矢量场的散度

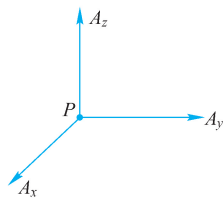


图 1-5-7 P 的坐标分量

图 1-5-6 所示的六面体左右两个面的外法线方向分别为 $-\mathbf{a}_y$ 和 $\mathbf{a}_y$,如果六面体很小,可认为矢量场 $\mathbf{A}$ 穿出左、右面的通量为

$$-A_y \Delta x \Delta z + \left(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x \Delta z = \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

同理可得,矢量场 $\mathbf{A}$ 穿出上、下面的通量为

$$-A_z \Delta x \Delta y + \left(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta z \right) \Delta x \Delta y = \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

矢量场 $\mathbf{A}$ 穿出前、后面的通量为

$$-A_x \Delta y \Delta z + \left(A_x + \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z = \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

由此可以求得矢量场 $\mathbf{A}$ 通过过 P 点的六面体表面的总通量为

$$\oint_s \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right)_p \Delta x \Delta y \Delta z \quad (1-5-5)$$

式中, $\Delta x \Delta y \Delta z = \Delta \tau$ 为六面体的体积, 代入式(1-5-5), 可以得到矢量场 $\mathbf{A}$ 在 M 点的散度:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{\oint_s \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta \tau} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1-5-6)$$

根据矢量微分算子的定义, 矢量场 $\mathbf{A}$ 的散度可以表示为

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (1-5-7)$$

因此, 在直角坐标系中、圆柱坐标系和球坐标系中, 散度的计算式可分别简写为

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1-5-8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1-5-9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \quad (1-5-10)$$

从散度的定义式(1-5-4)及以上推导, 可以归纳出散度具有以下特性。

(1) 矢量场的散度构成一个标量场。

(2) $\nabla \cdot \mathbf{A} \neq 0$ 的点表示存在通量源, 也称散度源, 该矢量场称有源场或有散场; $\nabla \cdot \mathbf{A} > 0$ 的点是源点, 能发出矢量线, 是矢量线的起点, (如图 1-5-8 中的 P 点); $\nabla \cdot \mathbf{A} < 0$ 的点是汇点, 能吸收矢量线, 是矢量线的终点, (如图 1-5-8 中的 Q 点)。

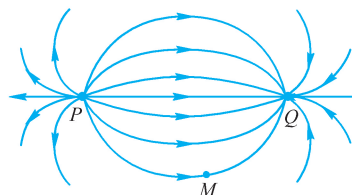


图 1-5-8 散度的物理意义

(3) $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 的点不存在通量源, 矢量线从该点穿过 (如图 1-5-8 中的 M 点), 散度处处为零的矢量场称无源场或无散场。

(4) 散度的量纲是通量源体密度, 表示某点矢量场穿出单位体积外包面的净通量。

可以证明, 散度运算符合下列规则:

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} \pm \nabla \cdot \mathbf{B} \quad (1-5-11)$$

$$\nabla \cdot (c\mathbf{A}) = c \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (c \text{ 为常数}) \quad (1-5-12)$$

$$\nabla \cdot (\Phi \mathbf{A}) = \Phi \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla \Phi \quad (1-5-13)$$

在直角坐标系中, 根据梯度表达式(1-4-8)及散度表达式(1-5-8)可知

$$\nabla \cdot \nabla \Phi = \nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \quad (1-5-14)$$

式中, ∇^2 称为拉普拉斯算子 (Laplacian), 它在直角坐标系中的表示式为

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1-5-15)$$

∇^2 也可以对矢量进行运算,但与对标量进行运算有所不同,已失去原有的梯度的散度的概念,仅是一种符号,如在直角坐标系中,有

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{a}_x \nabla^2 A_x + \mathbf{a}_y \nabla^2 A_y + \mathbf{a}_z \nabla^2 A_z \quad (1-5-16)$$

上式中等号右边 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 。由此可见,在直角坐标系中 ∇^2 对矢量 $\mathbf{A}$ 的运算相当于对 $\mathbf{A}$ 的各个坐标分量进行运算。

$\nabla^2 \mathbf{A}$ 在其他坐标系中都具有极其复杂的形式,一般由下面矢量恒等式计算:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \quad (1-5-17)$$

1.5.3 散度定理

散度的定义式(1-5-4)给出了空间某点附近的通量和通量源密度之间的关系,若在空间有一闭合曲面 S ,它所包围的空间体积为 τ ,矢量场 $\mathbf{A}$ 在 S 和 τ 上都是连续可导的,则有

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_\tau \nabla \cdot \mathbf{A} d\tau \quad (1-5-18)$$

式(1-5-18)称为散度定理,又称高斯定理。

【证明】 将体积 τ 分割成 n 个微分体积元 $\Delta\tau_i$,如图 1-5-9 所示,设其表面 S_i 所包围的微分体积元内点 P_i 处矢量场的散度为

