第5章 谓词逻辑的形式系统

本章引入谓词逻辑的形式系统，包括自然推理系统和公理推理系统，并证明了它们之间的等价性，它们都是从纯语法方面去模拟、反映逻辑推理的。此外，还对谓词逻辑形式系统的整体性质进行了讨论，特别是完备性定理。一方面，完备性定理显示了建立的形式系统具备我们所期望的性质，在形式系统内部能得到的都是那些永远为真的逻辑规律；另一方面，完备性定理证明本身也提供了谓词逻辑在语言扩张、结构构建等方面的示例。

5.1 自然推理系统

类似于命题逻辑中有不同的自然推理系统，在谓词逻辑里也有一些不同的自然推理系统，选择其中一个进行介绍，记其为 K，它的形式语言部分如在 4.2 节中的那样。形式系统 K 的推理部分，也是没有公理，只有推理规则，具体的推理规则如下：

($\in$)：$A_1, A_2, \cdots, A_n \vdash A_i$，$1 \leqslant i \leqslant n$，$i \in \mathbb{N}$。

($\neg -$)：若 $\Gamma \cup \{(\neg A)\} \vdash B$，且 $\Gamma \cup \{(\neg A)\} \vdash (\neg B)$，则 $\Gamma \vdash A$。

($\wedge -$)：若 $\Gamma \vdash (A \wedge B)$，则 $\Gamma \vdash A$，且 $\Gamma \vdash B$。

($\wedge +$)：若 $\Gamma \vdash A$，且 $\Gamma \vdash B$，则 $\Gamma \vdash (A \wedge B)$。

($\vee -$)：若 $\Gamma \cup \{A\} \vdash C$，且 $\Gamma \cup \{B\} \vdash C$，则 $\Gamma \cup \{(A \vee B)\} \vdash C$。

($\vee +$)：若 $\Gamma \vdash A$，则 $\Gamma \vdash (A \vee B)$，且 $\Gamma \vdash (B \vee A)$。

($\rightarrow -$)：若 $\Gamma \vdash (A \rightarrow B)$，且 $\Gamma \vdash A$，则 $\Gamma \vdash B$。

($\rightarrow +$)：若 $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$，则 $\Gamma \vdash (A \rightarrow B)$。

($\leftrightarrow -$)：若 $\Gamma \vdash (A \leftrightarrow B)$，且 $\Gamma \vdash A$，则 $\Gamma \vdash B$；若 $\Gamma \vdash (A \leftrightarrow B)$，且 $\Gamma \vdash B$，则 $\Gamma \vdash A$。

($\leftrightarrow +$)：若 $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$，且 $\Gamma \cup \{B\} \vdash A$，则 $\Gamma \vdash (A \leftrightarrow B)$。

(P+)：若 $\Gamma \vdash A$，则 $\Gamma, B \vdash A$。

($\forall -$)：若 $\Gamma \vdash \forall x_i A$，则 $\Gamma \vdash A^t_{x_i}$，其中项 t 对 x_i 在 A 中代入自由。

($\forall +$)：若 $\Gamma \vdash A$，则 $\Gamma \vdash \forall x_i A$，其中 x_i 不在 Γ 的任意合式公式中自由出现。

($\exists -$)：若 $\Gamma, A \vdash B$，则 $\Gamma, \exists x_i A \vdash B$，其中 x_i 不在 $\Gamma \cup \{B\}$的任意合式公式中自由出现。

($\exists +$)：若 $\Gamma \vdash A^t_{x_i}$，则 $\Gamma \vdash \exists x_i A$，其中项 t 对 x_i 在 A 中代入自由。

与命题逻辑那里一样，采用符号 $\Gamma \vdash B$ 或者 $A_1, A_2, \cdots, A_n \vdash B$ 表示形式前提

$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 与形式结论 B 之间存在着形式上的推理关系，其中 Γ 表示有限的合式公式集合，即 $\Gamma = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$，$B$ 为合式公式。这里的合式公式指的是谓词逻辑中的合式公式。

相对于命题逻辑的自然推理系统 L，谓词逻辑自然推理系统 K 的前 10 条形式推理规则在记号上就是 L 中的形式推理规则；剩余增加的 5 条形式推理规则中，($\forall -$)、($\forall +$)、($\exists -$)、($\exists +$)这 4 条是关于量词消去和引入的变形规则，它们也都是以间接推理规则的方式给出，其中的($\forall -$)和($\exists +$)是反映命题 4.4.8 中永真蕴涵式所代表的逻辑后承关系或者逻辑推理关系，($\forall +$)和($\exists -$)是反映命题 4.6.1 中的(3)和(4)。需要指出，K 中增加的 5 条形式推理规则中，除了反映量词性质的四条形式推理规则，还有一条是(P+)，这一条在 L 中是以命题 3.2.1 的方式表述的，现在 K 中增加了量词的形式推理规则，使得这一条形式推理规则无法从其他形式推理规则中导出，所以将其作为一条基本形式推理规则列出。

与命题逻辑那里一样，这里的形式推理规则或者说是变形规则也是以归纳的方式进行表述的，所以也会有形式推理关系的归纳定义，以及与之伴随的结构归纳法。为了证明形式系统 K 中所有的形式推理关系均具有性质 P，只需要证明两点：①由第一条变形规则直接生成的所有形式推理关系 $\Gamma \vdash B$ 均具有性质 P；②对于任意的 $\Gamma \vdash B$，若它是由已有的形式推理关系应用第二条到第十五条变形规则中的某一条变形规则所生成，则当已有的形式推理关系具有性质 P 时，所生成的形式推理关系 $\Gamma \vdash B$ 也具有性质 P。

在形式系统 L 中给出的形式证明的定义也适用于形式系统 K，无非是形式证明中所能使用的变形规则由 10 条变成了 15 条。由于 K 中的 15 条变形规则包含了 L 中所有的 10 条变形规则，如果在 L 中已经得到了形式推理关系 $\Gamma \vdash B$，以及其形式证明 $\Gamma_1 \vdash B_1, \Gamma_2 \vdash B_2, \cdots, \Gamma_n \vdash B_n$(其中 $\Gamma_n \vdash B_n$ 为 $\Gamma \vdash B$)，那么类似于命题 4.4.1 所表述的，对于 $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_n$ 中所有合式公式以及合式公式 B_1, $B_2, \cdots, B_n$ 中出现的所有命题变元符号 $p_1, p_2, \cdots, p_m$，将它们在形式推理关系和形式证明中的每一处出现都依次换成 K 中的合式公式 $A_1, A_2, \cdots, A_m$，就会得到 K 中的形式推理关系 $\Gamma^* \vdash B^*$，以及其形式证明 $\Gamma_1^* \vdash B_1^*, \Gamma_2^* \vdash B_2^*, \cdots, \Gamma_n^* \vdash B_n^*$(其中 $\Gamma_n^* \vdash B_n^*$ 为 $\Gamma^* \vdash B^*$)。比如，对于 L 中的形式推理关系 $p_1 \rightarrow p_2, p_2 \rightarrow p_3$, $p_1 \vdash p_3$，其在 L 中的形式证明如下：

(1) $p_1 \rightarrow p_2, p_2 \rightarrow p_3, p_1 \vdash p_1 \rightarrow p_2$ $\qquad$ ($\in$)

(2) $p_1 \rightarrow p_2, p_2 \rightarrow p_3, p_1 \vdash p_1$ $\qquad$ ($\in$)

(3) $p_1 \to p_2, p_2 \to p_3, p_1 \vdash p_2$ (1)(2)($\to -$)

(4) $p_1 \to p_2, p_2 \to p_3, p_1 \vdash p_2 \to p_3$ ($\in$)

