

在传统逻辑中，是从低级到高级，即从概念到判断再到推理来讨论人的思维规律的，这未必是一种最好的安排。事实上，当把推理作为研究的根本目标时，先忽略判断的细节（概念），把判断看作不可分的整体（命题）来讨论，更便于对推理规律进行分析；在此基础上，再引入概念的形式表示（谓词），把对推理的研究引入更加深入的层次，会显得格外顺理成章。本章的阐述将遵循这一次序，先讨论命题，再讨论命题演算及其形式系统。

❁ 3.1 命题演算基本概念

3.1.1 命题与联结词

命题（proposition）是指对事物作出确定判断的陈述语句，当判断合理或符合事实时，常称该命题**真**（true），否则称该命题**假**（false）。真、假又称命题的**真值**（truth value），为简便，将用1和0分别表示真、假这两个真值。经典逻辑认为命题只有真、假两个可能的值，而在一些非经典的逻辑系统（如模糊逻辑、多值逻辑等）中，对真值概念作了扩充。

例 3.1 考虑下列语句：

- (1) 雪是白的。
- (2) $2+2=5$ 。
- (3) 2是质数又是偶数。
- (4) 陈胜、吴广起义之日杭州下雨。
- (5) 大于2的偶数均可分拆为两个质数的和（哥德巴赫猜想）。
- (6) 您上哪儿去？
- (7) $x+y < 0$ 。
- (8) 我说的这句话（例3.1（8））不对。

显然，(1) (3) 是真命题，(2) 是假命题。(4) (5) 虽不知真、假，但确是命题。(6) 不是陈述句。(7) 含有变元 x, y ，不是确定的判断。(8) 则是一个病态的语句——悖论（paradox），它对自身作了否定。因此，(6) (7) (8) 不是命题。

注意，例3.1 (3) 与其他命题不同，它实际上是由两个判断联结而成的，即“2是质数”并且“2是偶数”，其中“并且”是一个联结词。这一命题的真值不仅依赖于这两个组成它的命题，而且还依赖于这个联结词的意义。像这样的联结词

称为**真值联结词** (truth value connective)。通常把不含有真值联结词的命题称为**原子命题**或**原子** (atom), 其他命题称为**复合命题** (composite proposition)。

例 3.2 下列命题都是复合命题, 其中黑体字为真值联结词:

- (1) 雪**不是**白的 (**并非**“雪是白的”)。
- (2) 今晚我去看朋友**或者**去看电影。
- (3) 她**不但漂亮而且**聪明 (她漂亮, 聪明)。
- (4) **如果**我有车, **那么**我去接你。
- (5) a 是偶素数**当且仅当** $a = 2$ (a 是常数)。

事实上, 自然语言中的许多联结词是真值联结词, 例如“不”与“并不”, “或”与“抑或”, “又”与“还”, “与其……不如……”与“如果……则……”, “除非……否则……”, 甚至省略连接词用标点及上下文来表示多个命题的复合。但是不难发现, 它们只是例3.2中5个联结词的不同说法而已。为了介绍这5个联结词, 并将它们形式化, 先来规定原子命题的符号表示。通常用小写拉丁字母 p 、 q 、 r 、 s 等表示原子命题, 当它们表示确定的命题时称为**命题常元** (proposition constant), 当它们表示不确定的命题时称为**命题变元** (proposition variable), 命题变元的取值范围是集合 $\{1, 0\}$ 。字母 t 和 f 表示真值分别为1和0的命题常元。

否定词“并非” (not), 用符号 \neg 表示。设 p 表示一个命题, 那么 $\neg p$ 表示命题 p 的否定。 p 真时, $\neg p$ 假; 而 p 假时 $\neg p$ 真。 $\neg p$ 读作“并非 p ”或“非 p ”。当用否定词并非表示自然语言中的“不”时 (或者反过来), 应注意保持原语句的意义。例如 p 表示“你们都是好学生”时, $\neg p$ 表示“并非你们都是好学生”或“你们不都是好学生”, 但绝不是“你们都不是好学生”。为了确切地规定真值联结词的意义, 常使用所谓真值表。表3.1给出了否定词 \neg 的真值表。

表 3.1 否定词 \neg 的真值表

p	$\neg p$
0	1
1	0

合取词“并且” (and), 用符号 \wedge 表示。设 p, q 表示两个命题, 那么 $p \wedge q$ 表示 p 和 q 的合取, 即 p 和 q 同时为真时 $p \wedge q$ 为真, 否则 $p \wedge q$ 为假。 $p \wedge q$ 读作“ p 并且 q ”或“ p 且 q ”。表3.2给出了合取词 \wedge 的真值表。

表 3.2 合取词 \wedge 的真值表

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

析取词“或” (or), 用符号 \vee 表示。设 p, q 表示两个命题, 那么 $p \vee q$ 表示 p 和 q 的析取, 即当 p 和 q 有一为真时, $p \vee q$ 为真, 只有当 p 和 q 均为假时 $p \vee q$ 为假。 $p \vee q$ 读作“ p 或

者 q ”“ p 或 q ”。析取词 \vee 的真值表由表3.3确定。

表 3.3 析取词 \vee 的真值表

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

蕴涵词“如果……, 那么……”(if...then...), 用符号 \rightarrow 表示。设 p, q 表示两个命题, 那么 $p \rightarrow q$ 表示命题“如果 p , 那么 q ”。当 p 真而 q 假时, 命题 $p \rightarrow q$ 为假, 否则均认为 $p \rightarrow q$ 为真。符号 \rightarrow 左侧部分称为蕴涵前件, 右侧部分称为蕴涵后件。 $p \rightarrow q$ 读法较多, 可读作“如果 p 则 q ”“ p 蕴涵 q ”“ p 是 q 的充分条件”“ q 是 p 的必要条件”等。数学中还常把 $q \rightarrow p$ 、 $\neg p \rightarrow \neg q$ 、 $\neg q \rightarrow \neg p$ 分别叫作 $p \rightarrow q$ 的逆命题、否命题和逆否命题。蕴涵词 \rightarrow 的真值表由表3.4给出。

表 3.4 蕴涵词 \rightarrow 的真值表

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

如此规定的蕴涵词称为实质蕴涵词, 因为它不要求前件与后件有什么关系。例如“如果 $2+2=4$, 那么雪是黑的”“如果 $2+2=5$, 那么雪是黑的”都是命题, 前者为假, 后者为真。在数学与逻辑学中使用实质蕴涵词是适当且方便的。

双向蕴涵词“当且仅当”(if and only if), 用符号 \leftrightarrow 表示之。设 p, q 为两个命题, 那么 $p \leftrightarrow q$ 表示命题“ p 当且仅当 q ”或“ p 与 q 等价”, 即当 p 与 q 同真值时 $p \leftrightarrow q$ 为真, 否则为假。 $p \leftrightarrow q$ 读作“ p 双向蕴涵 q ”。双向蕴涵词的真值表由表3.5给出。

表 3.5 双向蕴涵词 \leftrightarrow 的真值表

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3.1.2 命题公式及其真值

由命题常元、命题变元和真值联结词可组成适当的表达式, 即命题公式。

定义 3.1 命题公式 (propositional formula) 定义如下:

- (1) 命题常元和命题变元是命题公式, 也称为原子公式。

(2) 如果 A, B 是命题公式, 那么 $(\neg A)$ 、 $(A \wedge B)$ 、 $(A \vee B)$ 、 $(A \rightarrow B)$ 、 $(A \leftrightarrow B)$ 也是命题公式。

(3) 只有有限步引用 (1) 和 (2) 条款所组成的符号串是命题公式。

命题公式简称公式, 常用大写拉丁字母 A, B, C 等表示 (此即所谓语法变元, 表示一个语言成分类)。

为了省略括号, 约定:

- (1) 公式最外层括号可省略。
- (2) 联结词结合力强弱依次为

$$\neg, (\wedge, \vee), \rightarrow, \leftrightarrow$$

这里 \wedge 与 \vee 无优先之别, 它们之间以排列次序定优先。

例如, $\neg p \rightarrow q \vee (r \wedge q \vee \neg s)$ 表示公式:

$$((\neg p) \rightarrow (q \vee ((r \wedge q) \vee (\neg s))))$$

很显然, 给定公式中命题变元的取值, 可以计算出公式的真值。如果公式 A 含有命题变元 p_1, p_2, \dots, p_n , 记为 $A(p_1, p_2, \dots, p_n)$ 。对任意给定的 p_1, p_2, \dots, p_n 的一种取值状况, 称为指派 (assignment), A 均有一个确定的真值。当 A 在指派 α 下取值为真时, 称 α 弄真 A , 表示为 $\alpha(A) = 1$; 反之称 α 弄假 A , 表示为 $\alpha(A) = 0$ 。将公式 A 的所有指派及其对应取值放在一张表中, 即得到该公式的真值表, 如表3.6所示。

例 3.3 公式 $\neg p \rightarrow (q \vee r)$ 的真值表在表3.6中给出。

表 3.6 公式 $\neg p \rightarrow (q \vee r)$ 的真值表

p	q	r	$\neg p$	$q \vee r$	$\neg p \rightarrow (q \vee r)$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1

定义 3.2 公式 A 称为永真式或重言式 (tautology), 如果对任意指派 α , α 均弄真 A , 即 $\alpha(A) = 1$ 。公式 A 称为可满足的 (satisfiable), 如果存在指派 α 使 $\alpha(A) = 1$, 否则称 A 为不可满足的 (unsatisfiable), 或永假式。