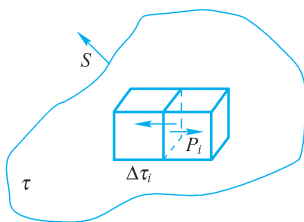


图 1-5-9 散度定理证明示意图

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_i = \lim_{\Delta\tau_i \rightarrow 0} \frac{\oint_{S_i} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}}{\Delta\tau_i} \quad (1-5-19)$$

由极限的定义,式(1-5-19)可重写为

$$\oint_{S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \nabla \cdot \mathbf{A}_i \Delta\tau_i + \varepsilon_i \Delta\tau_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-5-20)$$

式中, ε_i 为无限小值。将 n 个这样的式子相加,得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \oint_{S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \nabla \cdot \mathbf{A}_i \Delta\tau_i + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \Delta\tau_i \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \nabla \cdot \mathbf{A}_i \Delta\tau_i \end{aligned} \quad (1-5-21)$$

式(1-5-21)等号左边的微小闭合面积分除呈现在外表面的部分外,每相邻的两个体积元必有一个公共面元,在计算净通量时相互抵消,故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \oint_{S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (1-5-22)$$

按照积分的定义,当 $n \rightarrow \infty$ 时,有下式成立

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \nabla \cdot \mathbf{A}_i \Delta \tau_i = \int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{A} d\tau \quad (1-5-23)$$

故

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{A} d\tau$$

散度定理建立了矢量场散度的体积分与体积所包围的闭合面积分之间的互换,表明一个连续可微的矢量场对任意一个闭合面的净通量与矢量场在曲面内的通量源之间的关系。

【例 1-5-3】如图 1-5-10 所示,求矢量场 $\mathbf{A} = \mathbf{a}_z(x+y+z)$ 穿出旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 与 $z = h$ 平面所包围面的通量。

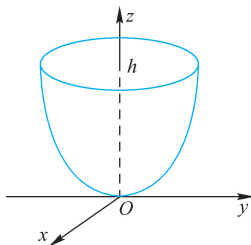


图 1-5-10 例 1-5-3 图

【解】 通量可利用散度定理通过计算散度的体积分来求得。

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_z}{\partial z} = 1$$

计算体积分时,可采用圆柱坐标。在圆柱坐标中,抛物面 $z = x^2 + y^2 = \rho^2$, 因此

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= \int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{A} d\tau = \int_{\tau} d\tau = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z}} \rho d\rho d\varphi dz \\ &= 2\pi \int_0^h \left. \frac{\rho^2}{2} \right|_0^{\sqrt{z}} dz = \pi \int_0^h z dz = \frac{1}{2} \pi h^2 \end{aligned}$$

1.6 矢量场的环量和旋度

1.6.1 环量和涡旋源

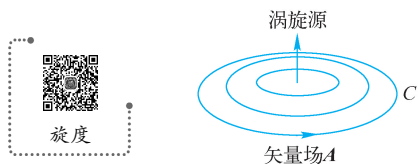
矢量场 $\mathbf{A}$ 沿一条有向闭合曲线 C 的积分称为矢量场 $\mathbf{A}$ 沿该有向闭合曲线 C 的环量,以 Γ

表示,即

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C A \cos\theta dl \quad (1-6-1)$$

由式(1-6-1)可见,在闭合曲线 C 上,如果矢量场 $\mathbf{A}$ 的方向处处与线元 $d\mathbf{l}$ 的方向保持一致,则环量 $\Gamma > 0$;如果方向处处相反,则环量 $\Gamma < 0$ 。因此,环量可以用来描述矢量场的涡旋特性:

$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0$ 表明环路 C 不包围涡旋源; $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \neq 0$ 表明环路 C 包围着涡旋源,如图 1-6-1 所示。



当环路 C 所围成的面与涡旋面一致时,环量将达到最大值,而当环路 C 所围成的面与涡旋面垂直时,环量等于零。

在直角坐标、圆柱坐标和球坐标中,式(1-6-1)可分

别写为

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \quad (1-6-2)$$

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C (A_\rho d\rho + A_\varphi \rho d\varphi + A_z dz) \quad (1-6-3)$$

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C (A_r dr + A_\theta r d\theta + A_\varphi r \sin\theta d\varphi) \quad (1-6-4)$$

1.6.2 矢量场的旋度

环量可以表示产生具有旋涡特性的源强度,但它仅代表闭合曲线包围的总的源强度,不能显示源的分布特性。为了反映某一点处是否存在涡旋源,在矢量场 $\mathbf{A}$ 中任取一点 P ,围绕 P 做闭合的有向曲线 C_1, C_2, C_3 ,如图 1-6-2 所示,有向曲线 C_n 包围的面积 ΔS_n 的法线方向为 $\mathbf{a}_n$ ($n=1, 2, 3$), $\mathbf{a}_n$ 与闭合有向曲线 C_n 构成右手螺旋关系,当 ΔS_n 向 P 点趋近,即 $\Delta S_n \rightarrow 0$,则极限

$$\lim_{\Delta S_n \rightarrow 0} \frac{\oint_{C_n} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S_n} \quad (1-6-5)$$