(5) $p_1 \to p_2, p_2 \to p_3, p_1 \vdash p_3$ (3)(4)($\to -$)

若将 p_1 在上面的每一处出现换成 $F_1^1(x_1)$，将 p_2 在上面的每一处出现换成 $\exists x_2 F_1^2(x_2, x_3)$，将 p_3 在上面的每一处出现换成 $\forall x_3 F_2^1(x_3)$，则可以得到 K 中的形式推理关系 $F_1^1(x_1) \to \exists x_2 F_1^2(x_2, x_3), \exists x_2 F_1^2(x_2, x_3) \to \forall x_3 F_2^1(x_3), F_1^1(x_1) \vdash \forall x_3 F_2^1(x_3)$。该形式推理关系在 K 中的形式证明如下：

(1) $F_1^1(x_1) \to \exists x_2 F_1^2(x_2, x_3), \exists x_2 F_1^2(x_2, x_3) \to \forall x_3 F_2^1(x_3), F_1^1(x_1)$
$\vdash F_1^1(x_1) \to \exists x_2 F_1^2(x_2, x_3)$ ($\in$)

(2) $F_1^1(x_1) \to \exists x_2 F_1^2(x_2, x_3), \exists x_2 F_1^2(x_2, x_3) \to \forall x_3 F_2^1(x_3), F_1^1(x_1)$
$\vdash F_1^1(x_1)$ ($\in$)

(3) $F_1^1(x_1) \to \exists x_2 F_1^2(x_2, x_3), \exists x_2 F_1^2(x_2, x_3) \to \forall x_3 F_2^1(x_3), F_1^1(x_1)$
$\vdash \exists x_2 F_1^2(x_2, x_3)$ (1)(2)($\to -$)

(4) $F_1^1(x_1) \to \exists x_2 F_1^2(x_2, x_3), \exists x_2 F_1^2(x_2, x_3) \to \forall x_3 F_2^1(x_3), F_1^1(x_1)$
$\vdash \exists x_2 F_1^2(x_2, x_3) \to \forall x_3 F_2^1(x_3)$ ($\in$)

(5) $F_1^1(x_1) \to \exists x_2 F_1^2(x_2, x_3), \exists x_2 F_1^2(x_2, x_3) \to \forall x_3 F_2^1(x_3), F_1^1(x_1)$
$\vdash \forall x_3 F_2^1(x_3)$ (3)(4)($\to -$)

可以看出，如果 K 中某形式推理关系 $\Gamma \vdash B$ 的形式证明中仅涉及前 10 条变形规则，那么其形式证明与在 L 中的形式证明没有实质上的差别，不需要再对其进行讨论。在 K 中重点关注需要使用关于量词的变形规则($\forall -$)、($\forall +$)、($\exists -$)、($\exists +$)的形式推理关系。

【例 5.1.1】 给出下列各形式推理关系的形式证明：

(i) $\forall x_i(A \to B) \vdash \forall x_i A \to \forall x_i B$；

(ii) $\forall x_i(A \to B) \vdash \exists x_i A \to \exists x_i B$。

解：(i)的形式证明如下所示。

(1) $\forall x_i(A \to B), \forall x_i A \vdash \forall x_i(A \to B)$ ($\in$)

(2) $\forall x_i(A \to B), \forall x_i A \vdash \forall x_i A$ ($\in$)

(3) $\forall x_i(A \to B), \forall x_i A \vdash A \to B$ (1)($\forall -$)

(4) $\forall x_i(A \to B), \forall x_i A \vdash A$ (2)($\forall -$)

(5) $\forall x_i(A \to B), \forall x_i A \vdash B$ (3)(4)($\to -$)

(6) $\forall x_i(A \to B), \forall x_i A \vdash \forall x_i B$ (5)($\forall +$)

(7) $\forall x_i(A\to B)\vdash\forall x_iA\to\forall x_iB$　　(6)($\to+$)

(ii)的形式证明如下所示。

(1) $\forall x_i(A\to B),A\vdash\forall x_i(A\to B)$　　($\in$)

(2) $\forall x_i(A\to B),A\vdash A$　　($\in$)

(3) $\forall x_i(A\to B),A\vdash A\to B$　　(1)($\forall-$)

(4) $\forall x_i(A\to B),A\vdash B$　　(2)(3)($\to-$)

(5) $\forall x_i(A\to B),A\vdash\exists x_iB$　　(4)($\exists+$)

(6) $\forall x_i(A\to B),\exists x_iA\vdash\exists x_iB$　　(5)($\exists-$)

(7) $\forall x_i(A\to B)\vdash\exists x_iA\to\exists x_iB$　　(6)($\to+$)

■

例 5.1.1 反映了命题 4.4.2 第(5)组中的后两个永真蕴涵式。由例 5.1.1 的形式证明中可以看出,变形规则($\forall-$)和($\exists+$)的使用中经常遇到的情况是它们的简化形式:若 $\Gamma\vdash\forall x_iA$,则 $\Gamma\vdash A$;若 $\Gamma\vdash A$,则 $\Gamma\vdash\exists x_iA$;此时使用非常方便。此外,在(i)和(ii)形式证明的步骤(6)中,分别使用了变形规则($\forall+$)和($\exists-$),因为它们分别符合使用的条件:x_i 不在 $\forall x_i(A\to B)$ 和 $\forall x_iA$ 中自由出现,x_i 不在 $\forall x_i(A\to B)$ 和 $\exists x_iB$ 中自由出现。

【例 5.1.2】 给出下列各形式推理关系的形式证明:

(i) $\forall x_iA\lor\forall x_iB\vdash\forall x_i(A\lor B)$;

(ii) $\exists x_i(A\land B)\vdash\exists x_iA\land\exists x_iB$。

解:(i)的形式证明如下所示。

(1) $\forall x_iA\vdash\forall x_iA$　　($\in$)

(2) $\forall x_iA\vdash A$　　(1)($\forall-$)

(3) $\forall x_iA\vdash A\lor B$　　(2)($\lor+$)

(4) $\forall x_iA\vdash\forall x_i(A\lor B)$　　(3)($\forall+$)

(5) $\forall x_iB\vdash\forall x_iB$　　($\in$)

(6) $\forall x_iB\vdash B$　　(5)($\forall-$)

(7) $\forall x_iB\vdash A\lor B$　　(6)($\lor+$)

(8) $\forall x_iB\vdash\forall x_i(A\lor B)$　　(7)($\forall+$)

(9) $\forall x_iA\lor\forall x_iB\vdash\forall x_i(A\lor B)$　　(4)(8)($\lor-$)

(ii)的形式证明如下所示。

(1) $A\land B\vdash A\land B$　　($\in$)

(2) $A\land B\vdash A$　　(1)($\land-$)

(3) $A \wedge B \vdash B$ (1)($\wedge -$)

(4) $A \wedge B \vdash \exists x_i A$ (2)($\exists +$)

(5) $A \wedge B \vdash \exists x_i B$ (3)($\exists +$)

(6) $A \wedge B \vdash \exists x_i A \wedge \exists x_i B$ (4)(5)($\wedge +$)

(7) $\exists x_i (A \wedge B) \vdash \exists x_i A \wedge \exists x_i B$ (6)($\exists -$)

■

例 5.1.2 反映了命题 4.4.2 第(5)组中的前两个永真蕴涵式。在(i)形式证明的步骤(4)和(8)以及(ii)形式证明的步骤(7)中,分别使用了变形规则($\forall +$)和($\exists -$),因为它们分别符合使用的条件:x_i 不在 $\forall x_i A$ 和 $\forall x_i B$ 中自由出现,x_i 不在 $\exists x_i A \wedge \exists x_i B$ 中自由出现。后面不再单独提及使用它们时符合使用条件。