很显然, 永真式是可满足的。当 A 为永真式 (或永假式) 时, $\neg A$ 为永假式 (或永真式)。永真式反映了人的思维规律, 当然是我们关注的要点。

下列永真式是重要的 (读者可自行验证), 其中 A, B, C 为语法变元, 表示任意公式。

T1. $A \vee \neg A$ 。

T2. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ 。

$$\text{T3. } A \rightarrow (A \vee B), \quad B \rightarrow (A \vee B)。$$

$$\text{T4. } (A \wedge B) \rightarrow A, \quad (A \wedge B) \rightarrow B。$$

$$\text{T5. } A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B。$$

$$\text{T6. } (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)。$$

$$\text{T7. } (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))。$$

$$\text{T8. } \neg(\neg A) \leftrightarrow A。$$

$$\text{T9. } A \vee A \leftrightarrow A, \quad A \wedge A \leftrightarrow A。$$

$$\text{T10. } A \vee B \leftrightarrow B \vee A, \quad A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A。$$

$$\text{T11. } A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C), \quad (B \vee C) \wedge A \leftrightarrow (B \wedge A) \vee (C \wedge A)。$$

$$\text{T12. } A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C), \quad (B \wedge C) \vee A \leftrightarrow (B \vee A) \wedge (C \vee A)。$$

$$\text{T13. } \neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B。$$

$$\text{T14. } A \vee (A \wedge B) \leftrightarrow A, \quad A \wedge (A \vee B) \leftrightarrow A。$$

$$\text{T15. } (A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)。$$

$$\text{T16. } (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C)。$$

$$\text{T17. } (A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)。$$

$$\text{T18. } (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)。$$

$$\text{T19. } (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)。$$

$$\text{T20. } A \vee t \leftrightarrow t, \quad A \wedge t \leftrightarrow A, \quad A \vee f \leftrightarrow A, \quad A \wedge f \leftrightarrow f。$$

定义 3.3 称公式 A 逻辑蕴涵 (logically imply) 公式 B , 记为 $A \models B$, 如果所有弄真 A 的指派亦必弄真 B 。称公式集 Γ 逻辑蕴涵公式 B , 记为 $\Gamma \models B$, 如果弄真 Γ 中所有公式的指派亦必弄真 B 。

显然 $A \models B$ 当且仅当 $A \rightarrow B$ 为永真式。当 $\Gamma = \{A\}$ 时, $\Gamma \models B$ 即 $A \models B$; 当 $\Gamma = \emptyset$ 时, $\Gamma \models B$ 可表示为 $\models B$, 根据定义 3.3, $\models B$ 当且仅当 B 永真 (当 $\Gamma = \emptyset$ 时, 一切指派均弄真 Γ 中所有公式)。永真式 T1~T7 可表示为逻辑蕴涵式, 例如 T1、T2 和 T5 可分别表示为如下逻辑蕴涵式:

$$\begin{aligned} &\models A \vee \neg A \\ &A \models B \rightarrow A \\ &\{A, A \rightarrow B\} \models B \end{aligned}$$

定义 3.4 称公式 A 逻辑等价 (logically equivalent) 于公式 B , 记为 $A \equiv B$, 如果 $A \models B$ 且 $B \models A$ 。

不难明白, $A \equiv B$ 当且仅当 $A \leftrightarrow B$ 为永真式。因此, T8~T20 可表示为逻辑等价式, 例如 T8、T15 和 T16 可分别表示为如下逻辑等价式:

$$\begin{aligned} &\neg(\neg A) \equiv A \\ &A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B \\ &A \rightarrow (B \rightarrow C) \equiv (A \wedge B) \rightarrow C \end{aligned}$$

关于永真式、逻辑蕴涵式及逻辑等价式有以下基本事实。

定理 3.1 设 A 为含有命题变元 p 的永真式, 那么将 A 中 p 的所有出现均代换为命题公式 B , 所得公式 (称为 A 的代入实例) 仍为永真式。

定理3.1不证自明，它常被称为**代入原理**（principle of substitution）。

定理 3.2 设命题公式 A 含有子公式 C (C 为 A 中的符号串，且 C 为命题公式)，如果 $C \models D$ ，那么将 A 中子公式 C 的某些出现（未必全部）用 D 替换后所得公式 B 满足 $A \models B$ 。

定理3.2常被称为**替换原理**（principle of replacement），它也不难理解，证明略。

定理 3.3 逻辑蕴涵关系具有自反性、反对称性及传递性，即逻辑蕴涵关系为序关系（此处，将互相逻辑等价的公式看作同一公式）；逻辑等价关系满足自反性、对称性和传递性，即逻辑等价关系为等价关系。

容易证明，对任意公式 A, B, C 有：

- (1) $A \models A, A \models A$ 。
- (2) 若 $A \models B, B \models A$ 则 $A \models B$ 。
- (3) 若 $A \models B$ 则 $B \models A$ 。
- (4) 若 $A \models B$ (或 $A \models B$) 且 $B \models C$ (或 $B \models C$)，则 $A \models C$ (或 $A \models C$)。

3.1.3 范式

由于逻辑等价关系为等价关系，因而可依据其对公式集进行分类。那么每一类相互等价的公式中可否选出一个形式上较为“规范”的公式作为代表呢？回答是肯定的。这就是本节要介绍的所谓范式。

定义 3.5 命题公式 B 称为命题公式 A 的**合取范式**（conjunctive normal form）或**析取范式**（disjunctive normal form），如果 $B \models A$ ，且 B 呈如下形式：

$$C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_m \text{ (合取范式) 或 } C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_m \text{ (析取范式)}$$

其中 $C_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 称为 B 的**子句**（clause）。若 B 为合取范式，则 C_i 形如 $L_1 \vee L_2 \vee \cdots \vee L_n$ ；若 B 为析取范式，则 C_i 形如 $L_1 \wedge L_2 \wedge \cdots \wedge L_n$ 。 $L_j (j = 1, 2, \cdots, n)$ 为原子公式或原子公式的否定，称 L_j 为子句的**文字**（literal）。

定理 3.4 对任意命题公式 ϕ ，均可作出它的合取（或析取）范式。

证明 对任意命题公式 ϕ 可如下作出其合取（或析取）范式：

(1) 利用逻辑等价式 $A \rightarrow B \models \neg A \vee B$, $A \leftrightarrow B \models (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ 的代入实例，对公式 ϕ 的子公式作替换，消除其中联结词 $\rightarrow, \leftrightarrow$ ，得 $\phi', \phi \models \phi'$ 。

(2) 利用逻辑等价式 $\neg(A \vee B) \models \neg A \wedge \neg B$, $\neg(A \wedge B) \models \neg A \vee \neg B$ 的代入实例，对公式 ϕ' 的子公式作替换，将“ \neg ”深入原子命题前，得 $\phi'', \phi \models \phi''$ 。

(3) 利用逻辑等价式 $\neg(\neg A) \models A$ 的代入实例，对公式 ϕ'' 的子公式作替换，消除“ $\neg\neg$ ”，得 $\phi''', \phi \models \phi'''$ 。

(4) 利用逻辑等价式 $A \vee (B \wedge C) \models (A \vee B) \wedge (A \vee C)$, $A \wedge (B \vee C) \models (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ 的代入实例，对 ϕ''' 的子公式作替换，即得 ϕ 的合取（或析取）范式（必要时利用其他逻辑等价式对其进行简化）。 ■

例 3.4 作出 $(p \wedge q) \rightarrow (\neg q \wedge r)$ 的合取范式和析取范式。

$$\begin{aligned} (p \wedge q) \rightarrow (\neg q \wedge r) &\models \neg(p \wedge q) \vee (\neg q \wedge r) \\ &\models (\neg p \vee \neg q) \vee (\neg q \wedge r) \\ &\models (\neg p \vee \neg q \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \end{aligned}$$

$$\models (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \quad (\text{合取范式})$$

$$\models (\neg p) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge r) \vee (\neg q) \vee (\neg q \wedge r) \quad (\text{析取范式})$$

$$\models \neg p \vee \neg q \quad (\text{简化式})$$

注意, 合取(或析取)范式并不唯一。例如, 上例中作出原式的两个合取范式及两个析取范式, 简化式 $\neg p \vee \neg q$ 既是原式的合取范式(一个析取子句), 又是原式的析取范式(两个单文字子句的析取)。这不能不说是合取(或析取)范式的缺陷。为此可以引入主合取(或主析取)范式的概念。

定义 3.6 命题公式 B 称为公式 A 的主合取范式 (major conjunctive normal form) 或主析取范式 (major disjunctive normal form), 如果

(1) B 是 A 的合取(或析取)范式。

(2) B 中每一子句均有 A 中命题变元、命题常元(不同于 t 、 f) 的全部出现, 且仅出现一次。

例 3.5 (例3.4续) 作出 $(p \wedge q) \rightarrow (\neg q \wedge r)$ 的主合取范式、主析取范式。

$$(p \wedge q) \rightarrow (\neg q \wedge r) \models \neg p \vee \neg q$$

$$\models \neg p \vee \neg q \vee (r \wedge \neg r)$$

$$\models (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \quad (\text{主合取范式})$$

$$(p \wedge q) \rightarrow (\neg q \wedge r) \models \neg p \vee \neg q$$

$$\models (\neg p \wedge (q \vee \neg q) \wedge (r \vee \neg r)) \vee$$

$$((p \vee \neg p) \wedge \neg q \wedge (r \vee \neg r))$$

$$\models (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee$$

$$(\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee$$

$$(p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \quad (\text{主析取范式})$$

容易发现, 由公式的主合取范式可直接写出公式的弄假指派, 因为弄假一个合取项(一个子句)的指派, 必定弄假该公式。例如, 例3.5中的公式应有弄假指派 $(1, 1, 0)$ (它弄假子句 $\neg p \vee \neg q \vee r$) 以及 $(1, 1, 1)$ (它弄假子句 $\neg p \vee \neg q \vee \neg r$)。反之, 当已知一公式的弄假指派, 可直接写出其主合取范式。设 α 为弄假指派, 那么当 $\alpha(p) = 1$ 时, 对应子句中应有文字 $\neg p$, 当 $\alpha(p) = 0$ 时, 对应子句中应有文字 p 。例如弄假指派 $\alpha(1, 1, 0)$ 对应子句为 $\neg p \vee \neg q \vee r$ 。

另外, 由公式的主析取范式可直接写出公式的弄真指派, 因为弄真一个析取项(一个子句)的指派, 必定弄真该公式。例如, 例3.5中的公式应有弄真指派 $(0, 1, 1)$ 、 $(0, 0, 1)$ 、 $(0, 1, 0)$ 、 $(0, 0, 0)$ 、 $(1, 0, 1)$ 、 $(1, 0, 0)$, 它们分别弄真子句 $(\neg p \wedge q \wedge r)$ 、 $(\neg p \wedge \neg q \wedge r)$ 、 $(\neg p \wedge q \wedge \neg r)$ 、 $(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$ 、 $(p \wedge \neg q \wedge r)$ 、 $(p \wedge \neg q \wedge \neg r)$ 。同样, 当已知一公式的弄真指派, 可直接写出其主析取范式。若 α 为弄真指派, 那么当 $\alpha(p) = 1$ 时, 对应子句中应有文字 p , 当 $\alpha(p) = 0$ 时, 对应子句中应有文字 $\neg p$, 例如弄真指派 $\alpha(0, 1, 1)$ 对应子句为 $(\neg p \wedge q \wedge r)$ 。