被称为矢量场 $\mathbf{A}$ 在 $\mathbf{a}_n$ 方向的环量面密度。

经过同一点 P ,矢量场 $\mathbf{A}$ 对于不同方向的环量面密度不同。对于图 1-6-2 所示,有下式存在

$$\lim_{\Delta S_3 \rightarrow 0(P)} \frac{\oint_{C_3} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S_3} < \lim_{\Delta S_2 \rightarrow 0(P)} \frac{\oint_{C_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S_2} < \lim_{\Delta S_1 \rightarrow 0(P)} \frac{\oint_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S_1} \quad (1-6-6)$$

从式(1-6-6)可知,环量面密度是一个与方向有关的量,空间给定点可以有无限个方向,每个方向都对应一个环量面密度,要描述空间一点涡旋源的大小与方向,需要定义一个旋度 (rotation) 矢量:矢量场 $\mathbf{A}$ 的旋度的方向是使矢量场 $\mathbf{A}$ 在 P 点处具有最大环量面密度的方向,

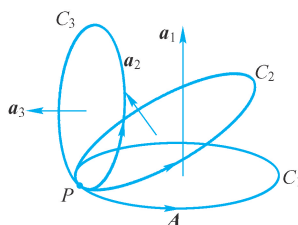


图 1-6-2 矢量场的环量

且大小等于最大环量面密度的值,以符号 $\text{rot } \mathbf{A}$ 表示,即:

$$\text{rot } \mathbf{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\left| \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right|_{\max}}{\Delta S} \quad (1-6-7)$$

式(1-6-7)表明,矢量场 $\mathbf{A}$ 的旋度是一个矢量,旋度矢量在数值和方向上表示了最大的环量面密度。

为了推导旋度在直角坐标系中的表示式,在直角坐标系中做一个闭合环路 1—2—3—4—5—6, M 点在该环路所张的一个面上,该面在直角坐标系中三个坐标面上的投影分别为 C_x — $M345M$ — ΔS_x 、 C_y — $M561M$ — ΔS_y 、 C_z — $M123M$ — ΔS_z ,如图 1-6-3 所示。

设矢量场 $\mathbf{A}$ 在顶点 M 的分量为 (A_x, A_y, A_z) ,如图 1-6-4 所示。

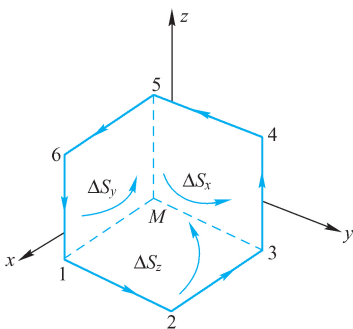


图 1-6-3 矢量场的旋度

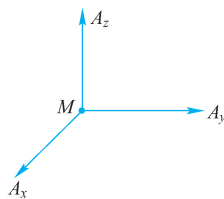


图 1-6-4 M 点的坐标分量

旋度矢量可以写为三个坐标分量,即:

$$\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{a}_x (\text{rot } \mathbf{A})_x + \mathbf{a}_y (\text{rot } \mathbf{A})_y + \mathbf{a}_z (\text{rot } \mathbf{A})_z \quad (1-6-8)$$

由图 1-6-3 可知

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{C_x} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} + \oint_{C_y} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} + \oint_{C_z} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-6-9)$$

由式(1-6-9)可见,只要分别求出 C_x 、 C_y 、 C_z 三段线积分,就可以求出旋度矢量。首先计算 $(\text{rot } \mathbf{A})_x$ 。由图 1-6-3、图 1-6-4 得

$$\begin{aligned} \oint_{C_x} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} &= \oint_{M345M} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \\ &= A_y \Delta y + \left(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial y} \Delta y \right) \Delta z - \left(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial z} \Delta z \right) \Delta y - A_z \Delta z \\ &= \frac{\partial A_z}{\partial y} \Delta y \Delta z - \frac{\partial A_y}{\partial z} \Delta y \Delta z = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \Delta S_x \end{aligned}$$

根据旋度的定义式(1-6-7),得

$$(\text{rot } \mathbf{A})_x = \lim_{\Delta S_x \rightarrow 0} \frac{\oint_{C_x} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S_x} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \quad (1-6-10)$$

同理,得

$$(\text{rot } \mathbf{A})_y = \lim_{\Delta S_y \rightarrow 0} \frac{\oint_{C_y} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S_y} = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \quad (1-6-11)$$

$$(\text{rot } \mathbf{A})_z = \lim_{\Delta S_z \rightarrow 0} \frac{\oint_{C_z} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S_z} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \quad (1-6-12)$$

因此,由式(1-6-8),则有

$$\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{a}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{a}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{a}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \quad (1-6-13)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\mathbf{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\mathbf{a}_x A_x + \mathbf{a}_y A_y + \mathbf{a}_z A_z) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (1-6-14)$$