【例 5.1.3】 给出下列各形式推理关系的形式证明,其中 x_i 不在 B 中自由出现:

(i) $\forall x_i (A \wedge B) \vdash \forall x_i A \wedge B$;

(ii) $\forall x_i A \wedge B \vdash \forall x_i (A \wedge B)$。

解: (i)的形式证明如下所示。

(1) $\forall x_i (A \wedge B) \vdash \forall x_i (A \wedge B)$ ($\in$)

(2) $\forall x_i (A \wedge B) \vdash A \wedge B$ (1)($\forall -$)

(3) $\forall x_i (A \wedge B) \vdash A$ (2)($\wedge -$)

(4) $\forall x_i (A \wedge B) \vdash B$ (2)($\wedge -$)

(5) $\forall x_i (A \wedge B) \vdash \forall x_i A$ (3)($\forall +$)

(6) $\forall x_i (A \wedge B) \vdash \forall x_i A \wedge B$ (4)(5)($\wedge +$)

(ii)的形式证明如下所示。

(1) $\forall x_i A \wedge B \vdash \forall x_i A \wedge B$ ($\in$)

(2) $\forall x_i A \wedge B \vdash \forall x_i A$ (1)($\wedge -$)

(3) $\forall x_i A \wedge B \vdash B$ (1)($\wedge -$)

(4) $\forall x_i A \wedge B \vdash A$ (2)($\forall -$)

(5) $\forall x_i A \wedge B \vdash A \wedge B$ (3)(4)($\wedge +$)

(6) $\forall x_i A \wedge B \vdash \forall x_i (A \wedge B)$ (5)($\forall +$)

■

例 5.1.3 反映了命题 4.4.5 第(2)组中的第二个永真等价式。

【例 5.1.4】 给出下列各形式推理关系的形式证明,其中 x_i 不在 B 中自由出现:

(i) $\forall x_i(A \vee B) \vdash \forall x_i A \vee B$;

(ii) $\forall x_i A \vee B \vdash \forall x_i(A \vee B)$。

解：(i)的形式证明如下所示。

(1) $\forall x_i(A \vee B), \neg(\forall x_i A \vee B) \vdash \forall x_i(A \vee B)$　($\in$)

(2) $\forall x_i(A \vee B), \neg(\forall x_i A \vee B) \vdash \neg(\forall x_i A \vee B)$　($\in$)

(3) $\forall x_i(A \vee B), \neg(\forall x_i A \vee B) \vdash A \vee B$　(1)($\forall -$)

(4) $\forall x_i(A \vee B), \neg(\forall x_i A \vee B) \vdash \neg(\forall x_i A) \wedge \neg B$　(2)(第 3 章习题 6)

(5) $\forall x_i(A \vee B), \neg(\forall x_i A \vee B) \vdash \neg(\forall x_i A)$　(4)($\wedge -$)

(6) $\forall x_i(A \vee B), \neg(\forall x_i A \vee B) \vdash \neg B$　(4)($\wedge -$)

(7) $\forall x_i(A \vee B), \neg(\forall x_i A \vee B) \vdash A$　(3)(6)(第 3 章习题 3)

(8) $\forall x_i(A \vee B), \neg(\forall x_i A \vee B) \vdash \forall x_i A$　(7)($\forall +$)

(9) $\forall x_i(A \vee B) \vdash \forall x_i A \vee B$　(5)(8)($\neg -$)

(ii)的形式证明如下所示。

(1) $\forall x_i A \vdash \forall x_i A$　($\in$)

(2) $\forall x_i A \vdash A$　(1)($\forall -$)

(3) $\forall x_i A \vdash A \vee B$　(2)($\vee +$)

(4) $\forall x_i A \vdash \forall x_i(A \vee B)$　(3)($\forall +$)

(5) $B \vdash B$　($\in$)

(6) $B \vdash A \vee B$　(5)($\vee +$)

(7) $B \vdash \forall x_i(A \vee B)$　(6)($\forall +$)

(8) $\forall x_i A \vee \forall x_i B \vdash \forall x_i(A \vee B)$　(4)(7)($\vee -$)

■

例 5.1.4 反映了命题 4.4.5 第(2)组中的第一个永真等价式。在(i)的形式证明中利用了第 3 章习题的部分结论，它们是形式系统 L 中一些结果，不是形式系统 K 这里所主要关注的。此外，3.2 节中的一些命题和例题描述的仅仅是涉及连接词的性质，因而都可以作为导出变形规则在 K 中加以使用。

【例 5.1.5】 给出下列各形式推理关系的形式证明，其中 x_j 对 x_i 在 A 中代入自由，且 x_j 不在 A 中自由出现：

(i) $\exists x_i A \vdash \exists x_j A_{x_i}^{x_j}$;

(ii) $\exists x_j A_{x_i}^{x_j} \vdash \exists x_i A$。

解：(i)的形式证明如下所示。

(1) $A \vdash A$　($\in$)

(2) $A \vdash (A_{x_i}^{x_j})_{x_j}^{x_i}$ (1)(例 4.2.1)

(3) $A \vdash \exists x_j A_{x_i}^{x_j}$ (2)($\exists +$)

(4) $\exists x_i A \vdash \exists x_j A_{x_i}^{x_j}$ (3)($\exists -$)

(ii)的形式证明如下所示。

(1) $\exists x_j A_{x_i}^{x_j} \vdash \exists x_i (A_{x_i}^{x_j})_{x_j}^{x_i}$ (i)

(2) $\exists x_j A_{x_i}^{x_j} \vdash \exists x_i A$ (1)(例 4.2.1)

■

例 5.1.5 反映了命题 4.5.3 里(2)中的永真等价式。在(i)的形式证明中,首先利用了例 4.2.1 中的 $A=(A_{x_i}^{x_j})_{x_j}^{x_i}$,然后将$(A_{x_i}^{x_j})_{x_j}^{x_i}$ 看作将项 $t=x_j$ 代入 $A_{x_i}^{x_j}$ 中 x_i 的结果,而且这个代入是自由的,所以才可以应用变形规则($\exists +$)的一般形式,最后对于 $\exists x_j A_{x_i}^{x_j}$ 而言,x_i 不在它之中自由出现,所以应用变形规则($\exists -$)得到所证的结果。在(ii)的形式证明中,将 $A_{x_i}^{x_j}$ 视为(i)中的 A,由于 x_i 对 x_j 在 $A_{x_i}^{x_j}$ 中代入自由,且 x_i 不在 $A_{x_i}^{x_j}$ 中自由出现,满足使用(i)的条件,将(i)作为导出变形规则加以使用;然后,再次利用 $A=(A_{x_i}^{x_j})_{x_j}^{x_i}$,即可得出所证的结果。

【例 5.1.6】 给出下列各形式推理关系的形式证明:

(i) $\forall x_i \forall x_j A \vdash \forall x_j \forall x_i A$;

(ii) $\forall x_j \forall x_i A \vdash \forall x_i \forall x_j A$。

解:(i)的形式证明如下所示。

(1) $\forall x_i \forall x_j A \vdash \forall x_i \forall x_j A$ ($\in$)

(2) $\forall x_i \forall x_j A \vdash \forall x_j A$ (1)($\forall -$)

(3) $\forall x_i \forall x_j A \vdash A$ (2)($\forall -$)

(4) $\forall x_i \forall x_j A \vdash \forall x_i A$ (3)($\forall +$)

(5) $\forall x_i \forall x_j A \vdash \forall x_j \forall x_i A$ (4)($\forall +$)