由以上讨论我们还发现: 永真式没有弄假指派, 因而无法写出它的主合取范式; 而永假式没有弄真指派, 因而无法写出它的主析取范式。为此约定, 永真式的主合取范式为 t , 永假式的主析取范式为 f 。于是, 每一公式都有且仅有一个主合取范式(被它的弄假指派

唯一地确定), 都有且仅有一个主析取范式 (被它的弄真指派唯一地确定)。更有甚者, 我们有:

定理 3.5 n 元命题公式的全体可以划分为 2^{2^n} 个等价类, 每一类中的公式相互逻辑等价, 并等价于它们公共的主合取范式 (或主析取范式)。

证明 n 个命题变元的公式的真值表必为 2^n 行 (对应 2^n 种可能指派), 对每一行 (一种指派), 公式有两种取值可能, 因而不同的 n 元公式的真值表恰有 2^{2^n} 个。每一真值表的弄假指派 (或弄真指派) 对应一个主合取范式 (或主析取范式)。因此, 所有具有同样真值表的公式 (相互等价) 都等价于这一主合取范式 (或主析取范式)。 ■

图3.1为定理3.5的示意图。

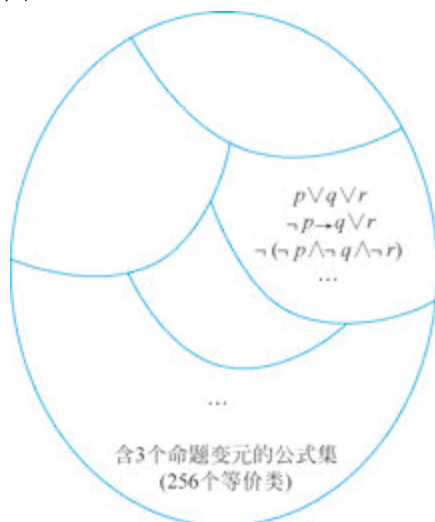


图 3.1 命题公式等价类示意

3.1.4 联结词的扩充与规约

我们仅讨论一元联结词和二元联结词。

据 3.1.3 节的讨论知, n 个命题变元的真值表可以有 2^{2^n} 个, 因而可以定义 $2^{2^1} = 4$ 个一元联结词和 $2^{2^2} = 16$ 个二元联结词, 但至此我们只讨论了 1 个一元联结词 \neg 和 4 个二元联结词 \wedge 、 \vee 、 \rightarrow 和 \leftrightarrow 。表 3.7 给出了全部 4 个一元联结词, 其中 Δ_1 、 Δ_4 为常联结词, Δ_2 为么联结词, Δ_3 是否定词 \neg , 即对任意命题 p :

$$\Delta_1(p) \vdash f, \Delta_4(p) \vdash t, \Delta_2(p) \vdash p, \Delta_3(p) \vdash \neg p$$

表 3.7 所有一元联结词

p	$\Delta_1(p)$	$\Delta_2(p)$	$\Delta_3(p)$	$\Delta_4(p)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

表 3.8 给出了 16 个二元联结词, 分别标记为 $*_1, *_2, \dots, *_{16}$, 对任意命题 p, q :

$$p *_1 q \vdash f, p *_{16} q \vdash t$$

即 $*_1, *_6$ 为常联结词;

$$p *_4 q \vdash p, p *_6 q \vdash q$$

即 $*_4, *_6$ 为投影联结词;

$$p *_{13} q \vdash \neg p, p *_{11} q \vdash \neg q$$

即 $*_{13}, *_{11}$ 为二元否定词;

$$p *_9 q \vdash \neg(p \vee q)$$

$*_9$ 称为“或非词”，常用记号 \downarrow 表示，也称 \downarrow 为皮尔斯 (Peirce) 记号， $p \downarrow q \vdash \neg(p \vee q)$;

$$p *_{15} q \vdash \neg(p \wedge q)$$

$*_{15}$ 称为“与非词”，常用记号 \uparrow 表示，也称 \uparrow 为谢费尔 (Sheffer) 记号， $p \uparrow q \vdash \neg(p \wedge q)$;

$$p *_3 q \vdash \neg(p \rightarrow q), p *_5 q \vdash \neg(q \rightarrow p)$$

即 $*_3, *_5$ 为“蕴涵否定词”，可表示为 \leftrightarrow ;

$$p *_7 q \vdash (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q) \vdash \neg(p \leftrightarrow q)$$

$*_7$ 称为“异或词”，常用记号 $\bar{\vee}$ (或 \oplus) 表示， $p \bar{\vee} q \vdash p \oplus q \vdash \neg(p \leftrightarrow q)$ 。异或词即所谓的“不可兼或”联结词，它可以用 \vee, \wedge, \neg 来表示。

表 3.8 所有二元联结词

p	q	$*_1$	$*_2$	$*_3$	$*_4$	$*_5$	$*_6$	$*_7$	$*_8$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
p	q	$*_9$	$*_{10}$	$*_{11}$	$*_{12}$	$*_{13}$	$*_{14}$	$*_{15}$	$*_{16}$
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

此外， $*_2$ 为 \wedge 、 $*_8$ 为 \vee 、 $*_{12}$ 与 $*_{14}$ 为 \rightarrow 、 $*_{10}$ 为 \leftrightarrow 。

上述讨论一方面表明，可以将联结词扩充得更多；另一方面也表明，如果不增加变元个数，所有可能的扩充都不会带来实质性的收获，因为它们都可以用先前的5个联结词来表示。

定义 3.7 称 n 元联结词 h 是由 m 个联结词 g_1, g_2, \dots, g_m 可表示的 (representable)，如果 $h(p_1, p_2, \dots, p_n) \vdash A$ ，而 A 中所含联结词仅取自 g_1, g_2, \dots, g_m 。

显然，所有一元、二元联结词全都是 \neg, \vee, \wedge 可表示的。

定义 3.8 当联结词组 $\{g_1, g_2, \dots, g_m\}$ 可表示所有一元、二元联结词时，称其为完备联结词组 (complete set of connectives)。

当然， $\{\neg, \vee, \wedge\}$ 为一完备联结词组。事实上 $\{\neg, \vee\}$ 与 $\{\neg, \wedge\}$ 都是完备联结词组，因为

用 \neg, \vee 可表示 \wedge , 用 \neg, \wedge 也可表示 \vee :

$$p \wedge q \vdash \neg(\neg p \vee \neg q)$$

$$p \vee q \vdash \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

此外, $\{\neg, \rightarrow\}$ 、 $\{\Delta_1, \rightarrow\}$ 也都是完备联结词组, 因为

$$p \vee q \vdash \neg(\neg p \rightarrow q)$$

$$\neg p \vdash p \rightarrow \Delta_1(p) \quad (\Delta_1(p) \vdash f)$$

但是 $\{\vee, \wedge\}$ 并不是完备联结词组, 因为用 \vee, \wedge 无法表示 $\neg p$ (p 为真时 $\neg p$ 为假, 而由 p 及 \vee, \wedge 组成的任何公式, 当 p 真时恒为真)。

值得指出的是, $\{\uparrow\}$ 、 $\{\downarrow\}$ 都是完备联结词组。我们不难验证

$$\neg p \vdash \neg(p \vee p) \vdash p \downarrow p$$

$$p \vee q \vdash \neg\neg(p \vee q) \vdash \neg(p \downarrow q) \vdash (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$$

因此由 \downarrow 可表示 \neg, \vee , 而 $\{\neg, \vee\}$ 是完备的, 因而 $\{\downarrow\}$ 也是完备的。 $\{\uparrow\}$ 的完备性留给读者证明。

事实上, 上述“联结词完备”概念可推广到任意 n 元联结词上, 即以上指出的完备的联结词组 (例如 \neg, \rightarrow) 可表示任意 n 元联结词。证明这一点并不困难, 只要对 n 进行归纳。 $n = 1$ 时已经在上文中证得。令 $n = k + 1$, $*$ 为 n 元联结词, 其真值表如表 3.9 所示。

表 3.9 n 元联结词 $*$ 的真值表

	p_1	p_2	\cdots	p_k	p_{k+1}	$*(p_2, p_3, \cdots, p_{k+1})$	表 达 式
2^k 行	0	0	\cdots	0	0	x_1	A
	0	0	\cdots	0	1	x_2	
	\vdots	\vdots		\vdots	\vdots	\vdots	
	0	1	\cdots	1	1	x_{2^k}	
2^k 行	1	0	\cdots	0	0	x_{2^k+1}	B
	1	0	\cdots	0	1	x_{2^k+2}	
	\vdots	\vdots		\vdots	\vdots	\vdots	
	1	1	\cdots	1	1	$x_{2^{k+1}}$	

以黑色实线为分隔, 表 3.9 可视为一个 3 行 4 列的结构, 其中第 2 行的第 2、3 列和第 3 行的第 2、3 列分别定义了两个 k 元联结词。表中第 2 行第 2 列是 k 个命题变元对应的 2^k 个指派, 第 2 行第 3 列是这 2^k 个指派对应的真值。因此, 第 2 行第 2、3 列合起来可看作一个 k 元联结词的真值表; 同理, 第 3 行第 2、3 列亦可看作一个 k 元联结词的真值表。据归纳假设, 它们可由 \neg, \rightarrow 表示, 其表达式分别记为 A 、 B 。于是表 3.9 所定义的 n 元联结词表示为

$$(\neg p_1 \rightarrow A) \wedge (p_1 \rightarrow B)$$

注意, 当 p_1 为假时, $\neg p_1 \rightarrow A$ 等价于 A ; 当 p_1 为真时, $p_1 \rightarrow B$ 等价于 B 。而此式又可表示为

$$\neg((\neg p_1 \rightarrow A) \rightarrow \neg(p_1 \rightarrow B))$$

这表明上述 n 元 ($k+1$ 元) 联结词可由 \neg 、 \rightarrow 表示。归纳完成。

✿ 3.2 命题演算形式系统 PC

从本节开始, 将介绍命题演算的形式系统 (formal system), 即将命题演算完全符号化、抽象公理化的推理系统。如绪论中所说, 形式化是现代逻辑学的基本特性, 而形式系统是现代逻辑学的重要工具, 数理逻辑正是通过形式化过程和对形式系统的研讨完成对思维规律或其他对象理论的研究。我们先介绍一个简明的命题演算形式系统 (propositional calculus, PC), 它只使用两个命题联结词 $\{\neg, \rightarrow\}$ (该联结词组是完备的), 这使理论讨论更为简洁。稍后再介绍一个更实用的自然演绎系统 (natural deduction, ND)。

