# 第三单元

# 中值定理与导数的应用

## 练习 16　罗尔中值定理

### 训练目的

理解罗尔(Rolle)中值定理,会构造辅助函数,利用罗尔中值定理证明相关中值问题或方程解的存在性.

### 基础练习

1. 已知①$f(x)=x$②$f(x)=|x|$③$f(x)=x^2$④$f(x)=x^3$⑤$f(x)=\dfrac{x^2}{x}$,则上面函数中在区间$[-1,1]$上满足罗尔中值定理条件的有\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_,存在$\xi\in(-1,1)$,使得$f'(\xi)=0$的有____________,任给$\xi\in(-1,1)$,有$f'(\xi)\neq 0$或$f'(\xi)$不存在的有____________.

【答案】 ③,③④,①②⑤.

2. 已知函数$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$,则方程$f'(x)=0$有______个实根,这些根从小到大所在区间依次为__________.

【参考解答】 易知$f'(x)=0$是一个三元方程,最多只有3个实根.由于

$$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0,$$

由罗尔中值定理可知存在$\xi_1\in(1,2)$,$\xi_2\in(2,3)$,$\xi_3\in(3,4)$,使得

$$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=f'(\xi_3)=0,$$

所以方程$f'(x)=0$有3个实根,分别在区间$(1,2)$,$(2,3)$,$(3,4)$内.

3. (1) 设函数$f(x)$,$g(x)$在$[a,b]$上连续,在$(a,b)$内可导,且$f(a)=f(b)=0$,为证明方程$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=0$在$(a,b)$内有解,可构造辅助函数$F(x)=$______,则$F(x)$在区间______上满足罗尔中值定理.

(2) 设 $f(x)$ 可导，$\lambda$ 为实数，为证明 $f(x)$ 的任意两个零点 $m,n(m<n)$ 之间必有 $\lambda f(x)+f'(x)$ 的零点，可构造辅助函数 $F(x)=$________，则 $F(x)$ 在区间________上满足罗尔中值定理.

(3) 设 $f(x)$ 可导，$\alpha>0$ 为实数，$f(a)=0,(a>0)$，为证明存在 $\xi\in(0,a)$，使得 $f'(\xi)=-\dfrac{\alpha f(\xi)}{\xi}$，可构造辅助函数 $F(x)=$________，则 $F(x)$ 在区间________上满足罗尔中值定理.

【答案】 (1) $f(x)g(x),[a,b]$　(2) $e^{\lambda x}f(x),[m,n]$　(3) $x^{\alpha}f(x),[0,a]$.

【参考解答】 (1) 令 $F(x)=f(x)g(x)$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$(a,b)$ 内可导，且 $F(a)=f(a)\cdot g(a)=f(b)\cdot g(b)=F(b)=0$，由罗尔中值定理知，存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $F'(\xi)=0$，所以 $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=0$ 在 $(a,b)$ 内有解.

(2) 令 $F(x)=e^{\lambda x}f(x)$，则 $F(x)$ 在 $[m,n]$ 上连续，$(m,n)$ 内可导，且由 $f(m)=f(n)=0$，有 $F(m)=F(n)=0$，所以至少存在一点 $\xi\in(m,n)$，使得 $F'(\xi)=0$，即 $\lambda e^{\lambda\xi}f(\xi)+e^{\lambda\xi}f'(\xi)=0$，又 $e^{\lambda\xi}\neq0$，即 $\lambda f(\xi)+f'(\xi)=0$ 成立，即 $\xi\in(m,n)$ 为 $\lambda f(x)+f'(x)$ 的零点.

(3) $f'(\xi)=-\dfrac{\alpha f(\xi)}{\xi}$ 即 $\alpha f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$. 令 $F(x)=x^{\alpha}f(x)$，则 $F(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，$(0,a)$ 内可导，且 $F(0)=F(a)=0$，由罗尔中值定理可知，存在 $\xi\in(0,a)$ 使得 $F'(\xi)=0$，即 $\alpha\xi^{\alpha-1}f(\xi)+\xi^{\alpha}f'(\xi)=0$，又 $\xi\neq0$，即有 $f'(\xi)=-\dfrac{\alpha f(\xi)}{\xi}$ 成立.

## 综合练习

4. 设 $a,b,c$ 为实数，求证：方程 $4ax^3+3bx^2+2cx=a+b+c$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个根.

【参考证明】 令 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2-(a+b+c)x$. 显然 $f(0)=f(1)=0$，于是由罗尔中值定理知，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$，即

$$4a\xi^3+3b\xi^2+2c\xi-(a+b+c)=0,$$

即方程 $4ax^3+3bx^2+2cx=a+b+c$ 在 $(0,1)$ 内至少存在一个根 $\xi$.

5. 设函数 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内可导，且 $f'(x)\neq1$. 试证明 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内至多只有一个不动点，即方程 $f(x)=x$ 在 $(a,b)$ 内至多只有一个实数根.

【参考证明】 (反证法) 假设方程 $f(x)=x$ 存在两个根 $m,n(a<m<n<b)$，令 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(x)$ 在 $[m,n]$ 上连续，$(m,n)$ 内可导，且 $F(m)=F(n)=0$，于是由罗尔中值定理知，存在 $c\in(m,n)\subset(a,b)$，使得 $F'(\xi)=f'(\xi)-1=0$，即 $f'(\xi)=1$，与已知中 $f'(x)\neq1$ 矛盾，故假设不成立，所以方程 $f(x)=x$ 在 $(a,b)$ 内至多只有一个实数根.

6. 证明：方程 $2^x=x^2+1$ 有且仅有 3 个实根.

【参考证明】 令 $f(x)=2^x-x^2-1$，则有 $f(0)=0,f(1)=0$，又

$$f(4)=-1<0,\quad f(5)=6>0,$$

由零点定理知存在一点 $c\in(4,5)$，使得 $f(c)=0$. 由此可知方程 $2^x=x^2+1$ 至少有 3 个实根. 假设方程 $2^x=x^2+1$ 有 4 个实根 $\xi_1<\xi_2<\xi_3<\xi_4$，即有

$$f(\xi_1)=f(\xi_2)=f(\xi_3)=f(\xi_4)=0,$$

则由罗尔中值定理知存在 $\eta_1\in(\xi_1,\xi_2)$，$\eta_2\in(\xi_2,\xi_3)$，$\eta_3\in(\xi_3,\xi_4)$，使得

$$f'(\eta_1)=f'(\eta_2)=f'(\eta_3)=0,$$

由罗尔中值定理知存在 $c_1\in(\eta_1,\eta_2)$，$c_2\in(\eta_2,\eta_3)$，使得 $f''(c_1)=f''(c_2)=0$，存在 $\xi\in(c_1,c_2)$，使得 $f'''(\xi)=0$. 又 $f'(x)=2^x(\ln 2)-2x$，$f''(x)=2^x(\ln 2)^2-2$，$f'''(x)=2^x(\ln 2)^3\neq 0$. 所以假设不成立. 综上可得结论成立.

7. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f(0)=f(1)=0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，试证：

(1) 存在 $\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使 $f(\eta)=\eta$；

(2) 对任意实数 $\lambda$，必存在 $\xi\in(0,\eta)$，使得 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$.

**【参考证明】** (1) 令 $\Phi(x)=f(x)-x$，则 $\Phi(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，又

$$\Phi(1)=-1<0,\quad \Phi\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}>0.$$

故由零点定理知，存在 $\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $\Phi(\eta)=f(\eta)-\eta=0$，即 $f(\eta)=\eta$.

(2) 令 $F(x)=e^{-\lambda x}\Phi(x)=e^{-\lambda x}[f(x)-x]$，则 $F(x)$ 在 $[0,\eta]$ 上连续，在 $(0,\eta)$ 内可导，且 $F(0)=F(\eta)=e^{-\lambda\eta}\Phi(\eta)=0$，即 $F(x)$ 在 $[0,\eta]$ 上满足罗尔中值定理的条件，故存在 $\xi\in(0,\eta)$，使得 $F'(\xi)=0$，即

$$e^{-\lambda\xi}\{f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]-1\}=0.$$

由于 $e^x>0$，故有 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$.

8. 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内二阶可导且存在相等的最大值，又 $f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$，证明：

(1) 存在 $\eta\in(a,b)$，使得 $f(\eta)=g(\eta)$；(2) 存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

**【参考证明】** (1) 构造辅助函数 $F(x)=f(x)-g(x)$，因为 $f(x)$，$g(x)$ 在 $(a,b)$ 内具有相等的最大值 $M$，不妨设 $f(x_1)=M$，$g(x_2)=M$. 若 $x_1=x_2$，取 $\eta=x_1$，则 $F(\eta)=0$；若 $x_1\neq x_2$，不妨设 $x_1<x_2$，则 $F(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续，且

$$F(x_1)=f(x_1)-g(x_1)>0,\quad F(x_2)=f(x_2)-g(x_2)<0,$$

由零点定理可得存在 $\eta\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$，使 $F(\eta)=0$，即 $f(\eta)=g(\eta)$.

(2) 由已知条件及(1)可知，$F(a)=F(\eta)=F(b)=0$. 于是函数 $F(x)$ 分别在区间 $[a,\eta]$，$[\eta,b]$ 上运用罗尔中值定理可知，存在 $\xi_1\in(a,\eta)$，$\xi_2\in(\eta,b)$，使得

$$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0.$$

再对 $F'(x)$ 在区间 $[\xi_1,\xi_2]$ 上应用罗尔中值定理可知，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得 $F''(\xi)=0$，即 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

## 考研与竞赛练习

1. 假设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在二阶导数，并且 $f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$，$g''(x)\neq 0$. 试证：(1)在开区间 $(a,b)$ 内 $g(x)\neq 0$；(2)在开区间 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$，使 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

【参考证明】 (1) 证明在一个区间上函数值都不等于 0,适合考虑反证法.假设存在一点 $x_0\in(a,b)$,使得 $g(x_0)=0$,则由已知条件 $g(a)=g(b)=0$,分别在 $[a,x_0]$,$[x_0,b]$ 上使用罗尔中值定理,则存在 $\xi_1\in(a,x_0)$,$\xi_2\in(x_0,b)$,使得 $g'(\xi_1)=g'(\xi_2)$;由于 $g(x)$ 二阶可导,于是在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上由罗尔中值定理知,存在点 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$,使得 $g''(\xi)=0$,与已知条件 $g''(x)\neq 0$ 矛盾.所以在开区间 $(a,b)$ 内,$g(x)\neq 0$ 成立.

(2) 将需要验证的等式变形改写,有 $\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}\Leftrightarrow f(\xi)g''(\xi)-g(\xi)f''(\xi)=0$. 于是令 $F(x)=f(x)g'(x)-g(x)f'(x)$,显然 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,$(a,b)$ 可导,且 $F(a)=F(b)=0$,于是由罗尔中值定理可知,存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $F'(\xi)=0$,有

$$f(\xi)g''(\xi)-g(\xi)f''(\xi)=0,\text{即 }\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}.$$

2. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有二阶导数,且 $f(a)=f(b)=0$,$f'_+(a)f'_-(b)>0$. 证明:存在 $\xi\in(a,b)$ 和 $\eta\in(a,b)$,使 $f(\xi)=0$ 及 $f''(\eta)=0$.

【参考证明】 不妨设 $f'_+(a)>0$,$f'_-(b)>0$,即 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{x-a}>0$,$\lim\limits_{x\to b^-}\frac{f(x)}{x-b}>0$. 于是由极限的保号性,可知存在 $0<\delta_1,\delta_2<\frac{b-a}{2}$,当 $x_1\in(a,a+\delta_1)$ 和 $x_2\in(b-\delta_2,b)$ 有 $f(x_1)>0$ 及 $f(x_2)<0$. 所以在闭区间 $[x_1,x_2]$ 上由零点定理知,存在 $\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$,使得 $f(\xi)=0$.

由 $f(a)=f(\xi)=f(b)=0$,则 $f(x)$ 分别在 $[a,\xi]$,$[\xi,b]$ 上满足罗尔中值定理的条件,于是,存在 $\xi_1\in(a,\xi)$ 和 $\xi_2\in(\xi,b)$,使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$. 进一步函数 $f'(x)$ 在区间 $[\xi_1,\xi_2]$ 满足罗尔中值定理的条件,于是存在 $\eta\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$,使 $f''(\eta)=0$.

【注】 对于第一问也可以考虑反证法. 即假设不存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=0$,则在 $(a,b)$ 上恒有 $f(x)>0$ 或 $f(x)<0$. 不妨设 $f(x)>0$,则

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{x-a}\geqslant 0,$$

$$f'_-(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{x-b}\leqslant 0,$$

故 $f'_+(a)f'_-(b)\leqslant 0$ 与已知 $f'_+(a)f'_-(b)>0$ 矛盾,故假设不成立,即存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=0$.

3. 证明达布中值定理:设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导,且 $f'_+(a)\neq f'_-(b)$,$\eta$ 是介于 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的任一实数,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f'(\xi)=\eta$.

【参考证明】 设 $F(x)=f(x)-\eta x$,则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导,且

$$F'_+(a)\cdot F'_-(b)=[f'_+(a)-\eta]\cdot[f'_-(b)-\eta]<0.$$

【法 1】 不妨设 $F'_+(a)>0$,$F'_-(b)<0$,则由极限的定义,有

$$F'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}>0\quad F'_-(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{F(x)-F(b)}{x-b}<0,$$

故存在 $\delta>0$,当 $x\in(a,a+\delta)$ 时,有 $F(x)>F(a)$;当 $x\in(b-\delta,b)$ 时,有 $F(x)>F(b)$.

因为函数 $F(x)$在$[a,b]$上可导，故 $F(x)$在$[a,b]$上连续，必有最小值 $m$ 及最大值$M$，且此时最大值在$(a,b)$内取得，即存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $F(\xi)=M$，从而由费马引理可知 $F'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)-\eta=0$，得所证结论成立.

【法 2】 设 $F(x)=f(x)-\eta x$，则 $F(x)$在$[a,b]$上可导.

(1) 如果 $F(a)=F(b)$，则由罗尔中值定理可知，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$F'(\xi)=f'(\xi)-\eta=0,$$

即所证结论成立.

(2) 如果 $F(a)\neq F(b)$，不妨设 $F(a)>F(b)$，若 $F'_+(a)>0$，则存在 $\delta>0$，当 $x\in(a,a+\delta)$时，有 $F(x)>F(a)>F(b)$，由闭区间上连续函数的介值定理可知，存在 $c\in(x,b)\subset(a,b)$，使得 $F(c)=F(a)$，故由罗尔中值定理可知，存在 $\xi\in(a,c)\subset(a,b)$，使得 $F'(\xi)=f'(\xi)-\eta=0$. 若 $F'_-(b)>0$，则存在 $\delta>0$，当 $x\in(b-\delta,b)$时，有 $F(x)<F(b)<F(a)$，由闭区间上连续函数的介值定理可知，存在 $c\in(a,x)\subset(a,b)$，使得 $F(c)=F(b)$，故由罗尔中值定理可知，存在 $\xi\in(c,b)\subset(a,b)$，使得 $F'(\xi)=f'(\xi)-\eta=0$.

综上即得所证结论成立.

【注】 该题结论为"**达布中值定理**"，也就是通常说的达布定理. 如果不是专门需要证明该结论，一般在说明定理名称的情况下，可以直接应用定理结论验证其他命题.

4. 设函数 $f(x)$在区间$[0,1]$上具有二阶导数，且 $f(1)>0$，$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$. 证明：

(1) 方程 $f(x)=0$ 在区间$(0,1)$内至少存在一个实根；

(2) 方程 $f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$ 在区间$(0,1)$内至少存在两个不同的实根.

【参考证明】 (1) 由 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$ 和极限保号性可知，存在 $0<\delta<1$，当 $x\in(0,\delta)$时有$\dfrac{f(x)}{x}<0$，取 $x_0\in(0,\delta)$，则有 $f(x_0)<0$. 所以 $f(x)$区间$[x_0,1]$连续，且 $f(x_0)f(1)<0$，有零点定理可知，存在 $\xi\in(x_0,1)\subset(0,1)$，使得 $f(\xi)=0$，即方程 $f(x)=0$ 在区间$(0,1)$内至少存在一个实根.

(2) 由 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$ 及 $f(x)$在$[0,1]$连续可知，$f(0)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$，于是 $f(x)$在$[0,\xi]$上满足罗尔中值定理，存在 $\eta\in(0,\xi)$，使得 $f'(\eta)=0$. 设 $F(x)=f(x)f'(x)$，则有 $F(0)=F(\eta)=F(\xi)=0$，在$[0,\eta]$，$[\eta,\xi]$满足罗尔中值定理的条件，存在 $c_1\in(0,\eta)$，$c_2\in(\eta,\xi)$，使得 $F'(c_1)=0$，$F'(c_2)=0$，于是方程 $F'(x)=0$，即 $f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$ 在区间$(0,1)$内至少存在两个不同的实根.

【注】 此题的关键是$[f(x)f'(x)]'=f(x)f''(x)+[f'(x)]^2$. 与此类似的常用的导数恒等式有

$$[xf(x)]'=xf'(x)+f(x),\quad [x^nf(x)]'=x^{n-1}[xf'(x)+nf(x)],$$

$$\left[\frac{f(x)}{x}\right]'=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2},\quad \left[\frac{f(x)}{x^n}\right]'=\frac{xf'(x)-nf(x)}{x^{n+1}},$$

$$[e^{\lambda x}f(x)]'=e^{\lambda x}[f'(x)+\lambda f(x)],\quad [e^{-\lambda x}f(x)]'=e^{-\lambda x}[f'(x)-\lambda f(x)].$$

5. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且存在 $c\in(a,b)$ 使得 $f'(c)=0$，证明：$\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$.

【参考证明】 令 $F(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x}{b-a}}[f(x)-f(a)]$，则 $F(a)=0$，且

$$F'(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x}{b-a}}\left[f'(x)-\frac{f(x)-f(a)}{b-a}\right],\quad F'(c)=-\frac{F(c)}{b-a}.$$

(1) 若 $F(c)=0$，则有 $F'(c)=0$，取 $\xi=c\in(a,b)$ 有

$$F'(\xi)=\mathrm{e}^{-\frac{\xi}{b-a}}\left[f'(\xi)-\frac{f(\xi)-f(a)}{b-a}\right]=0,$$

即有 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$.

(2) 若 $F(c)\neq0$，不妨设 $F(c)>0$，则 $F'(c)=-\dfrac{F(c)}{b-a}<0$，即

$$F'(c)=\lim_{x\to c}\frac{F(x)-F(c)}{x-c}<0,$$

由极限保号性可知，存在 $x_1\in(c,b)$，使得 $\dfrac{F(x_1)-F(c)}{x_1-c}<0$，即有 $0<F(x_1)<F(c)$，在 $[a,c]$ 上由连续函数的介值定理知，存在 $x_2\in(a,c)$，使得 $F(x_1)=F(x_2)$，于是 $F(x)$ 在区间 $[x_1,x_2]$ 上满足罗尔中值定理，于是存在 $\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$，使得 $F'(\xi)=\mathrm{e}^{-\frac{\xi}{b-a}}\left[f'(\xi)-\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-a}\right]=0$. 即有 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$.

6. 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内有二阶导数，且 $f(a+1)=0$，$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，求证：存在 $\xi\in(a,+\infty)$，使得 $f''(\xi)=0$.

【参考证明】【法 1】 补充 $f(a)=0$，则有 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续. 于是 $f(x)$ 在 $[a,a+1]$ 满足罗尔中值定理，存在 $c_1\in(a,a+1)$，使得 $f'(c_1)=0$.

下面证明存在 $c_2\in(a+1,+\infty)$，使得 $f'(c_2)=0$.

若 $f(x)\equiv0$，$x\in(a+1,+\infty)$，则可取任意的 $\xi\in(a+1,+\infty)$，有 $f''(\xi)=0$，结论成立. 否则，不妨设 $f(b)=m>0$，$b\in(a+1,+\infty)$，则由介值定理及极限定义知存在 $x_1\in(a+1,b)$，$x_2\in(b,+\infty)$，使得 $f(x_1)=f(x_2)=\dfrac{m}{2}$，于是 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上满足罗尔中值定理的条件，于是存在 $c_2\in(x_1,x_2)\subset(a+1,+\infty)$，使得 $f'(c_2)=0$. 因此 $f'(x)$ 在 $[c_1,c_2]$ 满足罗尔中值定理的条件，于是存在 $\xi\in(c_1,c_2)\subset(a,+\infty)$，使得 $f''(\xi)=0$.

【法 2】 作变换 $x=\tan t$，$t\in\left(\arctan a,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$x\in(a,+\infty)$，记

$$f(x)=f(\tan t)=g(t),\quad t\in\left(\arctan a,\frac{\pi}{2}\right),$$

并补充定义 $g(\arctan a)=g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，则 $g(t)$ 在 $[\arctan a,\arctan(a+1)]$ 与

$\left[\arctan(a+1),\frac{\pi}{2}\right]$ 上满足罗尔中值定理的条件，于是存在 $c_1\in(\arctan a,\arctan(a+1))$ 与 $c_2\in\left[\arctan(a+1),\frac{\pi}{2}\right]$ 使得 $g'(c_1)=g'(c_2)=0$，即有 $f'(\tan c_1)=f'(\tan c_1)=0$，其中 $\tan c_1\in(a,a+1)$，$\tan c_2\in(a+1,+\infty)$. 于是 $f'(x)$ 在$[\tan c_1,\tan c_2]$满足罗尔中值定理，存在 $\xi\in(\tan c_1,\tan c_2)\subset(a,+\infty)$，使得 $f''(\xi)=0$.

## 练习 17　拉格朗日中值定理

### 训练目的

1. 理解拉格朗日中值定理，知道拉格朗日中值定理的有限增量形式.
2. 会利用拉格朗日中值定理证明有关中值的等式.
3. 会利用拉格朗日中值定理证明不等式.
4. 会利用拉格朗日中值定理推论证明函数为常值函数.

### 基础练习

1. 若函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 内可导，$x_1,x_2$ 是区间内任意两点，且 $x_1<x_2$，则至少存在一点 $\xi$，使得(　　).

(A) $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),a<\xi<b$

(B) $f(b)-f(x_1)=f'(\xi)(b-x_1),x_1<\xi<b$

(C) $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1),x_1<\xi<x_2$

(D) $f(x_2)-f(a)=f'(\xi)(x_2-a),a<\xi<x_2$

**【参考解答】** 由于函数在端点处既没有说有定义，更没有说连续，所以以上选项中所有涉及端点值 $f(a)$，$f(b)$ 的结论都未必成立，而$[x_1,x_2]\subset(a,b)$，由 $f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 内可导可知，$f(x)$ 在区间$[x_1,x_2]$连续，在区间 $(x_1,x_2)$ 内可导，故由拉格朗日中值定理可得正确选项为(C).

2. 设 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续，在 $(a,b)$ 内可导，证明：在 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$，使得 $\dfrac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi)$.

**【参考证明】** 令 $F(x)=xf(x)$，则 $F(x)$ 区间$[a,b]$上连续，在 $(a,b)$ 内可导，由拉格朗日中值定理有，在 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$，使得 $\dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(\xi)=f(\xi)+\xi f'(\xi)$，即 $\dfrac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi)$.

3. 设函数 $f(x)$ 在闭区间$[0,1]$上连续，在开区间 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=\dfrac{1}{3}$. 证明：存在 $\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$.

【参考证明】 令 $F(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3$，于是 $F(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$，$\left[\frac{1}{2},1\right]$ 满足拉格朗日中值定理的条件，于是 $F\left(\frac{1}{2}\right)-F(0)=\frac{1}{2}F'(\xi)$，$\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$F(1)-F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}F'(\eta)$，$\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，两式相加得 $F(1)-F(0)=\frac{1}{2}[f'(\xi)-\xi^2]+\frac{1}{2}[f'(\eta)-\eta^2)]=0$，即得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$.

4. 设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 $(a,b)$ 内可导，且 $f(a)=f(b)$. 证明：在 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$，使得 $f'(\xi)>0$.