(ii)的形式证明只需要将(i)的形式证明中 x_i 和 x_j 互换即可。

■

例 5.1.6 反映了命题 4.4.2 第(3)组中的第二个永真等价式。

在命题 3.2.2 的证明中并没有使用关于量词的四个变形规则,所以该命题在 K 中依然成立。将它作为 K 中的一个导出变形规则,并还是记为(Tr)。

【例 5.1.7】 给出下列各形式推理关系的形式证明:

(i) $\neg(\forall x_i A) \vdash \exists x_i(\neg A)$;

(ii) $\exists x_i(\neg A) \vdash \neg(\forall x_i A)$。

解：(i)的形式证明如下所示。

(1) $\neg A \vdash \neg A$	$(\in)$
(2) $\neg A \vdash \exists x_i(\neg A)$	(1)$(\exists +)$
(3) $\neg \exists x_i(\neg A) \vdash \neg\neg A$	(2)(例 3.2.6 的(ii))
(4) $\neg \exists x_i(\neg A) \vdash A$	(3)(例 3.2.3 的(ii))
(5) $\neg \exists x_i(\neg A) \vdash \forall x_i A$	(4)$(\forall +)$
(6) $\neg(\forall x_i A) \vdash \neg\neg(\exists x_i(\neg A))$	(5)(例 3.2.6 的(ii))
(7) $\neg\neg(\exists x_i(\neg A)) \vdash \exists x_i(\neg A)$	(6)(例 3.2.3 的(ii))
(8) $\neg(\forall x_i A) \vdash \exists x_i(\neg A)$	(6)(7)(Tr)

(ii)的形式证明如下所示。

(1) $\forall x_i A \vdash \forall x_i A$	$(\in)$
(2) $\forall x_i A \vdash A$	(1)$(\forall -)$
(3) $\neg A \vdash \neg \forall x_i A$	(2)(例 3.2.6 的(ii))
(4) $\exists x_i(\neg A) \vdash \neg(\forall x_i A)$	(3)$(\exists -)$

■

例 5.1.7 反映了命题 4.4.2 第(1)组中的第一个永真等价式。

【例 5.1.8】 给出下列各形式推理关系的形式证明，其中 x_i 不在 B 中自由出现：

(i) $\forall x_i(A\to B) \vdash \exists x_i A \to B$；

(ii) $\exists x_i A \to B \vdash \forall x_i(A\to B)$；

(iii) $\forall x_i(B\to A) \vdash B\to \forall x_i A$；

(iv) $B\to \forall x_i A \vdash \forall x_i(B\to A)$。

解：(i)的形式证明如下所示。

(1) $\forall x_i(A\to B), A \vdash \forall x_i(A\to B)$	$(\in)$
(2) $\forall x_i(A\to B), A \vdash A$	$(\in)$
(3) $\forall x_i(A\to B), A \vdash A\to B$	(1)$(\forall -)$
(4) $\forall x_i(A\to B), A \vdash B$	(2)(3)$(\to -)$
(5) $\forall x_i(A\to B), \exists x_i A \vdash B$	(4)$(\exists -)$
(6) $\forall x_i(A\to B) \vdash \exists x_i A\to B$	(5)$(\to +)$

(ii)的形式证明如下所示。

(1) $\exists x_i A\to B, A \vdash \exists x_i A\to B$	$(\in)$
(2) $\exists x_i A\to B, A \vdash A$	$(\in)$

(3) $\exists x_i A \to B, A \vdash \exists x_i A$ (2)($\exists$+)

(4) $\exists x_i A \to B, A \vdash B$ (1)(3)($\to$−)

(5) $\exists x_i A \to B \vdash A \to B$ (4)($\to$+)

(6) $\exists x_i A \to B \vdash \forall x_i (A \to B)$ (5)($\forall$+)

(iii)的形式证明如下所示。

(1) $\forall x_i (B \to A), B \vdash \forall x_i (B \to A)$ ($\in$)

(2) $\forall x_i (B \to A), B \vdash B$ ($\in$)

(3) $\forall x_i (B \to A), B \vdash B \to A$ (1)($\forall$−)

(4) $\forall x_i (B \to A), B \vdash A$ (2)(3)($\to$−)

(5) $\forall x_i (B \to A), B \vdash \forall x_i A$ (4)($\forall$+)

(6) $\forall x_i (B \to A) \vdash B \to \forall x_i A$ (5)($\to$+)

(iv)的形式证明如下所示。

(1) $B \to \forall x_i A, B \vdash B \to \forall x_i A$ ($\in$)

(2) $B \to \forall x_i A, B \vdash B$ ($\in$)

(3) $B \to \forall x_i A, B \vdash \forall x_i A$ (1)(2)($\to$−)

(4) $B \to \forall x_i A, B \vdash A$ (3)($\forall$−)

(5) $B \to \forall x_i A \vdash B \to A$ (4)($\to$+)

(6) $B \to \forall x_i A \vdash \forall x_j (B \to A)$ (5)($\forall$+)

■

例 5.1.8 反映了命题 4.4.5 第(2)组中的第三个和第四个永真等价式。

【命题 5.1.1】 对于合式公式 A、A^*、B、B^*，如果有 $A \vdash A^*$、$A^* \vdash A$、$B \vdash B^*$、$B^* \vdash B$，那么有如下的形式推理关系：

(i) $\neg A \vdash \neg A^*$，$\neg A^* \vdash \neg A$；

(ii) $A \wedge B \vdash A^* \wedge B^*$，$A^* \wedge B^* \vdash A \wedge B$；

(iii) $A \vee B \vdash A^* \vee B^*$，$A^* \vee B^* \vdash A \vee B$；

(iv) $A \to B \vdash A^* \to B^*$，$A^* \to B^* \vdash A \to B$；

(v) $A \leftrightarrow B \vdash A^* \leftrightarrow B^*$，$A^* \leftrightarrow B^* \vdash A \leftrightarrow B$；

(vi) $\forall x_i A \vdash \forall x_i A^*$，$\forall x_i A^* \vdash \forall x_i A$；

(vii) $\exists x_i A \vdash \exists x_i A^*$，$\exists x_i A^* \vdash \exists x_i A$。

证明：只证明(i)、(ii)、(vi)，其他可以类似验证。

对于(i)，其一个方向的形式证明如下所示。

(1) $\neg A, A^* \vdash \neg A$ ($\in$)

(2) $\neg A, A^* \vdash A^*$　　(∈)

(3) $A^* \vdash A$　　(已知)

(4) $\neg A, A^* \vdash A$　　(2)(3)(Tr)

(5) $\neg A \vdash \neg A^*$　　(1)(4)(命题 3.2.3)

由于 A 和 A^* 在形式推理关系上的对称性，另一个方向的形式证明只需将 A 与 A^* 互换即可。类似地，下面仅给出一个方向上的形式证明。

对于(ii)，其一个方向的形式证明如下所示。

(1) $A \wedge B \vdash A \wedge B$　　(∈)

(2) $A \wedge B \vdash A$　　($\wedge -$)

(3) $A \wedge B \vdash B$　　($\wedge -$)

(4) $A \vdash A^*$　　(已知)

(5) $B \vdash B^*$　　(已知)

(6) $A \wedge B \vdash A^*$　　(2)(4)(Tr)

(7) $A \wedge B \vdash B^*$　　(3)(5)(Tr)

(8) $A \wedge B \vdash A^* \wedge B^*$　　(6)(7)($\wedge +$)

对于(vi)，其一个方向的形式证明如下所示。

(1) $\forall x_i A \vdash \forall x_i A$　　(∈)

(2) $\forall x_i A \vdash A$　　(1)($\forall -$)

(3) $A \vdash A^*$　　(已知)

(4) $\forall x_i A \vdash A^*$　　(2)(3)(Tr)