3.2.1 PC 系统的组成

命题演算形式系统 PC 由以下两个部分组成。

1. 语言部分

符号表 $\Sigma = \{(\ , \neg, \rightarrow, p_1, p_2, \dots)\}$, 其中 (与) 是技术符号——括号; p_1, p_2, \dots 为命题变元。公式的定义如下:

- (1) p_1, p_2, \dots 为 (原子) 公式。
- (2) 如果 A 、 B 是公式, 那么 $(\neg A)$ 、 $(A \rightarrow B)$ 也是公式。
- (3) 除此之外没有别的东西是公式。

公式中括号的省略法则同前。

2. 推理部分

包括以下三个公理模式:

- A1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ 。
- A2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ 。
- A3. $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$ 。

其推理规则只有一个, 称为分离规则 (modus ponens):

$$\text{r}_{\text{mp}} \cdot \frac{A, A \rightarrow B}{B}$$

3.2.2 PC 中的推理

定义 3.9 称下列公式序列为公式 A 在 PC 中的一个证明 (proof):

$$A_1, A_2, \dots, A_m (= A)$$

其中 $A_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 或者是 PC 的公理, 或者是 $A_j (j < i)$, 或者是由 A_j 、 $A_k (j, k < i)$ 使用分离规则导出的, 而 A_m 即公式 A 。

定义 3.10 称 A 为 PC 中的定理, 记为 $\vdash_{\text{PC}} A$, 如果公式 A 有一个 PC 中的证明。

定义 3.11 设 Γ 为一公式集, 称以下公式序列为以 Γ 为前提的公式 A 的演绎 (deduction):

$$A_1, A_2, \dots, A_m (= A)$$

其中 $A_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 或者是 PC 的公理, 或者是 Γ 的成员, 或者是 $A_j (j < i)$, 或者是由 A_j 、 $A_k (j, k < i)$ 使用分离规则导出的, 而 A_m 即公式 A 。

定义 3.12 称 A 为前提 Γ 的**演绎结果** (deduction consequence), 记为 $\Gamma \vdash_{\text{PC}} A$, 如果公式 A 有以 Γ 为前提的演绎。若 $\Gamma = \{B\}$, 则用 $B \vdash_{\text{PC}} A$ 表示 $\Gamma \vdash_{\text{PC}} A$ 。若 $B \vdash_{\text{PC}} A$, $A \vdash_{\text{PC}} B$, 则记为 $A \vdash B$ 称 A 与 B 演绎等价。

以下是 PC 中证明和演绎的一些例子。

例 3.6 证明 $A \rightarrow A$ 是 PC 的定理。

证明 $A \rightarrow A$ 的证明序列如下:

- | | |
|---|-------------------------|
| (1) $(A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$ | 公理 A2 |
| (2) $A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$ | 公理 A1 |
| (3) $(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$ | r_{mp} (1) (2) |
| (4) $A \rightarrow (A \rightarrow A)$ | 公理 A1 |
| (5) $A \rightarrow A$ | r_{mp} (3) (4) |

■

例 3.7 证明 $\vdash_{\text{PC}} \neg B \rightarrow (B \rightarrow A)$ 。

证明 $\vdash_{\text{PC}} \neg B \rightarrow (B \rightarrow A)$ 的证明序列如下:

- | | |
|--|-------------------------|
| (1) $\neg B \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$ | 公理 A1 |
| (2) $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$ | 公理 A3 |
| (3) $((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (\neg B \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)))$ | 公理 A1 |
| (4) $\neg B \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A))$ | r_{mp} (2) (3) |
| (5) $(\neg B \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A))) \rightarrow ((\neg B \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)) \rightarrow (\neg B \rightarrow (B \rightarrow A)))$ | 公理 A2 |
| (6) $(\neg B \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)) \rightarrow (\neg B \rightarrow (B \rightarrow A))$ | r_{mp} (4) (5) |
| (7) $\neg B \rightarrow (B \rightarrow A)$ | r_{mp} (1) (6) |

■

例 3.8 证明 A 是 $\neg\neg A$ 的演绎结果, 即证明 $\neg\neg A \vdash_{\text{PC}} A$ 。

证明 由 $\neg\neg A$ 出发的 A 的演绎序列如下:

- | | |
|---|-------------------------|
| (1) $\neg\neg A$ | 前提 |
| (2) $\neg\neg A \rightarrow (\neg\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A)$ | 公理 A1 |
| (3) $\neg\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A$ | r_{mp} (1) (2) |
| (4) $(\neg\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg\neg\neg\neg A)$ | 公理 A3 |
| (5) $\neg A \rightarrow \neg\neg\neg\neg A$ | r_{mp} (3) (4) |
| (6) $(\neg A \rightarrow \neg\neg\neg\neg A) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow A)$ | 公理 A3 |
| (7) $\neg\neg A \rightarrow A$ | r_{mp} (5) (6) |
| (8) A | r_{mp} (1) (7) |

■

关于 PC 再作一些说明。

(1) PC 中的语言部分即所谓对象语言。由于它只讨论命题, 不涉及个体, 因而语言中只有“公式”, 没有“项”的概念。本章对 PC 的讨论, 如“证明”“演绎”等术语, 均属于

元语言的范畴。公理及规则模式中的 A, B, C 表示任意公式，为语法变元。

(2) 在PC中仍可引入其他联结词，但不作为PC固有语言成分，而是定义的缩记符。例如用 $A \vee B$ 缩记 $\neg A \rightarrow B$ ， $A \wedge B$ 缩记 $\neg(A \rightarrow \neg B)$ 。

对PC语法的研究表明该系统具有如下元定理。

定理 3.6 (演绎定理) 对PC中任意公式集 Γ 和公式 A, B ， $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\text{PC}} B$ 当且仅当 $\Gamma \vdash_{\text{PC}} A \rightarrow B$ 。

证明 下文将 $\Gamma \cup \{A\}$ 简记为 $\Gamma; A$ ，将 \vdash_{PC} 省略为 \vdash 。

充分性是易证的。设 $A_1, A_2, \dots, A_n (= A \rightarrow B)$ 是由 Γ 推出 $A \rightarrow B$ 的演绎，那么 $A_1, A_2, \dots, A_n, A, B$ 就是 $\Gamma; A \vdash B$ 的演绎。因此 $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ 蕴涵 $\Gamma; A \vdash B$ 。

为证必要性，将证明目标一般化为“对任意正整数 m ，任意公式 C ，如果 $\Gamma; A \vdash C$ 的演绎序列长度为 m ，则 $\Gamma \vdash A \rightarrow C$ ”。针对这一目标，对正整数 m 进行归纳，用第二数学归纳法。

假设 $m < k$ (其中 $1 \leq k$) 时，“对任意正整数 m ，任意公式 C ，如果 $\Gamma; A \vdash C$ 的演绎序列长度为 m ，则 $\Gamma \vdash A \rightarrow C$ ”成立。现在考虑 $m = k$ 。设 C 为任意公式， $\Gamma; A \vdash C$ 的证明序列为 $C_1, C_2, \dots, C_k (= C)$ 。分情况讨论如下：

(1) C 为公理，或 $C \in \Gamma$ 。可如下构造由 Γ 推出 $A \rightarrow C$ 的演绎：

$$C, C \rightarrow (A \rightarrow C) (\text{公理}), A \rightarrow C$$

(2) $C = A$ 。此时 $A \rightarrow C$ 即为 $A \rightarrow A$ 。由于 $A \rightarrow A$ 为PC的一个定理 (例3.6)，因此 $A \rightarrow A$ 的证明便是由 Γ 推出 $A \rightarrow A$ 的演绎。

(3) 若不是 (1) 和 (2)，则必有 $k > 1$ ，此时又分两种情况：

① C 为序列前面出现过的某个公式 $C_j (1 \leq j < k)$ ，那么根据归纳假设，有 $\Gamma \vdash A \rightarrow C_j$ ($\Gamma; A \vdash C_j$ 的演绎序列长度小于 k)，从而 $\Gamma \vdash A \rightarrow C$ 。

② C 为 C_i 和 $C_j (1 \leq i, j < k)$ 用分离规则导出 (那么 C_j 必为 $C_i \rightarrow C$ 形式)。根据归纳假设有 $\Gamma \vdash A \rightarrow C_i$ 、 $\Gamma \vdash A \rightarrow (C_i \rightarrow C)$ ，连接这两个演绎并继续推导，便可得到如下由 Γ 推出 $A \rightarrow C$ 的演绎：

$$\begin{aligned} & \dots\dots \\ (1) & A \rightarrow C_i \\ & \dots\dots \\ (m) & A \rightarrow (C_i \rightarrow C) \\ (m+1) & (A \rightarrow (C_i \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow C_i) \rightarrow (A \rightarrow C)) && \text{公理 A2} \\ (m+2) & (A \rightarrow C_i) \rightarrow (A \rightarrow C) && \Gamma_{\text{mp}} (m) (m+1) \\ (m+3) & A \rightarrow C && \Gamma_{\text{mp}} (1) (m+2) \end{aligned}$$

综上， $m = k$ 时，“对任意正整数 m ，任意公式 C ，如果 $\Gamma; A \vdash C$ 的演绎序列长度为 m ，则 $\Gamma \vdash A \rightarrow C$ ”成立。归纳完成。

由于任意演绎序列的长度一定是正整数，将“对任意正整数 m ，任意公式 C ，如果 $\Gamma; A \vdash C$ 的演绎序列长度为 m ，则 $\Gamma \vdash A \rightarrow C$ ”中的 C 取为 B ，即得“如果 $\Gamma; A \vdash B$ ，则 $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ ”，必要性得证。演绎定理证毕。 ■