【参考证明】 记 $f(a)=f(b)=m$，由于 $f(x)$ 不恒为常数，故存在 $c\in(a,b)$，$f(c)\neq m$. 函数 $f(x)$ 在区间 $[a,c]$，$[c,b]$ 上连续，在 $(a,c)$，$(c,b)$ 上可导，于是由拉格朗日中值定理，有

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=f'(\xi_1),\quad \xi_1\in(a,c),\qquad \frac{f(b)-f(c)}{b-c}=f'(\xi_2),\quad \xi_2\in(c,b),$$

于是由 $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=\frac{-[f(c)-m]^2}{(c-a)(b-c)}<0$，可知 $f'(\xi_1)$，$f'(\xi_2)$ 异号，不妨设 $f'(\xi_1)>0$，则取 $\xi=\xi_1\in(a,c)\subset(a,b)$，有 $f'(\xi)>0$.

5. 设 $a>b>0$，证明：$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$.

【参考证明】 令 $f(x)=\ln x$，$x\in[b,a]$，则 $f(x)$ 在 $[b,a]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，从而有

$$f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b)=\frac{a-b}{\xi}\quad(b<\xi<a).$$

又 $f(a)-f(b)=\ln\frac{a}{b}$，由 $0<b<\xi<a$，有 $0<\frac{a-b}{a}<\frac{a-b}{\xi}<\frac{a-b}{b}$，所以有 $\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$.

6. (1) 证明恒等式：$3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)=\pi$，$\left(|x|\leqslant\frac{1}{2}\right)$.

(2) 证明：若可导函数 $f(x)$ 满足 $f'(x)=k\ (-\infty<x<+\infty)$，其中 $k$ 为常数，则 $f(x)=kx+b$，其中 $b$ 是任意常数.

【参考证明】 (1) 令 $f(x)=3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)$，则

$$f'(x)=-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{3(1-4x^2)}{\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}}=0,$$

所以 $f(x)$ 为常值函数. 又 $f(0)=3\arccos 0-\arccos 0=3\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=\pi$，于是 $f(x)=\pi\left(x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)$. 又 $f\left(\frac{1}{2}\right)=3\arccos\frac{1}{2}-\arccos 1=3\cdot\frac{\pi}{3}-0=\pi$，

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=3\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)-\arccos(-1)=3\cdot\frac{2\pi}{3}-\pi=\pi,$$

所以 $f(x)=\pi\left(x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right)$，即恒等式成立.

（2）设函数 $g(x)=f(x)-kx$，则 $g'(x)=f'(x)-k=0$，所以 $g(x)=b$（$b$ 为任意常数）为常值函数，即 $f(x)=kx+b$（$b$ 为任意常数）.

## 综合练习

7. 证明：当 $x>-1$ 且 $n\geqslant1$ 时，$(1+x)^n\geqslant1+nx$.

**【参考证明】** 当 $x=0$ 时，不等式成立. 令 $f(x)=(1+x)^n$，$f(x)$ 在 $[-1,+\infty)$ 上可导，则任给 $x\in(-1,+\infty)$，$x\neq0$，由拉格朗日中值定理有

$$f(x)-f(0)=(1+x)^n-1=n(1+\xi)^{n-1}\cdot x,\quad \xi \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}.$$

当 $x>0$ 时，$1+\xi>1$，故有 $(1+x)^n-1\geqslant nx$. 当 $-1<x<0$ 时，$(1+\xi)^n<1$，于是 $n(1+\xi)^n x>nx$，即有 $(1+x)^n-1=n(1+\xi)^{n-1}\cdot x\geqslant nx$.

综上，当 $x>-1$ 且 $n\geqslant1$ 时，$(1+x)^n\geqslant1+nx$.

8. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$. 证明：

（1）存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$.

（2）存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$，使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

**【参考证明】** （1）令 $F(x)=f(x)-1+x$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且

$$F(0)=-1<0,\quad F(1)=1>0.$$

于是由零点定理知，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=1-\xi$.

（2）$f(x)$ 在 $[0,\xi]$ 和 $[\xi,1]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，于是存在 $\eta\in(0,\xi)$，$\zeta\in(\xi,1)$，使得

$$f'(\eta)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0},\quad f'(\zeta)=\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi},$$

于是 $f'(\eta)f'(\zeta)=\dfrac{f(\xi)}{\xi}\cdot\dfrac{1-f(\xi)}{1-\xi}=\dfrac{1-\xi}{\xi}\cdot\dfrac{\xi}{1-\xi}=1$.

9. 设 $f''(x)<0$，$f(0)=0$，证明：对任何 $x_1>0$，$x_2>0$ 有 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

**【参考证明】** 不妨设 $0<x_1\leqslant x_2$. $f(x)$ 在 $[0,x_1]$ 及 $[x_2,x_1+x_2]$ 上满足拉格朗日中值定理条件，故存在 $\xi_1\in(0,x_1)$ 和 $\xi_2\in(x_2,x_1+x_2)$，使得

$$f(x_1)-f(0)=x_1f'(\xi_1),\quad f(x_1+x_2)-f(x_2)=x_1f'(\xi_2),$$

于是 $f(x_1+x_2)-[f(x_1)+f(x_2)]=x_1[f'(\xi_2)-f'(\xi_1)](\xi_1<\xi_2)$. 于是 $f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上满足拉格朗日中值定理条件，故有

$$f'(\xi_2)-f'(\xi_1)=f''(\xi)(\xi_2-\xi_1)\quad[\xi\in(\xi_1,\xi_2)].$$

又 $f''(x)<0$，$\xi_1<\xi_2$，$x_1>0$，所以 $x_1[f'(\xi_2)-f'(\xi_1)]<0$，所以

$$f(x_1+x_2)-[f(x_1)+f(x_2)]<0,\quad \text{即 } f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2).$$

10. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导，且 $f(a)=f(b)=1$，试证：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$.

【参考证明】 所证等式等价于 $e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]=e^{\xi}$. 于是令 $F(x)=e^{x}f(x)$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉格朗日中值定理条件，故存在 $\eta\in(a,b)$，使得 $\dfrac{e^{b}f(b)-e^{a}f(a)}{b-a}=e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]$，即有 $\dfrac{e^{b}-e^{a}}{b-a}=e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]$.

再令 $\varphi(x)=e^{x}$，则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉格朗日中值定理条件，故存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{e^{b}-e^{a}}{b-a}=e^{\xi}$，代入上面的等式即得 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$ 成立.

## 考研与竞赛练习

1. 选择题.

(1) 设 $f(x)$ 处处可导，则(　　).

(A) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$

(B) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

(C) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$

(D) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

(2) 设函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界且可导，则(　　).

(A) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

(B) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

(C) 当 $\lim\limits_{x\to0^{+}}f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to0^{+}}f'(x)=0$

(D) 当 $\lim\limits_{x\to0^{+}}f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to0^{+}}f'(x)=0$

(3) 以下四个命题中，正确的是(　　).

(A) 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

(B) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

(C) 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

(D) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

【参考解答】 (1)【法 1】 排除法. 取 $f(x)=x$，则(A)(C)不对，又取 $f(x)=e^{-x}$，则(B)不对，故正确选项为(D).

【法 2】 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$，对于 $M>0$，存在 $x_0$，使得当 $x>x_0$ 时，$f'(x)>M$. 于是 $x>x_0$ 时，由拉格朗日中值定理，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)>f(x_0)+M(x-x_0)\to+\infty(x\to+\infty),$$

从而有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，故正确选项为(D).

(2)【法 1】 令 $f(x)=\dfrac{\sin x^{2}}{x}$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有界，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，$f'(x)=-\dfrac{1}{x^{2}}\sin x^{2}+2\cos x^{2}$，但 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 不存在，则排除(A).

又 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$，但 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=1\neq0$，则排除(C)和(D)，故正确选项为(B).

【法 2】 反正法证明(B)成立. 假设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=A>0$，取 $\varepsilon=\dfrac{A}{2}$，则存在 $X>0$，当 $x>X$ 时，$|f'(x)-A|<\dfrac{A}{2}$，即 $\dfrac{A}{2}<f'(x)<\dfrac{3A}{2}$，在区间 $[x,X]$ 上用拉格朗日中值定理，有 $f(x)=f(X)+f'(\xi)(x-X)>f(X)+\dfrac{A}{2}(x-X)$，从而 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，与题设 $f(x)$ 有界矛盾，类似可证当 $A<0$ 时亦矛盾，故 $A=0$. 故正确选项为(B).

(3)【法 1】 设 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，则 $f(x)$ 及 $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ 均在 $(0,1)$ 内连续，但 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内无界，排除(A)(B)；又 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $(0,1)$ 内有界，但 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ 在 $(0,1)$ 内无界，排除(D)；所以正确选项为(C).

【法 2】 因为 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，即存在 $M>0$，$|f'(x)|\leqslant M$，$(x\in(0,1))$，则对任给的 $x\in(0,1)$，由格拉朗日中值定理，有 $f(x)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f'(\xi)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$，其中 $\xi$ 介于 $x$ 与 $\dfrac{1}{2}$ 之间，从而 $|f(x)|\leqslant\left|f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right|+|f'(\xi)|\cdot\left|\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\right|\leqslant\left|f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right|+M\cdot\dfrac{1}{2}$，即 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，故正确选项为(C).

【注】 拉格朗日中值定理又称为有限增量定理，$f(x)$ 可导，则 $\Delta y=f'(x_0+\theta\Delta\theta)\Delta x$，$(0<\theta<1)$，或 $f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)$（$\xi$ 介于 $x$ 与 $x_0$ 之间），常用来讨论函数的变化情况与导函数的变化情况之间的关系.

2. 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]$，$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=\mathrm{e}$. 求 $c$ 的值.

【参考解答】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2c}{x-c}\right)^{\frac{x-c}{2c}\cdot\frac{2cx}{x-c}}=\mathrm{e}^{2c}$，又由拉格朗日中值定理，有 $f(x)-f(x-1)=f'(\xi)\cdot1$，$\xi\in(x-1,x)$，所以

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]=\lim_{\xi\to\infty}f'(\xi)=\mathrm{e},$$

于是可得 $\mathrm{e}^{2c}=\mathrm{e}$，即 $c=\dfrac{1}{2}$.

3. 设数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1>0$，$x_n\mathrm{e}^{x_{n+1}}=\mathrm{e}^{x_n}-1(n=1,2,\cdots)$. 证明：$\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【参考证明】 由给出的数列关系式，利用拉格朗日中值定理及 $\mathrm{e}^x$ 和 $\ln x$ 的严格单调得到 $x_{n+1}=\ln\dfrac{\mathrm{e}^{x_n}-1}{x_n}=\ln\dfrac{\mathrm{e}^{x_n}-\mathrm{e}^0}{x_n-0}=\ln\mathrm{e}^{\xi}=\xi$，其中 $\xi$ 在 0 和 $x_n$ 之间，于是可知 $0<x_{n+1}\leqslant x_n\leqslant x_1$，因此 $\{x_n\}$ 单调递减且有下界，$\{x_n\}$ 收敛. 于是令 $a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，则由递推公式，有

$a\mathrm{e}^a=\mathrm{e}^a-1\Rightarrow(1-a)\mathrm{e}^a=1$. 由此可得 $a=0$.

**【单调性另证】** 考虑差值 $x_{n+1}-x_n=\ln\dfrac{\mathrm{e}^{x_n}-1}{x_n}-x_n=\ln\dfrac{\mathrm{e}^{x_n}-1}{x_n\mathrm{e}^{x_n}}$ 的正负性. 即判断对数函数的真数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x\mathrm{e}^x}<1(x>0)$，对其求导，则有

$$f'(x)=\frac{x-\mathrm{e}^x+1}{x^2\mathrm{e}^x}(x>0).$$

问题可以转换为考虑函数 $g(x)=x-\mathrm{e}^x+1(x>0)$ 的正负性. 由于

$$g'(x)=1-\mathrm{e}^x<0(x>0),\quad g(0)=0,$$

所以 $g(x)<g(x)=0(x>0)$，即 $f'(x)<0(x<0)$，所以函数 $f(x)$ 单调递减，并且有 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x\mathrm{e}^x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{x\mathrm{e}^x}=1$. 即 $f(x)<1$，所以

$$x_{n+1}-x_n=\ln\frac{\mathrm{e}^{x_n}-1}{x_n\mathrm{e}^{x_n}}<0,$$

即 $\{x_n\}$ 单调递减.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上具有连续导数，$f(0)=f(2)=0$，$M=\max\limits_{x\in[0,2]}\{|f(x)|\}$. 证明：

(1) 存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $|f'(\xi)|\geqslant M$；

(2) 若对任意的 $x\in(0,2)$，$|f'(x)|\leqslant M$，则 $M=0$.

**【参考证明】** (1) 当 $M=0$ 时，$f(x)\equiv0$，$\forall\xi\in(0,2)$，均有 $|f'(\xi)|\geqslant M$；当 $M>0$ 时，不妨设 $|f(c)|=M$，$c\in(0,2)$. 若 $c\in(0,1)$，由拉格朗日中值定理，存在 $\xi_1\in(0,c)\subset(0,1)$，使得

$$|f'(\xi_1)|=\left|\frac{f(c)-f(0)}{c-0}\right|=\frac{M}{c}>M;$$

若 $c\in(1,2)$，由拉格朗日中值定理，存在 $\xi_2\in(c,2)\subset(1,2)$，使得

$$|f'(\xi_2)|=\left|\frac{f(2)-f(c)}{2-c}\right|=\frac{M}{2-c}>M;$$

若 $c=1$，由拉格朗日中值定理，存在 $\xi_3\in(0,1)$，使得 $|f'(\xi_3)|=|f(1)-f(0)|=M$. 综上可知存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $|f'(\xi)|\geqslant M$.

(2) **【法 1】** 假设存在 $c\in(0,2)$，使得 $|f(c)|=M>0$，则由(1)及 $|f'(x)|\leqslant M$ 可知 $c\notin(0,1)$，$c\notin(1,2)$，于是 $|f(1)|=M$，不妨设 $f(1)=M$，$F(x)=f(x)-Mx$，于是 $F'(x)=f'(x)-M\leqslant0$，所以 $F(x)$ 在 $[0,2]$ 单调递减，又 $F(0)=F(1)=0$，所以 $F(x)\equiv0$，$x\in[0,2]$，即有 $f(x)=Mx$，$x\in[0,2]$，于是 $f'(1)=M$，又由费马定理可知 $f'(1)=0$，所以 $M=0$，与假设矛盾，假设不成立. 即 $M=0$.

**【法 2】** 假设 $M>0$，则 $c\neq0,2$，由 $f(0)=f(2)=0$，于是由罗尔中值定理，存在 $\eta\in(0,2)$，使得 $f'(\eta)=0$. 不妨设 $\eta\in(0,c]$，则

$$M=|f(c)|=|f(c)-f(0)|=\left|\int_0^c f'(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^c|f'(x)|\mathrm{d}x<Mc,$$

又 $M=|f(c)|=|f(2)-f(c)|=\left|\int_c^2 f'(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_c^2 |f'(x)|\mathrm{d}x \leqslant M(2-c)$，

于是 $2M<Mc+M(2-c)=2M$ 矛盾，所以 $M=0$.

5. 设函数 $f(x)$在闭区间$[-2,2]$上具有二阶导数，$|f(x)|\leqslant 1$，$f^2(0)+f'^2(0)=4$. 证明：存在一点 $\xi\in(-2,2)$，使得 $f(\xi)+f''(\xi)=0$.

【参考证明】 $f(x)$在$[-2,0]$与$[0,2]$上满足拉格朗日中值定理，于是有

$$f'(a)=\frac{f(0)-f(-2)}{2} a\in(-2,0),\quad f'(b)=\frac{f(2)-f(0)}{2} b\in(0,2).$$

因$|f(x)|\leqslant 1$，所以由上面两个式子可得 $|f'(a)|\leqslant 1$，$|f'(b)|\leqslant 1$.

令 $F(x)=f^2(x)+f'^2(x)$，则 $F'(x)=2f'(x)[f(x)+f''(x)]$，又

$$F(a)=f^2(a)+f'^2(a)\leqslant 2,\quad F(b)=f^2(b)+f'^2(b)\leqslant 2,$$

且 $F(0)=4$. 于是可知 $F(x)$在$(a,b)$内有最大值点 $\xi$，$F(\xi)\geqslant 4$，由费马定理可知

$$F'(\xi)=2f'(\xi)[f(\xi)+f''(\xi)]=0,$$

又由 $F(\xi)=f^2(\xi)+f'^2(\xi)\geqslant 4$，$|f(\xi)|\leqslant 1$ 知 $f'(\xi)\neq 0$，于是 $f(\xi)+f''(\xi)=0$.

6. 设 $f(x)$在$[0,1]$上可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$. 证明：对任意正数 $a,b$，必存在$(0,1)$内的两个不同的数 $\xi$ 和 $\eta$，使得$\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=a+b$.

【参考证明】 因为 $a,b$ 均为正数，所以 $0<\dfrac{a}{a+b}<1$. 又因为 $f(x)$在$[0,1]$上连续，由介值定理知存在 $\tau\in(0,1)$，使 $f(\tau)=\dfrac{a}{a+b}$. $f(x)$在$[0,\tau]$，$[\tau,1]$上，由拉格朗日中值定理得，存在 $\xi\in(0,\tau)$，$\eta\in(\tau,1)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(\tau)-f(0)}{\tau-0}=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{1}{\tau},\quad f'(\eta)=\frac{f(1)-f(\tau)}{1-\tau}=\frac{b}{a+b}\cdot\frac{1}{1-\tau}.$$

显然 $f'(\xi)\neq 0$，$f'(\eta)\neq 0$，于是

$$\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=(a+b)[\tau+(1-\tau)]=a+b.$$

7. 设 $f(x)$在$(-1,1)$内具有二阶连续导数且 $f''(x)\neq 0$，试证：

(1) 对于$(-1,1)$内的任一 $x\neq 0$，存在唯一的 $\theta(x)\in(0,1)$，使得 $f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)$成立；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$.

【参考证明】 (1) 任给非零 $x\in(-1,1)$，则由拉格朗日中值定理，得

$$f(x)=f(0)+xf'[\theta(x)x]\quad(0<\theta(x)<1),$$

因为 $f''(x)$在$(-1,1)$内连续且 $f''(x)\neq 0$，所以在$(-1,1)$内不变号，不妨设 $f''(x)>0$，则 $f'(x)$在$(-1,1)$内严格单调增加，故 $\theta(x)$唯一.

(2)【法 1】 由(1)所得等式，得 $f'[\theta(x)x]=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$，改写表达式，得

$$\frac{f'[\theta(x)\cdot x]-f'(0)}{\theta(x)\cdot x}\cdot\theta(x)=\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2},$$

两边取极限有$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'[\theta(x)\cdot x]-f'(0)}{\theta(x)\cdot x}\cdot\theta(x)=f''(0)\lim\limits_{x\to0}\theta(x)$,

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{1}{2}f''(0),$$

所以 $\lim\limits_{x\to0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$.

**【法 2】** 由泰勒公式得 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{1}{2}f''(\xi)x^2$，$\xi$ 在 0 与 $x$ 之间，所以 $xf'[\theta(x)x]=f(x)-f(0)=f'(0)x+\dfrac{1}{2}f''(\xi)x^2$，于是有

$$\frac{f'[\theta(x)x]-f'(0)}{\theta(x)x}\theta(x)=\frac{1}{2}f''(\xi),$$

两边取极限得

$$\lim_{x\to0}\frac{f'[\theta(x)x]-f'(0)}{\theta(x)x}=f''(0),\quad \lim_{x\to0}\frac{1}{2}f''(\xi)=\frac{1}{2}\lim_{\xi\to0}f''(\xi)=\frac{f''(0)}{2},$$

所以 $\lim\limits_{x\to0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$.

**【法 3】** 由 $f(x)=f(0)+f'[\theta(x)x]x$，将 $f'[\theta(x)x]$再展开，有

$$f'[\theta(x)x]=f'(0)+f''(0)[\theta(x)x]+o(\theta(x)x),$$

代入上式，得 $f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)[\theta(x)x^2]+o(\theta(x)x)x$. 所以

$$\theta(x)=\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x-o(\theta(x)x)x}{f''(0)x^2},$$

于是$\lim\limits_{x\to0}\theta(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{f''(0)x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{2f''(0)x}=\dfrac{f''(0)}{2f''(0)}=\dfrac{1}{2}$.

## 练习 18　柯西中值定理　洛必达法则

### 训练目的

1. 了解柯西中值定理，特别注意柯西中值定理的条件.
2. 会利用柯西中值定理证明有关中值的等式.
3. 熟练掌握洛必达法则求未定式的极限的方法.

### 基础练习

1. 下列解答中正确的有(　　).

(A) 设函数 $F(x)$在$[a,b]$上连续，$(a,b)$内可导，取 $G(x)=x^2$，则由柯西中值定理有

$$\frac{F'(\xi)}{2\xi}=\frac{F(b)-F(a)}{b^2-a^2},\quad \xi\in(a,b)$$

(B) 设 $0<a<b$，函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，则由柯西中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$

(C) 利用洛必达法则有 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$，因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$ 不存在，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$ 不存在

(D) 利用洛必达法则有 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\cdots$，因此，按这种方式求此极限洛必达法则失效．但如果先整理化简，则有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{2x}}{2e^{2x}}=1$$

**【参考解答】** (A) 错误．若 $0\in(a,b)$，则有 $G'(0)=0$，不满足柯西中值定理．

(B) 正确．$f(x)$，$F(x)=x^2$ 在区间 $[a,b]$ $(0<a<b)$ 满足柯西中值定理条件，于是存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\dfrac{f'(\xi)}{2\xi}$，即 $2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$．

(C) 错误．对于未定式 $\dfrac{0}{0}$ 型，$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，若 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$．但 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在，不能说明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不存在．事实上，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{\sin x}{x}}{1+\dfrac{\sin x}{x}}=1$．

(D) 错误．极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$ 需要分情况讨论，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^{2x}}{2e^{2x}}=1$，但 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$ 不是未定式，$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}=-1$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$ 不存在．故正确的只有(D)．

2．设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ $(0<a<b)$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导．证明在 $(a,b)$ 内存在一点 $\xi$，使得 $f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\dfrac{b}{a}$．

**【参考证明】** 令 $g(x)=\ln x$，则 $f(x)$，$g(x)$ 两个函数在 $[a,b]$ $(0<a<b)$ 上满足柯西中值定理的条件，所以由柯西中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(b)}{g(b)-g(a)}=\frac{f(b)-f(b)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(\xi)}{(\ln x)'_{x=\xi}}=\xi f'(\xi),$$

即有 $f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\dfrac{b}{a}$ 成立．

3．证明：至少存在一点 $\xi\in(1,e)$，使 $\sin 1=\cos(\ln\xi)$．

**【参考证明】** 取 $F(x)=\sin(\ln x)$，$G(x)=\ln x$，则 $F(x)$，$G(x)$ 在区间 $[1,e]$ 上满足柯西中值定理的条件，于是存在 $\xi\in(1,e)$，使得：$\dfrac{F(e)-F(1)}{G(e)-G(1)}=\sin 1=\left.\dfrac{[\sin(\ln x)]'}{(\ln x)'}\right|_{x=\xi}=\cos(\ln\xi)$．

4. 设 $0<a<b$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $ae^b-be^a=(a-b)(1-\xi)e^{\xi}$.

【参考证明】　所证等式等价于 $\dfrac{\dfrac{e^b}{b}-\dfrac{e^a}{a}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}=(1-\xi)e^{\xi}$，故令 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$，$F(x)=\dfrac{1}{x}$.

显然 $f(x)$，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 内连续，在 $(a,b)$ 内可导且 $F'(x)\neq 0$，且

$$f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2},\quad F'(x)=-\frac{1}{x^2},$$

由柯西中值定理可知，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{ae^b-be^a}{a-b}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}=\left[e^x(1-x)\right]\Big|_{x=\xi}=e^{\xi}(1-\xi),$$

即 $ae^b-be^a=(a-b)(1-\xi)e^{\xi}$.

5. 用洛必达法则计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}=$________.　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin 3x}=$________.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x-\arcsin 3x}{x}=$________.　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}=$________.

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\ln x=$________.　(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{1/x}=$________.

