

第 3 章 波-迹几何光束的数字化定制技术研究

本书第 2 章基于量子相干态,建立了广义波-迹几何光束的理论模型,描述了包括平面-涡旋几何模、多轴 HLG 模和李萨如-余摆线参数表面几何模在内的一系列三维波包和经典轨迹相互耦合的光束族,表现出几何轨迹、中心 OAM、子光束 OAM 等丰富的空间特征参数和奇特的空间拓扑结构。一旦实现了波-迹几何光束多个特征参数的灵活控制,其突出的量子-经典耦合特性预计将为光学操纵^[107-108]、量子纠缠^[109-111]、粒子捕获^[112-114]、光学通信^[115],以及安全加密^[116]等应用领域带来全新突破。然而,波-迹几何光束的多参数特征也为光束的产生和调控带来了极大困难,各类模式的产生基本停留在有、无的论证上,无法实现参数动态调控,严重阻碍了进一步的应用探索。本章提出了数字化调控波-迹几何光束的技术路线,利用液晶空间光调制器(liquid-crystal spatial light modulator, Lc-SLM)和数字微镜器件(digital micromirror device, DMD),实现该光束的任意定制和灵活调控。

本章包括波-迹几何光束的计算全息方法、数字化定制实验实现、数字化定制技术的精度和效率研究三部分内容,全面验证波-迹几何光束的数字化定制方案。第一部分介绍谐振腔内产生波-迹几何光束的局限性,论证数字化调控方法的等效性,并在此基础上阐明基于 Lc-SLM 和 DMD 的纯相位和二值化振幅计算全息实现波-迹几何光束的原理^[95]。第二部分搭建基于 Lc-SLM 的纯相位计算全息实验装置,实现波-迹几何光束的数字化定制和灵活切换,实验产生谐振腔方法无法实现、难以调控的新型波-迹几何光束模式。第三部分以一般涡旋光束为例,定量分析数字化定制技术的调制精度和调制效率,为该方法的实际应用提供理论指导^[117]。本章的工作为第 4、5 章的多自由度调控技术研究奠定了技术基础。

3.1 波-迹几何光束的计算全息调制

随着结构光束在光通信、光学微操纵、光学传感等领域获得重要应用,各使用场景也对结构光束的形态及其调控性能提出了更高要求。而波-迹几何光束丰富的波包结构、多个可调谐的参数使其在各个方面的应用有极其广阔的潜在价值。因此,灵活、稳定和快速的波-迹几何光束定制技术是一个非常具有吸引力的目标。

3.1.1 传统谐振腔方法的局限性

此前,产生波-迹几何光束的唯一方法依赖于激光谐振腔。由第 2 章介绍的理论可知,激光谐振腔内横向、纵向模式之间的耦合对于波-迹几何光束的产生和调控至关重要。同时,频率简并条件是实现波-迹几何光束在谐振腔内振荡的基本要求。为了实现波-迹几何光束,实验中通常采用端面离轴泵浦的平凹腔,用以控制横模、纵模实现频率简并。

腔内不同频率简并态下,平面几何模(二维的波-迹几何模)在腔内 $y = 0$ 平面上的振荡分布和频率简并谱分别如图 3.1 (a) 和图 3.1 (b) 所示,其中箭头标注了平面几何模在分形频率简并谱中的位置。通过调节腔长,可以改变平面几何光束的振荡状态 (Ω)。当谐振腔出现对称性破缺时,分形频率简并谱中呈现局部精细结构,图 3.1 (c) 展示了在腔长 $L = \frac{R}{2}$ 附近(对应 $P/Q = 1/4$),精细频率简并谱与对称破缺程度 ξ 的关系,在 $\xi = 1/2[(p-q)/(p+q)]$ 处产生了新的频率简并状态。例如,在频率退化条件下 $\xi = -3/4, -1/2, -1/8, 1/8, 1/2, 3/4$ 分别对应 $(p, q) = (-1, 5), (0, 4), (3, 5), (5, 3), (4, 0), (5, -1)$ 。图 3.1 (d) 是图 3.1 (c) 中不同对称破缺程度对应的李萨如光束经典轨迹。