(5) $\forall x_i A \vdash \forall x_i A^*$　　(4)($\forall +$)

■

命题 5.1.1 是命题 4.5.1 在形式系统 K 中语法上的反映。

【命题 5.1.2】 对于合式公式 A 和 A^*，如果有 $A \vdash A^*$ 且 $A^* \vdash A$，将合式公式 B 中所含有 A 的一处或多处出现换成 A^* 之后得到合式公式 B^*，则有 $B \vdash B^*$ 且 $B^* \vdash B$。

证明： 该命题是关于合式公式的性质的表述，相对于命题 4.5.2，合式公式的性质由语义上的永真等价变为语法上的两个方向的形式推理关系。因此，采用合式公式的结构归纳法证明该命题时，只需要将命题 4.5.2 中的永真等价换成两个方向的形式推理关系。

■

命题 5.1.2 是命题 4.5.2 在形式系统 K 中语法上的反映。

本节给出了第4章中的永真蕴涵式和永真等价式的形式证明，并且也得到了上一章的一些命题在形式系统 K 中的反映，因此，类似于命题4.5.4中的证明方法也可以得到命题4.5.4在 K 中的反映。

【命题5.1.3】 对于任意的合式公式 A，均存在合式公式 A^*，满足 A^* 为前束范式，且有 $A\vdash A^*$，$A^*\vdash A$。

5.2 公理推理系统

在4.6节中曾提到过，逻辑后承关系 $B_1,B_2,\cdots,B_n\vDash A$ 成立，当且仅当 $\varnothing\vDash B_1\to(B_2\to\cdots\to(B_n\to A)\cdots)$。可见，类似于命题逻辑那里，当 Γ 为有限集时，总可以把逻辑后承关系转化为与之等价的永真蕴涵关系去表述。即使在 K 中，形式推理关系 $B_1,B_2,\cdots,B_n\vdash A$ 通过使用 n 次(→+)变形规则，也可以将其转化为 $\varnothing\vdash B_1\to(B_2\to\cdots\to(B_n\to A)\cdots)$。因此，类似于命题逻辑那里，也可以引入以永真蕴涵式为讨论对象的谓词逻辑公理推理系统。下面选择其中一个进行介绍，记其为 K^*。

形式系统 K^* 所使用的非逻辑符号与 K 相同，而所使用的逻辑符号与 K 不同，K^* 所使用的逻辑符号中，在连接词部分仅使用了符号 $\neg$，$\to$，量词部分仅使用了符号 $\forall$；含有连接词符号 $\wedge$，$\vee$，$\leftrightarrow$ 的合式公式可以用符号 $\neg$，$\to$ 表示，关于这点已经在形式系统 L^* 谈到过，而含有量词符号 $\exists$ 的合式公式 $\exists x_iA$ 也可以视为 $\neg\forall x_i(\neg A)$ 的缩写。由于所使用的符号有所减少，K^* 中合式公式的定义需要修改为如下所示：

(1) 原子合式公式是合式公式；

(2) 若 A、B 是合式公式，则 $(\neg A)$ 和 $(A\to B)$ 也是合式公式；

(3) 若 A 是合式公式，则 $(\forall x_i)A$ 也是合式公式，其中 x_i 为任意的个体词变元。此外，无其他的合式公式。

相应地，K^* 中关于合式公式的结构归纳法也要做一些修改。为了证明 K^* 中所有的合式公式均具有性质 P，只需要证明如下三点：①所有的原子合式公式具有性质 P；②若合式公式 A 和 B 具有性质 P，则 $(\neg A)$ 和 $(A\to B)$ 也具有性质 P；③若 A 具有性质 P，则对任意的个体词变元 x_i，有 $(\forall x_i)A$ 也具有性质 P。类似地，K^* 中关于合式公式的唯一可读性以及合式公式的层次也都需要改变为与现有的定义相匹配。

形式系统 K^* 的形式推理部分如下所示(其中 A、B、C 为合式公式)：

公理集合：

$(\to_1)$：$A\to(B\to A)$；

$(\to_2)$：$(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$；

$(\to\neg)$：$(\neg A\to\neg B)\to(B\to A)$；

$(\forall_1)$：$\forall x_i A\to A^t_{x_i}$，其中项 t 对 x_i 在 A 中代入自由；

$(\forall_2)$：$A\to\forall x_i A$，其中 x_i 不在 A 中自由出现；

$(\forall_3)$：$\forall x_i(A\to B)\to(\forall x_i A\to\forall x_i B)$；

$(\forall_G)$：$\forall x_{i_1}\forall x_{i_2}\cdots\forall x_{i_n}A$，其中 A 具有$(\to_1)$、$(\to_2)$、$(\to\neg)$、$(\forall_1)$、$(\forall_2)$、$(\forall_3)$中合式公式的形式。

推理规则集合：

(MP)：由 A 和$(A\to B)$，可以得出 B。

可以看出，相对于形式系统 L^*，形式系统 K^* 在推理规则上是相同的，在公理集合上增加了四条公理模式。根据命题 4.4.1 可知，前三条公理都是永真式；根据命题 4.4.2 第(5)组、命题 4.4.5 第(1)组、命题 4.4.8 可知，公理$(\forall_1)$、$(\forall_2)$、$(\forall_3)$都是永真式；根据命题 4.6.2 可知，公理$(\forall_G)$也是永真式。可见，形式系统 K^* 的所有公理都是永真式。

形式系统 K^* 中“定理”和“形式证明”的定义在表述上与形式系统 L^* 中它们的定义一样，无非是现在的合式公式为 K^* 中的合式公式，公理和规则为 K^* 中的公理和规则。类似地，K^* 中定理的定义也是以归纳的方式给出的，所以也有相伴随的关于定理的结构归纳法。

类似于可以根据形式系统 L 中的形式推理关系 $\Gamma\vdash B$ 得到形式系统 K 中的形式推理关系 $\Gamma^*\vdash B^*$，由于形式系统 K^* 与形式系统 L^* 在推理规则上是相同的，K^* 的公理集合包含了 L^* 的全部公理，若 B 是 L^* 中的一个定理，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 B 在 L^* 中的形式证明，则对于 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 中出现的所有命题变元符号 $p_1,p_2,\cdots,p_m$，将它们在形式证明中的每一处出现都依次换成 K^* 中的合式公式 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 后，所得到的合式公式序列 $B_1^*,B_2^*,\cdots,B_n^*$ 为 K^* 中的形式证明，合式公式 $B^*=B_n^*$ 为 K^* 中的定理。如果 A^* 为谓词逻辑中的重言式，根据命题 4.4.2 可知，A^* 是将命题逻辑中重言式 A 所含有的命题符号换成谓词逻辑中的合式公式所得到的；根据 L^* 的完备性定理可知，A 为 L^* 中的定理；再结合前面的说明可知，A^* 为 K^* 中的定理。

【例 5.2.1】 证明下列各合式公式为 K^* 中的定理：

(i) $A^t_{x_i}\to\exists x_i A$，其中项 t 对 x_i 在 A 中代入自由；

(ii) $\forall x_i A \to \exists x_i A$。

证明： 对于(i)，其形式证明如下。

(1)	$\forall x_i(\neg A) \to \neg(A^t_{x_i})$	($\forall_1$)
(2)	$(\forall x_i(\neg A) \to \neg(A^t_{x_i})) \to (A^t_{x_i} \to \neg\forall x_i(\neg A))$	(重言式)
(3)	$A^t_{x_i} \to \neg\forall x_i(\neg A)$	(1)(2)(MP)