【参考解答】　(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{1+x}-1}{2x}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2(1+x)}=-\dfrac{1}{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{3}=\dfrac{2}{3}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x-\arcsin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5}{\sqrt{1-(5x)^2}}-\dfrac{3}{\sqrt{1-(3x)^2}}\right)=2$ 或 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x-\arcsin 3x}{x}=$ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin 5x}{x}-\dfrac{\arcsin 3x}{x}\right)=2$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2x-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2x}{x^2/2}=2$.

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\csc x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1/x}{-\csc x\cot x}=-\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin^2x}{x\cos x}=-\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{\cos x}=0$.

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{1/x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}=e^0=1$.

## 综合练习

6. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin 3x+1)}{\tan 2x}$.　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\pi-2\arctan x)$.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x^2)^{1/x}$.　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$.　　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

【参考解答】(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin 3x+1)}{\tan 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{2x}=\dfrac{3}{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\pi-2\arctan x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi-2\arctan x}{1/x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{1+x^2}=2$.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x^2)^{1/x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln(1+x^2)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{1+x^2}}=e^0=1$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$.

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{\sin x}{x}}{1+\dfrac{\sin x}{x}}=1$.

(6) 令$\dfrac{1}{x}=t$，则

$$\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{t\to 0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+t}}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2(1+t)}=\frac{1}{2}.$$

7. 设函数 $f(x)$在 $x=x_0$ 的某个邻域内具有二阶导数，试用洛必达法则证明：

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=f''(x_0).$$

【参考证明】

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f''(x_0+h)+f''(x_0-h)}{2}\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{1}{2}\left[\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}+\frac{f'(x_0)-f'(x_0-h)}{h}\right]\\
=&\frac{1}{2}[f''(x_0)+f''(x_0)]=f''(x_0).
\end{aligned}$$

8. 设函数 $f(x)$具有二阶连续导数，$f(0)=0$，证明函数 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0\\ f'(0), & x=0\end{cases}$ 具有一阶连续导数.

【参考证明】 当 $x\neq 0$ 时，$g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$，一阶导数在 $x\neq 0$ 处连续，且

$\lim\limits_{x\to 0}g'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)+xf''(x)-f'(x)}{2x}=\dfrac{f''(0)}{2}$. 当 $x=0$ 时，

$$g'(0)=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{f(x)}{x}-f'(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-xf'(x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2}=\frac{f''(0)}{2},$$

即$\lim\limits_{x\to0}g'(x)=g'(0)$，所以 $g'(x)$在 $x=0$ 处连续，即 $g(x)$具有一阶连续导数.

9. 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，$(a,b)$内可导，$f'(x)\neq0$. 证明：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得$\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}\cdot e^{-\eta}$.

**【参考证明】** 结论等式等价于 $f'(\xi)(b-a)=(e^b-e^a)\dfrac{f'(\eta)}{e^\eta}$. 由于 $f(x)$在$[a,b]$上连续，$(a,b)$内可导，由拉格朗日中值定理可知，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)\tag{1}$$

由 $g(x)=e^x$ 在$[a,b]$上连续，$(a,b)$内可导，且 $g'(x)\neq0$，故函数 $f(x)$，$g(x)$在$[a,b]$上满足柯西中值定理的条件，于是可知，存在 $\eta\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a}=\frac{f'(\eta)}{e^\eta},\quad 即\ f(b)-f(a)=(e^b-e^a)\frac{f'(\eta)}{e^\eta},\tag{2}$$

综上式(1)、式(2)可知存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)(b-a)=(e^b-e^a)\dfrac{f'(\eta)}{e^\eta}$.

10. 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续，$(a,b)$内可导$(0\leqslant a<b)$，试证：在$(a,b)$内存在 $\xi,\eta$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$.

**【参考证明】** $f(x)$在$[a,b]$上连续，$(a,b)$内可导，由拉格朗日中值定理定理知，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$. 令 $g(x)=x^2$，则 $g'(x)=2x\neq0$，$x\in(a,b)$，于是 $f(x)$，$g(x)$满足柯西中值定理条件，可知存在 $\eta\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(x)}{(x^2)'}\bigg|_{x=\eta}=\frac{f'(\eta)}{2\eta},$$

综上可知存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$.

## 考研与竞赛练习

1. 设函数 $f(x)$在$[1,2]$上连续，在$(1,2)$内可微，且 $f'(x)\neq0$，证明存在 $\xi,\eta,\zeta\in(1,2)$，使得$\dfrac{f'(\zeta)}{f'(\xi)}=\dfrac{\xi}{\eta}$.

**【参考证明】** 由柯西中值定理可知，存在 $\xi\in(1,2)$，使得$\dfrac{f(2)-f(1)}{\ln2-\ln1}=\dfrac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}}=$

$\xi f'(\xi)$，又由拉格朗日中值定理知，存在 $\zeta\in(1,2)$，使得 $f(2)-f(1)=f'(\zeta)$，从而$\dfrac{f'(\zeta)}{\ln 2}=\xi f'(\xi)$，取 $\eta=\dfrac{1}{\ln 2}\in(1,2)$，因为 $f'(x)\neq 0$，则有$\dfrac{f'(\zeta)}{f'(\xi)}=\dfrac{\xi}{\eta}$成立.

2. 求下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot}x}$.　（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{1/x}$.

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{1/x}$，其中 $n$ 是给定的非负整数.

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$（$n$ 为自然数）.（5）$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2[\arctan(x+1)-\arctan x]$.

**【参考解答】**（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot}x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x^2}{x(1+x)}=1.$

（2）记 $y=(x+\sqrt{1+x^2})^{1/x}$，则 $\ln y=\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}$，于是由

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=0,$$

有 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{1/x}=e^0=1$.

（3）记 $y=\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{1/x}$，则 $\ln y=\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)$，于是由

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})-\ln n}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+2e^{2x}+\cdots+ne^{nx}}{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}=\frac{1+2+\cdots+n}{n}=\frac{n+1}{2},$$

有$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{1/x}=e^{\frac{n+1}{2}}$.

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(t\tan\dfrac{1}{t}\right)^{t^2}\xlongequal{\frac{1}{t}=x}\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\tan x}{x^2}\right)^{1/x^2}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\tan x}{x}\right)}$，其中

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\tan x}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\tan x-\ln x}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{\sec^2 x}{\tan x}-\dfrac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x-\sin 2x}{2x^2\sin 2x}=$$

$$2\lim_{u\to 0^+}\frac{u-\sin u}{u^3}=2\lim_{u\to 0^+}\frac{1-\cos u}{3u^2}=\frac{1}{3}.$$

或 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^2}\ln\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^2}\ln\left(1+\dfrac{\tan x-x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{\tan x-x}{x}\right)=$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan^2 x}{3x^2}=\frac{1}{3}.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{1/x^2}=\mathrm{e}^{1/3}$.

(5)【法 1】 用洛必达法则求未定式极限.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan(x+1)-\arctan x}{\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{1+(x+1)^2}-\dfrac{1}{1+x^2}}{\dfrac{-2}{x^3}}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3(2x+1)}{[1+(x+1)^2](1+x^2)}=1.$$

【法 2】 基于换元法的洛必达法则求极限方法. 令 $x=\dfrac{1}{t}$，则转换为 $t\to 0^+$，即

$$\lim_{x\to+\infty}x^2[\arctan(x+1)-\arctan x]=\lim_{t\to 0^+}\frac{\arctan\left(1+\dfrac{1}{t}\right)-\arctan\dfrac{1}{t}}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{1+\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^2}\left(-\dfrac{1}{t^2}\right)-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{t^2}}\left(-\dfrac{1}{t^2}\right)}{2t}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{t+2}{2(t^2+1)(2t^2+2t+1)}=1.$$

【法 3】 借助于拉格朗日中值定理求极限的思路与方法. 由拉格朗日中值定理，得

$$\arctan(x+1)-\arctan x=\frac{1}{1+\xi^2}\quad(x<\xi<x+1),$$

于是有 $\dfrac{x^2}{1+(x+1)^2}<x^2[\arctan(x+1)-\arctan x]<\dfrac{x^2}{1+x^2}$，由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}=1$. 因此，由夹逼定理，可得

$$\lim_{x\to+\infty}x^2[\arctan(x+1)-\arctan x]=1.$$

【法 4】 利用三角函数关系式. $\arctan x+\arctan y=\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$，于是有

$$\lim_{x\to+\infty}x^2[\arctan(x+1)-\arctan x]=\lim_{x\to+\infty}x^2\arctan\frac{1}{1+x(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x(x+1)}=1.$$

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$，其中 $\varphi(x)$ 具有连续二阶导函数，且 $\varphi(0)=1$.

(1) 确定 $a$ 的值，使 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，并求 $f'(x)$；

(2) 讨论 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

【参考解答】（1）函数 $f(x)$在点 $x=0$ 处可导，则 $f(x)$在点 $x=0$ 处必连续，即要求

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi'(x)+\sin x}{1}=\varphi'(0),$$

即当 $a=\varphi'(0)=f(0)$时，$f(x)$在点 $x=0$ 处连续.

当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\dfrac{[\varphi'(x)+\sin x]x-[\varphi(x)-\cos x]}{x^2}$.

当 $x=0$ 时，由导数的定义及洛必达法则，得

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\cos x-x\varphi'(0)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi'(x)+\sin x-\varphi'(0)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi''(x)+\cos x}{2}=\frac{\varphi''(0)+1}{2},$$

所以 $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{[\varphi'(x)+\sin x]x-[\varphi(x)-\cos x]}{x^2}, & x\neq 0\\ \dfrac{\varphi''(0)+1}{2}, & x=0\end{cases}$.

（2）由洛必达法则，得

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{[\varphi'(x)+\sin x]x-[\varphi(x)-\cos x]}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi'(x)+\sin x+x[\varphi''(x)+\cos x]-\varphi'(x)-\sin x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi''(x)+\cos x}{2}=\frac{\varphi''(0)+1}{2}=f'(0),$$

所以，$f'(x)$在点 $x=0$ 处连续.

4. 已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$，则（　　）.

(A) $a=1,b=-\dfrac{5}{2}$　　(B) $a=0,b=-2$

(C) $a=0,b=-\dfrac{5}{2}$　　(D) $a=1,b=-2$

【参考解答】【法 1】 由洛必达法则，由题意得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+x}-a-2bx}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-a)-(a+2b)x-2bx^2}{2x(1+x)}=2,$$

于是有 $1-a=0,-\dfrac{a+2b}{2}=2$，所以 $a=1,b=-\dfrac{5}{2}$. 故正确选项为(A).

【法 2】 分式的幂函数次数最高为 2，所以将 $\ln(1+x)$展开为带皮亚诺余项的麦克劳林公式，$\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$，代入极限式中的函数，得

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-(ax+bx^2)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-a)x-\left(\frac{1}{2}+b\right)x^2+o(x^2)}{x^2}=2,$$

于是有 $1-a=0,-\left(\frac{1}{2}+b\right)=2$，解得 $a=1,b=-\frac{5}{2}$，所以正确选项为(A).

5. 当 $x\to0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小量，则(　　).

(A) $a=1,b=-\frac{1}{6}$　　(B) $a=1,b=\frac{1}{6}$

(C) $a=-1,b=-\frac{1}{6}$　　(D) $a=-1,b=\frac{1}{6}$

**【参考解答】【法 1】** 由题意有

$$1=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{-bx^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2},$$

于是有 $\lim\limits_{x\to0}(1-a\cos ax)=1-a=0$，所以 $a=1$，于是 $1=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{-3bx^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{-6bx^2}=-\frac{1}{6b}$，故 $b=-\frac{1}{6}$. 故正确选项为(A).

**【法 2】** 由三阶麦克劳林公式可得

$$f(x)=x-\sin ax=x-\left[ax-\frac{(ax)^3}{3!}+o(x^3)\right]=(1-a)x+\frac{a^3}{6}x^3+o(x^3),$$

$$g(x)=x^2\ln(1-bx)=x^2[-bx+o(x)]=-bx^3+o(x^3),$$

当 $x\to0$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小量，从而有 $1-a=0,\frac{a^3}{6}=-b$，解得 $a=1,b=-\frac{1}{6}$，即正确选项为(A).

6. 证明：当 $x>0$ 时，不等式 $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$ 成立.

**【参考证明】【法 1】** 根据不等式结构，改写不定式，有 $\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}-1}>\frac{1}{x}$，构造辅助函数 $f(t)=\ln(t+\sqrt{1+t^2}),g(t)=\sqrt{1+t^2}-1$，则有 $f(0)=g(0)=0$. 函数 $f(t)$，$g(t)$ 在区间 $[0,x]$ 上满足柯西中值定理的条件，故存在 $\xi\in(0,x)$，使得

$$\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}-1}=\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\left.\frac{\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}}{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}\right|_{t=\xi}=\frac{1}{\xi}>\frac{1}{x}.$$

**【法 2】** 把所有相关项移到左侧，令 $f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$，则 $f(0)=$

0,且 $f'(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$. 从而可知,当 $x>0$ 时,$f'(x)>0$,故函数单调增加,即 $f(x)>f(0)=0$,所以原不等式成立.

# 练习 19　泰勒公式

## 训练目的

1. 理解泰勒定理与多项式逼近函数的思想,会直接法求简单函数的泰勒公式.
2. 熟悉常见函数的麦克劳林公式,会利用这些公式间接法求函数的泰勒公式.
3. 会利用泰勒公式进行极限计算.
4. 会利用泰勒公式解决函数不等式问题.
5. 会利用泰勒公式做近似计算并进行误差分析.

## 基础练习

1. 已知 $f(x)$是 4 次多项式,且 $f(2)=-1, f'(2)=0, f''(2)=-2, f'''(2)=-12, f^{(4)}(2)=24$,则 $f(x)=$____________,$f(-1)=$______.

【参考解答】 由于 $f(x)$是 4 次多项式,$f^{(n)}(x)=0(n>4)$,于是 $f(x)$在 $x_0=2$ 的泰勒公式为

$$f(x)=f(2)+f'(2)(x-2)+\frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2+\frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3+\frac{f^{(4)}(2)}{4!}(x-2)^4$$
$$=-1-(x-2)^2-2(x-2)^3+(x-2)^4,$$

令 $x=-1$ 得 $f(-1)=125$.

2. 写出下列函数的带皮亚诺余项的麦克劳林公式.

(1) $x\sin x=$____________________.

(2) $e^{-x^2}=$____________________.

(3) $\dfrac{x^2}{1+x}=$____________________.

(4) $\ln(2+x)=$____________________.

(5) $\cos^2 x=$____________________.

(6) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=$____________________.

【参考解答】 (1) $x\sin x=x\left[x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n})\right]$

$$=x^2-\frac{x^4}{3!}+\frac{x^6}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n-1)!}+o(x^{2n+1}).$$

(2) $e^{-x^2}=1+(-x^2)+\dfrac{(-x^2)^2}{2!}+\dfrac{(-x^2)^3}{3!}+\cdots+\dfrac{(-x^2)^n}{n!}+o((-x^2)^n)$

$$=1-x^2+\frac{1}{2!}x^4-\frac{1}{3!}x^6+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}+o(x^{2n+1}).$$

(3) $\frac{x^2}{1+x}=x^2[1-x+x^2-\cdots+(-1)^{n-2}x^{n-2}+o(x^{n-2})]$

$$=x^2-x^3+x^4-\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n).$$

(4) $\ln(2+x)=\ln2+\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)$

$$=\ln2+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n+o(x^n)$$

$$=\ln2+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2\cdot2^2}+\frac{x^3}{3\cdot2^3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n\cdot2^n}+o(x^n).$$

(5) $\cos^2x=\frac{1+\cos2x}{2}$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}+o((2x)^{2n+1})\right]$$

$$=1-\frac{2}{2!}x^2+\frac{2^3}{4!}x^4+\cdots+(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n+1}).$$

(6) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-x^2)+\frac{1}{2!}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot(-x^2)^2+\cdots+$

$$\frac{1}{n!}\cdot\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)\right]\cdot(-x^2)^n+o(x^{2n+1})$$

$$=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^4+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}+o(x^{2n+1}).$$

3. 根据常见函数的麦克劳林公式,写出下列函数当 $x\to0$ 时关于 $x^n$ 的等价无穷小.

(1) $x-\sin x\sim$________.　　(2) $\cos x-1+\frac{x^2}{2}\sim$________.

(3) $e^x-1-x-\frac{x^2}{2}\sim$________.　　(4) $\ln(1+x)-x\sim$________.

**【参考解答】** (1) 因为 $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)$,于是 $x-\sin x=\frac{x^3}{3!}+o(x^4)$,所以 $x-\sin x\sim\frac{x^3}{6}$.

(2) 因为 $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)$,于是 $\cos x-1+\frac{x^2}{2!}=\frac{x^4}{24}+o(x^5)$,所以 $\cos x-1+\frac{x^2}{2}\sim\frac{x^4}{24}$.

(3) 因为 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$,于是 $e^x-1-x-\frac{x^2}{2}=\frac{x^3}{6}+o(x^3)$所以 $e^x-1-x-\frac{x^2}{2}\sim\frac{x^3}{6}$.

（4）因为 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$，于是 $\ln(1+x)-x=-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$，所以 $\ln(1+x)-x\sim-\frac{x^2}{2}$.

4. 求函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $x=-1$ 处的带拉格朗日余项的 $n$ 阶泰勒公式.

【参考解答】【法 1】 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$，$f''(x)=\frac{2}{x^3}$，…，$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$，于是 $f(-1)=-1$，$f'(-1)=-1$，$f''(-1)=-2!$，…，$f^{(n)}(-1)=-n!$，所以

$$f(x)=\frac{1}{x}=f(-1)+f'(-1)(x+1)+\frac{f''(-1)}{2!}(x+1)+\cdots+$$

$$\frac{f^{(n)}(-1)}{n!}(x+1)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x+1)^{n+1}$$

$$=-1-(x+1)-(x+1)^2-\cdots-(x+1)^n+\frac{(-1)^{n+1}}{\xi^{n+2}}(x+1)^{n+1}\quad(x<\xi<-1),$$

【法 2】 由于 $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\frac{x^{n+1}}{(1-\theta x)^{n+2}}$，$0<\theta<1$，于是

$$f(x)=\frac{1}{x}=-\frac{1}{1-(x+1)}$$

$$=-1-(x+1)-(x+1)^2-\cdots-(x+1)^n-\frac{(x+1)^{n+1}}{[1-\theta(x+1)]^{n+2}}\quad(0<\theta<1).$$

5. 将函数 $f(x)=\ln x$ 按 $(x-2)$ 的幂展开成带皮亚诺余项的 $n$ 阶泰勒公式，并求 $f^{(8)}(2)$.

【参考解答】 $\ln x=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x-2}{2}\right)$，由 $\ln(1+x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k+o(x^n)$ 可得

$$\ln x=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x-2}{2}\right)=\ln 2+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{x-2}{2}\right)^k+o((x-2)^n)$$

$$=\ln 2+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2^k k}(x-2)^k+o((x-2)^n),$$

于是 $a_8=\frac{f^{(8)}(2)}{8!}=\frac{(-1)^{8-1}}{8\cdot 2^8}$，所以 $f^{(8)}(2)=-\frac{315}{16}$.

6. 利用泰勒公式证明不等式：$e^x>1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}(x\neq 0)$.

【参考证明】 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{e^\xi}{4!}x^4$（$\xi$ 在 0 与 $x$ 之间），由于 $\frac{e^\xi}{4!}x^4>0$，所以 $e^x>1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}(x\neq 0)$.

## 综合练习

7. 将函数 $f(x)=e^{2x-x^2}$ 展开为三阶带皮亚诺余项的麦克劳林公式.

【参考解答】【法 1】　由麦克劳林公式 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$，可得

$$\begin{aligned}e^{2x-x^2}&=1+(2x-x^2)+\frac{(2x-x^2)^2}{2!}+\frac{(2x-x^2)^3}{3!}+o((2x-x^2)^5)\\&=1+2x-x^2+\frac{4x^2-4x^3+x^4}{2!}+\frac{8x^3-12x^4+6x^5-x^6}{3!}+o(x^3)\\&=1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3+o(x^3).\end{aligned}$$

【法 2】

$$\begin{aligned}e^{2x-x^2}&=e^{2x}\cdot e^{-x^2}\\&=\left[1+2x+\frac{2^2x^2}{2!}+\frac{2^3x^3}{3!}+o(x^3)\right][1-x^2+o(x^3)]\\&=\left(1+2x+\frac{2^2x^2}{2!}+\frac{2^3x^3}{3!}\right)-x^2(1+2x)+o(x^3)\\&=1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3+o(x^3)\quad (x^4\text{ 以上的项归到 }o(x^3)).\end{aligned}$$

8. 利用麦克劳林公式求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{xe^x-\ln(1+x)}{x^2}$.　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{x^2\sin x^2}$.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

【参考解答】

(1)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{xe^x-\ln(1+x)}{x^2}&=\lim_{x\to0}\frac{x(1+x+o(x))-\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\frac{3}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

(2)
$$\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{x^2\sin x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}+1-\left(1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)\right)}{x^4}=\frac{1}{8}.$$

(3)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]&\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\lim_{t\to0^+}\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\ln(1+t)\right]\\&=\lim_{t\to0^+}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{t-\left(t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)}{t^2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

9. 问当常数 $a,b$ 为何值时，$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\ln(1+2x)}{x}+a+\frac{b}{x}\right)=0$ 成立？

【参考解答】 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+2x)}{x}+a+\frac{b}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x+o(x)+(b+ax)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{b+(2+a)x+o(x)}{x}=0$，从而可得 $a=-2,b=0$.

10. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的邻域内二次可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}\right)=0$.

(1) 求 $f(0),f'(0),f''(0)$； (2) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+f(x)}{x^2}$.

【参考解答】 (1) 由

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1+f(x)-\frac{x^2}{3!}}{x^2}=0,$$

可知 $1+f(x)-\frac{x^2}{3!}=o(x^2)$，所以 $f(x)=-1+\frac{x^2}{3!}+o(x^2)$，又 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)$，对应可知 $f(0)=-1,f'(0)=0,f''(0)=\frac{1}{3}$.

$$(2)\ \lim_{x\to 0}\frac{1+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\left[-1+\frac{1}{3!}x^2+o(x^2)\right]}{x^2}=\frac{1}{6}.$$

11. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二次可微，且 $f(0)=f(1)$，$|f''(x)|\leqslant 2$，证明：

$$|f'(x)|\leqslant 1,\quad x\in[0,1].$$

【参考证明】 任给 $t\in[0,1]$，由泰勒公式 $f(x)=f(t)+f'(t)(x-t)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-t)^2$（其中 $\xi$ 介于 $x$ 与 $t$ 之间），分别取 $x=0$ 和 $x=1$ 有

$$f(0)=f(t)+f'(t)(-t)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(-t)^2\quad(0<\xi_1<t),$$

$$f(1)=f(t)+f'(t)(1-t)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-t)^2\quad(t<\xi_2<1),$$

由 $f(1)=f(0)$ 两式相减得 $f'(t)=\frac{f''(\xi_1)}{2}t^2-\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-t)^2$，于是 $t\in[0,1]$ 时有

$$|f'(t)|=\left|\frac{f''(\xi_1)}{2}t^2-\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-t)^2\right|\leqslant\frac{1}{2}|f''(\xi_1)|t^2+\frac{1}{2}|f''(\xi_2)|(1-t)^2$$

$$\leqslant t^2+(1-t)^2=2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\leqslant 1.$$

即 $|f'(x)|\leqslant 1,x\in[0,1]$.

## 考研与竞赛练习

1. 设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$，$g(x)=kx^3$，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 时是等价无穷小，求 $a,b,k$ 值.

【参考解答】　由函数 $\ln(1+x)$，$\sin x$ 的麦克劳林公式有

$$f(x)=x+a\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right]+bx[x+o(x^2)]$$

$$=(1+a)x+\left(-\frac{a}{2}+b\right)x^2+\frac{a}{3}x^3+o(x^3)\sim kx^3(x\to 0),$$

所以满足 $1+a=0,-\frac{a}{2}+b=0,\frac{a}{3}=k$，解得 $a=-1,b=-\frac{1}{2},k=-\frac{1}{3}$.