上述频率简并情况作为一个实例,展现了谐振腔方法实现波-迹几何光束的困难之处。实际上该方法主要存在三大瓶颈问题:

第一,工作条件苛刻,调谐难度极大。为了满足频率简并态条件,必须严格、精细地调节谐振腔参数,使得谐振腔的横向、纵向频率间隔的比值为一个有理数,即 $\Delta\omega_T/\Delta\omega_L = P/Q$ (P 和 Q 是互质数),此时才有可能获得波-迹几何光束。若要产生光场更加复杂的李萨如波-迹几何光

束, 还需打破谐振腔的横向对称性, 将水平、竖直两方向的腔长差异严格控制 在亚毫米量级, 使得实验调谐难度极大。另外, 还需要精细调节泵浦 位置的离轴量, 使得所需的激光模式能够根据“波-迹二象性”效应, 耦 合到周期性几何轨迹上^[69,89]。

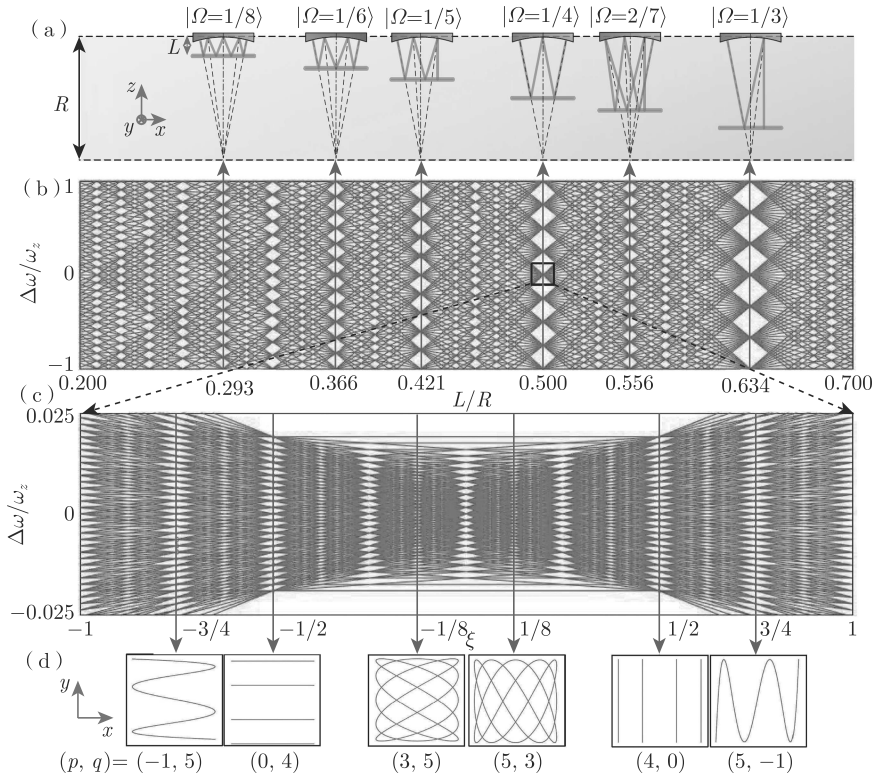


图 3.1 频率简并态

(a) 不同频率简并态下, 平面几何模在腔内 $y = 0$ 平面上的轨迹化的强度分布; (b) 分形频率简并谱, 其中相对频率差 $\Delta\omega/\omega_z$ 为 L/R 的函数; (c) 对称性破缺条件下, 在 $P/Q = 1/4$ 简并态附近 分形频谱的放大示意图, 可见 $\xi = 1/2[(p-q)/(p+q)]$ 处产生了新的简并位置; (d) 对应标记位置 处, 不同整数对 (p, q) 的经典李萨如参数曲线