根据矢量微分算子的定义,矢量场 $\mathbf{A}$ 的旋度可以表示为

$$\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1-6-15)$$

因此,在直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系中,旋度的计算式简写为

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (1-6-16)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_\rho & \rho \mathbf{a}_\varphi & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix} \quad (1-6-17)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_r & r \mathbf{a}_\theta & r \sin \theta \mathbf{a}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\varphi \end{vmatrix} \quad (1-6-18)$$

从旋度的定义式(1-6-7)及以上推导,可以归纳出旋度具有以下特性:

- (1) 矢量场的旋度是一个矢量场;
- (2) 旋度的量纲是环量面密度,表示涡旋面单位面积上的环量;
- (3) $\nabla \times \mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ 的点表示存在涡旋源,也称旋度源,该矢量场称有旋场;

(4) $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$ 的点不存在涡旋源;旋度处处为零的矢量场称无旋场或保守场。

可以证明旋度运算符合下列运算规则:

$$\nabla \times (\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} \pm \nabla \times \mathbf{B} \quad (1-6-19)$$

$$\nabla \times (c\mathbf{A}) = c \nabla \times \mathbf{A} \quad (c \text{ 为常数}) \quad (1-6-20)$$

$$\nabla \times (\Phi \mathbf{A}) = \Phi \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \Phi \times \mathbf{A} \quad (1-6-21)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (1-6-22)$$

1.6.3 斯托克斯定理

旋度的定义式(1-6-7)给出了空间某点附近的环量和环量面密度之间的关系,若将讨论范围扩大到任意环路 C 所张的曲面面积 S ,则可得出另一个重要的矢量恒等式:

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \quad (1-6-23)$$

称为斯托克斯定理(Stokes' theorem)。

【证明】 将环路 C 所张面积分割成 n 个微分矢量面元 $\Delta \mathbf{S}_i = \mathbf{a}_{ni} \Delta S_i$, 则每个面元的外沿都是一个小环路 C_i , 如图 1-6-5 所示, 设所有小环路 C_i 的环绕方向一致, 则按照旋度的定义式, 微分面元上点 P_i 处矢量场的旋度为

$$\nabla \times \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{a}_{ni} = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \frac{\oint_{C_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S_i} \quad (1-6-24)$$

由极限的定义, 式(1-6-24)可重写为

$$\oint_{C_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = (\nabla \times \mathbf{A}_i) \cdot \mathbf{a}_{ni} \Delta S_i + \varepsilon_i \Delta S_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-6-25)$$

其中, ε_i 是无限小值。将 n 个这样的式子相加并取极限, 得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \oint_{C_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (\nabla \times \mathbf{A}_i) \cdot \Delta \mathbf{S}_i + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \Delta S_i \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (\nabla \times \mathbf{A}_i) \cdot \Delta \mathbf{S}_i \end{aligned} \quad (1-6-26)$$

式(1-6-26)等号左边的微小环量积分除外沿 C 外, 每相邻的两个小环路必有一个公共边, 在计算这两个小环路的环量时相互抵消, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \oint_{C_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-6-27)$$

按照积分的定义, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 对面积求和变为对面积积分, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (\nabla \times \mathbf{A}_i) \cdot \Delta \mathbf{S}_i = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \quad (1-6-28)$$

于是

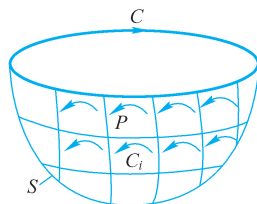


图 1-6-5 斯托克斯定理证明示意图

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$

斯托克斯定理建立了矢量场的旋度面积分与面积外沿的环量之间的关系,表明一个连续可微的矢量场对任意一个环路的线积分等于该矢量场的旋度对环路所张面积的面积分。

【例 1-6-1】 若 $\mathbf{A} = \mathbf{a}_x 2z + \mathbf{a}_y 3x + \mathbf{a}_z 4y$, 试在半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4 (z \geq 0)$ 上验证斯托克斯定理。

【解】 半球面的边沿是 $z=0$ 平面上半径为 2 的圆, $\mathbf{A}$ 沿此圆的环量为

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} &= \int_0^{2\pi} (\mathbf{a}_x 2z + \mathbf{a}_y 3x + \mathbf{a}_z 4y) \cdot \mathbf{a}_\varphi 2d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \mathbf{a}_y 3x \cdot \mathbf{a}_\varphi 2d\varphi \\ &= 2 \int_0^{2\pi} 6 \cos^2 \varphi d\varphi = 12\pi \end{aligned}$$

$\mathbf{A}$ 的旋度:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z & 3x & 4y \end{vmatrix} = 4\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$$

球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4 (z \geq 0)$ 的法线方向为 $\mathbf{a}_r$, 于是面积分为

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S (4\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_r dS_r$$

将式 $\mathbf{a}_r = \mathbf{a}_x \sin\theta \cos\varphi + \mathbf{a}_y \sin\theta \sin\varphi + \mathbf{a}_z \cos\theta$ 代入上式, 得

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\sin\theta \cos\varphi + 2\sin\theta \sin\varphi + 3\cos\theta) 2^2 \sin\theta d\theta d\varphi = 12\pi$$