根据已知中项 t 对 x_i 在 A 中代入自由，可知项 t 对 x_i 在 $\neg A$ 中也代入自由，且有 $(\neg A)^t_{x_i} = \neg(A^t_{x_i})$，再根据公理($\forall_1$)，得到了步骤(1)。步骤(2)是利用了合式公式$(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$为重言式的结果。由于$\exists x_i A$ 视为是$\neg\forall x_i(\neg A)$，所以步骤(3)即为 $A^t_{x_i} \to \exists x_i A$。

对于(ii)，其形式证明如下。

(1)	$\forall x_i A \to A$	($\forall_1$)
(2)	$(\forall x_i A \to A) \to ((A \to \exists x_i A) \to (\forall x_i A \to \exists x_i A))$	(重言式)
(3)	$(A \to \exists x_i A) \to (\forall x_i A \to \exists x_i A)$	(1)(2)(MP)
(4)	$A \to \exists x_i A$	(i)
(5)	$\forall x_i A \to \exists x_i A$	(3)(4)(MP)

其中，步骤(2)利用了合式公式$(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$为重言式的结果；步骤(4)利用了(i)的结果，项 x_i 对 x_i 在 A 中代入自由。

■

类似于形式系统 L^*，有必要在形式系统 K^* 中也引入从 Γ 到 B 的形式推演 $\Gamma \vdash B$，其定义在表述上与 L^* 中它们的定义一样，无非是现在的合式公式为 K^* 中的合式公式，公理和规则为 K^* 中的公理和规则。类似地，K^* 中也有相伴随的关于“从 Γ 可推演出的结论”的结构归纳法。由于 K^* 中的形式证明可以看作从空集的形式推演，采用记号 $\vdash B$ 表明 B 为 K^* 中的定理。

对于 K^* 中的形式推演，显然也有：若 $A \in \Gamma$，则有 $\Gamma \vdash A$；若 $\Gamma_1 \vdash B$，则对于任意满足 $\Gamma_1 \subset \Gamma$ 的 Γ，有 $\Gamma \vdash B$。此外，若 $\Gamma \vdash \Gamma_1$ 且 $\Gamma_1 \vdash B$，则存在$\{A_1, A_2, \cdots, A_n\} \subset \Gamma_1$，满足 $A_1, A_2, \cdots, A_n \vdash B$，因此，根据命题 3.4.5 可知 $\Gamma \vdash B$。类似地，K^* 中也有推演定理。

【命题 5.2.1】 对于形式系统 K^* 中任意的合式公式集合 Γ 以及合式公式 A、B，如果 $\Gamma, A \vdash B$，那么 $\Gamma \vdash A \to B$；反之亦然。

证明： 将命题 3.4.1 和命题 3.4.2 证明中的合式公式看作 K^* 中的合式公式即可。

■

不仅是推演定理，形式系统 L^* 中关于形式推演的很多结论在形式系统 K^* 中也都是成立的。比如，命题 3.4.3～命题 3.4.6 在形式系统 K^* 中也是成立的。还有 3.4 节中的一些例题，它们描述的仅涉及连接词的性质，因而也都可以作为导出变形规则在 K^* 中加以使用。在 K^* 中应该重点关注涉及量词的性质。

【命题 5.2.2】 对于形式系统 K^* 中任意的合式公式集合 Γ 以及合式公式 B，若 $\Gamma\vdash B$，且 x_i 不在 Γ 的任意合式公式中自由出现，则 $\Gamma\vdash\forall x_iB$。

证明： 该命题表明，对于任意满足 $\Gamma\vdash B$ 的合式公式 B，且 x_i 不在 Γ 的任意合式公式中自由出现，则 B 具有性质 P：$\Gamma\vdash\forall x_iB$。采用关于 K^* 中"从 Γ 可推演出的结论"的结构归纳法：

(i) 若 B 为公理，则根据($\forall_G$)可知 $\forall x_iB$ 也是公理，因此有 $\Gamma\vdash\forall x_iB$。

(ii) 若 $B\in\Gamma$，由于 x_i 不在 B 中自由出现，下列步骤是从 Γ 到 $\forall x_iB$ 的一个推演：

(1) B	(前提)
(2) $B\to\forall x_iB$	($\forall_2$)
(3) $\forall x_iB$	(1)(2)(MP)

因此，也有 $\Gamma\vdash\forall x_iB$。

(iii) 若 $\Gamma\vdash A$，$\Gamma\vdash A\to B$，且 A 和($A\to B$)满足性质 P，即 $\Gamma\vdash\forall x_iA$，以及 $\Gamma\vdash\forall x_i(A\to B)$，其中 x_i 不在 Γ 的任意合式公式中自由出现，则利用从 Γ 到 $\forall x_iA$ 的推演以及从 Γ 到 $\forall x_i(A\to B)$ 的推演，可以构造出一个从 Γ 到 $\forall x_iB$ 的推演。具体如下所示：

(1) ……	
(⋮) ⋮	
(n) $\forall x_iA$	
($n+1$) ……	
(⋮) ⋮	
(m) $\forall x_i(A\to B)$	
($m+1$) $\forall x_i(A\to B)\to(\forall x_iA\to\forall x_iB)$	($\forall_3$)
($m+2$) $\forall x_iA\to\forall x_iB$	(m)($m+1$)(MP)
($m+3$) $\forall x_iB$	(n)($m+2$)(MP)

其中，前 n 步是从 Γ 到 $\forall x_iA$ 的推演，从第 $n+1$ 步到第 m 步是从 Γ 到 $\forall x_i(A\to B)$ 的推演。

根据 K^* 中"从 Γ 可推演出的结论"的结构归纳法,命题得证。

■

从命题 5.2.2 可以看出,在使用它时很像公理($\forall_G$),特别地,由 $\vdash B$ 可以得到 $\vdash \forall x_i B$,即在已经得出合式公式 B 为定理的基础上可以直接得出 $\forall x_i B$ 也为定理。

【例 5.2.2】 证明 K^* 中下列的推演关系,其中 x_i 不在 B 中自由出现:

(i) $\forall x_i(B \to A) \vdash B \to \forall x_i A$;

(ii) $B \to \forall x_i A \vdash \forall x_i(B \to A)$。

证明: 对于(i),构造从$\{\forall x_i(B \to A), B\}$到 $\forall x_i A$ 的推演如下所示。

(1) $\forall x_i(B \to A)$	(前提)
(2) B	(前提)
(3) $\forall x_i(B \to A) \to (\forall x_i B \to \forall x_i A)$	($\forall_3$)
(4) $\forall x_i B \to \forall x_i A$	(2)(3)(MP)
(5) $B \to \forall x_i B$	($\forall_2$)
(6) $\forall x_i B$	(2)(5)(MP)
(7) $\forall x_i A$	(4)(6)(MP)

再由推演定理可得 $\forall x_i(B \to A) \vdash B \to \forall x_i A$。

对于(ii),构造从$\{B \to \forall x_i A, B\}$到 A 的推演如下所示。

(1) $B \to \forall x_i A$	(前提)
(2) B	(前提)
(3) $\forall x_i A$	(1)(2)(MP)
(4) $\forall x_i A \to A$	($\forall_1$)
(5) A	(3)(4)(MP)

根据推演定理可得 $B \to \forall x_i A \vdash B \to A$;进一步,由于 x_i 不在 $B \to \forall x_i A$ 中自由出现,因此,根据命题 5.2.2 可得 $B \to \forall x_i A \vdash \forall x_i(B \to A)$。

■

【命题 5.2.3】 对于形式系统 K^* 中任意的合式公式集合 Γ 以及合式公式 A、B,若 $\Gamma, A \vdash B$,且 x_i 不在 $\Gamma \cup \{B\}$的任意合式公式中自由出现,则有 $\Gamma, \exists x_i A \vdash B$。