第二, 影响因素多, 模式参数难以独立调控。谐振腔产生波-迹几何 光束的参数受到泵浦条件 (泵浦功率、光斑尺寸、位置等)、谐振腔条件 (腔型、腔长、腔镜曲率半径等)、激光增益介质 (材料、尺寸、冷却条件 等)、腔内其他元件 (尺寸、材料、相对位置等) 等诸多因素影响, 导致

光束多个自由度的调谐耦合在一起，难以实现各参数的独立调控。

第三，物理约束大，实验参数无法全覆盖。谐振腔的频率简并参数与腔长 L 、凹面镜曲率半径 R 的关系为 $P/Q = (1/\pi)\arccos(1 - L/R)$ 。受到物理腔型、腔长的约束，在实验上能够获得的 Q 取值范围非常受限：对于 $Q \leq 2$ 的情况，要求谐振腔为非稳腔，实验上难以产生稳定振荡的模式；对于 Q 较大的情况，要求腔长为毫米级甚至更短，实验上也难以实现。目前关于谐振腔产生波-迹几何光束的报道均基于 HG 本征态。

可见，谐振腔方法产生单个波-迹几何模式已是困难重重，遑论多个模式之间的灵活切换，乃至高速调控。这一技术桎梏严重制约了波-迹几何光束的发展，导致长期以来，该光束在多自由度调控上的颠覆性价值和重大创新潜力得不到认识和利用。针对该问题，本章突破频率简并腔方法的限制，提出数字化全域定制和调控波-迹几何光束的原创技术路线，可实现新型光束的灵活按需定制、可编程高速调控、模式参数全域覆盖。

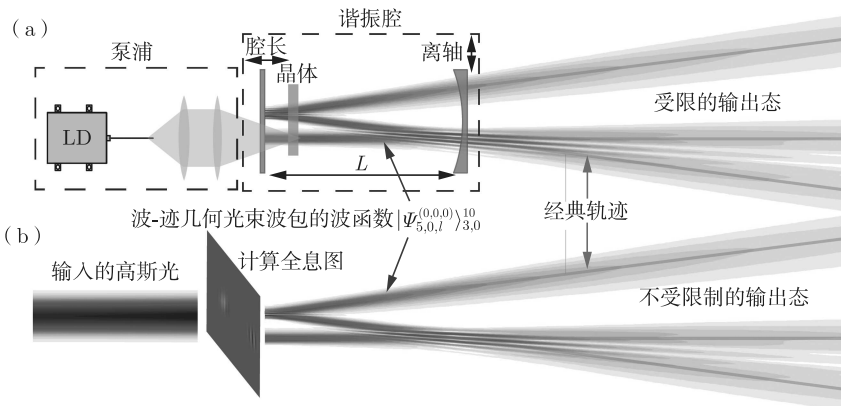


图 3.2 波-迹几何光束的构型对比^[95]

(a) 谐振腔产生方法；(b) 数字化定制方法

如公式 (2.40) 所述，波-迹几何光束是各种频率简并本征模式的叠加，波包形状取决于叠加光场的横模成分和相位。从构成原理分析可知，传统的频率简并腔方法的作用是保证多个本征频率相同的本征模式能够同时振荡，除此之外谐振腔只是作为约束模式振荡的条件，如图 3.2 (a) 所示。通过数字化调控方法，只要能够获得目标波包所需的叠加横模成分和

相位关系，同时不改变激光光源本身的频率特征，即可等效地实现波-迹几何光束的波包，如图 3.2 (b) 所示。具体而言，数字化调控波-迹几何光束的思路是利用数字化器件（如 Lc-SLM 等）对目标波-迹几何光束的横截面光场分布的复数振幅进行调制，该横截面光场在传播过程中形成的波包将会与相应的经典轨迹耦合，呈现出“波-迹二象性”。