2. 求极限 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}$. (2) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{1/x^4}$.

【参考解答】　(1)【法 1】　由二阶带皮亚诺余项的麦克劳林公式，得

$$\sqrt{1+2\sin x}=1+\frac{1}{2}(2\sin x)+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(2\sin x)^2+o(\sin^2 x)$$

$$=1+\sin x-\frac{1}{2}\sin^2 x+o(\sin^2 x),$$

代入极限式得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\frac{1}{2}\sin^2 x+o(\sin^2 x)-x-1}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x-x}{x^2}-\frac{1}{2}\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)=0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}.$$

【法 2】　由等价无穷小、分子有理化和极限四则运算法则，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+2\sin x)-(x+1)^2}{x^2(\sqrt{1+2\sin x}+x+1)},$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+2\sin x)-(x+1)^2}{2x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2(\sin x-x)-x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

【法 3】　由等价无穷小和洛必达法则，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sqrt{1+2\sin x}}-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{1+2\sin x}}{2x\sqrt{1+2\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{1+2\sin x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-\frac{\cos x}{\sqrt{2\sin x+1}}}{2}=-\frac{1}{2}.$$

(2) 由函数 $e^x$ 的连续性，有 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\ln(\cos 2x+2x\sin x)}$，其中

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\ln(\cos 2x+2x\sin x)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x+2x\sin x-1}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-2x^2+\frac{2}{3}x^4+2x\left[x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right]-1}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^4+o(x^4)}{x^4}=\frac{1}{3}.$$

所以$\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}=e^{\frac{1}{3}}$.

3. 设函数 $f(x)$在 $x=0$ 的某个领域内有二阶连续导函数，且 $f(0)\neq 0,f'(0)\neq 0,f''(0)\neq 0$. 证明：存在唯一的一组实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，使得当 $h\to 0$ 时，$\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)$是比 $h^2$ 高阶的无穷小.

**【参考证明】【法 1】** 由函数的二阶带皮亚诺余项的麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2),$$

分别代入 $x=h,x=2h,x=3h$，有

$$f(h)=f(0)+f'(0)h+\frac{1}{2}f''(0)h^2+o(h^2),$$

$$f(2h)=f(0)+2f'(0)h+2f''(0)h^2+o(h^2),$$

$$f(3h)=f(0)+3f'(0)h+\frac{9}{2}f''(0)h^2+o(h^2),$$

于是

$$\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)=(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1)f(0)+(\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3)f'(0)h+(\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3)\frac{f''(0)}{2}h^2+o(h^2),$$

为满足题目要求，实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 应该满足方程组$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1=0\\ \lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=0\\ \lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3=0\end{cases}$，其系数行列式

$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=2\neq 0$，所以存在唯一的一组解满足题设要求.

**【法 2】** 要证存在唯一的一组实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，使得

$$\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)}{h^2}=0,$$

则必有$\lim\limits_{h\to 0}[\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)]=0$. 由于 $f(x)$在 $x=0$ 处连续，则有 $f(0)(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)-f(0)=0$，由 $f(0)\neq 0$ 知 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$.

将原极限运用洛必达法则，得$\lim\limits_{h\to 0}\frac{\lambda_1 f'(h)+2\lambda_2 f'(2h)+3\lambda_3 f'(3h)}{2h}=0$，由极限的四则运算法则知$\lim\limits_{h\to 0}[\lambda_1 f'(h)+2\lambda_2 f'(2h)+3\lambda_3 f'(3h)]=0$，由于 $f'(x)$在 $x=0$ 处连续，则

有 $f'(0)(\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3)=0$，又 $f'(0)\neq 0$，知 $\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=0$；再次运用洛必达法则，得

$$\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_1 f''(h)+4\lambda_2 f''(2h)+9\lambda_3 f''(3h)}{2}=\frac{1}{2}(\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3)f''(0),$$

由 $f''(0)\neq 0$，故应有 $\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3=0$. 综上可得关于实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的方程组

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1\\ \lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=0.\\ \lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3=0\end{cases}$$

该方程组的系数行列式 $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=2\neq 0$，故存在唯一的一组解满足题设要求.

4. 设函数 $y=f(x)$ 二阶可导，且 $f''(x)>0$，$f(0)=0$，$f'(0)=0$. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3 f(u)}{f(x)\sin^3 u}$，其中 $u$ 是曲线 $y=f(x)$ 上点 $P(x,f(x))$ 处切线在 $x$ 轴上的截距.

**【参考答案】** $y=f(x)$ 上点 $P(x,f(x))$ 处切线方程为 $Y-f(x)=f'(x)(X-x)$，令 $Y=0$，$X=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$，由此得 $u=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ 且有

$$\lim_{x\to 0}u=\lim_{x\to 0}\left[x-\frac{f(x)}{f'(x)}\right]=0-\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)-f(0)}{x}}{\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}}=\frac{f'(0)}{f''(0)}=0.$$

由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的二阶麦克劳林公式，

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)=\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2),$$

可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{u}{x}=1-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{xf'(x)}=1-\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)}{xf'(x)}$$

$$=1-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f''(0)+\dfrac{o(x^2)}{x^2}}{\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}}=1-\frac{1}{2}\frac{f''(0)}{f''(0)}=\frac{1}{2}.$$

所以 $x\to 0$ 时，$u\sim\dfrac{x}{2}$，$\sin^3 u\sim u^3$，从而有

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3 f(u)}{f(x)\sin^3 u}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\left[\dfrac{f''(0)}{2}u^2+o(u^2)\right]}{u^3\left[\dfrac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)\right]}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{u}=2.$$

5. 求方程 $x^2\sin\dfrac{1}{x}=2x-501$ 的近似解，精确到 0.001.

**【参考解答】** 由麦克劳林公式 $\sin t=t-\dfrac{\sin(\theta t)}{2}t^2\ (0<\theta<1)$. 令 $t=\dfrac{1}{x}$ 得

$$\sin\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^2,$$

代入原方程，得 $x-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)=2x-501$，即 $x=501-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)$.

由此知 $x>500$ 时，$0<\frac{\theta}{x}<\frac{1}{500}$，所以有

$$|x-501|=\frac{1}{2}\left|\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)\right|\leqslant\frac{1}{2}\frac{\theta}{x}<\frac{1}{1000}=0.001,$$

即 $x=501$ 为满足题设条件的解.

6. 设函数 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 上有 $n$ 阶连续导数，且

$$f^{(k)}(x_0)=0(k=2,3,\cdots,n-1),\quad f^{(n)}(x_0)\neq 0$$

当 $0<|h|<\delta$ 时，有 $f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0+\theta h)$，$0<\theta<1$. 证明：$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$.

**【参考证明】** 由函数 $f(x)$ 的 $n-1$ 阶泰勒公式，有

$$\begin{aligned}f(x_0+h)&=f(x_0)+f'(x_0)h+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}h^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}h^n\\&=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}h^n,\end{aligned}$$

其中 $\xi$ 介于 $x_0$ 与 $x_0+h$ 之间. 由函数 $f'(x)$ 的 $n-1$ 阶泰勒公式，有

$$\begin{aligned}f'(x_0+\theta h)&=f'(x_0)+f''(x_0)\theta h+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-2)!}(\theta h)^{n-2}+\frac{f^{(n)}(\eta)}{(n-1)!}(\theta h)^{n-1}\\&=f'(x_0)+\frac{f^{(n)}(\eta)}{(n-1)!}(\theta h)^{n-1},\end{aligned}$$

其中 $\eta$ 介于 $x_0$ 与 $x_0+\theta h$ 之间. 将以上两个表达式代入已知等式，化简整理得

$$f'(x_0)h+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}h^n=h\left[f'(x_0)+\frac{f^{(n)}(\eta)}{(n-1)!}(\theta h)^{n-1}\right],$$

故 $\frac{f^{(n)}(\xi)}{n}=f^{(n)}(\eta)\cdot\theta^{n-1}$. 令 $h\to 0$，则 $\xi\to x_0$，$\eta\to x_0$，由 $f^{(n)}(x_0)$ 的连续性得 $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n}=f^{(n)}(x_0)(\lim\limits_{h\to 0}\theta)^{n-1}$. 由于 $f^{(n)}(x_0)\neq 0$，所以 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$.

## 练习 20　函数的单调性与极值

### 训练目的

1. 理解函数的单调性，极值的概念.
2. 掌握利用导数判定函数单调性和求极值的方法.
3. 会利用函数单调性与极值证明不等式.
4. 掌握函数最大值和最小值的求法及其应用.

## 基础练习

1. 指出下列函数的单调区间及极值点.(若没有相应的区间或点则填“无”)

(1) 函数 $y=x-2\sin x(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$ 的单调递增区间为________,单调递减区间为________,在点 $x=$______处取极小值,在点 $x=$______处取极大值.

(2) 函数 $y=2-\sqrt[3]{(x-1)^2}$ 的单调递增区间为______,单调递减区间为______,在点 $x=$______处取极小值,在点 $x=$______处取极大值.

(3) 函数 $y=x+|\sin x|$ 的单调递增区间为______,单调递减区间为______,在点 $x=$______处取极小值,在点 $x=$______处取极大值.

(4) 函数 $y=e^x\cos x$ 在点 $x=$______处取极小值,在点 $x=$______处取极大值.

【答案】 (1) $\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right]$, $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{3},2\pi\right]$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$;(2) $(-\infty,1)$, $(1,+\infty)$,无,1;(3) $(-\infty,+\infty)$,无,无,无;(4) $x=(2k+1)\pi+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbb{Z})$, $x=2k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbb{Z})$.

【参考解答】 (1) $y'=1-2\cos x$, $y'\left(\frac{\pi}{3}\right)=y'\left(\frac{5\pi}{3}\right)=0$,当 $x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right]$ 时, $y'(x)\geqslant 0$,当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{3},2\pi\right]$ 时, $y'(x)\leqslant 0$,于是, $\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right]$ 为函数单调递增区间, $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$, $\left[\frac{5\pi}{3},2\pi\right]$ 为单调递减区间,在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取极小值,在 $x=\frac{5\pi}{3}$ 处取极大值.

(2) 函数定义域为 $(-\infty,+\infty)$, $y'=-\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$,在 $x=1$ 处函数不可导. 当 $x\in(-\infty,1)$ 时, $y'(x)\geqslant 0$,当 $x\in(1,+\infty)$ 时, $y'(x)\leqslant 0$,于是, $(-\infty,1)$ 为函数单调递增区间, $(1,+\infty)$ 为单调递减区间,在 $x=1$ 处取极大值,没有极小值点.

(3) $$y=\begin{cases}x+\sin x, & x\in[2n\pi,\pi+2n\pi]\\ x-\sin x, & x\in[2n\pi+\pi,2\pi+2n\pi]\end{cases}\quad(n\in\mathbb{Z}),$$

$$y'=\begin{cases}1+\cos x, & x\in(2n\pi,\pi+2n\pi)\\ 1-\cos x, & x\in(2n\pi+\pi,2\pi+2n\pi)\end{cases}\quad(n\in\mathbb{Z}),$$

于是函数在 $x=n\pi$ 处不可导, $y'(x)>0$, $(x\neq n\pi)$,所以函数在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增,无极值点.

(4) 函数定义域为 $(-\infty,+\infty)$, $y'=e^x(\cos x-\sin x)$,令 $y'=0$ 得 $x=k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbb{Z})$. $y''=-2e^x\sin x$,于是

$$y''\left(2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\,e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}<0,\quad y''\left[(2k+1)\pi+\frac{\pi}{4}\right]=\sqrt{2}\,e^{(2k+1)\pi+\frac{\pi}{4}}>0,$$

所以函数在 $x=2k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbb{Z})$ 处取极大值;在 $x=(2k+1)\pi+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbb{Z})$ 处取极小值.

2. 证明下列不等式.

(1) $\sin x+\tan x>2x$, $0<x<\frac{\pi}{2}$;　(2) $\tan x>x+\frac{x^3}{3}$, $0<x<\frac{\pi}{2}$.

【参考证明】 (1)【法 1】 令 $f(x)=(\sin x+\tan x)-2x$，则 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 连续，且

$$f(0)=0,\quad f'(x)=\cos x+\sec^2 x-2>\cos x+\sec x-2>0\left(x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right),$$

所以 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 严格单调递增，于是 $f(x)>f(0)=0,x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，即 $\sin x+\tan x>2x,0<x<\frac{\pi}{2}$.

或 $f'(x)=\cos x+\sec^2 x-2,f'(0)=0$，

$$f''(x)=-\sin x+2\sec^2 x\tan x=\sin x(2\sec^3 x-1)>0,$$

所以 $f'(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递增，于是 $f'(x)>f'(0)=0,x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递增，于是 $f(x)>f(0)=0,x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，即 $\sin x+\tan x>2x,0<x<\frac{\pi}{2}$.

【法 2】 令 $f(x)=(\sin x+\tan x)-2x$，则 $f(0)=0$，

$$f'(x)=\cos x+\sec^2 x-2,\quad f'(0)=0,$$

$$f''(x)=-\sin x+2\sec^2 x\tan x=\sin x(2\sec^3 x-1),$$

于是由 $f(x)$ 在处 $x=0$ 的 2 阶麦克劳林公式有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2=\frac{\sin\xi}{2}(2\sec^3\xi-1)x^2>0,\quad 0<\xi<x<\frac{\pi}{2},$$

即 $\sin x+\tan x>2x,0<x<\frac{\pi}{2}$.

(2) 令 $f(x)=\tan x-x-\frac{x^3}{3}$，则 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 连续，且 $f(0)=0,f'(x)=\sec^2 x-1-x^2=\tan^2 x-x^2>0$，故函数在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上严格递增. 从而当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f(x)>f(0)=0$，即不等式 $\tan x>x+\frac{x^3}{3},0<x<\frac{\pi}{2}$ 成立.

3. 设 $0<a<b$，求证 $\ln\frac{b}{a}>\frac{2(b-a)}{a+b}$.

【参考证明】【法 1】 令 $f(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{1+x},f(x)\in C[1,+\infty),f(1)=0$，$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{(1+x)^2}=\frac{(1-x)^2}{x(1+x)^2}>0$，所以函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，从而 $f(x)>f(1)=0(\forall x>1)$，由 $0<a<b$ 知 $\frac{b}{a}>1$，故 $f\left(\frac{b}{a}\right)>0$，即结论成立.

【法 2】 令 $f(b)=\ln\frac{b}{a}-\frac{2(b-a)}{a+b},f(b)\in C[a,+\infty),f(a)=0,f'(b)=\frac{1}{b}-\frac{4a}{(a+b)^2}=\frac{(b-a)^2}{b(a+b)^2}>0(b>a)$，所以函数 $f(b)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调递增，从而 $f(b)>f(a)=$

$0$,即结论成立.

## 综合练习

4. 证明下列不等式.

(1) $(x^2-1)\ln x \geqslant (x-1)^2, x>0$;　(2) $\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x} > \dfrac{x}{1+x}, x>1$.

【参考证明】 (1) 当 $x=1$ 时,结论成立. 令 $f(x)=x\ln x+\ln x-x+1$, $f(x)\in C(0,+\infty)$, $f(1)=0$, $f'(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x}-\ln\dfrac{1}{x}>0$,所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增,于是,当 $0<x<1$ 时, $f(x)=x\ln x+\ln x-x+1<f(1)=0$,即有 $(x+1)\ln x+\ln x<x-1$,又 $x-1<0$,所以 $(x^2-1)\ln x>(x-1)^2$;当 $x>1$ 时,于是 $f(x)=x\ln x+\ln x-x+1>f(1)=0$,即有 $(x+1)\ln x+\ln x>x-1$,又 $x-1>0$,所以 $(x^2-1)\ln x>(x-1)^2$.

综上,不等式 $(x^2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2, x>0$ 成立.

(2) 由 $x>1$ 知 $\ln x>0$,原式等价于 $(1+x)\ln(1+x)\geqslant x\ln x$.

【法 1】 令 $f(x)=x\ln x$, $f(x)\in C[1,+\infty)$, $f(1)=0$,则 $f'(x)=1+\ln x>0$,所以 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上递增,而 $1+x>x>1$,故 $f(1+x)>f(x)$,结论得证.

【法 2】 令 $f(t)=t\ln t$, $f'(t)=1+\ln t>0$,在区间 $[x,x+1]$ 上满足拉格朗日中值定理,于是有 $(1+x)\ln(1+x)-x\ln x=1+\ln\xi>0\,(1<x<\xi<x+1)$,所以 $\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}>\dfrac{x}{1+x}$, $x>1$.

5. 已知 $f(x)=\begin{cases} x^{2x}, & x>0 \\ xe^x+1, & x\leqslant 0 \end{cases}$,求 $f(x)$ 的单调区间与极值.

【参考解答】 函数定义域为 $(-\infty,+\infty)$,由于 $f(0)=f(0-0)=\lim\limits_{x\to0^-}(xe^x+1)=1$, $f(0+0)=\lim\limits_{x\to0^+}x^{2x}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{2x\ln x}=e^0=1$,所以 $f(0-0)=f(0)=f(0+0)$,所以 $f(x)$ 在分段点 $x=0$ 处连续,由初等函数连续性可知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

又 $f'(x)=\begin{cases} 2x^{2x}(\ln x+1), & x>0 \\ e^x(x+1), & x<0 \end{cases}$,令 $f'(x)=0$,可得 $x=\dfrac{1}{e}$, $x=-1$,所以可能的极值点为 $x=\dfrac{1}{e}$, $x=0$, $x=-1$.

于是可得下表:

| $x$ | $(-\infty,-1)$ | $-1$ | $(-1,0)$ | $0$ | $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ | $\frac{1}{e}$ | $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $0$ | $+$ | 不存在 | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | 递减 | 极小 | 递增 | 极大 | 递减 | 极小 | 递增 |

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1,0)$, $\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$,单调递减区间为 $(-\infty,-1)$, $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$. 函

数极小值分别为 $f(-1)=1-\frac{1}{e}$,$f\left(\frac{1}{e}\right)=e^{\frac{-2}{e}}$,极大值为 $f(0)=1$.

6. 设函数 $f(x)=nx(1-x)^n$,$n\in\mathbb{N}$,试求函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值 $M(n)$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}M(n)$.

【参考解答】 显然 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续,且 $f(0)=f(1)=0$. 又

$$f'(x)=n(1-x)^n-nx\cdot n(1-x)^{n-1}=n(1-x)^{n-1}[1-(n+1)x],$$

令 $f'(x)=0$,得区间 $(0,1)$ 内唯一驻点 $x=\frac{1}{n+1}$.

当 $x<\frac{1}{n+1}$ 时,$f'(x)>0$,函数单调递增;当 $x>\frac{1}{n+1}$ 时,$f'(x)<0$,函数单调递减;函数在 $x=\frac{1}{n+1}$ 取得区间内唯一极大值点,即为最大值点,对应最大值

$$M(n)=f\left(\frac{1}{n+1}\right)=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}M(n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right]^{-1}=e^{-1}$.

7. 证明方程 $\frac{1}{(1+x)^n}-1+nx-\frac{n(n+1)}{2}x^2=0$ 无正根.

【参考证明】 令 $f(x)=\frac{1}{(1+x)^n}-1+nx-\frac{n(n+1)}{2}x^2$,则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续,且 $f(0)=0$. 对其求一阶、二阶导数,得

$$f'(x)=-\frac{n}{(1+x)^{n+1}}+n-n(n+1)x=n\left[1-(n+1)x-\frac{1}{(1+x)^{n+1}}\right],$$

$$f''(x)=n\left[-(n+1)+\frac{n+1}{(1+x)^{n+2}}\right]=n(n+1)\left[\frac{1}{(1+x)^{n+2}}-1\right]<0\quad(x>0),$$

从而可知 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递减. 由 $f'(0)=0$,故 $f'(x)<0$,即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内严格单调递减,又 $f(0)=0$,故 $f(x)<0(x>0)$,即方程无正根.

8. 证明方程 $x^2=x\sin x+\cos x$ 恰好只有两个不同的实数根.

【参考证明】 令 $f(x)=x^2-x\sin x-\cos x$,则

$$f'(x)=2x-x\cos x-\sin x+\sin x=2x-x\cos x,$$

令 $f'(x)=0$,得 $x=0$ 为唯一驻点,且 $x<0$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 严格单调递减,$x>0$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 严格单调递增,所以唯一极值点 $x=0$ 处取得极小值 $f(0)=-1<0$,也为最小值点. 又因为 $f(\pm\pi)=\pi^2+1>0$,由零点定理知,$f(x)$ 在 $(-\pi,0)$ 与 $(0,\pi)$ 内分别至少有一个零点,又 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 与 $(0,+\infty)$ 严格单调,在两区间内分别至多有一个零点,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 恰有两个不同的零点,即方程 $x^2=x\sin x+\cos x$ 恰好只有两个不同的实数根.

9. 设 $e<a<b$,证明 $a^b>b^a$.

【参考解答】【法 1】 因为 $e<a<b$，故原不等式等价于 $b\ln a>a\ln b$.

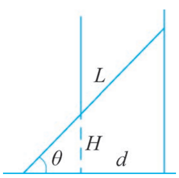
令 $f(x)=x\ln a-a\ln x(e<a<x)$，则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续，且 $f(a)=0$，由 $e<a<x$，有 $\ln a>1$，$\frac{a}{x}<1$，于是 $f'(x)=\ln a-\frac{a}{x}>0$，所以 $f(x)$ 严格单调递增. 由于 $e<a<b$，所以 $f(b)>f(a)=0(e<a<b)$，从而可得

$$f(b)=b\ln a-a\ln b>0,\quad 即\ a^b>b^a.$$

【法 2】 因为 $e<a<b$，故原不等式等价于 $\frac{\ln a}{a}>\frac{\ln b}{b}$. 令 $f(x)=\frac{\ln x}{x}(x>e)$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当 $x>e$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 严格单调递减. 由于 $e<a<b$，于是可得 $f(b)<f(a)$，即 $\frac{\ln b}{b}<\frac{\ln a}{a}$ 成立.

10. 在地面上建有一座圆柱形水塔，水塔的内部直径为 $d$，并且在地面处开了一个高为 $H$ 的小门. 现在要对水塔进行维修施工，施工方案要求把一根长度为 $L(L>d)$ 的水管运到水塔内部，试问水塔的门为多高时，才有可能成功地把水管搬进水塔内？

【参考解答】 如图所示. $H(\theta)=(L\cos\theta-d)\tan\theta=L\sin\theta-d\tan\theta$，$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，令 $H'(\theta)=L\cos\theta-d\sec^2\theta=0$，得唯一驻点：$\cos\theta=\sqrt[3]{d/L}$，$\theta=\arccos\sqrt[3]{d/L}$. 由问题可知最小值存在，在唯一驻点取到，对应最小值为



第 10 题图

$$H_{\min}=L\sqrt{1-\cos^2\theta}-d\sqrt{\sec^2\theta-1}=(L^{2/3}-d^{2/3})^{3/2}.$$

## 考研与竞赛练习

1. 选择题.

(1) 设 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，则在 $x=a$ 处(　　).

(A) $f(x)$ 的导数存在，且 $f'(a)\neq0$　　(B) $f(x)$ 取得极大值

(C) $f(x)$ 取得极小值　　(D) $f(x)$ 的导数不存在

(2) 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 具有二阶导数，且 $g''(x)<0$，若 $g(x_0)=a$ 是 $g(x)$ 的极值，则 $f(g(x))$ 在 $x_0$ 取极大值的一个充分条件是(　　).

(A) $f'(a)<0$　　(B) $f'(a)>0$　　(C) $f''(a)<0$　　(D) $f''(a)>0$

(3) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上可导，且 $f'(x)>f(x)>0$，则(　　).

(A) $\frac{f(-2)}{f(-1)}>1$　　(B) $\frac{f(0)}{f(-1)}>e$　　(C) $\frac{f(1)}{f(-1)}<e^2$　　(D) $\frac{f(2)}{f(-1)}<e^3$

(4) 若 $3a^2-5b<0$，则方程 $x^5+2ax^3+3bx+4c=0$(　　).