证明: 根据已知 $\Gamma, A \vdash B$,应用推演定理可得 $\Gamma \vdash A \to B$。根据例 3.4.8 中的 $A \to B \vdash \neg B \to \neg A$,再结合命题 3.4.5,可得 $\Gamma \vdash \neg B \to \neg A$,进而应用推演定理,有 $\Gamma, \neg B \vdash \neg A$。由于 x_i 不在 $\Gamma \cup \{B\}$的任意合式公式中自由出现,则根据命题 5.2.2 可得 $\Gamma, \neg B \vdash \forall x_i(\neg A)$。上述从 $\Gamma, A \vdash B$ 得到 $\Gamma, \neg B \vdash \neg A$ 的过程

仅涉及连接词的性质，因而采用类似的步骤，可以从 $\Gamma,\neg B\vdash\forall x_i(\neg A)$ 得到 $\Gamma,\neg(\forall x_i(\neg A))\vdash\neg\neg B$。再利用 $\neg\neg B\vdash B$，并将 $\exists x_iA$ 视为 $\neg\forall x_i(\neg A)$，可得 $\Gamma,\exists x_iA\vdash B$。

■

【命题 5.2.4】 对于形式系统 K^* 中任意的合式公式集合 Γ 以及合式公式 A、B，若 $\Gamma,A\vdash B$，且 x_i 不在 Γ 的任意合式公式中自由出现，则有 $\Gamma,\forall x_iA\vdash\forall x_iB$，且 $\Gamma,\exists x_iA\vdash\exists x_iB$。

证明： 这里仅给出 $\Gamma,\forall x_iA\vdash\forall x_iB$ 的证明，$\Gamma,\exists x_iA\vdash\exists x_iB$ 类似可证。

根据例 3.4.4 可得 $\forall x_iA\to A,A\to B\vdash\forall x_iA\to B$，对其应用推演定理可得 $\forall x_iA\to A\vdash(A\to B)\to(\forall x_iA\to B)$。由于 $\forall x_iA\to A$ 为公理，可得 $\vdash(A\to B)\to(\forall x_iA\to B)$，进而应用推演定理可得 $A\to B\vdash\forall x_iA\to B$。对已知的 $\Gamma,A\vdash B$ 应用推演定理可得 $\Gamma\vdash A\to B$，进而再结合命题 3.4.5 可得 $\Gamma\vdash\forall x_iA\to B$，再次应用推演定理可得 $\Gamma,\forall x_iA\vdash B$。由于 x_i 不在 Γ 的任意合式公式中自由出现，根据命题 5.2.2 可得 $\Gamma,\forall x_iA\vdash\forall x_iB$。

■

命题 5.2.4 的特殊情况是，当 Γ 为空集时，若 $A\vdash B$，则有 $\forall x_iA\vdash\forall x_iB$，且 $\exists x_iA\vdash\exists x_iB$。它是例 4.6.2 在语法上的反映。

【例 5.2.3】 证明 K^* 中下列的推演关系：

(i) $\forall x_i\forall x_jA\vdash\forall x_j\forall x_iA$；

(ii) $\forall x_j\forall x_iA\vdash\forall x_i\forall x_jA$。

证明： 对于(i)，根据公理($\forall_1$)可知，$\forall x_iA\to A$ 为公理，故有 $\vdash\forall x_jA\to A$。对其应用推演定理可得 $\forall x_jA\vdash A$。根据命题 5.2.4 可得 $\forall x_i\forall x_jA\vdash\forall x_iA$。由于 x_j 不在 $\forall x_i\forall x_jA$ 中自由出现，再根据命题 5.2.2 可得 $\forall x_i\forall x_jA\vdash\forall x_j\forall x_iA$。

对于(ii)，只需要将(i)中 x_i 和 x_j 互换即可。

■

【例 5.2.4】 证明 K^* 中下列的推演关系：

(i) $\forall x_i(A\to B)\vdash\forall x_iA\to\forall x_iB$；

(ii) $\forall x_i(A\to B)\vdash\exists x_iA\to\exists x_iB$。

证明： 对于(i)，构造从$\{\forall x_i(A\to B),A\}$到 B 的推演如下所示。

(1) $\forall x_i(A\to B)$　　　　(前提)

(2) A　　　　(前提)

(3) $\forall x_i(A\to B)\to(A\to B)$ $(\forall_1)$

(4) $A\to B$ (1)(3)(MP)

(5) B (2)(4)(MP)

因此,有 $\forall x_i(A\to B), A\vdash B$。由于 x_i 不在 $\forall x_i(A\to B)$ 自由出现,根据命题 5.2.4 可得 $\forall x_i(A\to B), \forall x_iA\vdash\forall x_iB$。再根据推演定理可得 $\forall x_i(A\to B)\vdash\forall x_iA\to\forall x_iB$。

对于(ii),根据(i)中已得出的 $\forall x_i(A\to B), A\vdash B$,同样是根据命题 5.2.4 可得 $\forall x_i(A\to B), \exists x_iA\vdash\exists x_iB$。再根据推演定理可得 $\forall x_i(A\to B)\vdash\exists x_iA\to\exists x_iB$。

■

【例 5.2.5】 证明 K^* 中下列的推演关系:

(i) $\forall x_iA\lor\forall x_iB\vdash\forall x_i(A\lor B)$;

(ii) $\exists x_i(A\land B)\vdash\exists x_iA\land\exists x_iB$。

证明: 对于(i),根据重言式 $A\to(A\lor B)$ 和 $B\to(A\lor B)$ 可得 $A\vdash A\lor B$ 和 $B\vdash A\lor B$。利用命题 5.2.4 可得 $\forall x_iA\vdash\forall x_i(A\lor B)$ 和 $\forall x_iB\vdash\forall x_i(A\lor B)$。根据第 3 章中的($\lor-$)变形规则可知 $\forall x_iA\lor\forall x_iB\vdash\forall x_i(A\lor B)$。

对于(ii),根据重言式 $(A\land B)\to A$ 和 $(A\land B)\to B$ 可得 $A\land B\vdash A$ 和 $A\land B\vdash B$。利用命题 5.2.4 可得 $\exists x_i(A\land B)\vdash\exists x_iA$ 和 $\exists x_i(A\land B)\vdash\exists x_iB$。根据第 3 章中的($\land+$)变形规则可知 $\exists x_i(A\land B)\vdash\exists x_iA\land\exists x_iB$。

■

在例 5.2.5 的证明中利用了 L 中的变形规则,这是 L 与 L^* 是等价的缘故,而 L^* 中的推演关系又可以用于 K^* 中;当然,也可以在 K^* 中导出这些变形规则。

【例 5.2.6】 证明 K^* 中下列的推演关系,其中 x_i 不在 B 中自由出现:

(i) $\forall x_i(A\to B)\vdash\exists x_iA\to B$;

(ii) $\exists x_iA\to B\vdash\forall x_i(A\to B)$。

证明: 对于(i),由于 x_i 不在 $\forall x_i(A\to B)$ 和 B 中自由出现,对例 5.2.4 证明中已得出的 $\forall x_i(A\to B), A\vdash B$,利用命题 5.2.3 可得 $\forall x_i(A\to B), \exists x_iA\vdash B$,因而利用推演定理可得 $\forall x_i(A\to B)\vdash\exists x_iA\to B$。

对于(ii),由于 $\exists x_iA\to B\vdash\exists x_iA\to B$,可得 $\exists x_iA\to B, A\vdash\exists x_iA\to B$。根据例 5.2.1 的(i),利用推演定理可得 $A\vdash\exists x_iA$,进而有 $\exists x_iA\to B, A\vdash\exists x_iA$。根据第 3 章中的($\to-$)变形规则可得 $\exists x_iA\to B, A\vdash B$。利用推演定理可得 $\exists x_iA\to B\vdash A\to B$。由于 x_i 不在 $\exists x_i(A\to B)$ 中自由出现,利用命题 5.2.2 可得