定理 3.7 (假言三段论)(hypothetical syllogism) 对PC中任意公式 A 、 B 、 C ，有

$$\{A \rightarrow B, B \rightarrow C\} \vdash_{\text{PC}} A \rightarrow C$$

证明 PC中存在以下演绎序列：

(1) $A \rightarrow B$	前提
(2) $B \rightarrow C$	前提
(3) A	前提
(4) B	r_{mp} (1) (3)
(5) C	r_{mp} (2) (4)

因此， $\{A \rightarrow B, B \rightarrow C, A\} \vdash_{\text{PC}} C$ 。

根据演绎定理，有 $\{A \rightarrow B, B \rightarrow C\} \vdash_{\text{PC}} A \rightarrow C$ 。证毕。 ■

以下将假言三段论简称为HS导出规则。

从前面的例子可以看出，PC中的证明是很烦琐的。为了避免这种烦琐，可以采用几种办法：一种办法是引用前面已证定理，另一种办法是使用元定理。

例 3.9 证明对PC中任意公式 A ， $\vdash_{\text{PC}} (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ 。

证明

(1) $\neg A \rightarrow A$	前提
(2) $\neg A \rightarrow (\neg\neg(\neg A \rightarrow A) \rightarrow \neg A)$	公理 A1
(3) $(\neg\neg(\neg A \rightarrow A) \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow A))$	公理 A3
(4) $\neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow A))$	HS (2) (3)
(5) $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow A))) \rightarrow ((\neg A \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow A)))$	公理 A2
(6) $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow A))$	r_{mp} (4) (5)
(7) $\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow A)$	r_{mp} (1) (6)
(8) $(\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow A)) \rightarrow ((\neg A \rightarrow A) \rightarrow A)$	公理 A3
(9) $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$	r_{mp} (7) (8)
(10) A	r_{mp} (1) (9)

因此， $\neg A \rightarrow A \vdash_{\text{PC}} A$ 。根据演绎定理，有 $\vdash_{\text{PC}} (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ 。

证毕。 ■

3.2.3 PC的语义

对PC的语义规定已在3.1节中给出，即有关指派的概念以及在给定指派下命题公式真值的规定。不难看出A1、A2、A3三公理都是永真式，而分离规则具有“保真性”，即任意弄真 A 和 $A \rightarrow B$ 的指派必定弄真 B （从而当 A ， $A \rightarrow B$ 永真时， B 也永真）。

关于PC语义的研究包括永真式的研究、与永真式概念相关的重要原理（代入原理、替换原理等）的讨论，其主要结果都已在3.1节中列出。

关于PC的语义与语法关系的研究，是命题演算元理论的主要组成部分。

3.2.4 关于PC的重要元定理

定理 3.8 (合理性定理) PC是合理的(sound)，即对任意公式集 Γ 及公式 A ，若 $\Gamma \vdash A$ ，则 $\Gamma \models A$ 。特别地，若 A 为PC的定理($\vdash A$)，则 A 永真($\models A$)。

证明 设 α 为弄真 Γ 中所有公式的任意指派, 需要证明 α 同样弄真 A 。为方便起见, 我们将证明目标一般化为“对任意正整数 m 和任意公式 B , 如果 $\Gamma \vdash B$ 的演绎序列长度为 m , 则 α 将弄真 B ”。针对这一目标, 对正整数 m 进行归纳, 用第二数学归纳法。

假设 $m < k (1 \leq k)$ 时, “对任意公式 B , 如果 $\Gamma \vdash B$ 的演绎序列长度为 m , 则 α 将弄真 B ”成立。现在考虑 $m = k$ 。设 B 为任意公式, $\Gamma \vdash B$ 的演绎序列为 $B_1, B_2, \dots, B_k = B$ 。分情况讨论如下:

(1) 若 B_k 为公理或 Γ 中成员, 显然 $\alpha(B_k) = 1$ 。

(2) 若(1)不成立, 则必有 $k > 1$, 此时又分两种情况:

① B_k 为序列前面出现过的某个公式 $B_j (1 \leq j < k)$, 那么根据归纳假设有 $\alpha(B_j) = 1$ ($\Gamma \vdash B_j$ 的演绎序列长度小于 k), 从而 $\alpha(B_k) = 1$ 。

② B_k 为 B_i 和 $B_j (1 \leq i, j < k)$ 由分离规则导出, 那么由 $\alpha(B_i) = \alpha(B_j) = 1$ (归纳假设)及分离规则的保真性, 可得 $\alpha(B_k) = 1$ 。

综上, α 必弄真 B 。目标得证。

将“对任意正整数 m 和任意公式 B , 如果 $\Gamma \vdash B$ 的演绎序列长度为 m , 则 α 将弄真 B ”中的 B 取作 A , 可知 α 弄真 A 成立。合理性 (又称为可靠性) 定理证毕。 ■

下面我们引入几个概念, 这些概念在本章接下来和以后各章节的讨论中会经常用到。

定义 3.13 PC的理论 (theory) 指如下集合:

$$\text{Th(PC)} = \{A \mid \vdash_{\text{PC}} A\}$$

PC基于前提 Γ 的扩充 (extension) 指:

$$\text{Th(PC} \cup \Gamma) = \{A \mid \Gamma \vdash_{\text{PC}} A\}$$

定义 3.14 设 Γ 为任意公式集合:

(1) 称 Γ 为**一致的** (consistent), 如果不存在公式 A , 使得 $\Gamma \vdash_{\text{PC}} A$ 与 $\Gamma \vdash_{\text{PC}} \neg A$ 同时成立。

(2) 称 Γ 为**完全的** (syntactically complete), 如果对任意公式 A , $A \in \Gamma$ 与 $\neg A \in \Gamma$ 中至少有一个成立。

(3) 称 Γ 为**可满足的** (satisfiable), 如果存在指派 α 弄真 A 中每一个公式。

以上“理论”“扩充”“一致的”“完全的”仅与PC系统内的推理有关, 是语法层面的概念; “可满足的”与指派和命题的真值有关, 是语义层面的概念。

不难看出, PC的理论 Th(PC) 是PC所有定理的集合, 也是PC基于前提 \emptyset 的扩充 $\text{Th(PC} \cup \emptyset)$; 任意公式集 Γ 一致当且仅当 $\text{Th(PC} \cup \Gamma)$ 不含有互为否定的公式 A 和 $\neg A$; Γ 完全当且仅当对任意公式 A , Γ 中至少含有 A 或 $\neg A$ 。

由于PC基于前提 Th(PC) 的扩充仍是 Th(PC) , 因此判断 Th(PC) 是否一致可通过分析 Th(PC) 中是否含有互为否定的公式 A 和 $\neg A$ 确定, 对此我们有下面的结论 (注意这里将 Th(PC) 的一致性、完全性简称为PC的一致性、完全性):

定理 3.9 PC是一致的, 即不存在公式 A , 使得 A 与 $\neg A$ 均为PC之定理。

证明 若不然, 设有 A 使 $\vdash A$, $\vdash \neg A$ 同时成立, 于是有 $\models A$ 和 $\models \neg A$ (据定理3.8), 但这是不可能的 (与永真性概念相悖)。 ■

定理 3.10 PC不是完全的, 即存在公式 A , 使得 A 与 $\neg A$ 均不为PC之定理。

证明 对命题变元 p_1 , $\vdash p_1$ 和 $\vdash \neg p_1$ 均不真, 否则 $\models p_1$ 或 $\models \neg p_1$ 之一为真, 这与 p_1 为命题变元的事实相矛盾。 ■

定理 3.11 PC 的不一致扩充必定是完全的, 但至少有一公式不是 PC 的一致扩充的定理。具体而言, 当公式集 Γ 不一致时, 扩充 $\text{Th}(\text{PC} \cup \Gamma)$ 是完全的; 当 Γ 一致时, 至少有一公式 A 使得

$$A \notin \text{Th}(\text{PC} \cup \Gamma) \text{ (即 } \Gamma \not\vdash A \text{)}$$

证明 设 Γ 不一致, 则有公式 A , 使得 $\Gamma \vdash A$ 和 $\Gamma \vdash \neg A$ 同时成立。若 B 为任意公式, 那么

$$\dots, \neg A \rightarrow (A \rightarrow B), \neg A, A \rightarrow B, A, B$$

是 B 的演绎序列的一部分, 其中 $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ 由例 3.7 给出。因此 $B \in \text{Th}(\text{PC} \cup \Gamma)$ 。由此, 扩充 $\text{Th}(\text{PC} \cup \Gamma)$ 含有所有公式, 这样的公式全集自然是完全的。

定理的其余结论是显然的。 ■

合理性定理表明, 在 PC 中进行推理是可靠的, 所得结论要么是永真式, 要么是推理前提的逻辑结果, 从正确的前提出发不可能推出错误的结论。而与此相关的另一个重要问题则是, PC 是完备 (semantically complete) 的吗? 换句话说, 任意永真式或一组前提的逻辑结果是否一定能在 PC 中推出? 下面的完备性定理给出了肯定的答案。通俗地理解, 合理性定理确保 PC 是可用的 (不会推出错误的结论), 而完备性定理确保 PC 是够用的 (正确的结论一定可以推出)。

定理 3.12 (完备性定理) PC 是完备的, 即对任意公式集 Γ 和公式 A , 若 $\Gamma \models A$, 则 $\Gamma \vdash A$ 。特别地, 若 A 永真 ($\models A$), 则 A 必为 PC 之定理 ($\vdash A$)。

我们不直接证明完备性定理, 而是先证明与之等价的另一个结论“任意一致的公式集都是可满足的”, 再在其基础上完成完备性定理的证明。由于证明较复杂, 先证一些定理。

定理 3.13 设 PC 的公式集 Γ 是一致的, 并且 $\Gamma \not\vdash A$, 那么 $\Gamma \cup \{\neg A\}$ 也是一致的。