于是有

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$

斯托克斯定理得以验证。

1.7 亥姆霍兹定理

1.7.1 无散场与无旋场

由 1.5 节和 1.6 节可知, 矢量场的散度与旋度反映了产生矢量场的源。任一矢量场, 由散度源和旋度源其中之一产生, 或由散度源和旋度源共同产生。散度处处为零的矢量场称为无散场, 旋度处处为零的矢量场称为无旋场。

利用散度和旋度的表示式可以证明, 任意矢量场 $\mathbf{A}$ 的旋度的散度等于零, 即:

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad (1-7-1)$$

由于无散场的散度处处为零, 即有 $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, 与式(1-7-1)对比可知: 无散场可以表示为另一个矢量场的旋度。恒定磁场是一个有旋无散场, 因此磁感应强度 $\mathbf{B}$ 可以表示为矢量磁位 $\mathbf{A}$ 的旋度, 即 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 。

利用梯度和旋度的表示式可以证明, 任意标量场 Φ 的梯度的旋度等于零, 即

$$\nabla \times \nabla \Phi = 0 \quad (1-7-2)$$

由于无旋场的旋度处处为零, 即有 $\nabla \times \mathbf{F} = 0$, 与式(1-7-2)对比可知: 无旋场可以表示为另一个标量场的梯度。静电场是一个有散无旋场, 因此电场强度 $\mathbf{E}$ 可以表示为标量电位 Φ 的梯度, 即 $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$ 。由斯托克斯定理, $\oint_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0$, 线积分和路径无关, 即无旋场是保守场。

1.7.2 亥姆霍兹定理

若矢量场 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ 在无限区域中处处为单值, 其导数连续有界, 源分布在有限区域 τ' 中, 则当矢量场的散度及旋度给定后, 矢量场 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ 可表示为

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla \Phi(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (1-7-3)$$

其中

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' \quad (1-7-4)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' \quad (1-7-5)$$

上述关系称为亥姆霍兹定理。亥姆霍兹定理表明:

- (1) 无限空间中的矢量场被其散度和旋度唯一地确定;
- (2) 它给出了矢量场与其散度和旋度之间的定量关系, 即场与源的关系;
- (3) 计算 $\Phi(\mathbf{r})$ 和 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 的式(1-7-4)、式(1-7-5)仅适用于无限大空间中的矢量场;
- (4) 梯度场是无旋场, 旋度场是无散场, 式(1-7-3)表明, 任一矢量场均可表示为一个无旋场和一个无散场之和。

亥姆霍兹定理为研究矢量场提供了最基本的方法, 如果某一矢量场的散度和旋度已知, 即可求出该矢量场。因此, 确定矢量场的散度和旋度是研究矢量的首要问题。对于无限大空间, 如果矢量场的散度和旋度均为零, 矢量场也随之消失。

1.8 MATLAB 应用分析

【例 1-8-1】 已知标量场 $z = e^{-r^2}$, 计算梯度场 ∇z 。使用 MATLAB 画出该标量场及其等值面, 以及梯度场 ∇z 。

【解】 $\nabla z = -2xe^{-(x^2+y^2)}\mathbf{a}_x - 2ye^{-(x^2+y^2)}\mathbf{a}_y$

使用 MATLAB 函数画出场图,标量场 z 如图 1-8-1(a) 所示,其等值面如图 1-8-1(b) 所示,图(b)中的箭头的方向、长度和分布表示梯度场 ∇z 。在 MATLAB 中,使用函数 `gradient` 计算梯度场,使用函数 `contour` 计算并画出等值面,使用函数 `quiver` 画出矢量场。

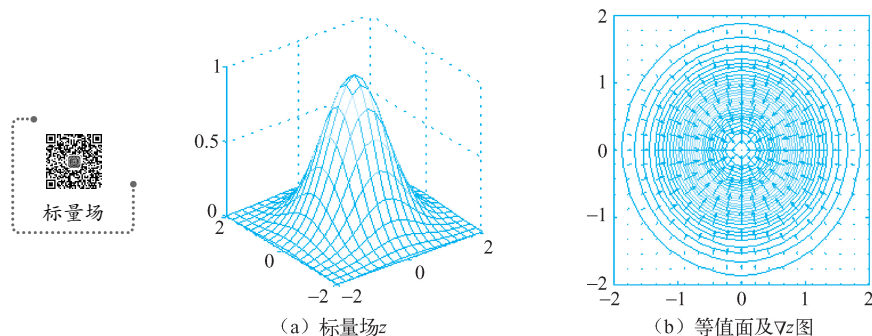


图 1-8-1 标量场 z 和等值面及 ∇z 图

【例 1-8-2】 已知矢量场 $\mathbf{A} = \rho e^{-\rho^2} \mathbf{a}_\rho$, 计算散度 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 。使用 MATLAB 画出该矢量场,以及散度 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 的等值面。

【解】 $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 e^{-\rho^2}) = (2 - 2\rho^2) e^{-\rho^2}$