3.1.2 计算全息方法

计算全息技术是重构相干光场波前的重要手段，近年来得益于高分辨率、像素化、可编程的商用空间光调制器的发展，计算全息技术与空间光调制器高效融合，为结构光的定制开辟了广阔的发展空间。纯相位计算全息 (pure phase computer-generated holography, PP-CGH) 和二值化振幅计算全息 (binary amplitude computer-generated holography, BA-CGH) 两类方法分别通过 Lc-SLM、DMD 可编程器件实现^[118-121]。基于两种调制器件的计算全息方法都具有非常高的灵活性和调制质量，得到了广泛使用。目前利用 DMD、Lc-SLM 的计算全息方法已实现 LG 光束、恩斯-高斯光束、无衍射光束等一系列激光模式，但是此前未见学者讨论其实现波-迹几何光束的可能性。

波-迹几何光束的 SU(2) 结构波包能够用计算全息方式生成吗？答案是肯定的。物理上，波-迹几何光束是满足频率简并条件一系列本征模式的相干叠加。数学上，波-迹几何光束可以通过菲涅耳衍射从任意截面的光场中获得。因此，波-迹几何光束采用与本征模相同的数字调制方法，在理论上是可行的，无论是使用 DMD 的二值化强度调制方式，还是使用 Lc-SLM 的纯相位调制方式。接下来，将详细介绍两种方法构造波-迹几何光束计算全息图的原理和过程。

1. 基于 Lc-SLM 的纯相位计算全息方法

数学上，任意一个标量结构光场在某个横截面上的分布 $\psi(x, y)$ 均包括振幅分布 $A(x, y)$ 和相位分布 $\Phi(x, y)$ 两部分：

$$\psi(x, y) = A(x, y) \exp[i\Phi(x, y)] \quad (3.1)$$

其中， $A(x, y) \in [0, 1]$ 和 $\Phi(x, y) \in [-\pi, \pi]$ 分别为结构光场归一化的振幅和相位。2007 年，Arrizón Victor 课题组提出了一种利用目标光场的振幅

和相位信息构造纯相位计算全息图的方法, 将全息图表示为目标光场振幅和相位分布的函数 $\Psi[A(x, y), \Phi(x, y)]$ 。当平面波照射计算全息图时, 被全息图调制的平面波表示为 $M(x, y)$, 对其做以相位分布 $\Phi(x, y)$ 为变量的傅里叶级数展开:

$$\begin{cases} M(x, y) = \exp\{i\Psi[A(x, y), \Phi(x, y)]\} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} c_q^A \exp[iq\Phi(x, y)] \\ c_q^A = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} M(x, y) \exp[-iq\Phi(x, y)] d\Phi \end{cases} \quad (3.2)$$

其中, c_q^A 为傅里叶级数系数。

公式 (3.2) 表明, 一阶傅里叶级数的相位部分即为期望得到的目标光场 $\psi(x, y)$ 的相位分布。要获得目标光场, 仅需一阶傅里叶级数系数为振幅的正整数倍, 即 $c_1^A = CA$ (其中 C 是任意常数)。将该条件代入公式 (3.2) 中的傅里叶级数系数表达式, 有:

$$CA = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[i\Psi(A, \Phi) - i\Phi] d\Phi \quad (3.3)$$

注意到等式左边为实数, 可对右边的复数积分的实部与虚部展开, 有:

$$\begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} \sin[i\Psi(A, \Phi) - i\Phi] d\Phi = 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos[i\Psi(A, \Phi) - i\Phi] d\Phi = 2\pi CA \end{cases} \quad (3.4)$$

公式 (3.4) 得到的纯相位计算全息图 $\Psi[A(x, y), \Phi(x, y)]$ 相对于变量 Φ 是奇对称的, 因而可假设全息函数的形式为 $\Psi(A, \Phi) = \sin \Phi f(A)$, 将其重新代入公式 (3.2) 可得:

$$c_q^A = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i\Psi[\sin \Phi f(A)] - iq\Phi\} d\Phi \quad (3.5)$$