(A) 无实根　　(B) 有唯一实根

(C) 有 3 个不同实根　　(D) 有 5 个不同实根

【参考解答】 (1)【法 1】 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1<0$，则由极限的保号性可知，存

在 $a$ 的某去心邻域内，$\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}<0$，又 $(x-a)^2>0$，所以 $f(x)-f(a)<0$，即 $f(x)<f(a)$，所以 $f(x)$ 取得极大值．所以正确选项为(B)．

**【法 2】** 排除法，或特殊法．取 $f(x)=-(x-a)^2$，函数满足条件，且 $f'(a)=0$，则(A)和(D)不能选．又 $f(x)=-(x-a)^2$ 在 $x=a$ 处取到极大值，所以(C)不能选，答案只能是(B)．

(2) 由已知条件可得 $[f(g(x))]'|_{x=x_0}=f'(g(x_0))g'(x_0)=0$，故要想 $x_0$ 为 $f(g(x))$ 的极大值点，只需 $[f(g(x))]''|_{x=x_0}<0$ 即可．于是由

$$[f(g(x))]''|_{x=x_0}=f''(g(x_0))g'^2(x_0)+f'(g(x_0))g''(x_0)=f'(a)g''(x_0)<0,$$

可知结论成立只需要 $f'(a)>0$，所以正确选项为(B)．

(3) 因为 $f'(x)>f(x)>0$，所以 $f'(x)-f(x)>0$，令 $F(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$，则 $F(x)$ 在 $(-2,2)$ 单调递增，所以 $F(0)>F(-1)>0$．所以正确选项为(B)．

(4) 令 $f(x)=x^5+2ax^3+3bx+4c$，则 $f'(x)=5x^4+6ax^2+3b$，令 $t=x^2$，$f'(x)=5x^4+6ax^2+3b=5t^2+6at+3b$，其判别式

$$\Delta=(6a)^2-4\cdot5\cdot3b=12(3a^2-5b)<0,$$

所以 $f'(x)$ 无实根，即 $f'(x)>0$，所以函数 $f(x)=x^5+2ax^3+3bx+4c$ 在 $x\in(-\infty,+\infty)$ 上单调递增．又

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^5+2ax^3+3bx+4c)=-\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^5+2ax^3+3bx+4c)=+\infty,$$

所以由连续函数的介值定理可知，在 $(-\infty,+\infty)$ 内至少存在一点 $x_0$ 使得 $f(x_0)=0$，又因为 $y=f(x)$ 是严格的单调函数，故 $x_0$ 是唯一的，故方程 $f(x)=0$ 有唯一实根，因此正确选项为(B)．

2. 设 $y=y(x)$ 由 $x^3+3x^2y-2y^3=2$ 所确定，求 $y(x)$ 的极值．

**【参考解答】** 方程两边对 $x$ 求导，得 $3x^2+6xy+3x^2y'-6y^2y'=0\Rightarrow y'=\dfrac{x(x+2y)}{2y^2-x^2}$，令 $y'(x)=0\Rightarrow x=0,x=-2y$．将 $x=0,x=-2y$ 代入所给方程，得

$$x=0,y=-1;\quad x=-2,y=1.$$

又 $y''=\dfrac{(2y^2-x^2)(2x+2xy'+2y)-(x^2+2xy)(4yy'-2x)}{(2y^2-x^2)^2}$，从而有

$$y''\Big|_{\substack{x=0\\y=-1\\y'=0}}=-1<0,\quad y''\Big|_{\substack{x=-2\\y=1\\y'=0}}=1>0.$$

所以，$y(0)=-1$ 为极大值，$y(-2)=1$ 为极小值．

3. 讨论曲线 $y=4\ln x+k$ 与 $y=4x+\ln^4x$ 的交点个数．

**【参考解答】** 问题等价于讨论函数 $\varphi(x)=(\ln^4x+4x)-(4\ln x+k)$ 在区间 $(0,+\infty)$

内的零点个数.

令 $\varphi'(x)=\frac{4\ln^3 x}{x}-\frac{4}{x}+4=\frac{4}{x}(\ln^3 x-1+x)=0$，得 $x=1$. 当 $0<x<1$ 时，$\ln^3 x<0$，则 $\ln^3 x-1+x<0$，而 $\frac{4}{x}>0$，由此可得 $\varphi'(x)<0$，即 $\varphi(x)$ 单调递减；当 $x>1$ 时，$\ln^3 x>0$，则 $\ln^3 x-1+x>0$，而 $\frac{4}{x}>0$，有 $\varphi'(x)>0$，即 $\varphi(x)$ 单调递增，故 $\varphi(1)=4-k$ 为函数 $\varphi(x)$ 的唯一极小值即最小值.

① 当 $\varphi(1)=4-k>0$，即当 $k<4$ 时，$\varphi(x)\geqslant\varphi(1)>0$，$\varphi(x)$ 无零点，两曲线没有交点；

② 当 $\varphi(1)=4-k=0$，即当 $k=4$ 时，$\varphi(x)\geqslant\varphi(1)=0$，$\varphi(x)$ 有且仅有一个零点，即两曲线仅有一个交点；

③ 当 $\varphi(1)=4-k<0$，即当 $k>4$ 时，由于

$$\lim_{x\to 0^+}\varphi(x)=\lim_{x\to 0^+}[(\ln^3 x-4)\ln x+4x-k]=+\infty,$$

$$\lim_{x\to +\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to +\infty}[(\ln^3 x-4)\ln x+4x-k]=+\infty,$$

由连续函数的介值定理，在区间 $(0,1)$ 与 $(1,+\infty)$ 内各至少有一个零点，又因在区间 $(0,1)$ 与 $(1,+\infty)$ 内分别是严格单调的，故 $\varphi(x)$ 分别至多有一个零点. 于是 $\varphi(x)$ 有两个零点.

综上所述，当 $k<4$ 时，两曲线没有交点；当 $k=4$ 时，两曲线仅有一个交点；当 $k>4$ 时，两曲线有两个交点.

4. 设 $0<a<b$，证明不等式：$\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$.

【参考证明】（1）证明：$\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}$.

【法 1】　设函数 $f(x)=\ln x\,(x>a>0)$，由拉格朗日中值定理可知

$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=(\ln x)'\Big|_{x=\xi}=\frac{1}{\xi},\quad 0<a<\xi<b,$$

而 $\frac{1}{\xi}>\frac{1}{b}>\frac{2a}{a^2+b^2}$，其中 $a^2+b^2>2ab\,(0<a<b)$，所以不等式 $\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}$ 成立.

【法 2】　令 $\varphi(x)=\ln x-\ln a-\frac{2a(x-a)}{a^2+x^2}$，$\varphi(x)$ 在 $[a,+\infty)\,(a>0)$ 上连续，$\varphi(a)=0$，且 $x\in(a,+\infty)$ 时，

$$\varphi'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2a}{a^2+x^2}+\frac{4ax(x-a)}{(a^2+x^2)^2}=\frac{(x-a)^2}{x(a^2+x^2)}+\frac{4ax(x-a)}{(a^2+x^2)^2}>0,$$

所以当 $x\in(a,+\infty)$ 时 $\varphi(x)$ 单调递增，所以 $b>a$ 时，

$$\varphi(b)-\varphi(a)=\ln b-\ln a-\frac{2a(b-a)}{a^2+b^2}>0,$$

即不等式 $\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}$ 成立.

（2）证明：$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$.

【法 1】 令 $g(x)=\ln x-\ln a-\frac{1}{\sqrt{ax}}(x-a)$，则 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)(a>0)$ 上连续，$g(a)=0$，且 $x\in(a,+\infty)$ 时，

$$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{a}{2x\sqrt{x}}\right)=-\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2}{2x\sqrt{ax}}<0,$$

所以当 $x\in(a,+\infty)$ 时 $g(x)$ 单调递增，所以当 $b>a$ 时，

$$g(b)-g(a)=\ln b-\ln a-\frac{1}{\sqrt{ab}}(b-a)<0\quad 即\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

【法 2】 令 $\psi(x)=2\ln x-x+\frac{1}{x}$，则 $\psi(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续，$\psi(1)=0$，且 $x\in(1,+\infty)$ 时，

$$\psi'(x)=\frac{2}{x}-1-\frac{1}{x^2},\quad \psi'(1)=0,\quad \psi''(x)=-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}=\frac{2}{x^3}(1-x)<0,$$

所以当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$\psi'(x)$ 单调递减，于是 $\psi'(x)<\psi'(1)=0$，于是 $\psi(x)$ 单调递减，于是 $\psi(x)<\psi(1)=0$. 当 $b>a$ 时，取 $x=\sqrt{\frac{b}{a}}\in(1,+\infty)$，于是有

$$\psi\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)=\ln\frac{b}{a}-\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{a}{b}}=(\ln b-\ln a)-\frac{1}{\sqrt{ab}}(b-a)<0,$$

即不等式 $\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$ 成立. 综上可知原双侧不等式成立.

5. 设整数 $n>1$，证明不等式 $\frac{1}{2ne}<\frac{1}{e}-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n<\frac{1}{ne}$.

【参考解答】 (1) 证明左侧不等式.

$$\frac{1}{2ne}<\frac{1}{e}-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\Leftrightarrow\frac{1}{n}\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}>0.$$

令 $\frac{1}{n}=x$，构造辅助函数 $f(x)=x\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)-\ln(1-x)-x$，函数在 $[0,1)$ 上连续，$f(0)=0$. 则当 $x\in(0,1)$ 时，

$$f'(x)=\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)-\frac{x}{2-x}+\frac{1}{1-x}-1,\quad f'(0)=0,$$

$$f''(x)=-\frac{1}{2-x}-\frac{2}{(2-x)^2}+\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{x(x^2+5x+5)}{(2-x)^2(1-x)^2}>0,$$

所以 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调增加，由于 $f(x)$，$f'(x)$ 在 $[0,1)$ 上连续，由此可知

$$f'(x)>f'(0)=0,\quad x\in(0,1).$$

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上严格单调增加，即 $f(x)>f(0)=0$，$x\in(0,1)$，即

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}>0.$$

(2) 证明右侧不等式.

$$\frac{1}{\mathrm{e}}-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}<\frac{1}{n\mathrm{e}}\Leftrightarrow\left(1-\frac{1}{n}\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}>0.$$

令$\frac{1}{n}=x$，构造辅助函数$g(x)=(1-x)\ln(1-x)+x$，函数在$[0,1)$上连续，$g(0)=0$. 则当$x\in(0,1)$时，$g'(x)=-\ln(1-x)>0$. 由于$g(x)$在$[0,1)$上连续，由此可知$g(x)$在$(0,1)$上严格单调递增，于是$g(x)>g(0)=0$，$x\in(0,1)$，因此$g\left(\frac{1}{n}\right)=\left(1-\frac{1}{n}\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}>0$.

综上可知原不等式成立.

6. 求使得$\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\beta}$对一切正整数$n$都成立的最小的$\beta$的值.

**【参考解答】** 由于$\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\beta}\Leftrightarrow\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-n<\beta$，记$x_n=\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-n$，问题即求数列$\{x_n\}$的最小上界. 于是令$x=\frac{1}{n}$，考察函数$f(x)=\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}(x\in(0,1))$，

$f'(x)=\frac{(1+x)[\ln(1+x)]^2-x^2}{x^2(1+x)[\ln(1+x)]^2}$，再令$g(x)=(1+x)[\ln(1+x)]^2-x^2$，$g(0)=0$，且

$$g'(x)=2\ln(1+x)+[\ln(1+x)]^2-2x,\quad g'(0)=0,$$

$$g''(x)=\frac{2}{1+x}+\frac{2\ln(1+x)}{1+x}-2=\frac{2}{1+x}[\ln(1+x)-x],$$

由不等式$\ln(1+x)<x$可知$g''(x)<0(x\in(0,1])$，得$g'(x)$单调递减，$g'(x)<g'(0)=0$，得$g(x)$单调递减，$g(x)<g(0)=0$. 于是$f'(x)<0$，所以当$x\in(0,1]$时$f(x)$严格单调递减. 又$n\to\infty$时，$x\to0^+$，所以数列$\{x_n\}$严格单调递增，且

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{x\to0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{2(1+x)}=\frac{1}{2}.$$

即任给$\varepsilon>0$，存在$N\in\mathbb{Z}^+$，当$n>N$时，有$\left|x_n-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$成立，即$\frac{1}{2}-\varepsilon<x_n<\frac{1}{2}+\varepsilon$，于是由$\varepsilon$的任意性及$x_n$单调递增，可知$\frac{1}{2}$为$x_n$的最小上界，于是$\beta=\frac{1}{2}$.

## 练习 21　函数曲线的凹凸性与拐点

### 训练目的

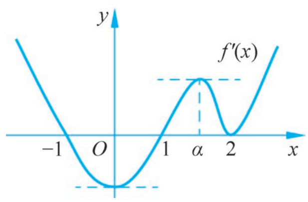
1. 理解函数的凹凸性，函数曲线的凹凸性的定义.
2. 掌握利用导数判定函数图形的凹凸性的方法，会求函数图形的拐点.
3. 会利用凹凸性的定义证明简单的不等式.

## 基础练习

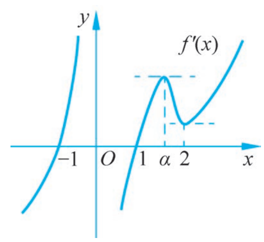
1. 已知 $y=f(x)$在$\mathbb{R}$上连续，下面给出了其导函数 $f'(x)$的图形. 试根据 $f'(x)$的图形信息指出函数 $f(x)$的单调区间、极值点及 $y=f(x)$图形的凹凸区间与曲线拐点的横坐标.

(1) 如图(1)所示，函数 $f(x)$在区间________单调递增，在区间________单调递减，在点 $x=$________处取极小值点，点 $x=$________处取极大值；$y=f(x)$的图形在区间________为凸弧，在区间________为凹弧，曲线拐点的横坐标为 $x=$________.

(2) 如图(2)所示，函数 $f(x)$在区间________单调递增，在区间________单调递减，在点 $x=$________处取极小值，点 $x=$________处取极大值；$y=f(x)$的图形在区间________为凸弧，区间________为凹弧，曲线拐点的横坐标为 $x=$________.




第 1 题图(1)



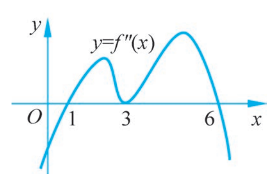

第 1 题图(2)

【答案】 (1) $(-\infty,-1]$，$[1,+\infty)$，$[-1,1]$，$1$，$-1$；$(-\infty,0)$，$(\alpha,2)$，$(0,\alpha)$，$(2,+\infty)$，$0$，$\alpha$，$2$. (2) $(-1,0]$，$[1,+\infty)$，$(-\infty,-1]$，$[0,1)$，$-1$，$1$，$0$，$(\alpha,2)$，$(-\infty,0)$，$(0,\alpha)$，$(2,+\infty)$，$\alpha$，$2$.

【参考解答】 $f'(x)\geqslant 0$ 对应单调递增区间，$f'(x)\leqslant 0$ 对应单调递减区间，$f'(x)$由正变负对应极大值点，$f'(x)$由负变正对应极小值点. $f'(x)$单调递增，对应 $f''(x)\geqslant 0$，对应函数曲线为凹弧，$f'(x)$单调递减，对应 $f''(x)\leqslant 0$，对应函数曲线为凸弧，$f'(x)$单调性发生改变的点对应函数曲线上的拐点. 注意，第(2)问中 $f(x)$在 $x=0$ 处连续，但是不可导，取极大值，为尖点，两侧为两段凹弧.

2. 已知 $y=f(x)$在$\mathbb{R}$上连续，其二阶导数 $y=f''(x)$的图形如图所示，则函数曲线 $y=f(x)$在区间________为凸弧，区间________为凹弧，曲线拐点的横坐标为 $x=$________.

【答案】 $(-\infty,1)$，$(6,+\infty)$，$(1,6)$，1 或 6.




第 2 题图

【参考解答】 由 $y=f''(x)$图形可知，在区间$(-\infty,1)$，$(6,+\infty)$上 $f''(x)<0$，函数曲线为凸弧，在区间$(1,6)$上 $f''(x)\geqslant 0$，函数曲线为凹弧，函数曲线的凹凸性在 $x=1,6$ 两侧发生改变，故曲线 $y=f(x)$的拐点的横坐标为 $x=1,6$(在 $x=3$ 两侧凹凸性没发生改变，不对应拐点).

3. 若点(1,3)为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点,则 $a=$________,$b=$________.

【参考解答】 $y'=3ax^2+2bx$,$y''=6ax+2b$,由题意 $y''(1)=0$. 从而有 $\begin{cases}6a+2b=0\\ a+b=3\end{cases}$ 解得 $a=-\dfrac{3}{2}$,$b=\dfrac{9}{2}$.

4. 求下列函数图形的凹凸区间与拐点.

(1) $y=x+36x^2-2x^3-x^4$;　　(2) $y=\mathrm{e}^{-x^2}$;

(3) $y=\sqrt{1+x^2}$;　　(4) $y=\ln(x^2+1)$.

【参考解答】 (1) $y'=1+72x-6x^2-4x^3$,$y''=72-12x-12x^2$,令 $y''=0$ 得 $x=-3,2$,于是在$[-3,2]$上 $y''\geqslant 0$,$[-3,2]$为函数图形的凹区间,在$(-\infty,-3]$,$[2,+\infty)$上 $y''\leqslant 0$,$(-\infty,-3]$,$[2,+\infty)$为函数图形的凸区间;拐点为$(-3,294)$,$(2,114)$.

(2) $y'=-2x\mathrm{e}^{-x^2}$,$y''=-2\mathrm{e}^{-x^2}+4x^2\mathrm{e}^{-x^2}$,令 $y''=0$ 得 $x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,于是在 $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ 上 $y''\leqslant 0$,$\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ 为函数图形的凸区间,在 $\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$,$\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ 上 $y''\geqslant 0$,$\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$,$\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ 为函数图形的凹区间;拐点为 $\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2},\mathrm{e}^{-1/2}\right)$.

(3) $y'=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,$y''=\dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}>0(\forall x\in\mathbb{R})$,所以函数图形在$(-\infty,+\infty)$上是凹的,没有拐点.

(4) $y'=\dfrac{2x}{1+x^2}$,$y''=\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$,令 $y''=0$ 得 $x=\pm 1$,于是在$[-1,1]$上 $y''\geqslant 0$,$[-1,1]$为函数图形的凹区间,在$(-\infty,-1]$,$[1,+\infty)$上 $y''\leqslant 0$,$(-\infty,-1]$,$[1,+\infty)$为函数图形的凸区间;拐点为$(\pm 1,\ln 2)$.

5. 证明不等式 $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\geqslant\sqrt{1+x^2}$,$x\in(-\infty,+\infty)$.

【参考证明】 令 $f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$,$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续,且 $f(0)=0$,$f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$,$f'(0)=0$,$f''(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0$,于是可知函数曲线在$(-\infty,+\infty)$为凹弧,函数为$(-\infty,+\infty)$上单谷函数,在极小值点 $x=0$ 处取得最小值 $f(0)=0$,故有 $x\in(-\infty,+\infty)$时,$f(x)\geqslant 0$,即有不等式 $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\geqslant\sqrt{1+x^2}$,$x\in(-\infty,+\infty)$成立.

## 综合练习

6. 试确定 $y=k(x^2-3)^2$ 中 $k$ 的值,使曲线的拐点处的法线通过原点.

【参考解答】 求函数的一阶、二阶、三阶导数,得 $y'=4kx(x^2-3)$,

$$y''=4k(x^2-3)+8kx^2=12k(x-1)(x+1),\quad y'''=24kx,$$

令 $y''=0$，得 $x_1=-1,x_2=1$. 由题意可知 $k\neq 0$，故 $y'''(\pm 1)\neq 0$，所以 $(-1,4k)$，$(1,4k)$ 都为曲线的拐点.

由 $y'(-1)=8k$ 可知，过点 $(-1,4k)$ 的法线方程为 $y-4k=-\dfrac{1}{8k}(x+1)$，要使该法线过原点，则 $(0,0)$ 应满足该方程，将 $(0,0)$ 代入该法线方程得 $k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{8}$.

由 $y'(1)=-8k$ 可知，过点 $(1,4k)$ 的法线方程为 $y-4k=\dfrac{1}{8k}(x-1)$，要使该法线过原点，则 $(0,0)$ 应满足该方程，将 $(0,0)$ 代入该法线方程得 $k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{8}$.

综上，当 $k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{8}$ 时，该曲线的拐点处的法线通过原点.

7. 证明：对于任意实数 $a,b$，有 $e^{\frac{a+b}{2}}\leqslant\dfrac{1}{2}(e^a+e^b)$.

**【参考证明】** 令 $f(x)=e^x$，则 $f''(x)=e^x>0,x\in(-\infty,+\infty)$，即函数曲线为严格凹弧，由凹弧的定义有 $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\leqslant\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$，即有不等式 $e^{\frac{a+b}{2}}\leqslant\dfrac{1}{2}(e^a+e^b)$ 成立.

8. 已知 $f(x)$ 二阶可导，且 $f(x)>0,f''(x)f(x)-[f'(x)]^2\geqslant 0,x\in\mathbb{R}$.

(1) 证明：$f(x_1)f(x_2)\geqslant f^2\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right),\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}$.

(2) 若 $f(0)=1$，证明 $f(x)\geqslant e^{f'(0)x},x\in\mathbb{R}$.

**【参考证明】** (1) 所证不等式两边取对数等价于

$$\frac{\ln f(x_1)+\ln f(x_2)}{2}\geqslant\ln f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right),\quad\forall x_1,x_2\in\mathbb{R},$$

于是证明 $F(x)=\ln f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上凸函数（函数曲线在 $(-\infty,+\infty)$ 为凹弧）即可.

$$F'(x)=[\ln f(x)]'=\frac{f'(x)}{f(x)},\quad F''(x)=\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'=\frac{f(x)f''(x)-[f'(x)]^2}{f^2(x)}\geqslant 0,$$

所以 $F(x)=\ln f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上凸函数（函数曲线为凹弧），即结论成立.

(2) 由函数 $F(x)$ 的一阶带拉格朗日余项的泰勒公式，有

$$\begin{aligned}F(x)&=F(0)+F'(0)x+\frac{F''(\xi)}{2}x^2\\&=\ln f(0)+\frac{f'(0)}{f(0)}x+\frac{f(\xi)f''(\xi)-[f'(\xi)]^2}{2f^2(\xi)}x^2\geqslant f'(0)x,\end{aligned}$$

故得 $f(x)\geqslant e^{f'(0)x},x\in\mathbb{R}$.

## 考研与竞赛练习

1. 选择题.

(1) 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x)+[f'(x)]^2=x$，且 $f'(0)=0$，则（　　）.

(A) $f(0)$是 $f(x)$的极大值

(B) $f(0)$是 $f(x)$的极小值

(C) 点$(0,f(0))$是曲线 $y=f(x)$的拐点

(D) $f(0)$不是 $f(x)$的极值,点$(0,f(0))$不是曲线 $y=f(x)$的拐点

(2) 曲线 $y=(x-1)^2(x-3)^2$ 的拐点个数为(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

(3) 设 $f'(x_0)=f''(x_0)=0,f'''(x_0)>0$ 则下列选项正确的是(　　).

(A) $f'(x_0)$是 $f'(x)$的极大值

(B) $f(x_0)$是 $f(x)$的极大值

(C) $f(x_0)$是 $f(x)$的极小值

(D) $(x_0,f(x_0))$是曲线 $y=f(x)$的拐点

【参考解答】 (1) 改写原等式 $f''(x)=x-[f'(x)]^2$. 因为 $f'(0)=0$,则由已知等式可知 $f''(0)=0$. 并且 $f'''(x)=1-2f'(x)f''(x)$,代入 $x=0$,得 $f'''(0)=1>0$,所以点$(0,f(0))$是曲线 $y=f(x)$的拐点,即导函数的极值点.故正确选项为(C).

【注】 也可以由极限的保号性说明结论为(C). 由导数定义,有

$$f'''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)-f''(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{x}=1>0,$$

所以在 $x=0$ 的一个去心邻域内 $f''(x)$变号,故为拐点.