证明 反设 $\Gamma \cup \{\neg A\}$ 不是一致的, 那么存在公式 B , 使得 $\Gamma; \neg A \vdash B$ 且 $\Gamma; \neg A \vdash \neg B$ 。但我们知道 $B \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$, 因此可得 $\Gamma; \neg A \vdash A$ 。据演绎定理有 $\Gamma \vdash \neg A \rightarrow A$ 。另外, 据例 3.9 知 $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ 为 PC 的定理, 于是有 $\Gamma \vdash A$, 与前提 $\Gamma \not\vdash A$ 矛盾。至此 $\Gamma \cup \{\neg A\}$ 的一致性得证。 ■

定理 3.14 若 Γ 为 PC 的一致公式集, 那么存在公式集 Δ , 使 $\Gamma \subseteq \Delta$, Δ 一致且完全。

证明 设 $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 是 PC 中所有公式的枚举。如下构造公式集序列 $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n, \dots$, 使得

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \Gamma \\ \Delta_{n+1} &= \begin{cases} \Delta_n \cup \{A_n\} & \text{当 } \Delta_n \vdash A_n \\ \Delta_n \cup \{\neg A_n\} & \text{当 } \Delta_n \not\vdash A_n \end{cases} \end{aligned}$$

现令 $\Delta = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_n$ 。显然 $\Gamma \subseteq \Delta$, Δ 完全 (由 Δ_n 及 Δ 的定义可知)。另外, Δ 也是一致的。若不然, 设 A_i 使 $\Delta \vdash A_i$, $\Delta \vdash \neg A_i$ 。由于 A_i 及 $\neg A_i$ 的演绎均有限长, 故只要 n 足够大, 便有 $\Delta_n \vdash A_i$, $\Delta_n \vdash \neg A_i$ 。但这是不可能的, 因为据定理 3.13, $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ 都是

一致的。 ■

定理 3.15 定理3.14所构造的公式集 Δ 具有性质：对 PC 中任意公式 A , $A \in \Delta$ 当且仅当 $\Delta \vdash A$ 。

证明 $A \in \Delta$ 时显然有 $\Delta \vdash A$ 。

若 $\Delta \vdash A$ 而 $A \notin \Delta$, 由 Δ 的完全性可知 $\neg A \in \Delta$, 则 $\Delta \vdash \neg A$, 又 $\Delta \vdash A$, 与 Δ 的一致性矛盾, 故必有 $A \in \Delta$ 。 ■

定理 3.16 对任意 PC 的一致公式集 Γ , 存在一个指派 δ , 使得对 Γ 中每一公式 A 有 $\delta(A) = 1$ 。

证明 设 Δ 为定理3.14所构造的公式集, 因此 $\Gamma \subseteq \Delta$ 且 Δ 既一致又完全。今定义映射 $\bar{\delta}$ 如下:

$$\bar{\delta}(A) = \begin{cases} 1 & \text{当 } A \in \Delta \\ 0 & \text{当 } A \notin \Delta \end{cases}$$

由定义可知 $\bar{\delta}$ 是从公式集到 $\{0, 1\}$ 的一个函数。现需证 $\bar{\delta}$ 满足下列条件:

$$\bar{\delta}(\neg A) = \begin{cases} 0 & \text{当 } \bar{\delta}(A) = 1 \\ 1 & \text{当 } \bar{\delta}(A) = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\bar{\delta}(A \rightarrow B) = \begin{cases} 0 & \text{当 } \bar{\delta}(A) = 1 \text{ 且 } \bar{\delta}(B) = 0 \\ 1 & \text{否则} \end{cases} \quad (3.2)$$

$\bar{\delta}$ 满足式 (3.1) 是明显的, 因为 $A \in \Delta$ 当且仅当 $\neg A \notin \Delta$ 。为证 $\bar{\delta}$ 满足式 (3.2) 只需证明 $\bar{\delta}(A \rightarrow B) = 0$ 当且仅当 $\bar{\delta}(A) = 1, \bar{\delta}(B) = 0$ 。

设 $\bar{\delta}(A) = 1, \bar{\delta}(B) = 0$ 而 $\bar{\delta}(A \rightarrow B) = 1$, 那么 $A \in \Delta, \neg B \in \Delta, A \rightarrow B \in \Delta$ 。据定理3.15, $\Delta \vdash A, \Delta \vdash \neg B, \Delta \vdash A \rightarrow B$ 。由此即得 $\Delta \vdash \neg B, \Delta \vdash B$, 与 Δ 的一致性矛盾。

反之, 设 $\bar{\delta}(A \rightarrow B) = 0$, 而 $\bar{\delta}(A) = 0$ 或 $\bar{\delta}(B) = 1$, 那么 $\neg(A \rightarrow B) \in \Delta, \neg A \in \Delta$ 或 $B \in \Delta$, 进而有 $\Delta \vdash \neg(A \rightarrow B), \Delta \vdash \neg A$ 或 $\Delta \vdash B$ 。若 $\Delta \vdash \neg A$, 则由它和 $\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ 可推得 $\Delta \vdash A \rightarrow B$; 若 $\Delta \vdash B$, 则由它和 $\vdash B \rightarrow (A \rightarrow B)$ 也可推得 $\Delta \vdash A \rightarrow B$, 都与 Δ 的一致性矛盾。

取 $\bar{\delta}$ 在 $\{p_1, p_2, \dots\}$ 上的限制, 即令 $\delta = \bar{\delta} \upharpoonright_{\{p_1, p_2, \dots\}}$, 易知 δ 为弄真 Δ 所有公式的指派, 又由 $\Gamma \subseteq \Delta$, 知 δ 即为所欲求之指派。命题得证。 ■

现在可以来完成定理3.12的证明。

证明 设 Γ 为 PC 的任意公式集, A 为 PC 中任意公式, 且 $\Gamma \models A$ 。若 Γ 不一致, 则一定有 $\Gamma \vdash A$ 。若 Γ 一致, 且 $\Gamma \not\vdash A$, 那么 $\Gamma \cup \{\neg A\}$ 仍是一致的 (据定理3.13)。现由定理3.16, 存在指派 δ , 使 $\Gamma \cup \{\neg A\}$ 中的每一个公式为真。因此, $\delta(\neg A) = 1$, 从而 $\delta(A) = 0$, 且对任意 Γ 中公式 B , 有 $\delta(B) = 1$ 。但是, 我们已知 $\Gamma \models A$, 因此对任意弄真 Γ 中每一公式的指派, 特别是 δ , $\delta(A) = 1$, 矛盾。这就是说, $\Gamma \models A$ 蕴涵 $\Gamma \vdash A$ 。 ■

从上面的证明可以看出, 由“任意一致的公式集都是可以满足的”可推出完备性定理。实际上, 假定完备性定理成立, 也可以推出“任意一致的公式集都是可以满足的”, 因为当 Γ 一致时, 若 Γ 不可满足, 对任意公式 A 将有 $\Gamma \models A$ 和 $\Gamma \models \neg A$ (为什么?), 从而有 $\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash \neg A$, 这与 Γ 的一致性冲突。可见“任意一致的公式集都是可以满足的”与完备性定理

是等价的。不仅如此，该结论的逆“任意可满足的公式集都是一致的”也成立，并且与合理性定理等价。作为合理性定理和完备性定理的另一种形式，将其表述如下。

定理 3.17 对任意PC的公式集 Γ ， Γ 一致当且仅当 Γ 是可满足的。

证明 定理3.16已经给出了一个方向的证明，另一个方向请读者使用合理性定理自证。 ■

作为PC合理性与完备性的又一推论，可以得到PC的另一重要特性——紧致性。

定义 3.15 称形式系统FS具有**紧致性** (compactness)，如果对FS的任意公式集 Γ 有：若 Γ 的所有有穷子集可满足，那么 Γ 也是可满足的。

定理 3.18 PC具有紧致性。

证明 设 Γ 为PC的公式集，且 Γ 的每一有穷子集均可满足。现反设 Γ 并不可满足，因而对任意公式 A 有 $\Gamma \models A$ 和 $\Gamma \models \neg A$ ，进而有 $\Gamma \vdash A$ 和 $\Gamma \vdash \neg A$ 。设 A 和 $\neg A$ 的演绎序列中所用的 Γ 中公式的集合分别是 Γ_1 和 Γ_2 ，显然 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 为有穷集，并且 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash A$ ， $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \neg A$ ，这就是说 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 是 Γ 的不一致的有穷子集，据定理3.17，它是不可满足的，与题设矛盾。因此， Γ 是可满足的，PC的紧致性得证。 ■

由PC的合理性和完备性，可直接推得PC是可判定的，即存在一个算法，可对任意公式 A 判定 A 是否为PC的定理。因为根据PC的合理性和完备性，判定 $\vdash_{PC} A$ 可归结为判定 $\models A$ 是否成立，而 $\models A$ 的判定可以用真值表来实现。

✿ 3.3 命题演算形式系统ND

如果说PC是一个研究系统，那么ND便是一个应用系统。为了便于实际应用中描述问题，ND采用5个真值联结词；为了便于推理，ND采用少数公理、多数规则，并且把人的推理模式用推理规则加以体现，因而它被称为**自然推理系统** (natural deduction system)，简记为ND。

ND的语言与PC大同小异，主要区别是ND中使用5个真值联结词。其推理部分与PC相去甚远。由于强调人的自然推理，ND更注重演绎，它的公理表示为 $\Gamma \vdash \Phi$ 形，例如 $\Gamma; A \vdash A$ 代替 $A \rightarrow A$ 。其推理规则形如

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Phi_1, \Gamma_2 \vdash \Phi_2, \dots, \Gamma_k \vdash \Phi_k}{\Gamma \vdash \Psi}$$

例如 $\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$ 取代分离规则。

ND的推理部分组成如下。

公理模式只有1个，即

$$\Gamma; A \vdash A$$

推理规则模式有14个。

(1) 假设引入规则：

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma; A \vdash B}$$

它源于重言式 $B \rightarrow (A \rightarrow B)$ 。

(2) 假设消除规则:

$$\frac{\Gamma; A \vdash B, \quad \Gamma; \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B}$$

它源于重言式 $(\neg A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B$ 。这条规则反映了人在推理中常用的模式: 分情况进行证明。在假设 A 与 $\neg A$ 后均能导出 B , 则 B 可推得 (不依赖假设 A 或 $\neg A$)。

(3) \vee 引入规则:

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}, \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$$

它们源于重言式 $A \rightarrow A \vee B$ 和 $B \rightarrow A \vee B$ 。它们可以改用更强的形式:

$$\frac{\Gamma; \neg B \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}, \quad \frac{\Gamma; \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$$