使用 MATLAB 函数画出场图,矢量场 $\mathbf{A}$ 的二维图如图 1-8-2(a) 所示,散度 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 的等值面如图 1-8-2(b) 所示。在 MATLAB 中,使用函数 `divergence` 计算散度。

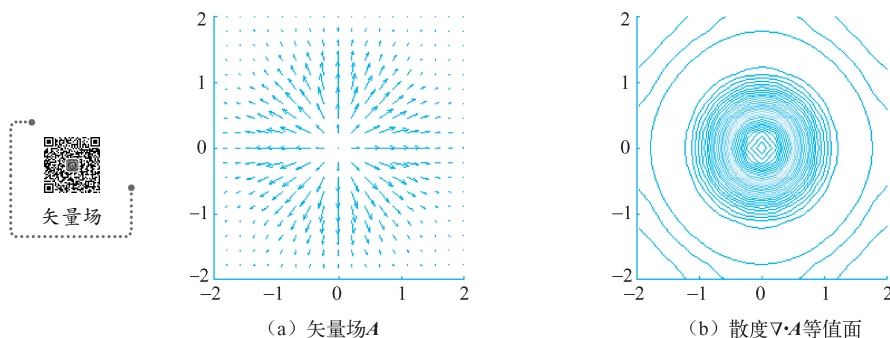


图 1-8-2 矢量场 $\mathbf{A}$ 和散度 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 等值面图

【例 1-8-3】 已知矢量场 $\mathbf{A} = \rho e^{-\rho^2} \mathbf{a}_\varphi$, 计算旋度 $\nabla \times \mathbf{A}$ 。使用 MATLAB 画出该矢量场,以及旋度 $\nabla \times \mathbf{A}$ 的 z 分量的等值面。

【解】

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \frac{a_\rho}{\rho} & a_\varphi & \frac{a_z}{\rho} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix} = \frac{a_z}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 e^{-\rho^2}) = a_z (2 - 2\rho^2) e^{-\rho^2}$$

使用 MATLAB 函数画出场图, 矢量场 $\mathbf{A}$ 的二维图如图 1-8-3(a) 所示, 旋度 $\nabla \times \mathbf{A}$ 的 z 分量的等值面如图 1-8-3(b) 所示。在 MATLAB 中, 使用函数 curl 计算旋度。

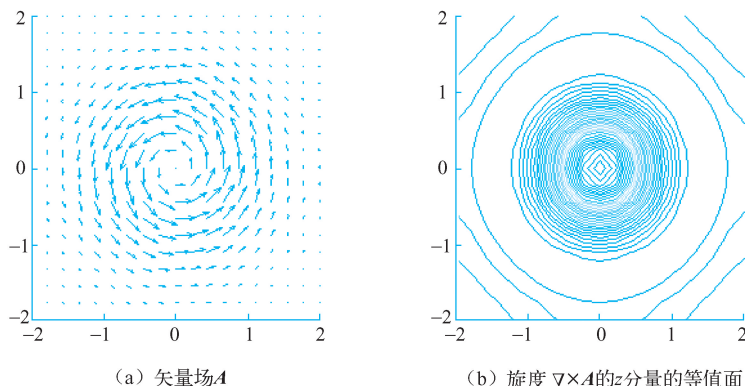


图 1-8-3 矢量场 $\mathbf{A}$ 和旋度 $\nabla \times \mathbf{A}$ 的 z 分量的等值面图

小 结

1. 标量场和矢量场的概念

一个函数能在空间某区域中各点表征一个物理存在称为一个场。标量场在区域中各点的物理特性用一个数来描述; 矢量场则对区域中各点的物理特性同时用大小和方向来描述。

2. 矢量的标量积和矢量积

点积(标量积): $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta$

直角坐标: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

圆柱坐标: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_\rho B_\rho + A_\varphi B_\varphi + A_z B_z$

球坐标: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_r B_r + A_\theta B_\theta + A_\varphi B_\varphi$

叉积(矢量积): $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = |AB \sin \theta| \mathbf{a}_n$

直角坐标: $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$

$$\begin{aligned}
 \text{圆柱坐标:} \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_\rho & \mathbf{a}_\varphi & \mathbf{a}_z \\ A_\rho & A_\varphi & A_z \\ B_\rho & B_\varphi & B_z \end{vmatrix} \\
 \text{球坐标:} \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_r & \mathbf{a}_\theta & \mathbf{a}_\varphi \\ A_r & A_\theta & A_\varphi \\ B_r & B_\theta & B_\varphi \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

3. 梯度、散度、旋度和拉普拉斯微分

标量场的梯度: $\nabla \Phi$

$$\begin{aligned}
 \text{直角坐标:} \quad \nabla \Phi &= \mathbf{a}_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \\
 \text{圆柱坐标:} \quad \nabla \Phi &= \mathbf{a}_\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \mathbf{a}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \mathbf{a}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \\
 \text{球坐标:} \quad \nabla \Phi &= \mathbf{a}_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \mathbf{a}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \mathbf{a}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}
 \end{aligned}$$