(2) 由可微函数的拐点判定方法,有 $y'=4(x-1)(x-2)(x-3)$,

$$y''=4(3x^2-12x+11),\quad y'''=24(x-2).$$

令 $y''=0$,即 $3x^2-12x+11=0$,得 $x_{1,2}=\dfrac{6\pm\sqrt{3}}{3}$. 从而可知 $y'''(x_{1,2})\neq 0$,故两个点都是曲线的拐点,故正确选项为(C).

(3) 取 $f(x)=x^3,x_0=0$,则可知(A)(B)(C)都不正确,所以(D)为正确选项.

或由已知条件有 $f'''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x_0)}{x-x_0}>0$,于是由极限的保号性,在 $x_0$ 的一个邻域内,$f''(x)$在 $x_0$ 左右两侧异号,即$(x_0,f(x_0))$是曲线 $y=f(x)$的拐点,故正确选项为(D).

2. 设函数 $y=y(x)$由方程 $y\ln y-x+y=0$ 确定,试判断曲线 $y=y(x)$在点$(1,1)$附近的凹凸性.

【参考解答】 方程两边对 $x$ 求导得 $y'\ln y+2y'-1=0$,解得 $y'=\dfrac{1}{\ln y+2}$. 再对 $x$ 求导可得 $y''=\dfrac{-1}{(\ln y+2)^2}\cdot\dfrac{y'}{y}=-\dfrac{1}{y(\ln y+2)^3}$. 代入 $x=1,y=1$ 可得 $y''=-\dfrac{1}{8}$. 因为二阶导函数 $y''$在点 $x=1$ 附近是连续函数,且 $y''(1)=-\dfrac{1}{8}<0$,故由连续函数性质可知在 $x=1$ 的附近有 $y''<0$,从而曲线 $y=y(x)$在点$(1,1)$附近是凸的.

3. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{3}t^3+t+\dfrac{1}{3} \\ y=\dfrac{1}{3}t^3-t+\dfrac{1}{3} \end{cases}$ 所确定，求 $y=y(x)$ 的极值和曲线 $y=y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

【参考解答】 因为 $y'(x)=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$，

$$y''(x)=\frac{\mathrm{d}y'(t)}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{2t(t^2+1)-(t^2-1)\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\cdot\frac{1}{t^2+1}=\frac{4t}{(t^2+1)^3},$$

令 $y'(x)=0$ 得 $t=\pm1$，当 $t=1$ 时，$x=\dfrac{5}{3}$，$y=-\dfrac{1}{3}$，此时，$y''>0$，所以 $y=-\dfrac{1}{3}$ 为极小值.

当 $t=-1$ 时，$x=-1$，$y=1$，此时 $y''<0$，所以 $y=1$ 为极大值.

令 $y''(x)=0$ 得 $t=0$，$x=y=\dfrac{1}{3}$，当 $t<0$ 时，$x<\dfrac{1}{3}$，此时 $y''<0$；当 $t>0$ 时，$x>\dfrac{1}{3}$，此时 $y''>0$. 所以曲线的凸区间为 $\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right)$，凹区间为 $\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$，拐点为 $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$.

【注】 也可以直接根据以上 $y'$，$y''$ 的取值列表：

| $t$ | $(-\infty,-1)$ | $-1$ | $(-1,0)$ | $0$ | $(0,1)$ | $1$ | $(1,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $(-\infty,-1)$ | $-1$ | $\left(-1,\dfrac{1}{3}\right)$ | $\dfrac{1}{3}$ | $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{5}{3}\right)$ | $\dfrac{5}{3}$ | $\left(\dfrac{5}{3},+\infty\right)$ |
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y''$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |

由表可以直接得到以上结论：$y\left(\dfrac{5}{3}\right)=-\dfrac{1}{3}$ 为极小值，$y(-1)=1$ 为极大值；函数曲线凸区间为 $\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right)$，凹区间为 $\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$，拐点为 $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶导数，并且 $f''(x)>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\beta<0$，且存在一点 $x_0$，使得 $f(x_0)<0$. 证明：方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 恰有两个实根.

【参考证明】 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0$，于是存在 $X_1>0$，当 $x>X_1$ 时有 $f'(x)>0$，取 $a=\max\{X_1,x_0\}$，则有 $f'(a)>0$. 又由 $f''(x)>0$ 可知 $y=f(x)$ 对应的图形为凹弧，于是当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)>f(a)+f'(a)(x-a)\to+\infty$，故存在 $b>a$，使得 $f(b)>f(a)+f'(a)(b-a)>0$.

由于 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\beta<0$，于是存在 $X_2>0$，当 $x<-X_2$ 时有 $f'(x)<0$，取 $c=\min\{-X_2,x_0\}$，则有 $f'(c)<0$. 又由 $f''(x)>0$ 可知 $y=f(x)$ 对应的图形为凹弧，于是当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)>f(c)+f'(c)(x-c)\to+\infty$，故存在 $d<c$，使得 $f(d)>f(c)+f'(c)(d-c)>0$.

在 $[x_0,b]$ 和 $[d,x_0]$ 由零点定理，知存在 $x_1\in(x_0,b)$，$x_2\in(d,x_0)$ 使得 $f(x_1)=$

$f(x_2)=0$,故方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 至少有两个实根.

下面证明方程 $y=f(x)$ 只有两个实根.

用反证法.假设 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有三个实根,不妨设为 $x_1,x_2,x_3$ 且 $x_1<x_2<x_3$.对 $f(x)$ 在区间 $[x_1,x_2]$,$[x_2,x_3]$ 上分别用罗尔中值定理,则各至少存在一点 $\xi_1\in(x_1,x_2)$,$\xi_2\in(x_2,x_3)$,使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$.再由 $f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上应用罗尔中值定理,则至少存在一点 $\eta\in(\xi_1,\xi_2)$,使得 $f''(\eta)=0$,与已知条件 $f''(x)>0$ 矛盾,所以方程不能多于两个实根.

5. 已知函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上具有二阶导数,$f(a)=0$,$f'(x)>0$,$f''(x)>0$.设 $b>a$,曲线 $y=f(x)$ 在点 $(b,f(b))$ 处的切线与 $x$ 轴的交点是 $(x_0,0)$,证明:$a<x_0<b$.

**【参考证明】** 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(b,f(b))$ 处的切线方程为 $y=f(b)+f'(b)(x-b)$,令 $y=0$ 得 $x_0=b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}$.因为 $f'(x)>0(x\in[a,+\infty))$,所以 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 单调递增,由此可得 $f(b)>f(a)=0$;同样由 $f'(b)>0$,可得 $x_0=b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}<b$.

由 $f''(x)>0(x\in[a,+\infty))$,可知 $y=f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 内是凹曲线,所以对任意的 $x\in(a,b)$,均有 $f(x)>f(b)+f'(b)(x-b)$.

特别地,$f(x_0)>f(b)+f'(b)(x_0-b)=0$,于是由拉格朗日中值定理可得 $x_0-a=\dfrac{f(x_0)-f(a)}{f'(\eta)}=\dfrac{f(x_0)}{f'(\eta)}>0$,所以 $x_0>a$.综上可知 $a<x_0<b$.

6. 证明(**詹森(Jensen)不等式**):如果 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上二阶可导的凸函数(函数曲线为凹曲线),则对任意的 $x_i\in[a,b]$,$\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$,$\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$,有

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i).$$

**【参考证明】** **【法 1】** 用数学归纳法证明.当 $n=2$ 时,由定义可知不等式成立.

设 $n=k$ 时命题成立,当 $n=k+1$ 时,任给 $x_1,x_2,\cdots,x_k,x_{k+1}\in[a,b]$,$\sum\limits_{i=1}^{k+1}\lambda_i=1$,$\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,k+1)$,记 $X_k=\dfrac{\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_kx_k}{1-\lambda_{k+1}}$,由 $\dfrac{\lambda_1+\lambda_2\cdots+\lambda_k}{1-\lambda_{k+1}}=\dfrac{1-\lambda_{k+1}}{1-\lambda_{k+1}}=1$ 可知 $X_k\in[a,b]$,于是

$$\begin{aligned}
f(\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_kx_k+\lambda_{k+1}x_{k+1})&=f\left[(1-\lambda_{k+1})\frac{\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_kx_k}{1-\lambda_{k+1}}+\lambda_{k+1}x_{k+1}\right]\\
&=f[(1-\lambda_{1+k})X_k+\lambda_{k+1}x_{k+1}]\\
&\leqslant(1-\lambda_{k+1})f(X_k)+\lambda_{k+1}f(x_{k+1})\\
&=(1-\lambda_{k+1})f\left(\frac{\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_kx_k}{1-\lambda_{k+1}}\right)+\lambda_{k+1}f(x_{k+1})\\
&\leqslant(1-\lambda_{k+1})\left(\frac{\lambda_1f(x_1)}{1-\lambda_{k+1}}+\cdots+\frac{\lambda_kf(x_k)}{1-\lambda_{k+1}}\right)+\lambda_{k+1}f(x_{k+1})\\
&=\lambda_1f(x_1)+\cdots+\lambda_kf(x_k)+\lambda_{k+1}f(x_{k+1}),
\end{aligned}$$

于是由数学归纳法得不等式成立.

**【法 2】** 由于 $f(x)$是区间$[a,b]$上二阶可导的凸函数，故 $f''(x)\geqslant 0, x\in(a,b)$.

记$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i = x_0$，则函数 $f(x)$在 $x_0$ 处的二阶带拉格朗日余项的泰勒公式为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2 \geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),$$

其中 $\xi$ 位于 $x,x_0$ 之间. 代入 $x_i$，有 $\lambda_i f(x_i)\geqslant \lambda_i f(x_0)+f'(x_0)(\lambda_i x_i-\lambda_i x_0)$对 $i=1,2,\cdots,n$ 相加得 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)\geqslant f(x_0)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i+f'(x_0)\left[\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i-x_0\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right]$，由于$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$，$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i=x_0$，代入得 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)\geqslant f(x_0)=f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)$.

**【注 1】** 特别有

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n},\quad x_1,x_2,\cdots,x_n\in(a,b),$$

其中等号当且仅当 $x_1=x_2=x_3=\cdots=x_n$ 时成立.

**【注 2】** 如果 $f(x)$为凹函数，则不等式反向.

# 练习 22　分析法作图与曲率

## 训练目的

1. 会利用函数的一阶导数、二阶导数判断函数的性态，并绘制函数图形.
2. 理解曲率、曲率半径与曲率圆的概念.
3. 掌握曲率与曲率半径的计算公式.

## 基础练习

1. 描绘下列函数的图形.

(1) $y=x^2e^{-x}$；　　(2) $y=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$.

**【参考解答】** (1) 函数定义域为$(-\infty,+\infty)$.

$y'=(2x-x^2)e^{-x}$，令 $y'=0$ 得 $x=0,x=2$，$y''=(x^2-4x+2)e^{-x}$，令 $y''=0$ 得 $x=2\pm\sqrt{2}$，列表如下：

| $x$ | $(-\infty,0)$ | 0 | $(0,2-\sqrt{2})$ | $2-\sqrt{2}$ | $(2-\sqrt{2},2)$ | 2 | $(2,2+\sqrt{2})$ | $2+\sqrt{2}$ | $(2+\sqrt{2},+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ | $-$ | $-$ |
| $y''$ | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | 凹减 | 0 | 凹增 | 0.1910 | 凸增 | 0.5413 | 凸减 | 0.3835 | 凹减 |

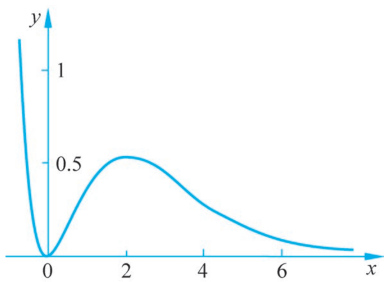
因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=0$，所以有水平渐近线 $y=0$，其图形如图(1)所示.

(2) 函数定义域为$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. 用对数求导法，得

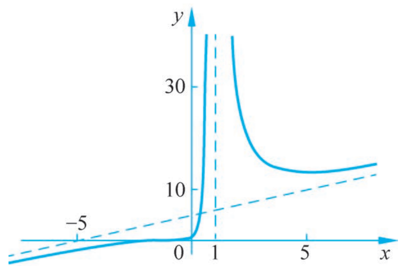
$$y'=\frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3},\quad y''=\frac{24(x+1)}{(x-1)^4}.$$

令 $y'=0$ 得 $x=-1,x=5$，令 $y''=0$ 得 $x=-1$，因为 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\infty$，所以有铅直渐近线 $x=1$，又因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=5$，所以有斜渐近线 $y=x+5$，补充 $f(0)=1$，$f(-5)=-\dfrac{16}{9}$，列表如下，其图形如图(2)所示.

| $x$ | $(-\infty,-1)$ | $-1$ | $(-1,1)$ | $1$ | $(1,5)$ | $5$ | $(5,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $+$ | 无定义 | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y''$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | 凸增 | $0$ | 凹增 | | 凹减 | $\frac{27}{2}$ | 凹增 |



第 1 题图(1)



第 1 题图(2)

2.（1）曲线 $y=\tan x$ 在点 $\left(\dfrac{\pi}{4},1\right)$ 处的曲率 $K=$________，曲率半径 $R=$________.

（2）曲线 $x^2+xy+y^2=3$ 在点(1,1)处的曲率 $K=$________，曲率半径 $R=$________.

（3）星形线 $\begin{cases}x=a\cos^3t\\ y=a\sin^3t\end{cases}(a>0)$ 在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 对应的点处的曲率 $K=$________，曲率半径 $R=$________.

**【参考解答】**（1）$y'=\sec^2x$，$y''=2\sec^2x\tan x$. 在点 $\left(\dfrac{\pi}{4},1\right)$ 处的曲率

$$K=\left.\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}\right|_{x=\pi/4}=\frac{4}{5\sqrt5}=\frac{4\sqrt5}{25},\quad R=\frac{1}{K}=\frac{5\sqrt5}{4}.$$

（2）方程 $x^2+xy+y^2=3$ 两边对 $x$ 求导得 $2x+y+xy'+2yy'=0$，上式两边继续对 $x$ 求导得 $2+2y'+xy''+2y'^2+2yy''=0$，将(1,1)代入以上两式得 $y'(1)=-1$，$y''(1)=-\dfrac{2}{3}$，于是在点(1,1)处的曲率

$$K=\left.\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}\right|_{x=1}=\frac{\sqrt2}{6},\quad R=\frac{1}{K}=3\sqrt2.$$

（3）$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\pi/4}=\left.\dfrac{3a\sin^2t\cos t}{-3a\cos^2t\sin t}\right|_{t=\pi/4}=-\tan t\,\big|_{t=\pi/4}=-1$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\pi/4}=\left.\dfrac{-\sec^2x}{-3a\cos^2t\sin t}\right|_{t=\pi/4}=\dfrac{4\sqrt2}{3a}$. 在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 对应的点处的曲率

$$K=\left.\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}\right|_{x=\pi/4}=\frac{\frac{4\sqrt{2}}{3a}}{2\sqrt{2}}=\frac{2}{3a},\quad R=\frac{1}{K}=\frac{3a}{2}.$$

## 综合练习

3. 用分析作图法描绘曲线 $y=\dfrac{\cos x}{\cos 2x}$ 的图形.

【参考解答】 (1) 所给函数定义域为 $D=\left\{x\,|\,x\neq\dfrac{n\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4},n\in\mathbb{Z}\right\}$.

由于函数是以 $2\pi$ 为周期的偶函数,其图形关于 $y$ 轴对称,因此先考察$[0,\pi]$部分的图形.

(2) 求函数的一阶、二阶导数,得

$$y'=\frac{(3-2\sin^2x)\sin x}{\cos^2(2x)},\quad y''=\frac{(3+12\sin^2x-4\sin^4x)\cos x}{\cos^3(2x)}.$$

(3) 令 $y'=0$,在$[0,\pi]$内,得 $x=0,x=\pi$; 令 $y''=0$ 得 $x=\dfrac{\pi}{2}$; 且函数在点 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 及 $x=\dfrac{3\pi}{4}$ 处无定义.

(4) 分割区间判定 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 的符号和函数的单调性、凹凸性和拐点、极值点,如表所示.

| $x$ | $0$ | $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | 0 | + | 无定义 | + | + | + | 无定义 | + | 0 |
| $y''$ | + | + | | − | 0 | + | | − | − |
| $f(x)$ | 极小 | 凹增 | | 凸增 | 拐点 | 凹增 | | 凸增 | 极大 |

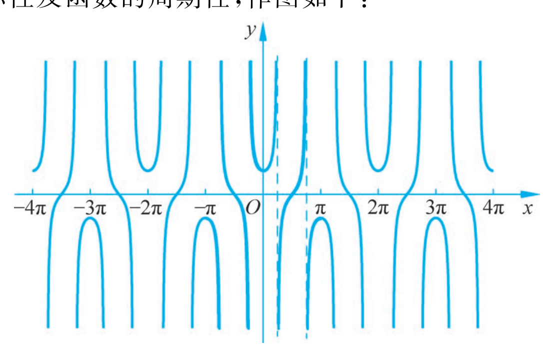
(5) 由于函数为周期函数,故没有水平渐近线与斜渐近线. 由

$$\lim_{x\to\pi/4}f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to3\pi/4}f(x)=\infty,$$

可知图形在$[0,\pi]$有两条铅直渐近线: $x=\dfrac{\pi}{4}$ 及 $x=\dfrac{3}{4}\pi$.

(6) 由 $f(0)=1,f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ 得图形上的点$(0,1)$,$\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$.

(7) 利用图形对称性及函数的周期性,作图如下:




第 3 题图

4. 求曲线 $y=e^x$ 在点(0,1)处的曲率圆方程.

【参考解答】 $y'(0)=y''(0)=e^x\big|_{x=0}=1$. 在(0,1)处曲率半径 $R=\dfrac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}=2\sqrt{2}$. 曲线在(0,1)处的法线方程为 $y=1-x$，曲率圆圆心在法线上，设其坐标为 $M(a,1-a)$，则 $M$ 到切点(0,1)的距离 $d^2=2a^2=R^2=8$，所以 $a=\pm2$，又因为曲线为凹弧，所以 $a=-2$，对应曲率圆圆心 $M(-2,3)$，曲率圆的方程 $(x+2)^2+(y-3)^2=8$.

或直接用曲率圆圆心 $M(\xi,\eta)$ 公式，

$$\xi=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}=-2,\quad \eta=y+\frac{1+y'}{y''}=3.$$

5. 求对数螺线 $\rho=e^{\theta}$ 在 $(\rho,\theta)=\left(e^{\pi/2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 处的曲率.

【参考解答】 将极坐标化为参数方程为 $\begin{cases}x=e^{\theta}\cos\theta\\ y=e^{\theta}\sin\theta\end{cases}$，于是

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{e^{\theta}(\sin\theta+\cos\theta)d\theta}{e^{\theta}(\cos\theta-\sin\theta)d\theta}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta},$$

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2}{(\cos\theta-\sin\theta)^2}\cdot\frac{1}{e^{\theta}(\cos\theta-\sin\theta)}=\frac{2}{e^{\theta}(\cos\theta-\sin\theta)^3},$$

将 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 得 $y'\big|_{\theta=\pi/2}=-1$，$y''\big|_{\theta=\pi/2}=-2e^{-\pi/2}$，于是

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\pi/2}.$$

6. 证明曲线 $y=\dfrac{a}{2}(e^{x/a}+e^{-x/a})(a>0)$ 上任意一点 $M(x,y)$ 处的曲率半径为 $\dfrac{y^2}{a}$.

【参考证明】 由已知得 $y'=\dfrac{a}{2}\left(\dfrac{1}{a}e^{x/a}-\dfrac{1}{a}e^{-x/a}\right)=\dfrac{1}{2}(e^{x/a}-e^{-x/a})$，

$$1+y'^2=1+\frac{1}{4}(e^{x/a}-e^{-x/a})^2=\frac{1}{4}(e^{x/a}+e^{-x/a})^2=\frac{y^2}{a^2},$$

$y''=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}e^{x/a}+\dfrac{1}{a}e^{-x/a}\right)=\dfrac{1}{2a}(e^{x/a}+e^{-x/a})=\dfrac{y}{a^2}$，所以

$$R=\frac{1}{K}=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}=\frac{y^3/a^3}{y/a^2}=\frac{y^2}{a}.$$

7. 对数曲线 $y=\ln x$ 上哪一点的曲率半径最小？求出该点处的曲率半径.

【参考解答】 曲线方程求导得 $y'=\dfrac{1}{x}$，$y''=-\dfrac{1}{x^2}$，于是

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{1}{x^2(1+x^{-2})^{3/2}},\quad R=\frac{1}{K}=(x^{4/3}+x^{-2/3})^{3/2}.$$

设 $\varphi(x)=x^{4/3}+x^{-2/3}$，则 $\varphi'(x)=\dfrac{4}{3}x^{1/3}-\dfrac{2}{3}x^{-5/3}=\dfrac{2}{3}x^{-5/3}(2x^2-1)$.

令 $\varphi'(x)=0$ 得唯一驻点 $x=\sqrt{\frac{1}{2}}$. 且 $0<x<\sqrt{\frac{1}{2}}$ 时 $\varphi'(x)<0$，$x>\sqrt{\frac{1}{2}}$ 时 $\varphi'(x)>0$，可知 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 为单谷函数，在 $x=\sqrt{\frac{1}{2}}$ 得极小值即为最小值，此时 $R=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. 所以，曲线 $y=\ln x$ 上点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}\ln 2\right)$ 处曲率半径最小为 $R=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

8. 求圆滚线 $C$：$x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$，$(0<t<2\pi,a>0)$ 上任意一点的曲率，并问当 $t$ 为何值时，曲率最小？将所得结论与你的直觉认识相对照.

【参考解答】 圆滚线确定函数 $y$ 对 $x$ 求导有

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a\sin t\,\mathrm{d}t}{a(1-\cos t)\mathrm{d}t}=\frac{\sin t}{1-\cos t},\quad y''=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2},$$

所以 $K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}a\sqrt{1-\cos t}}$，又因为 $t\in(0,2\pi)$，所以当 $t=\pi$ 时，$K=\frac{1}{4a}$ 为最小.

9. 飞机俯冲拉起时，飞行员处于超重状态，此时座位对飞行员的支持力大于所受的重力，这种现象叫过载. 一飞机沿抛物线路径 $y=\frac{x^2}{1000}$（$y$ 轴垂直向上，单位为 m）作俯冲飞行，在坐标原点 $O$ 处飞机的速度为 $v_0=200\text{m/s}$，飞行员体重 $G=70\text{kg}$，求飞机俯冲至最低点即原点 $O$ 处拉起时座椅对飞行员的支持力（取 $g=10\text{m/s}^2$）？

【参考解答】 由题意有 $y'(0)=\frac{1}{500}x\Big|_{x=0}=0$，$y''(0)=\frac{1}{500}$，所以在原点处

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{1}{500},\quad R=\frac{1}{K}=500.$$

于是此刻所受向心力为 $F=m\frac{v^2}{R}=70\cdot\frac{40000}{500}=5600$，座椅对飞行员的支持力为 $N=F+mg=5600+700=6300(\text{N})$，即飞机俯冲至最低点，即原点处座椅对飞行员的支持力为 6300N.

## 考研与竞赛练习

1. 分析法绘制函数 $f(x)=\frac{x|x|}{1+x}$ 的图形.

【参考解答】 函数的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$，可写成分段函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{1+x}, & x\geqslant 0\\ -\dfrac{x^2}{1+x}, & x<0,x\neq -1\end{cases}$$

在两个开区间内对函数求一阶、二阶导数

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}, & x<0,x\neq -1\\ \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}, & x>0\end{cases},\quad f''(x)=\begin{cases}-\dfrac{2}{(x+1)^3}, & x<0,x\neq -1\\ \dfrac{2}{(x+1)^3}, & x>0\end{cases}$$

令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x=-2$，且 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{1+x}=0$.