傅里叶级数系数表示为 $c_q^A = J_q[f(A)]$ (J_q 为 q 阶贝塞尔函数), 其中一阶系数可推导为 $c_1^A = CA$ 。因此满足 $A = J_1[f(A)]/C$ 时 C 的最大值约为 0.582 (图 3.3(b))。因此振幅函数可表示为 $f(A) = J_1^{-1}(0.582A)$, 得到的纯相位计算全息图为:

$$\Psi[A(x, y), \Phi(x, y)] = \sin(\Phi) J_1^{-1}(0.582A) \quad (3.6)$$

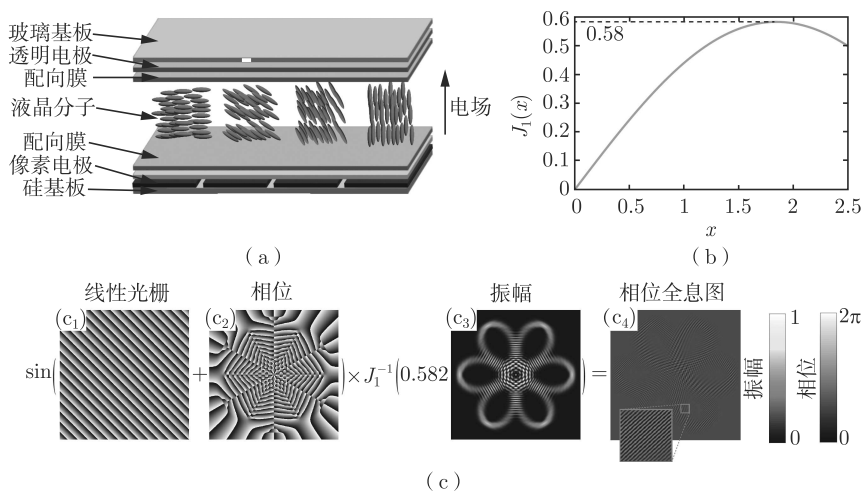


图 3.3 纯相位计算全息图的生成原理示意图 (以 $|\Psi_{20,20,l}^{(\pi/2,\pi/2,0)}\rangle_{-1,5}$ 为例)

(a) Lc-SLM 的原理结构图; (b) 一阶贝塞尔函数曲线; (c) 纯相位计算全息图的构造原理图, (c₁)~(c₃) 为 Lc-SLM 的全息图构造方法, (c₄) 为生成的纯相位计算全息图

此时可通过一阶傅里叶级次获得目标结构光场。然而, 全息图输出的各级次在空间上相互交叠, 需要将一阶与其他阶的级次分离。级次空间分离的一种简单方法是将不同的空间频率加到不同的傅里叶级次中, 如下所示:

$$\begin{aligned} M_{\text{Lc-SLM}}(x, y) &= \exp\{i\Psi[A, \Phi + 2\pi(u_0x + v_0y)]\} \\ &= \sum_{q=-\infty}^{\infty} c_q^A \exp[iq\Phi(x, y)] \exp[iq(u_0x + v_0y)] \quad (3.7) \\ &= \exp\{i \sin[\Phi + 2\pi(u_0x + v_0y)] J_1^{-1}(CA)\} \end{aligned}$$

图 3.3 (c) 展示了纯相位计算全息图的构造过程。由公式 (3.7) 可知, 当相位函数叠加一个线性光栅时, 展开的傅里叶级数中的每一个级次分别对应了一个线性光栅, 光栅频率均为初始线性光栅频率的整数倍。这意味着每一个傅里叶级次均对应不同的传输方向, 从而实现了含目标光场成分的 +1 阶级次的分离。以上即为通过纯相位全息调制方法得到目标光场的过程。