这是由于 $(\neg A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \vee B)$ 为永真式。在自然推理中人们常用如下方式: “欲证 $A \vee B$, 可设 $\neg A$ (或 $\neg B$) 而证 B (或 A)”。

(4) \vee 消除规则:

$$\frac{\Gamma; A \vdash C, \quad \Gamma; B \vdash C, \quad \Gamma \vdash A \vee B}{\Gamma \vdash C}$$

这是重言式 $(A \vee B) \wedge (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow C$ 的演绎表示形式, 它也反映了数学推理中分情况进行证明的思想。如果接受 $\Gamma \vdash A \vee \neg A$, 那么假设消除规则只是本规则的特例。

(5) \wedge 引入规则:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}$$

它依据重言式 $A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$ 。

(6) \wedge 消除规则:

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}, \quad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}$$

它们依据重言式 $A \wedge B \rightarrow A$ 和 $A \wedge B \rightarrow B$ 。

(7) \rightarrow 引入规则:

$$\frac{\Gamma; A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}$$

此即演绎定理。为证 $A \rightarrow B$, 人们常以 A 为假设而证 B 。

(8) \rightarrow 消除规则:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \quad \Gamma \vdash A \rightarrow B}{\Gamma \vdash B}$$

此即分离规则。

(9) \neg 引入规则:

$$\frac{\Gamma; A \vdash B, \quad \Gamma; A \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A}$$

这一规则反映了数学推理中反证法的基本思想。为证 $\neg A$, 假设 A 导出矛盾 B 和 $\neg B$ 。容易验证永真式 $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$ 。

(10) \neg 消除规则:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \quad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash B}$$

它源于重言式 $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ 。

(11) $\neg\neg$ 引入规则:

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \neg\neg A}$$

(12) $\neg\neg$ 消除规则:

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}$$

规则 (11) 与 (12) 源于重言式 $A \leftrightarrow \neg\neg A$ 。

(13) \leftrightarrow 引入规则:

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \quad \Gamma \vdash B \rightarrow A}{\Gamma \vdash A \leftrightarrow B}$$

(14) \leftrightarrow 消除规则:

$$\frac{\Gamma \vdash A \leftrightarrow B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}, \quad \frac{\Gamma \vdash A \leftrightarrow B}{\Gamma \vdash B \rightarrow A}$$

规则 (13) 与 (14) 源于重言式 $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ 。

定义 3.16 在 ND 中, 称 A 为 Γ 的**演绎结果** (deductive consequence), 即 $\Gamma \vdash_{\text{ND}} A$ (以下将下标 ND 省略), 如果存在序列:

$$\Gamma_1 \vdash A_1, \Gamma_2 \vdash A_2, \dots, \Gamma_m \vdash A_m (\Gamma \vdash A)$$

使得 $\Gamma_i \vdash A_i (1 \leq i \leq m)$ 是公理, 或者是 $\Gamma_j \vdash A_j (j < i)$, 或者是从 $\Gamma_{j_1} \vdash A_{j_1}, \Gamma_{j_2} \vdash A_{j_2}, \dots, \Gamma_{j_k} \vdash A_{j_k} (j_1, j_2, \dots, j_k < i)$ 使用推理规则导出的。称 A 为 ND 的定理, 如果有 $\Gamma \vdash A$ 且 $\Gamma = \emptyset$ 。

下列例子可说明 ND 中的推演过程及风格。

例 3.10 证明: 对 ND 的任意公式 A , $A \vee \neg A$ 为 ND 的定理。

证明

- | | |
|-----------------------------------|-----------------|
| (1) $A \vdash A$ | 公理 |
| (2) $A \vdash A \vee \neg A$ | \vee 引入规则 (1) |
| (3) $\neg A \vdash \neg A$ | 公理 |
| (4) $\neg A \vdash A \vee \neg A$ | \vee 引入规则 (3) |
| (5) $\vdash A \vee \neg A$ | 假设消除规则 (2) (4) |

证明中“某某规则(a_1)(a_2) \dots (a_n)”表示“对(a_1)(a_2) \dots (a_n)诸式使用某某规则”, 下同。

例 3.11 证明: 对 ND 的任意公式 A, B :

- 1) $\vdash \neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$.
- 2) $\vdash \neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$. (德摩根律)

证明 我们只证式 1), 把式 2) 的证明留给读者。

- | | |
|---|------------------------|
| (1) $\neg(A \vee B), A \vdash A$ | 公理 |
| (2) $\neg(A \vee B), A \vdash A \vee B$ | \vee 引入规则 (1) |
| (3) $\neg(A \vee B), A \vdash \neg(A \vee B)$ | 公理 |
| (4) $\neg(A \vee B) \vdash \neg A$ | \neg 引入规则 (2) (3) |
| (5) $\neg(A \vee B) \vdash \neg B$ | (同理) |
| (6) $\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B$ | \wedge 引入规则 (4) (5) |
| (7) $\vdash \neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ | \rightarrow 引入规则 (6) |
| (8) $\neg A \wedge \neg B, A \vee B, A \vdash A$ | 公理 |
| (9) $\neg A \wedge \neg B, A \vee B, A \vdash \neg A \wedge \neg B$ | 公理 |

- (10) $\neg A \wedge \neg B, A \vee B, A \vdash \neg A$ \wedge 消除规则 (9)
 (11) $\neg A \wedge \neg B, A \vee B, A \vdash A \wedge \neg A$ \wedge 引入规则 (8) (10)
 (12) $\neg A \wedge \neg B, A \vee B, B \vdash B$ (与 (8) 同理)
 (13) $\neg A \wedge \neg B, A \vee B, B \vdash \neg B$ (与 (10) 同理)
 (14) $\neg A \wedge \neg B, A \vee B, B \vdash A \wedge \neg A$ \neg 消除规则 (12) (13)
 (15) $\neg A \wedge \neg B, A \vee B \vdash A \vee B$ 公理
 (16) $\neg A \wedge \neg B, A \vee B \vdash A \wedge \neg A$ \vee 消除规则 (11) (14) (15)
 (17) $\neg A \wedge \neg B, A \vee B \vdash A$ \wedge 消除规则 (16)
 (18) $\neg A \wedge \neg B, A \vee B \vdash \neg A$ \wedge 消除规则 (16)
 (19) $\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)$ \neg 引入规则 (21) (22)
 (20) $\vdash (\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee B)$ \rightarrow 引入规则 (23)
 (21) $\vdash (\neg A \wedge \neg B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ \leftrightarrow 引入规则 (7) (24)

例 3.12 证明: 对ND中的任意公式 A, B 有

$$\neg A \rightarrow B \vdash A \vee B$$

即 $\neg A \rightarrow B \vdash A \vee B$ 且 $A \vee B \vdash \neg A \rightarrow B$ 。这里的符号“ \vdash ”读作“演绎等价”。

证明 为简化过程缩短篇幅, 对某些步骤作了省略。

先证 $\neg A \rightarrow B \vdash A \vee B$ 。

- (1) $\neg A \rightarrow B, \neg A \vdash B$ 公理及 \rightarrow 消除规则
 (2) $\neg A \rightarrow B, \neg A \vdash A \vee B$ \vee 引入规则 (1)
 (3) $\neg A \rightarrow B, A \vdash A \vee B$ 公理及 \vee 引入规则
 (4) $\neg A \rightarrow B \vdash A \vee B$ 假设消除规则 (2) (3)

再证 $A \vee B \vdash \neg A \rightarrow B$ 。

- (1) $A \vee B, B, \neg A \vdash B$ 公理
 (2) $A \vee B, B \vdash \neg A \rightarrow B$ \rightarrow 引入规则 (1)
 (3) $A \vee B, A, \neg A \vdash B$ 公理及 \neg 消除规则
 (4) $A \vee B, A \vdash \neg A \rightarrow B$ \neg 引入规则 (3)
 (5) $A \vee B \vdash A \vee B$ 公理
 (6) $A \vee B \vdash \neg A \rightarrow B$ \vee 消除规则 (2) (4) (5)

例 3.13 证明: 对ND中的任意公式 A, B 有

1) $A \wedge B \vdash \neg(A \rightarrow \neg B)$ 。

2) $A \leftrightarrow B \vdash (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ 。

证明 我们只证式1), 式2) 请读者自证。

先证 $A \wedge B \vdash \neg(A \rightarrow \neg B)$ 。

- (1) $A \wedge B, A \rightarrow \neg B \vdash A$ 公理及 \wedge 消除规则
 (2) $A \wedge B, A \rightarrow \neg B \vdash A \rightarrow \neg B$ 公理
 (3) $A \wedge B, A \rightarrow \neg B \vdash \neg B$ \rightarrow 消除规则 (1) (2)

- (4) $A \wedge B, A \rightarrow \neg B \vdash B$ 公理及 \wedge 消除规则
 (5) $A \wedge B \vdash \neg(A \rightarrow \neg B)$ \neg 引入规则 (3) (4)
 再证 $\neg(A \rightarrow \neg B) \vdash A \wedge B$ 。
 (1) $\neg(A \rightarrow \neg B), \neg B, A \vdash \neg B$ 公理
 (2) $\neg(A \rightarrow \neg B), \neg B \vdash A \rightarrow \neg B$ \rightarrow 引入规则 (1)
 (3) $\neg(A \rightarrow \neg B), \neg B \vdash \neg(A \rightarrow \neg B)$ 公理
 (4) $\neg(A \rightarrow \neg B) \vdash \neg\neg B$ \neg 引入规则 (2) (3)
 (5) $\neg(A \rightarrow \neg B) \vdash B$ $\neg\neg$ 消除规则 (4)
 (6) $\neg(A \rightarrow \neg B), \neg A, A \vdash A$ 公理
 (7) $\neg(A \rightarrow \neg B), \neg A, A \vdash \neg A$ 公理
 (8) $\neg(A \rightarrow \neg B), \neg A, A \vdash \neg B$ \neg 消除规则 (6) (7)
 (9) $\neg(A \rightarrow \neg B), \neg A \vdash A \rightarrow \neg B$ \rightarrow 引入规则 (8)
 (10) $\neg(A \rightarrow \neg B), \neg A \vdash \neg(A \rightarrow \neg B)$ 公理
 (11) $\neg(A \rightarrow \neg B) \vdash \neg\neg A$ \neg 引入规则 (9) (10)
 (12) $\neg(A \rightarrow \neg B) \vdash A$ $\neg\neg$ 消除规则 (11)
 (13) $\neg(A \rightarrow \neg B) \vdash A \wedge B$ \wedge 引入规则 (5) (12)