没有 $f''(x)=0$ 的点. 用 $x=-2,x=-1,x=0$ 划分 $(-\infty,+\infty)$，通过 $y'$、$y''$在区间内的符号判断函数性态，列表如下：

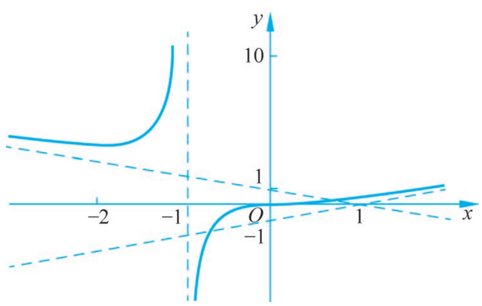
| $x$ | $(-\infty,-2)$ | $-2$ | $(-2,-1)$ | $-1$ | $(-1,0)$ | $0$ | $(0,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $0$ | $+$ | 没 | $+$ | $0$ | $+$ |
| $y''$ | $+$ | $+$ | $+$ | 定 | $-$ | 不存在 | $+$ |
| $f(x)$ | 凹减 | 极小 | 凹增 | 义 | 凸增 | 拐点 | 凹增 |

由于 $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x|x|}{1+x}=\infty$ 故存在铅直渐近线 $x=-1$.

由于 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ 故曲线无水平渐近线.

又 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x}{1+x}=-1$，$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{1+x}=1$；

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x}{1+x}=1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=-\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{1+x}=-1$，故曲线有斜渐近线 $y=-x+1$，$y=x-1$. 且 $f(-2)=4$，$f(0)=0$，$f(1)=\dfrac{1}{2}$. 故可以绘制函数描述的曲线图形大致如图所示.




第 1 题图

2. 选择题.

(1) 曲线 $\begin{cases}x=t^2+7\\ y=t^2+4t+1\end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的曲率半径是(　　).

(A) $\dfrac{\sqrt{10}}{50}$　　(B) $\dfrac{\sqrt{10}}{100}$　　(C) $10\sqrt{10}$　　(D) $5\sqrt{10}$

(2) 设函数 $f_i(x)(i=1,2)$ 具有二阶连续导数，且 $f''_i(x_0)<0(i=1,2)$，若两条曲线 $y=f_i(x)(i=1,2)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处具有公切线 $y=g(x)$，且在该点处曲线 $y=f_1(x)$ 的曲率大于曲线 $y=f_2(x)$ 的曲率，则在 $x_0$ 的某个邻域内，有(　　).

(A) $f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant g(x)$　　(B) $f_2(x)\leqslant f_1(x)\leqslant g(x)$

(C) $f_1(x)\leqslant g(x)\leqslant f_2(x)$　　(D) $f_2(x)\leqslant g(x)\leqslant f_1(x)$

(3) 已知 $f(x),g(x)$二阶可导且在 $x=a$ 处连续，则$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=0$ 是两条曲线 $y=f(x),y=g(x)$在 $x=a$ 对应的点相切且曲率相等的(　　).

(A) 充分非必要条件　　(B) 充要条件

(C) 必要非充分条件　　(D) 既非充分也非必要条件

(4) 若 $f''(x)$不变号，且曲线 $y=f(x)$在点(1,1)处的曲率圆为 $x^2+y^2=2$，则函数 $f(x)$在区间(1,2)内(　　).

(A) 有极值点，无零点　　(B) 无极值点，有零点

(C) 有极值点，有零点　　(D) 无极值点，无零点

**【答案】** (1) (C)　(2) (A)　(3) (A)　(4) (B).

**【参考解答】** (1) 对应于 $t=1$ 曲线上的点坐标为(8,6). 由参量函数求导公式，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{2t+4}{2t}=1+\frac{2}{t},\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{x'_t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)'_t=\frac{1}{2t}\left(-\frac{2}{t^2}\right)=-\frac{1}{t^3},$$

代入 $t=1$，得$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=1}=3$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}=-1$. 于是由曲率公式可得曲线在点(8,6)处的曲率为 $K=\left.\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}\right|_{t=1}=\dfrac{1}{(\sqrt{1+3^2})^3}=\dfrac{1}{10\sqrt{10}}$，所以所求曲率半径为 $R=\dfrac{1}{K}=10\sqrt{10}$. 故正确选项为(C).

(2) 直观画图，两曲线在$(x_0,f(x_0))$附近为凸弧，公共切线在两曲线上方，且曲率越大，曲线弯曲越厉害. 故正确答案为(A).

(3) 已知 $f(x),g(x)$二阶可导且在 $x=a$ 处连续，于是由$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=0$ 知，$\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]=f(a)-g(a)=0$，所以 $f(a)=g(a)$.

由洛必达法则有$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)-g'(x)}{2(x-a)}=0$，因此$\lim\limits_{x\to a}[f'(x)-g'(x)]=f'(a)-g'(a)=0$，所以 $f'(a)=g'(a)$；

再由洛必达法则有$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)-g'(x)}{2(x-a)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f''(x)-g''(x)}{2}=0$，因此$\lim\limits_{x\to a}[f''(x)-g''(x)]=f''(a)-g''(a)=0$，所以 $f''(a)=g''(a)$，所以，$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=0$ 是两条曲线 $y=f(x),y=g(x)$在 $x=a$ 对应的点相切且曲率相等的充分条件.

反之，若 $f(a)=g(a),f'(a)=g'(a),f''(a)=-g''(a)\neq 0$，则两条曲线 $y=f(x)$，$y=g(x)$在 $x=a$ 对应的点相切且曲率相等，但是

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-g'(x)}{2(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)-g''(x)}{2}=f''(a)\neq 0,$$

所以，$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=0$ 不是两条曲线 $y=f(x),y=g(x)$在 $x=a$ 对应的点相切且曲

率相等的必要条件.综上,正确选项为(A).

**【注】** 对必要性的否定也可以直接举例,如取 $a=0,f(x)=x^2,g(x)=-x^2$.

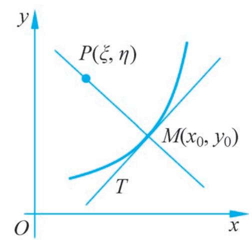
(4) 曲线 $y=f(x)$ 与其曲率圆 $x^2+y^2=2$ 在点(1,1)处相切,且有相同曲率及凹凸性,所以 $f(1)=1,f'(1)=-1,f''(1)=-2<0$.

因为 $f''(x)$ 不变号,所以应有 $f''(x)<0$. 于是可得 $f'(x)$ 在[1,2]上单调递减;$f'(x)<f'(1)=-1<0$,在[1,2]上严格单调递减,因此 $f(x)$ 在(1,2)内无极值点.

又曲线 $y=f(x)$ 在[1,2]上为凸弧,即曲线 $y=f(x)(1\leqslant x\leqslant 2)$ 位于点(1,1)处切线的下方,即 $f(x)<2-x(1<x<2)$,故 $f(2)<0$. 因为 $f(x)$ 在[1,2]上连续,且 $f(1)=1>0$,$f(2)<0$,所以由零点定理可知 $y=f(x)$ 在(1,2)内有零点. 所以正确选项为(B).

3. 如图所示,设曲线 $L$ 的方程为 $y=f(x)$,且 $f''(x)>0$,又 $MT,MP$ 分别为该曲线在点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线和法线,已知线段 $MP$ 的长度为$\dfrac{[1+f'^2(x_0)]^{3/2}}{f''(x_0)}$.

试推导出点 $P(\xi,\eta)$ 的坐标表达式(点 $P(\xi,\eta)$ 即为曲线在 $M(x_0,y_0)$ 处的曲率圆的圆心).



第 3 题图

**【参考解答】** **【法 1】** 由$|MP|=\dfrac{[1+f'^2(x_0)]^{3/2}}{f''(x_0)}$,得

$$(\xi-x_0)^2+(\eta-y_0)^2=\frac{[1+f'^2(x_0)]^3}{f''^2(x_0)},$$

又 $f'(x_0)=-\dfrac{\xi-x_0}{\eta-y_0}$,代入上式,消去$(\xi-x_0)^2$,得到$(\eta-y_0)^2=\dfrac{[1+f'^2(x_0)]^2}{f''^2(x_0)}$由 $f''(x)>0$,知曲线是向上凹的,所以 $\eta>y_0$,于是可得 $\eta=y_0+\dfrac{1+f'^2(x_0)}{f''(x_0)}$,且 $\xi-x_0=-f'(x_0)(\eta-y_0)=-\dfrac{f'(x_0)(1+f'^2(x_0))}{f''(x_0)}$,从而可以推得 $\xi=x_0-\dfrac{f'(x_0)}{f''(x_0)}(1+f'^2(x_0)),\eta=f(x_0)+\dfrac{1}{f''(x_0)}(1+f'^2(x_0))$.

**【法 2】** 点 $P(\xi,\eta)$ 即为曲线在 $M(x_0,y_0)$ 处的曲率圆的圆心.

设曲率圆方程为$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=R^2$,方程两边对 $x$ 求一阶、二阶得到

$$(x-\xi)+(y-\eta)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0,1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+(y-\eta)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0,$$

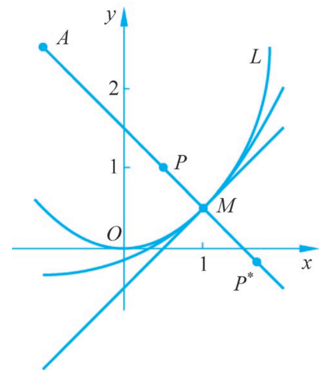
由于在点 $M(x_0,y_0)$ 处曲率圆与曲线 $y=f(x)$ 相切且曲率相等,于是$(x_0-\xi)+(f(x_0)-\eta)f'(x_0)=0,1+f'^2(x_0)+(f(x_0)-\eta)f''(x_0)=0$,所以

$$\eta=f(x_0)+\frac{1+f'^2(x_0)}{f''(x_0)},\quad \xi=x_0+(f(x_0)-\eta)f'(x_0)=x_0-\frac{f'(x_0)(1+f'^2(x_0))}{f''(x_0)}.$$

4. 曲线的对称点问题. 如图所示,设平面曲线 $L$ 上一点 $M$ 处的曲率半径为 $\rho$,曲率中心为 $A$. $AN$ 是 $L$ 在点 $M$ 处的法线,法线上的两点 $P$ 与 $P^*$ 分居于 $L$ 的两侧,即 $P$ 位于 $AM$ 上,$P^*$ 位于 $MN$ 上,如果 $P$ 与 $P^*$ 满足 $|AP||AP^*|=\rho^2$,称点 $P$ 与 $P^*$ 关于曲线 $L$ 是对称的. 现设 $L$ 的方程为 $y=\dfrac{x^2}{2}$,有点 $P\left(\dfrac{1}{2},1\right)$.

(1) 求点 $M$,使得 $L$ 在 $M$ 处的法线经过点 $P$,并写出法线的参数方程;(2) 求点 $P$ 关于曲线 $L$ 的对称点 $P^*$.

**【参考解答】** (1) 曲线 $y=\frac{x^2}{2}$ 上点 $M(x,y)$ 处切线斜率为 $k=x$,则法线 $PM$ 斜率满足 $\frac{\frac{x^2}{2}-1}{x-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{x}$,解得 $x=1$,所以 $M\left(1,\frac{1}{2}\right)$. 法线方程为 $y-\frac{1}{2}=-(x-1)$,即 $\begin{cases}x=1-t\\ y=\frac{1}{2}+t\end{cases}$.



第 4 题图

(2) 曲线 $y=\frac{x^2}{2}$ 在点 $M\left(1,\frac{1}{2}\right)$ 处,$y'(1)=1$,$y''(1)=1$,于是曲率半径 $\rho=\frac{(1+y'^2(1))^{3/2}}{|y''(1)|}=2\sqrt{2}$,曲率中心 $A\left(-1,\frac{5}{2}\right)$.

设 $P^*\left(1-t,\frac{1}{2}+t\right)$,由 $|AP||AP^*|=\rho^2$ 有 $\frac{3\sqrt{2}}{2}\sqrt{(2-t)^2+(t-2)^2}=(2\sqrt{2})^2$,解得 $t_1=-\frac{2}{3}$,$t_2=\frac{14}{3}$,对应点 $\left(\frac{5}{3},-\frac{1}{6}\right)$,$\left(-\frac{11}{3},\frac{31}{6}\right)$,由所求点与 $P$ 点在曲线的两侧,故取 $P^*\left(\frac{5}{3},-\frac{1}{6}\right)$.

## 第三单元 中值定理与导数的应用测验(A)

### 一、填空题(每小题 3 分,共 15 分)

1. 曲线 $y=(x+1)\mathrm{e}^{-x}$ 的拐点坐标为____________.
2. 设 $f(1)=10$,且当 $1\leqslant x\leqslant 4$ 时 $f'(x)\geqslant 2$,则 $f(4)$ 可能取得的最小值是________.
3. 抛物线 $y=4x-x^2$ 在它顶点处的曲率半径 $R=$________.
4. 函数 $y=x^{1/x}$ 在 $[1,\mathrm{e}^2]$ 上的值域为________.
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x=$____________.

### 二、选择题(每小题 3 分,共 15 分)

6. 设函数 $f(x)=x^2\sin x$,则 $f(x)$ 的六阶带皮亚诺余项的麦克劳林公式为(　　).

(A) $x^3-\frac{1}{6}x^5+o(x^5)$　　(B) $x^3-\frac{1}{3}x^5+o(x^5)$

(C) $x^3-\frac{1}{6}x^5+o(x^6)$　　(D) $x^3-\frac{1}{3}x^5+o(x^6)$

7. 设 $k>0$ 为常数,若方程 $\mathrm{e}^x=k(2-x)$ 在 $(0,1)$ 内有唯一解,则 $k$ 的最大取值范围是

(　　).

(A) $k\leqslant\frac{1}{2}$　　(B) $\frac{1}{2}<k<e$　　(C) $\frac{1}{2}<k\leqslant e$　　(D) $k>e$

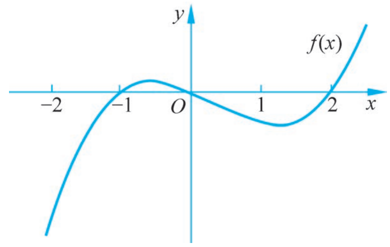
8. 函数 $y=f(x)$ 的图形如图所示，则 $f(0),f'(-2),f'(-1),f'(1)$ 的值的大小顺序是(　　).

(A) $f'(1)<f(0)<f'(-2)<f'(-1)$

(B) $f'(1)<f(0)<f'(-1)<f'(-2)$

(C) $f'(-2)<f'(-1)<f(0)<f'(1)$

(D) $f'(-1)<f'(-2)<f(0)<f'(1)$




第 8 题图

9. 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)<0$，$f''(x)<0$，$\Delta x$ 为自变量 $x$ 在点 $x_0$ 处的增量，$\Delta y$ 与 $dy$ 分别为 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处的增量与微分，若 $\Delta x>0$，则(　　).

(A) $0<dy<\Delta y$　　(B) $0<\Delta y<dy$

(C) $\Delta y<dy<0$　　(D) $dy<\Delta y<0$

10. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　　).

(A) 不可导　　(B) 可导且 $f'(0)\neq0$

(C) 取极大值　　(D) 取极小值

## 三、解答题(共 70 分)

11. (6 分) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)$.

12. (6 分)求函数 $f(x)=(1-x)\ln(1+x^2)$ 的七阶带皮亚诺余项的麦克劳林公式.

13. (6 分)设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶连续导数，且 $f(0)=f(1)=1$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=0$. 证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)=8$.

14. (6 分)求曲线 $\begin{cases}x=\arctan t\\ y=\ln\sqrt{1+t^2}\end{cases}$ 上曲率最大的点的坐标，并求最大曲率.

15. (6 分)证明当 $x>0$ 时，不等式 $\arctan x+\frac{1}{x}>\frac{\pi}{2}$ 成立.

16. (8 分)设函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 在 $x=1$ 处取极值 $-2$，试确定 $a,b$ 的值，并指出在 $x=1$ 处取极值是极大值还是极小值，函数 $f(x)$ 的凹凸区间.

17. (8 分)设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$，(1)求 $f(0),f'(0),f''(0)$；(2)求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}$.

18. (8 分)设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=f(1)=0$，$f''(x)$ 在 $(0,1)$ 存在，且满足 $f''(x)+2f'(x)+f(x)>0$. 证明：$f(x)<0(0<x<1)$.

19. (8 分)设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(a)=g(b)=1$，在 $(a,b)$ 内 $f(x),g(x)$ 可导，且 $g(x)+g'(x)\neq0$，$f'(x)\neq0$，证明：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=$

$\dfrac{e^{\xi}[g(\xi)+g'(\xi)]}{e^{\eta}}$.

20.（8 分）设 $f(x)$ 在 $x_0$ 的某邻域内有直到 $n$ 阶导数，且

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\quad f^{(n)}(x_0)\neq 0,$$

证明：(1) 当 $n$ 为偶数时，$x_0$ 为极值点，且当 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时，$x_0$ 为极小值点；当 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时，$x_0$ 为极大值点；(2) 当 $n$ 为奇数时，$x_0$ 不是极值点.

# 第三单元　中值定理与导数的应用测验（A）参考解答

## 一、填空题

1. $\left(1,\dfrac{2}{e}\right)$　2. 16　3. $\dfrac{1}{2}$　4. $[1,e^{\frac{1}{e}}]$　5. $e^{-2/\pi}$

【参考解答】 1. 函数的一阶和二阶导数分别为 $y'=-xe^{-x}$，$y''=(x-1)e^{-x}$，令 $y''=0$ 得 $x=1$，于是拐点坐标为 $\left(1,\dfrac{2}{e}\right)$.

2. 导数 $f'(x)>0$，表明函数 $f(x)$ 严格单调递增，导数 $f'(x)$ 的大小表示函数 $f(x)$ 升降的快慢，取 $f'(x)=2$ 是函数递增最慢的情况，此时 $f(x)=2x+C$，由 $f(1)=10$ 得 $C=8$，故 $f(4)$ 可能取得的最小值是 16.

3. 求函数的一阶和二阶导数，得 $y'=4-2x$，$y''=-2$，在顶点 $(2,4)$ 处，$y'\big|_{x=2}=0$，则该点处的曲率为 $K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=2$，曲率半径 $R=\dfrac{1}{2}$.

4. 将函数两端取对数，有 $\ln y=\dfrac{\ln x}{x}$，两端再求导，得 $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，即 $y'=y\dfrac{1-\ln x}{x^2}=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$，因为 $x\in[1,e^2]$，有 $\dfrac{1}{x}-2\in\left[\dfrac{1}{e^2}-2,-1\right]$，所以 $x^{\frac{1}{x}-2}>0$.

令 $y'=0$，得 $x=e$. 当 $x\in[1,e]$ 时，$y'>0$，当 $x\in[e,e^2]$ 时，$y'<0$，则 $x=e$ 为函数的极大值点，极大值为 $f(e)=e^{\frac{1}{e}}$. 在端点处，$f(1)=1$，$f(e^2)=e^{\frac{2}{e^2}}$，故函数的值域为 $[1,e^{\frac{1}{e}}]$.

5. 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)}$，又

$$\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\pi}{2\arctan x}\cdot\dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\arctan x}=-\frac{2}{\pi}.$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)}=e^{-2/\pi}$.

## 二、选择题

6.（C）　7.（B）　8.（B）　9.（C）　10.（D）

【参考解答】 6. 因为 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})$，则有 $x^2\sin x = x^2\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})\right]$，故 $f(x)$ 的六阶带皮亚诺余项的麦克劳林公式为 $x^3 - \frac{1}{6}x^5 + o(x^6)$，答案选(C).

7. 令 $f(x)=e^x-k(2-x)$，则 $f'(x)=e^x+k>0$，函数严格单调增加，故只需满足 $f(0)f(1)<0$ 保证函数有零点即可，即 $f(0)f(1)=(1-2k)(e-k)<0$，解得 $\frac{1}{2}<k<e$，故正确选项为(B).

8. 依据函数的图形可知，$f(0)=0$，$f'(-2)>0$，$f'(-1)>0$，$f'(1)<0$，并从曲线的倾斜程度可以看到，$f'(-2)>f'(-1)$，所以 $f'(-2)>f'(-1)>f(0)>f'(1)$，所以正确选项为(B).

9. 当 $\Delta x>0$ 时，有

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(\xi)\Delta x, \quad x_0<\xi<x_0+\Delta x,$$

由 $f'(x)<0$，$f''(x)<0$，得 $f'(\xi)<f'(x_0)<0$，所以 $\Delta y=f'(\xi)\Delta x<f'(x_0)\Delta x=dy<0$，从而选(C).

10. 由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，又因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以有 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$. 从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x} = 2\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$$
$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1} = 0,$$

排除选项(A)和(B).

由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=2$，根据函数极限的定义，对 $\varepsilon=\frac{1}{2}>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-0|<\delta$ 时，恒有 $\left|\frac{f(x)}{1-\cos x}-2\right|<\frac{1}{2}$ 成立，即 $\frac{3}{2}<\frac{f(x)}{1-\cos x}<\frac{5}{2}$，所以 $f(x)>\frac{3}{2}(1-\cos x)>0=f(0)$，从而排除选项(C)，选(D).

## 三、解答题

11.【解】 
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^2\tan x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

12.【解】 利用 $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)(t\to 0)$ 可得

$$f(x) = (1-x)\ln(1+x^2) = (1-x)\left[x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^7)\right]$$
$$= \left[x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^7)\right] - x\left[x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^5)\right]$$

$$=x^2-x^3-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{2}+\frac{x^6}{3}-\frac{x^7}{3}+o(x^7),\quad x\to 0.$$

13.【证明】 由泰勒公式 $f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$，$\xi$ 介于 $x$ 与 $\frac{1}{2}$ 之间，可知存在 $\xi_1\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$\xi_2\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得

$$1=f(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(0-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)\left(0-\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}f'\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{8}f''(\xi_1),$$

$$1=f(1)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)\left(1-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}f'\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{8}f''(\xi_2),$$

两式相加整理可得 $\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}=8$.

又由已知可知 $f''(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]\subset(0,1)$ 连续，由介值定理可知，存在 $\xi\in[\xi_1,\xi_2]\subset(0,1)$，使得 $f''(\xi)=\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}=8$.

14.【解】 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{\frac{t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}}=t$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{x'_t}=\frac{(t)'}{x'(t)}=1+t^2$，则 $K=\frac{|y''(x)|}{(1+y'^2(x))^{3/2}}=\frac{1+t^2}{(1+t^2)^{3/2}}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$，于是当 $t=0$ 时，对应曲线上点 $(0,0)$ 处曲率最大，$K_{\max}=1$.

15.【解】 记 $f(x)=\arctan x+\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}$，$x>0$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，且 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2}<0$，所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上严格单调递减.

又 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，所以当 $x>0$ 时，$\arctan x+\frac{1}{x}>\frac{\pi}{2}$.

16.【解】 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，且有任意阶连续导数. 且 $f'(x)=3x^2+2ax+b$，因为函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取极值 $-2$，所以 $f(1)=-2$，$f'(1)=0$，即有 $\begin{cases}1+a+b=-2\\3+2a+b=0\end{cases}$，解得 $a=0$，$b=-3$. 于是 $f''(x)=6x+2a=6x$，$f''(1)=6>0$，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取极小值.

令 $f''(x)=6x=0$ 得 $x=0$，当 $x<0$，$f''(x)<0$，所以曲线 $y=f(x)$ 的凸区间为 $(-\infty,0)$；当 $x>0$ 时，$f''(x)>0$，所以曲线 $y=f(x)$ 的凹区间为 $[0,+\infty)$.

17.【解】【法 1】 (1) 由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$ 可知 $\sin 6x+xf(x)=o(x^3)$，所以 $f(x)=-\frac{\sin 6x}{x}+o(x^2)=\frac{-6x+\frac{1}{3!}(6x)^3}{x}+o(x^2)=-6+36x^2+o(x^2)$，又 $f(x)$ 的二阶

的麦克劳林公式为 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)$，所以 $f(0)=-6, f'(0)=0$，$f''(0)=72$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{6+[-6+36x^2+o(x^2)]}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{36x^2+o(x^2)}{x^2}=36$.