2. 基于 DMD 的二值化振幅计算全息方法

与 Lc-SLM 构造纯相位计算全息图的原理不同, 基于 DMD 构造全息函数源于经典的全息干板方法。该技术的核心是通过参考光波 (例如倾斜平面波 $R(x, y) = R \exp(-i2\pi x/T)$) 与物光波 (目标结构光场 $\psi(x, y) = A(x, y) \exp[i\Phi(x, y)]$) 的干涉来构造二值化振幅计算全息图。重构目标光场时, 采用参考光照射全息图, 获得的衍射场中包含目标光场的成分。

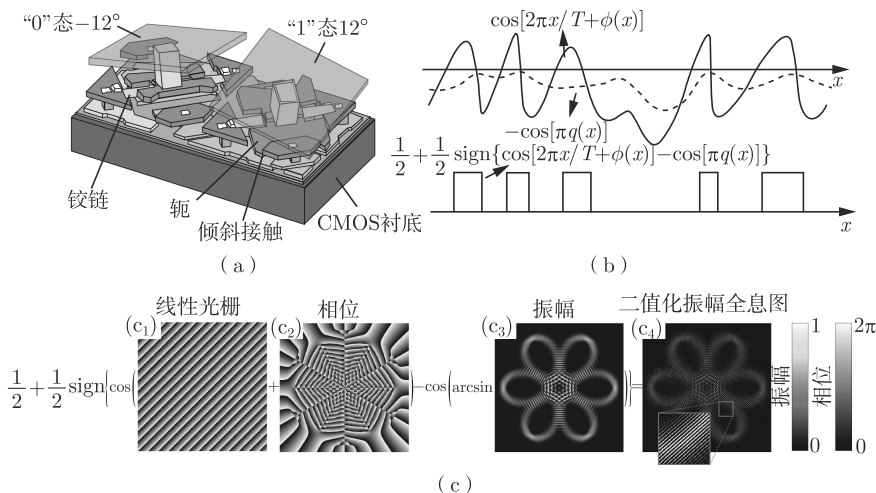


图 3.4 二值化振幅计算全息图生成原理示意图 (以 $|\Psi_{20,20,l}^{(\pi/2, \pi/2, 0)}\rangle_{-1,5}$ 为例)

(a) DMD 的原理结构图^[122]; (b) 二值化分割示意图; (c) 二值化振幅计算全息图的构造原理图, (c₁)~(c₃) 为 DMD 的全息图构造方法, (c₄) 为生成的二值化振幅全息图

二值化振幅全息图的透过率函数为:

$$t(x, y) = |R(x, y) + \psi(x, y)|^2$$

$$\begin{aligned}
 &= |\exp(-i2\pi x/T) + A(x, y) \exp[i\Phi(x, y)]|^2 \quad (3.8) \\
 &= R^2 + E^2(x, y) + 2RA(x, y) \cos[2\pi x/T + \Phi(x, y)]
 \end{aligned}$$

公式 (3.8) 中第三项包含了干涉场的全部信息, 可用于目标光场重构。将干涉项振幅函数 $2RA(x, y) \cos[2\pi x/T + \Phi(x, y)]$ 进行二值化, 设函数的正值和负值分别为 0 和 1, 从而构成一个二值化振幅全息图, 其传输函数可表示为:

$$T(x, y) = \begin{cases} 1, \cos[2\pi x/T + \Phi(x, y)] \geq 0 \\ 0, \cos[2\pi x/T + \Phi(x, y)] < 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

显然, 采用这种二值化方法丢失了干涉函数中目标光场的振幅信息 $A(x, y)$ 。这是由于二值化的判断过程仅与相位项 $\Phi(x, y)$ 有关, 函数 $\cos[2\pi x/T + \Phi(x, y)]$ 决定了二值化振幅计算全息图的分布, 其中条纹中心位于:

$$\cos[2\pi x/T + \Phi(x, y)] = 1 \quad (3.10)$$

为了同时调制光场的相位和振幅, 在保持二值化振幅全息图的空间周期性不变的情况下, 引入目标光场的振幅分布 $A(x, y)$ 作为干涉函数二值化过程的偏置项。首先, 设目标光场与振幅相关的偏置函数为 $f[A(x, y)] = \cos[\pi q(x, y)]$; 然后, 以函数 $\cos[2\pi x/T + \Phi(x, y)] - \cos\{\arcsin[A(x, y)]\}$ 的正、负作为二值化振幅函数为 1 或 0 的条件, 如图 3.4 (b) 所示, 用符号函数可表示为:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sign}(x) = \begin{cases} 1, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