例 3.14 证明: 对 ND 中任意公式集 Γ 和公式 A, A', B , 如果 $\Gamma; A' \vdash B$ 和 $\Gamma; A \vdash A'$, 则 $\Gamma; A \vdash B$ 。

证明 假设 $\Gamma_1^1 \vdash A_1^1, \Gamma_2^1 \vdash A_2^1, \dots, \Gamma_m^1 \vdash A_m^1 (\Gamma; A' \vdash B), \Gamma_1^2 \vdash A_1^2, \Gamma_2^2 \vdash A_2^2, \dots, \Gamma_n^2 \vdash A_n^2 (\Gamma; A \vdash A')$ 分别是已知的 ND 演绎序列, 在它们基础上可以构造以 $\Gamma \cup \{A\}$ 为前提的 B 的演绎序列如下:

- (1) $\Gamma_1^1 \vdash A_1^1$

 (m) $\Gamma_m^1 \vdash A_m^1 (\Gamma; A' \vdash B)$
 (m+1) $\Gamma \vdash A' \rightarrow B$ \rightarrow 引入规则 (m)
 (m+2) $\Gamma; A \vdash A' \rightarrow B$ 假设引入规则 (m+1)
 (m+3) $\Gamma_1^2 \vdash A_1^2$

 (m+n+2) $\Gamma_n^2 \vdash A_n^2 (\Gamma, A \vdash A')$
 (m+n+3) $\Gamma; A \vdash B$ \rightarrow 消除规则 (m+2) (m+n+2)

容易证明, PC 的公理都是 ND 的公理。

例 3.15 对任意公式 A, B, C 有

- 1) $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$ 。
- 2) $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ 。
- 3) $\vdash (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$ 。

证明

证明 $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$ 。

- (1) $A, B \vdash A$ 公理
- (2) $A \vdash B \rightarrow A$ \rightarrow 引入规则 (1)
- (3) $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$ \rightarrow 引入规则 (2)
- 证明 $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ 。
- (1) $A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash A$ 公理
- (2) $A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash A \rightarrow B$ 公理
- (3) $A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$ 公理
- (4) $A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash B$ \rightarrow 消除规则 (1) (2)
- (5) $A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash B \rightarrow C$ \rightarrow 消除规则 (1) (3)
- (6) $A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash C$ \rightarrow 消除规则 (4) (5)
- (7) $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ \rightarrow 引入规则 (运用3次)
- 证明 $\vdash (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$ 。
- (1) $\neg A \rightarrow \neg B, B, \neg A \vdash B$ 公理
- (2) $\neg A \rightarrow \neg B, B, \neg A \vdash \neg A$ 公理
- (3) $\neg A \rightarrow \neg B, B, \neg A \vdash \neg A \rightarrow \neg B$ 公理
- (4) $\neg A \rightarrow \neg B, B, \neg A \vdash \neg B$ \rightarrow 消除规则 (2) (3)
- (5) $\neg A \rightarrow \neg B, B \vdash \neg \neg A$ \neg 引入规则 (1) (4)
- (6) $\neg A \rightarrow \neg B, B \vdash A$ $\neg\neg$ 消除规则 (5)
- (7) $\vdash (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$ \rightarrow 引入规则 (运用2次)

定理 3.19 命题演算形式系统ND是合理的、完备的。

我们不对这一定理进行详细证明，只简述其证明思路：

首先，ND的合理性由其公理和推理规则所基于的永真式保证。

其次，为证明ND的完备性，对任意公式集 Γ 和公式 A ，当 $\Gamma \models A$ 时，可基于如下步骤构建以 Γ 为前提的 A 的演绎：

(1) 将 Γ 中公式和 A 改写为与之等价的只含联结词 \neg 、 \rightarrow 的公式，得 Γ' 、 A' 。

(2) 在PC中构建以 Γ' 为前提的演绎 $A_1, A_2, \dots, A_n (= A')$ (PC完备性及 $\Gamma' \models A'$ 的事实可以确保该演绎序列的存在)，假设该序列中出现的 Γ' 中的公式构成集合 Γ'_0 。

(3) 通过把每一个公式 A_i 改写为以 $\Gamma'_0 \vdash A_i$ 结尾的演绎序列片段，将上述公式序列改写为ND中的演绎序列，具体方法是：若 A_i 为公理，则用例3.15中对应的演绎序列替换 A_i ，并在其后（多次）应用假设引入规则得到 $\Gamma'_0 \vdash A_i$ ；若 $A_i \in \Gamma'_0$ ，则直接将其改写为 $\Gamma'_0 \vdash A_i$ (ND公理)；若 A_i 为前面某个 A_j 、 $A_j \rightarrow A_i$ 应用分离规则所得，则将其改写为 $\Gamma'_0 \vdash A_i$ (ND中的 \rightarrow 消除规则)。

(4) 在上一步改写后的演绎序列末尾追加 $\dots, \Gamma'_0 \vdash A' \rightarrow A, \Gamma'_0 \vdash A$ ，其中 \dots 为类似例3.12、例3.13所示方法得到的 $\Gamma'_0; A' \vdash A$ 的演绎序列。

(5) 反复应用例3.12、例3.13和例3.14，将步骤(4)得到的演绎序列中 \vdash 左边 Γ'_0 中的公式替换为它们原本在 Γ 中出现的形式（使用5个联结词），这样我们得到了一个以 $\Gamma_0 \vdash A$ 结尾的ND演绎序列，其中 $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ 是 Γ'_0 所对应的 Γ 中公式集合。

(6) 如果 $\Gamma - \Gamma_0$ 不为空, 将其中的公式逐一加入上述序列每一个“ $\dots \vdash \dots$ ”中 \vdash 号左边, 此即为所求 ND 系统中以 Γ 为前提的 A 的演绎。

最后, 不出意外地, ND 系统也是可判定的, 其原因和 PC 系统可判定的原因相同。

✿ 3.4 本章小结

三百多年前, 德国数学家莱布尼茨提出了一种设想: “如果能够创造一套表达概念的符号语言, 并且把人类的推理过程用某种公式表示, 那么就能够发明一种思维演算, 把逻辑推理过程转化为计算过程。这样, 解决人与人之间争论的难题就可以像做一道数学题那样去解决。”人们认为, 命题演算初步实现了莱布尼茨的设想。为什么这样说呢? 正如本章开始所言, 考虑到用符号表达概念的复杂性, 命题演算将概念作为判断的一部分, 而将判断作为不可分的整体即命题来讨论, 这种折中的办法使得人们可以把精力集中于“人类的推理过程”和“思维演算”的研究, 而命题演算中的逻辑联结词、公式、推理规则等正是这些研究成果的集中体现, 利用这些成果, 人们在一定程度上实现了“将逻辑推理过程转化为计算过程”的目标。命题演算形式系统将这种研究引向深入, 它是将命题演算完全符号化、抽象公理化的推理系统, 数理逻辑正是通过形式化过程和对形式系统的研究完成对思维规律或其他对象理论的研究。

本章介绍了命题演算的经典内容, 包括命题与逻辑联结词、命题公式及其真值、范式等, 在此基础上介绍了两个命题演算形式系统 PC 与 ND。对于形式系统 PC, 书中详细介绍了它的组成并给出了一些系统内推理的实例, 最后对它的合理性与完备性进行了严格证明; 对于形式系统 ND, 书中给出了系统的组成与系统内推理实例, 对它的合理性和完备性进行了证明思路的讨论。

✿ 3.5 习 题

- 验证 3.1.2 节中的永真式 T1~T20。
- 证明下列逻辑蕴涵式和逻辑等价式, 其中 A 、 B 、 C 为任意公式。
 - $A \vdash B \rightarrow A$ 。
 - $\neg A \rightarrow \neg B \vdash B \rightarrow A$ 。
 - $A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$ 。
 - $A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash A \wedge B \rightarrow C$ 。
 - $(A \vee B) \rightarrow C \vdash (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$ 。
 - $A \leftrightarrow B \vdash (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ 。
- 在 PC 中证明下列事实:
 - $\vdash (A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$ 。
 - $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$ 。
 - $\vdash A \rightarrow \neg\neg A$ 。
 - $\vdash A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B))$ 。
 - $\neg A \vdash A \rightarrow B$ 。

- (6) $A \rightarrow B, \neg(B \rightarrow C) \rightarrow \neg A \vdash A \rightarrow C$ 。
- (7) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow B)$ 。
4. 证明 $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$ 不是 PC 的定理。
5. 利用演绎定理在 PC 中证明:
- (1) $\vdash (B \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$ 。
- (2) $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ 。
- (3) $\vdash \neg(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$ 。
6. 将 PC 中公理 A3 改为 $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A)$, 记所得系统为 PC'。证明:
- (1) $\vdash_{PC} (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A)$ 。
- (2) $\vdash_{PC'} (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$ 。
7. 证明本章中留给读者证明的定理。
8. 证明对 PC 有下列导出规则:
- (1) 若 $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$, $\vdash B$, 那么 $\vdash A \rightarrow C$ 。
- (2) 若 $\Gamma; \neg A \vdash B$, $\Gamma; \neg A \vdash \neg B$, 那么 $\Gamma \vdash A$ 。
9. 在 ND 中证明:
- (1) $\vdash (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ 。
- (2) $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C) \leftrightarrow (A \wedge B \rightarrow C)$ 。
- (3) $\vdash (A \vee B) \rightarrow C \leftrightarrow (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$ 。
- (4) $\{A \rightarrow B, \neg(B \rightarrow C) \rightarrow \neg A\} \vdash A \rightarrow C$ 。
- (5) $\vdash \neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow A \wedge \neg B$ 。
- (6) $\vdash (A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \rightarrow A \vee C$ 。
- (7) $\vdash (A \wedge B) \leftrightarrow A \wedge (\neg A \vee B)$ 。
- (8) $\vdash ((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A) \leftrightarrow B$ 。