【法 2】 (1) 由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$，及洛必达法则有 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{6\cos 6x+f(x)+xf'(x)}{3x^2}=0$，于是有 $\lim\limits_{x\to 0}[6\cos 6x+f(x)+xf'(x)]=6+f(0)=0$，所以 $f(0)=-6$；

继续用洛必达法则有 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-36\sin 6x+2f'(x)+xf''(x)}{6x}$，于是有 $\lim\limits_{x\to 0}[-36\sin 6x+2f'(x)+xf''(x)]=2f'(0)=0$，所以 $f'(0)=0$；又(由于没有 $f(x)$ 三阶可导的条件，不能继续用洛必达法则)

$$\lim_{x\to 0}\frac{-36\sin 6x+2f'(x)+xf''(x)}{6x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{-36\sin 6x}{6x}+\frac{[f'(x)-f'(0)]}{3(x-0)}+\frac{f''(x)}{6}\right]$$
$$=-36+\frac{f''(0)}{3}+\frac{f''(0)}{6}=-36+\frac{f''(0)}{6}=0,$$

所以 $f''(0)=72$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{f''(0)}{2}=36$.

18.【证明】 令 $F(x)=e^x f(x)$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$F''(x)$ 在 $(0,1)$ 存在，

$$F'(x)=e^x[f(x)+f'(x)]\qquad F''(x)=e^x[f''(x)+2f'(x)+f(x)],$$
$$F(0)=f(0)=0,\quad F(1)=ef(1)=0,$$

故由罗尔中值定理，存在 $c\in(0,1)$，使得 $F'(c)=e^c(f(c)+f'(c))=0$.

由题设可知 $F''(x)>0$，故 $F'(x)$ 在 $(0,1)$ 内严格单调递增. 于是当 $0\leqslant x\leqslant c$ 时，$F'(x)<F'(c)=0$，$F(x)$ 严格单调递减，所以 $F(x)<F(0)=0(0<x\leqslant c)$；当 $c\leqslant x\leqslant 1$ 时，$F'(x)>F'(c)=0$，$F(x)$ 严格单调递增，所以 $F(x)<F(1)=0(c<x<1)$.

综上有不等式 $F(x)<0(0<x<1)$ 成立，又 $e^x>0$，所以 $f(x)<0(0<x<1)$.

19.【证明】 构建辅助函数 $F(x)=e^x$，$G(x)=e^x g(x)$，$x\in[a,b]$，因为 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导，则 $G(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导，且 $G'(x)=e^x[g(x)+g'(x)]$，又 $f'(x)\neq 0$，于是 $F(x)$ 与 $f(x)$，$G(x)$ 与 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上，由柯西中值定理知

至少存在一点 $\eta\in(a,b)$，使得 $\frac{F(b)-F(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{e^b-e^a}{f(b)-f(a)}=\frac{e^\eta}{f'(\eta)}$，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{G(b)-G(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{e^b g(b)-e^a g(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{e^b-e^a}{f(b)-f(a)}=\frac{e^\xi[g(\xi)+g'(\xi)]}{f'(\xi)}.$$

综上有，存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^\xi[g(\xi)+g'(\xi)]}{e^\eta}$.

20.【证明】 由题设可知,$f(x)$在 $x_0$ 处的 $n$ 阶带皮亚诺余项的麦克劳林公式为

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n,\quad \xi \text{ 介于 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间}.$$

(1) 当 $n$ 为偶数时,若 $f^{(n)}(x_0)>0$,由保号性可知存在 $x_0$ 的某邻域 $U(x_0)$,当 $x\in U(x_0)$时有 $f'(x)>0$,不妨设 $x\in U(x_0)$,则有 $f'(\xi)>0$,于是有 $f(x)=f(x_0)+\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n\geqslant f(x_0)$,此时 $x_0$ 为极小值点.

同理若 $f^{(n)}(x_0)<0$,则 $f(x)=f(x_0)+\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n\leqslant f(x_0)$,此时 $x_0$ 为极大值点.

(2) 当 $n$ 为奇数时,由 $f(x)=f(x_0)+\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$ 有 $f(x)-f(x_0)=\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$,可知若 $f^{(n)}(x_0)>0$,$f(x)-f(x_0)$与 $x-x_0$ 同号,$f(x)$在 $U(x_0)$严格单调,于是在 $x_0$ 处不取极值,$x_0$ 不是极值点.

## 第三单元 中值定理与导数的应用测验(B)

### 一、填空题(每小题 3 分,共 15 分)

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\mathrm{e}^{-x}-\sin x}{x^2}=$________.

2. 已知 $f(x)=x(x-a)^3$ 在 $x=1$ 处取极值,则 $a=$________.

3. 曲线 $y=1+\sqrt[3]{1+x}$ 的拐点坐标为________.

4. 设 $f(x)=x^4+cx^3+12x^2-5x+2$,若一直线与曲线 $y=f(x)$相交于 4 个不同的点,则 $c$ 的最大取值范围是________.

5. 函数 $f(x)=\mathrm{e}^x\sin2x$,则 $f(x)$的 4 阶带皮亚诺余项的麦克劳林公式为 $f(x)=$________.

### 二、选择题(每小题 3 分,共 15 分)

6. 设 $f(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$内的连续的奇函数,下表中给出了它的二阶导函数 $f''(x)$在$(0,+\infty)$内的符号信息,则曲线 $y=f(x)(-\infty<x<+\infty)$的拐点个数为(  ).

(A) 1  (B) 2  (C) 3  (D) 4

| $x$ | $(0,1)$ | $1$ | $(1,2)$ | $2$ | $(2,+\infty)$ |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $f''(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | 不存在 | $-$ |

7. 设多项式函数 $f(x)$恰有 2 个极大值点和 1 个极小值点.则下述论断不正确的是(  ).

(A) $f(x)$至多有 4 个零点  (B) $f(x)$至多有 2 个拐点

(C) $f(x)$必是偶次多项式  (D) $f(x)$至少有 1 个零点

8. 设函数 $y=f(x)$二阶可导,其图形在$(0,1)$处的曲率圆的方程为$(x-1)^2+y^2=2$,则函数 $f(x)$的二阶带皮亚诺余项的麦克劳林公式为(  ).

(A) $f(x)=1-x+x^2+o(x^2)$  (B) $f(x)=1+x-x^2+o(x^2)$

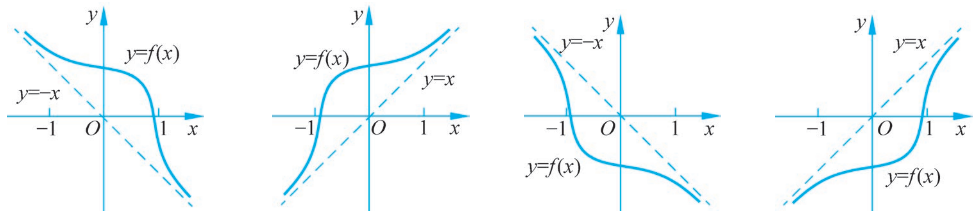
(C) $f(x)=1+x-2x^2+o(x^2)$　　(D) $f(x)=1-x-2x^2+o(x^2)$

9. 设函数 $f(x)$ 二阶可导，$F(x)=f(\cos x)$，则 $F(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值的一个充分条件是(　　).

(A) $f'(1)<0$　　(B) $f'(1)>0$

(C) $f''(1)<0$　　(D) $f''(1)>0$

10. 若函数 $y=f(x)$ 满足条件：对所有 $x$ 有 $f'(x)<0$，当 $|x|>1$ 时有 $f''(x)>0$，当 $|x|<1$ 时有 $f''(x)<0$，并且 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)+x]=0$. 则在下列图形中，满足上述条件的函数图形是(　　).




(A)　　(B)　　(C)　　(D)

## 三、解答下列各题(共 70 分)

11. (6 分)求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-(\cos x)^{\tan x}}{x^3}$.

12. (6 分)试写出函数 $f(x)=x\ln(2+x)+\cos x$ 的 4 阶带皮亚诺余项的麦克劳林公式，并求函数图形在点(0,1)处的曲率.

13. (6 分)要造一个壁和底厚为 $a$、容积为 $V$、上端开口的圆柱形容器，问：当容器端口内半径尺寸 $r$ 为何值时，所用材料最省?

14. (6 分)求使不等式 $a^x\geqslant x^a\ (a>0)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立的常数 $a$ 的最大值.

15. (6 分)设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶连续导数，$|f''(x)|\leqslant1$ 且 $f(0)=f(1)=1$. 证明：在 $[0,1]$ 上必有 $|f'(x)|\leqslant\dfrac{1}{2}$.

16. (8 分)设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi$，$x_{n+1}=\sin x_n\ (n=1,2,\cdots)$.

(1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求之. (2) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{1/x_n^2}$.

17. (8 分)设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，若 $f(a)=f(b)=0$，且存在 $c\in(a,b)$，使得 $f(c)<0$，试证：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)>0$.

18. (8 分)就 $K$ 的不同取值情况，确定方程 $x-\dfrac{\pi}{2}\sin x=K$ 在开区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内的根的个数，并证明你的结论.

19. (8 分)设整数 $n>1$，证明不等式 $\dfrac{1}{2ne}<\dfrac{1}{e}-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n<\dfrac{1}{ne}$.

20. (8 分)设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 上二阶可导，且 $|f''(x)|\geqslant m>0$ ($m$ 为常数)，又 $f(a)=f(b)=0$. 证明：$\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|\geqslant\dfrac{m}{8}(b-a)^2$.

# 第三单元　中值定理与导数的应用测验(B)参考解答

## 一、填空题

1. $-1$　2. 4　3. $(-1,1)$　4. $|c|>4\sqrt{2}$　5. $2x+2x^2-\dfrac{x^3}{3}-x^4+o(x^4)$

【参考解答】

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^{-x}-\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}-xe^{-x}-\cos x}{2x}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2e^{-x}+xe^{-x}+\sin x}{2}=-1.$

2. 函数的导数为 $f'(x)=(x-a)^3+3x(x-a)^2=(x-a)^2(4x-a)$，令 $f'(x)=0$，得 $x=\dfrac{a}{4}$. 当 $x<\dfrac{a}{4}$时，$f'(x)<0$，当 $x>\dfrac{a}{4}$时，$f'(x)>0$，故 $x=\dfrac{a}{4}$为极小值点，又已知 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取极值，则$\dfrac{a}{4}=1$，即 $a=4$.

3. 函数的一阶、二阶导数为 $y'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}$，$y''=\dfrac{-2}{9(1+x)\sqrt[3]{(1+x)^2}}$，二阶导数没有零点，但 $x=-1$ 时，二阶导数 $y''$不存在，当 $x<-1$ 时，$y''>0$，函数图形在$(-\infty,-1)$上是凹的，当 $x>-1$ 时，$y''<0$，函数图形在$(-1,+\infty)$上是凸的，故$(-1,1)$为拐点.

4. 依题意必须保证 $f''(x)=6cx+12x^2+24=0$ 有两个零点，故

$$\Delta=36c^2-4\times 12\times 24>0,$$

解得$|c|>4\sqrt{2}$.

5. 因为 $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+o(x^4)$，$\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^4)$，所以

$$f(x)=e^x\sin 2x=\left[1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right]\left[2x-\frac{(2x)^3}{3!}+o(x^4)\right]$$

$$=2x+2x^2-\frac{x^3}{3}-x^4+o(x^4).$$

## 二、选择题

6. (C)　7. (D)　8. (B)　9. (A)　10. (A)

【参考解答】 6. 由题意，函数 $f(x)$图形在$(0,1)$上是凹的，在$(1,+\infty)$上是凸的，所以 $x=1$ 对应一个拐点. 又因为 $f(x)$是连续的奇函数，所以 $f''(x)$也是奇函数，在$(-1,0)$内，$f''(x)$取负号，函数 $f(x)$图形在$(-1,0)$上是凸的，则 $x=0$ 对应一个拐点. 由奇函数关于原点对称，可知 $x=-1$ 也对应一个拐点，答案选(C).

7. 由题设可知 $f'(x)$恰有 3 个零点，故 $f'(x)$是 3 次多项式，从而可知 $f(x)$是 4 次多项式. 所以 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$，故 $f(x)$不一定有零点，所以正确选项为(D).

8. 由题意，曲率半径为 $R=\sqrt{2}$，曲率为 $K=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 因曲线 $y=f(x)$和曲率圆在点$(0,1)$处斜率相同，所以 $f'(0)=1$，该点处的曲率 $K=\dfrac{|f''(0)|}{[1+f'^2(0)]^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，得$|f''(0)|=2$，又由曲线

在点(0,1)处向上凸，则有 $f''(0)<0$，故 $f''(0)=-2$，答案选(B).

9. 等式两边关于 $x$ 求导，$F'(x)=-f'(\cos x)\sin x$，$F'(0)=0$，再对 $x$ 求导，$F''(x)=f''(\cos x)\sin^2 x-f'(\cos x)\cos x$，$F''(0)=-f'(1)$，要使 $F(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值，则要求 $F''(0)>0$，即 $f'(1)<0$，答案选(A).

10. 由对所有 $x$，$f'(x)<0$，可知函数严格单调递减，排除答案(B)(D). 当 $|x|>1$ 时，$f''(x)>0$，函数 $f(x)$ 向下凸，当 $|x|<1$ 时，$f''(x)<0$，函数 $f(x)$ 向上凸，排除答案(C). 又 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)+x]=0$，有 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{f(x)}{x}+1\right]=0$，即 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-1$，函数 $f(x)$ 有斜渐近线 $y=-x$，答案选(A).

## 三、解答题

11. **【解】** $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-(\cos x)^{\tan x}}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-e^{\tan x\ln\cos x}}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{-\tan x\ln\cos x}{x^3}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\ln(1-(1-\cos x))}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

或由 $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\tan x}=\lim\limits_{x\to0}e^{\tan x\ln\cos x}=1$ 可知极限为 $\dfrac{0}{0}$ 型，由洛必达法则有

$$\lim_{x\to0}\frac{1-(\cos x)^{\tan x}}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{-(\cos x)^{\tan x}(\sec^2 x\ln\cos x-\tan^2 x)}{3x^2}$$

$$=-\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{3x^2}+\lim_{x\to0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{6x\cos x}+\frac{1}{3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}.$$

12. **【解】** 由 $\ln(2+x)=\ln2+\ln\left(1+\dfrac{x}{2}\right)=\ln2+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{x^3}{24}+o(x^3)$ 及 $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+o(x^4)$ 得函数 $f(x)$ 的 4 阶带皮亚诺余项的带麦克劳林公式为

$$f(x)=x\left[\ln2+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{24}+o(x^3)\right]+\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right]$$

$$=1+x\ln2-\frac{1}{8}x^3+\frac{1}{12}x^4+o(x^4).$$

由此可知 $f'(0)=\ln2$，$f''(0)=0$. 函数图形在点(0,1)处的曲率为

$$K=\frac{|f''(0)|}{(1+f'^2(0))^{3/2}}=\frac{0}{(1+\ln^2 2)^{3/2}}=0.$$

13. **【解】** 设容器的半径为 $r$，高为 $h$，所用材料的体积为 $M$. 由于 $V=\pi r^2 h$，故 $M(r)=\pi(r+a)^2\left(\dfrac{V}{\pi r^2}+a\right)-V$，$(0<r<+\infty)$. 于是

$$M'(r)=2\pi(r+a)\left[\left(\frac{V}{\pi r^2}+a\right)-(r+a)\frac{V}{\pi r^3}\right]=2\pi a(r+a)\left(1-\frac{V}{\pi r^3}\right).$$

唯一驻点为 $r_1=\sqrt[3]{V/\pi}$，此时容器高为 $h_1=r_1=\sqrt[3]{V/\pi}$.

当 $0<r<r_1$ 时，$M'(r)<0$；当 $r_1<r$ 时，$M'(r)>0$，因此 $r=r_1$ 是 $M(r)$ 的极小值点，也是最小值点. 故当容器底内半径为 $r_1=\sqrt[3]{V/\pi}$ 时，所用材料最省.

14.【解】 由题意知，$a^x \geqslant x^a$ 等价于 $\frac{\ln x}{x} \leqslant \frac{\ln a}{a}$，问题转化为求 $\frac{\ln x}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最大值点问题. 构造辅助函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，$x\in(0,+\infty)$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

令 $f'(x)=0$，解得 $x=\mathrm{e}$. 当 $x\in(0,\mathrm{e})$ 时 $f'(x)>0$，$f(x)$ 严格单调递增；当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$ 时 $f'(x)<0$，即 $f(x)$ 在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上严格单调递减. 因此 $f(x)$ 在 $x=\mathrm{e}$ 处取得唯一极大值，也是最大值 $f(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}$. 因此，当且仅当 $a=\mathrm{e}$ 时 $a^x\geqslant x^a$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.

15.【证明】 $\forall x\in(0,1)$，$f(t)$ 在 $x$ 处的泰勒公式为 $f(t)=f(x)+f'(x)(t-x)+\frac{1}{2}f''(\eta)(t-x)^2$，其中 $\eta$ 介于 $t$ 与 $x$ 之间.

于是对应 $t=0$ 与 $t=1$ 分别有：存在 $\eta_1\in(0,x)$，$\eta_2\in(x,1)$，使得

$$1=f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+\frac{1}{2}f''(\eta_1)(0-x)^2,$$

$$1=f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{1}{2}f''(\eta_2)(1-x)^2,$$

两式相减并整理可得 $f'(x)=\frac{1}{2}f''(\eta_1)x^2-\frac{1}{2}f''(\eta_2)(1-x)^2$.

于是 $|f'(x)|\leqslant\frac{1}{2}|f''(\eta_1)|x^2+\frac{1}{2}|f''(\eta_2)|(1-x)^2\leqslant\frac{1}{2}[x^2+(1-x)^2]=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\leqslant\frac{1}{2}$.

显然，当 $x=0$ 或 $x=1$ 时，不等式仍成立，因此在 $[0,1]$ 上必有 $|f'(x)|\leqslant\frac{1}{2}$.

16.【证明】 (1) 因为 $0<x_1<\pi$，$x_{n+1}=\sin x_n$，所以 $0<x_2=\sin x_1<1$，且

$$0<x_{n+1}=\sin x_n\leqslant x_n<\pi\quad(n=1,2,\cdots),$$

即 $\{x_n\}$ 单调递减且有下界，由单调有界准则可得 $\{x_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则在 $x_{n+1}=\sin x_n$ 中令 $n\to\infty$ 可得 $a=\sin a$，故 $a=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(2) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n^2}\ln\frac{x_{n+1}}{x_n}}$，考察 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n^2}\ln\frac{x_{n+1}}{x_n}$.

【法 1】 利用等价无穷小及麦克劳林公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n^2}\ln\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n^2}\ln\frac{\sin x_n}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n^2}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}-1\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x_n-x_n}{x_n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(x_n-\frac{1}{3!}x_n^3+o(x^3)\right)-x_n}{x_n^3}=-\frac{1}{6},$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\mathrm{e}^{-1/6}$.

【法 2】 利用等价无穷小及洛必达法则，由海涅定理知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n^2}\ln\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{t\to0}\frac{1}{t^2}\ln\frac{\sin t}{t}=\lim_{t\to0}\frac{1}{t^2}\left(\frac{\sin t}{t}-1\right)$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin t-t}{t^3}=\lim_{t\to0}\frac{\cos t-1}{3t^2}=-\frac{1}{6},$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{1/x_n^2}=e^{-1/6}$.

17.【证明】 由条件知 $f(x)$ 在 $[a,c]$，$[c,b]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，于是有

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=f'(\xi_1),\xi_1\in(a,c),\quad \frac{f(b)-f(c)}{b-c}=f'(\xi_2),\xi_2\in(c,b),$$

因为 $f(a)=f(b)=0,f(c)<0$，所以 $f'(\xi_1)<0,f'(\xi_2)>0$.

又因为 $f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]\subset[a,b]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，于是有

$$\frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}=f''(\xi),\quad \xi\in(\xi_1,\xi_2),$$

由于 $f'(\xi_1)<0,f'(\xi_2)>0,\xi_2>\xi_1$，所以 $f''(\xi)>0,\xi\in(a,b)$.

18.【解】 设 $f(x)=x-\frac{\pi}{2}\sin x$，则 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续，由 $f'(x)=1-\frac{\pi}{2}\cos x=0$，解得 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内有唯一驻点 $x_0=\arccos\frac{2}{\pi}$，且 $x\in(0,x_0)$ 时 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，$x\in\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，因此 $f(x)$ 在 $x_0$ 取最小值，最小值为 $m=f(x_0)=x_0-\frac{\pi}{2}\sin x_0$，又因 $f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，故在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内 $f(x)$ 的取值范围为 $[m,0)$. 令 $g(x)=K-f(x)$，则：

当 $K\notin[m,0)$ 时，$g(x)$ 没有零点，原方程在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内没有根；

当 $K=m$ 时，$g(x)$ 仅有 $g(x_0)=0$，原方程在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内有唯一根 $x_0$；

当 $K\in(m,0)$ 时，$g(0)<0,g\left(\frac{\pi}{2}\right)<0,g(x_0)>0$，由连续函数的零点定理知 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 和 $\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内至少各有一个零点，又因函数 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 和 $\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内均单调，故原方程在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内恰有两个不同的根.

19.【证明】 (1) 左侧不等式 $\Leftrightarrow\frac{1}{n}\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}>0$，视 $\frac{1}{n}=x$，令 $f(x)=x\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)-\ln(1-x)-x$，$f(x)\in C[0,1)$，$f(0)=0$，则当 $x\in(0,1)$ 时，

$$f'(x)=\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)-\frac{x}{2-x}+\frac{1}{1-x}-1,f'(x)\in C[0,1),f'(0)=0,$$

$$f''(x)=-\frac{1}{2-x}-\frac{2}{(2-x)^2}+\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{x(x^2-5x+5)}{(2-x)^2(1-x)^2}>0,$$

所以 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 上严格单调递增，于是 $f'(x)>f'(0)=0, x\in(0,1)$.

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上严格单调递增，于是 $f(x)>f(0)=0, x\in(0,1)$，由于 $\frac{1}{n}\in(0,1)$，所以有 $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}>0$.

(2) 右侧不等式 $\Leftrightarrow\left(1-\frac{1}{n}\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}>0$，视 $\frac{1}{n}=x$，令 $f(x)=(1-x)\ln(1-x)+x$，$f(x)\in C[0,1)$，$f(0)=0$，则当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)=-\ln(1-x)>0, x\in(0,1)$，于是 $f(x)>f(0)=0, x\in(0,1)$，由于 $\frac{1}{n}\in(0,1)$，所以有 $f\left(\frac{1}{n}\right)=\left(1-\frac{1}{n}\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}>0$.

综上可知原不等式成立.

20.【证明】 因为 $|f''(x)|\geqslant m>0$，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内不为常数，所以存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $|f(\xi)|=\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|>0$. 由费马定理可知 $f'(\xi)=0$.

于是 $f(x)$ 在 $x=\xi$ 的泰勒公式为

$$f(x)=f(\xi)+f'(\xi)(x-\xi)+\frac{f''(\eta)}{2}(x-\xi)^2=f(\xi)+\frac{f''(\eta)}{2}(x-\xi)^2,$$

其中 $\eta$ 介于 $x,\xi$ 之间.

(1) 若 $\xi<\frac{a+b}{2}$，把 $x=b$ 代入，则有 $0=f(b)=f(\xi)+\frac{f''(\eta_1)}{2}(b-\xi)^2$，即 $-f(\xi)=\frac{f''(\eta_1)}{2}(b-\xi)^2$，所以有

$$\max_{x\in[a,b]}|f(x)|=|f(\xi)|=\frac{|f''(\eta_1)|}{2}(b-\xi)^2\geqslant\frac{m}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2=\frac{m}{8}(b-a)^2.$$

(2) 若 $\xi\geqslant\frac{a+b}{2}$，把 $x=a$ 代入，则得 $-f(\xi)=\frac{f''(\eta_2)}{2}(a-\xi)^2$，所以有

$$\max_{x\in[a,b]}|f(x)|=|f(\xi)|=\frac{|f''(\eta_2)|}{2}(a-\xi)^2\geqslant\frac{m}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2=\frac{m}{8}(b-a)^2.$$