矢量场的散度: $\nabla \cdot \mathbf{A}$

$$\begin{aligned}
 \text{直角坐标:} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
 \text{圆柱坐标:} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
 \text{球坐标:} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}
 \end{aligned}$$

矢量场的旋度: $\nabla \times \mathbf{A}$

$$\begin{aligned}
 \text{直角坐标:} \quad \nabla \times \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \\
 \text{圆柱坐标:} \quad \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_\rho & \rho \mathbf{a}_\varphi & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix} \\
 \text{球坐标:} \quad \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_r & r \mathbf{a}_\theta & r \sin \theta \mathbf{a}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\varphi \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

标量场的拉普拉斯微分: $\nabla^2 \Phi$

直角坐标:
$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

圆柱坐标:
$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

球坐标:
$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}$$

4. 定理和矢量恒等式:

散度定理:
$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_\tau \nabla \cdot \mathbf{A} d\tau$$

斯托克斯定理:
$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$

亥姆霍兹定理:
$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla \Phi(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

式中
$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau'$$

矢量斯托克斯定理:
$$\int_\tau (\nabla \times \mathbf{A}) d\tau = - \oint_S \mathbf{A} \times d\mathbf{S}$$

二阶微分:
$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$$

$$\nabla \times \nabla \Phi = \mathbf{0}$$

$$\nabla \cdot \nabla \Phi = \nabla^2 \Phi$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$$

含标量乘积的微分:
$$\nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla f$$

$$\nabla \times (f\mathbf{A}) = f \nabla \times \mathbf{A} + \nabla f \times \mathbf{A}$$

含矢量积的微分:
$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \nabla \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

混合积:
$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

二重矢量积:
$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

思考与练习

1. 给出一些标量和矢量的例子。
2. 指出 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ 和 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ 的所有条件。
3. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = 0$ 含义是什么?

4. 化简 $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \times (\mathbf{C} + \mathbf{A})$ 。
5. 参考矢量 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ 和 $\mathbf{a}_3$ 成为正交系统需要什么条件?
6. 简述你对标量场和矢量场概念的理解, 并举例说明。
7. 微分元有哪几个? 在直角、圆柱和球坐标下是如何表示的?
8. 梯度和方向导数有何关系? 叙述梯度的几何及物理意义, 写出梯度在直角坐标下的表示式。
9. 解释矢量场的通量, 通量的正、负和零分别表示什么意义?
10. 给出散度的定义、物理意义, 散度的正、负和零分别表示什么意义?
11. 什么是矢量场的环量? 环量的正、负和零分别表示什么意义?
12. 给出旋度的定义、物理意义, 旋度为零和不为零分别表示什么意义?

习 题

1. 已知矢量 $\mathbf{A} = a_x 2 - a_y 3 + a_z 4, \mathbf{B} = a_x 3 + a_y 2 + a_z$, 求矢量 $\mathbf{C} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$ 的模、方向余弦及单位矢量。使用 MATLAB 检查答案。
2. 已知三个矢量分别为: $\mathbf{A} = a_x + a_y 2 - a_z 3; \mathbf{B} = -a_x 4 + a_z; \mathbf{C} = a_x 5 - a_z 2$ 。试求: (1) $|\mathbf{A}|, |\mathbf{B}|, |\mathbf{C}|$; (2) 单位矢量 $\mathbf{a}_A, \mathbf{a}_B, \mathbf{a}_C$; (3) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$; (4) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$; (5) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$ 及 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$; (6) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ 及 $(\mathbf{A} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{B}$ 。使用 MATLAB 检查答案。
3. 证明 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$ 。
4. 证明 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C})^2$ 。
5. 已知空间三角形的顶点在坐标为 $O(0, 0, 0), P_1(1, 4, 3), P_2(4, 2, -4)$ 。试问: (1) 该三角形是否直角三角形? (2) 计算该三角形的面积。使用 MATLAB 检查答案。
6. 已知矢量 $\mathbf{A} = a_x 2 + a_y 3 - a_z 4; \mathbf{B} = -a_x 6 - a_y 4 + a_z; \mathbf{C} = a_x - a_y + a_z$ 。试求: (1) $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 之间的夹角; (2) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 在 $\mathbf{C}$ 上的分量。使用 MATLAB 检查答案。
7. 求以矢量 $\mathbf{A} = -a_x 2 - a_y 3 + a_z, \mathbf{B} = a_x 2 - a_y 5 + a_z 3$ 和 $\mathbf{C} = a_x 4 - a_y 2 + a_z 6$ 为邻边构成的平行六面体的体积。使用 MATLAB 检查答案。
8. 计算在圆柱坐标系中 $P(5, \pi/6, 5)$ 和 $Q(2, \pi/3, 4)$ 两点之间的距离。
9. 求球坐标中 $P(10, \pi/4, \pi/3)$ 和 $Q(2, \pi/2, \pi)$ 两点之间的距离。并求从点 P 到点 Q 的距离矢量。
10. 求点 $(6, -4, 4)$ 至连接点 $(2, 1, 2)$ 与点 $(3, -1, 4)$ 之直线的最短距离。
11. 若 $\mathbf{F} = a_x x$, 沿下列三条路径分别计算 $\int_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$: (1) 在 xy 平面沿 x 轴从 $x=0$ 到 $x=1$; (2) 沿半径为 1 从 $\varphi=0$ 到 $\varphi=\pi/2$ 的圆弧; (3) 沿 y 轴从 $y=1$ 到 $y=0$ 。
12. 若 $\mathbf{A} = a_x z + a_y x - a_z 3y^2 z$, 求通量 $\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ 。其中 S 为圆柱面 $x^2 + y^2 = 16$ 在第一象限中与