因此, 含振幅偏置的二值化传输函数可以利用符号函数简化为:

$$T(x, y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sign}\{\cos[2\pi x/T + \Phi(x, y)] - \cos[\pi q(x, y)]\} \quad (3.12)$$

进一步, 对公式 (3.12) 做傅里叶级数展开:

$$T(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sin \pi m q(x, y)}{\pi m} \right] \exp\{im[2\pi x/T + \Phi(x, y)]\} \quad (3.13)$$

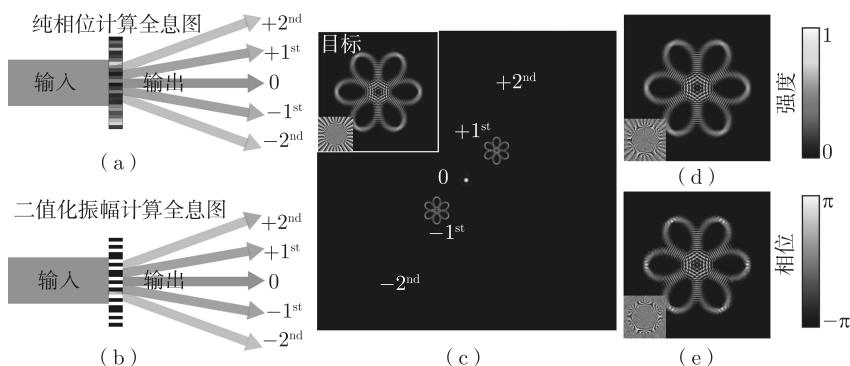


图 3.5 计算全息图调制输出示意图

(a) 和 (b) 分别为纯相位和二值化振幅计算全息图调制时, 输入平面波被衍射到多个级次的情况; (c) 纯相位和二值化振幅计算全息图被平面波照射时的衍射结果 (显示出分离的衍射级), 左上角为目标光场 (以波-迹几何光束 $|\Psi_{20,20,l}^{(\pi/2,\pi/2,0)}|_{-1.5}^5$ 为例) 的强度相位; (d) 和 (e) 分别为纯相位和二值化振幅计算全息频谱面进行级次选择 (+1st 级) 后, 获得重构光场的强度、相位分布

与纯相位计算全息方法类似, 二值化传输函数的一阶傅里叶级数的相位部分与目标函数完全相同, 其中对应的一阶级数的振幅项为 $\sin[\pi q(x, y)]/\pi$ 。如果能满足 $\sin[\pi q(x, y)]/\pi = CA(x, y)$ (C 为常数), 即可在一阶傅里叶级次位置获得目标光场的振幅函数。当 $C=1/\pi$ 时, 对应的偏置函数可以写为 $\cos[\pi q(x, y)] = \cos\{\arcsin[A(x, y)]\}$ 。至此, 获得了二值化振幅计算全息方法对应的二值化振幅全息图的传输函数:

$$T_{\text{DMD}}(x, y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sign}\{\cos[\Phi + 2\pi(u_0x + v_0y)] - \cos\{\arcsin[A(x, y)]\}\} \quad (3.14)$$

二值化振幅计算全息图的构造过程和调制输出过程分别如图 3.4 (c) 和图 3.5 (c) 所示。

3.2 波-迹几何光束的数字化实现

3.1 节中, 我们在理论上指出, 计算全息方法可以取代谐振腔方法, 使“波-迹二象性”效应突破激光谐振腔的瓶颈限制。本节将通过实验, 验证通过数字化器件实现广义波-迹几何光束定制和自由调控的可行性。