$x=0, y=0$ 及 $z=0$ 和 $z=5$ 平面所围成的闭合面。

13. 球心在原点半径为 a 的球内充满体密度 $\rho_f = kr^2$ (k 为常数) 的电荷。求半径为 $a/2$ 的球面所包围的电荷量和总电量。

14. 证明: 如果 $\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{B}$ 且 $\mathbf{P} \times \mathbf{A} = \mathbf{P} \times \mathbf{B}$, 则 $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ 。

15. 根据算符 ∇ 的矢量特性, 推导下列公式:

$$(1) \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B};$$

$$(2) \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}.$$

16. 证明在圆柱坐标系:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho^2} \left[\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]$$

17. 求 $f = 3x^2y - xy + z^2$ 在 $(1, -1, 1)$ 点沿曲线 C 的 x 增加一方的方向导数。
已知 C 的曲线方程为:

$$\begin{cases} y = -x^2 \\ z = x^3 \end{cases}$$



习题 17 解答

18. 已知二维标量场 $f = y^2 - x$ 。(1) 问 f 的等值面是何种曲面? 并在 xy 平面上画出 f 的等值线族;(2) 求 ∇f ;(3) 任取一个回路 C , 计算 $\oint_C \nabla f \cdot d\mathbf{l}$ 。

19. 试求 $\oint_S \mathbf{a}_r 3 \sin \theta \cdot d\mathbf{S}$, 式中 S 为球心位于原点, 半径为 5 的球面。

20. 若矢量 $\mathbf{A} = \mathbf{a}_r \frac{\cos^2 \varphi}{r^3}$, $1 < r < 2$, 试求 $\int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{A} d\tau$, 式中 τ 为 $\mathbf{A}$ 所在区域。

21. 应用斯托克斯定理证明 $\int_S \nabla \Psi \times d\mathbf{S} = - \oint_C \Psi d\mathbf{l}$ 。

22. 在由坐标面 $\rho = 5, z = 0, z = 2$ 围成的圆柱形区域中, 对矢量 $\mathbf{A} = \mathbf{a}_\rho \rho^2 + \mathbf{a}_z 2z$ 验证散度定理。

23. 在矢量场 $\mathbf{A} = -\mathbf{a}_x y + \mathbf{a}_y x$ 中有一矩形回路 $C: (0, 0) \rightarrow (3, 0) \rightarrow (3, 4) \rightarrow (0, 4) \rightarrow (0, 0)$ 。对回路 C 及其围成的矩形面积 S 验证斯托克斯定理。

24. 有三个矢量场:

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_r \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{a}_\theta \cos \theta \cos \varphi - \mathbf{a}_\varphi \sin \varphi$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{a}_\rho z^2 \sin \varphi + \mathbf{a}_\varphi z^2 \cos \varphi + \mathbf{a}_z 2\rho z \sin \varphi$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{a}_x (3y^2 - 2x) + \mathbf{a}_y x^2 + \mathbf{a}_z 2z$$

(1) 其中哪些场可以表示为一个标量场的梯度场? 哪些场可以表示为一个矢量场的旋度场?

(2) 求出这些矢量场的源分布。

25. 已知无限大空间矢量场 $\nabla \cdot \mathbf{F} = q\delta(\mathbf{r}), \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, 试求该矢量场。

研究型拓展题目

矢量场的特性主要用矢量的散度和旋度来描述,深刻理解散度和旋度的物理意义和计算方法是学好电磁场理论的根本。

在研究标量场的梯度时,定义了一个矢量微分算子——那勃勒算子,它在正交坐标系中的表达式为:

$$\nabla = \mathbf{a}_1 \frac{\partial}{h_1 \partial u_1} + \mathbf{a}_2 \frac{\partial}{h_2 \partial u_2} + \mathbf{a}_3 \frac{\partial}{h_3 \partial u_3}$$

试由散度和旋度的定义式证明:散度可以表示为 ∇ 与矢量场 $\mathbf{A}$ 的点乘,旋度可以表示为 ∇ 与矢量场 $\mathbf{A}$ 的叉乘,即:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial (h_2 h_3 A_1)}{\partial u_1} + \frac{\partial (h_1 h_3 A_2)}{\partial u_2} + \frac{\partial (h_1 h_2 A_3)}{\partial u_3} \right] = \nabla \cdot \mathbf{A} \\ \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{a}_1 & h_2 \mathbf{a}_2 & h_3 \mathbf{a}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} = \nabla \times \mathbf{A} \end{aligned}$$