$\exists x_i A \to B \vdash \forall x_i (A \to B)$。

■

【例 5.2.7】 证明 K^* 中下列的推演关系，其中 x_j 对 x_i 在 A 中代入自由，且 x_j 不在 A 中自由出现：

(i) $\forall x_i A \vdash \forall x_j A_{x_i}^{x_j}$；

(ii) $\forall x_j A_{x_i}^{x_j} \vdash \forall x_i A$。

证明：对于(i)，构造从$\{\forall x_i A\}$到 $A_{x_i}^{x_j}$ 的推演如下所示。

(1) $\forall x_i A$ (前提)

(2) $\forall x_i A \to A_{x_i}^{x_j}$ $(\forall_1)$

(3) $A_{x_i}^{x_j}$ (1)(2)(MP)

因而有 $\forall x_i A \vdash A_{x_i}^{x_j}$。由于 x_j 不在 A 中自由出现，也不会在 $\forall x_i A$ 中自由出现，根据命题 5.2.2 可得 $\forall x_i A \vdash \forall x_j A_{x_i}^{x_j}$。

对于(ii)类似可证。

■

也可以在形式系统 K^* 中得到类似于命题 5.1.2 的结果，即对于合式公式 A 和 A^*，如果有 $A \vdash A^*$ 且 $A^* \vdash A$；将合式公式 B 中所含有 A 的一处或多处出现换成 A^* 之后得到合式公式 B^*，则有 $B \vdash B^*$ 且 $B^* \vdash B$。进而，也可以在形式系统 K^* 中得出类似于命题 5.1.3 的结果，即对于任意的合式公式 A，均存在合式公式 A^*，满足 A^* 为前束范式，且有 $A \vdash A^*$，$A^* \vdash A$。这里不再赘述。

5.3 自然推理系统与公理推理系统的等价性

类似于命题逻辑形式系统 L 与形式系统 L^* 的等价性，前面两节的各种结果说明谓词逻辑形式系统 K 与形式系统 K^* 也是等价的。本节将 K^* 中的从 Γ 到 B 的推演“$\Gamma \vdash B$”用记号“$\Gamma \Vdash B$”表示，以与 K 中的形式推理关系 $\Gamma \vdash B$ 加以区分。此外，对于 K 中含有连接词符号 $\wedge$、$\vee$、$\leftrightarrow$的合式公式采用 3.5 节的处理方法，可以将它们视为仅用 $\neg$、$\to$表示的合式公式；对于 K^* 中含有量词符号 $\exists$ 的合式公式 $\exists x_i A$，将其视为 $\neg \forall x_i (\neg A)$的缩写。通过这样的一个过程就可以将 K 中的合式公式视为 K^* 中的合式公式。

【命题 5.3.1】 对于形式系统 K^* 中任意的合式公式集合 $\Gamma = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$，以及任意的公理 D，它们在形式系统 K 中均满足 $\Gamma \vdash D$。

证明：K^* 中的公理 D 包括：$(\to_1)$、$(\to_2)$、$(\to\neg)$，$(\forall_1)$、$(\forall_2)$、$(\forall_3)$、$(\forall_G)$七条。可以证明它们均满足$\varnothing\vdash D$，其中前三条$(\to_1)$、$(\to_2)$、$(\to\neg)$已经由命题 3.5.1 得出，下面给出后四条的证明。

对于公理$(\forall_1)$，D 为$\forall x_i A\to A_{x_i}^t$，其中项 t 对 x_i 在 A 中代入自由。有如下形式证明：

(1) $\forall x_i A\vdash\forall x_i A$　　　　$(\in)$

(2) $\forall x_i A\vdash A_{x_i}^t$　　　　(1)$(\forall -)$

(3) $\varnothing\vdash\forall x_i A\to A_{x_i}^t$　　　　(2)$(\to +)$

对于公理$(\forall_2)$，D 为 $A\to\forall x_i A$，其中 x_i 不在 A 中自由出现。有如下形式证明：

(1) $A\vdash A$　　　　$(\in)$

(2) $A\vdash\forall x_i A$　　　　(1)$(\forall +)$

(3) $\varnothing\vdash A\to\forall x_i A$　　　　(2)$(\to +)$

对于公理$(\forall_3)$，D 为$\forall x_i(A\to B)\to(\forall x_i A\to\forall x_i B)$。有如下形式证明：

(1) $\forall x_i(A\to B)\vdash\forall x_i A\to\forall x_i B$　　　　(例 5.1.1(i))

(2) $\varnothing\vdash\forall x_i(A\to B)\to(\forall x_i A\to\forall x_i B)$　　　　(2)$(\to +)$

对于公理$(\forall_G)$，D 为$\forall x_{i_1}\forall x_{i_2}\cdots\forall x_{i_n}A$，其中 A 具有$(\to_1)$、$(\to_2)$、$(\to\neg)$、$(\forall_1)$、$(\forall_2)$、$(\forall_3)$中合式公式的形式。前面已经得出$\varnothing\vdash A$，对其利用 n 次$(\forall +)$规则，可得$\varnothing\vdash\forall x_{i_1}\forall x_{i_2}\cdots\forall x_{i_n}A$。

可见，对于任意 K^* 中的公理 D，当把它们看作 K 中的合式公式后，均可在 K 中得出$\varnothing\vdash D$。然后，对$\varnothing\vdash D$ 在 K 中使用命题 3.2.1 的(P+)规则 n 次，可得$\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}\vdash D$，即 $\Gamma\vdash D$。

■

【命题 5.3.2】 对于形式系统 K^* 中任意的合式公式集合 $\Gamma=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$以及合式公式 B，如果 $\Gamma\Vdash B$，那么 $\Gamma\vdash B$。

证明：此命题即为，在 K^* 中任意给定 $\Gamma=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$，对于所有满足 $\Gamma\Vdash B$ 的合式公式 B，均具有性质 P：$\Gamma\vdash B$。在 K^* 中采用关于“从 Γ 可推演出的结论”的结构归纳法去证明该命题。

(i) 若 B 为 K^* 中的一条公理，则由命题 5.3.1 可知，$\Gamma\vdash B$。

(ii) 若 B 为 Γ 中的任一合式公式，即 $B\in\Gamma$，则由 K 中的$(\in)$规则，有 $\Gamma\vdash B$。

(iii) 若 $\Gamma\Vdash C$，$\Gamma\Vdash C\to B$，且 C 和$(C\to B)$满足性质 P，即 $\Gamma\vdash C$，以及 $\Gamma\vdash C\to B$，则可以构造如下在形式系统 K 中的证明：

(1) $\Gamma\vdash C$ (已知)

(2) $\Gamma\vdash C\to B$ (已知)

(3) $\Gamma\vdash B$ (1)(2)($\to-$)

根据 K^* 中“从 Γ 可推演出的结论”的结构归纳法,命题得证。

■

【命题 5.3.3】 对于形式系统 K 中任意的合式公式集合 $\Gamma=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$以及合式公式 B,如果 $\Gamma\vdash B$,那么 $\Gamma\Vdash B$。

证明: 此命题即为,在 K 中任意给定 $\Gamma=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$,对于所有满足 $\Gamma\vdash B$ 的合式公式 B,均具有性质 P:$\Gamma\Vdash B$。在 K 中,采用关于形式推理关系的结构归纳法去证明该命题。

首先,若 $\Gamma\vdash B$ 是由第一条变形规则直接生成,则有 $B\in\Gamma$,此时,单个序列 B 就是从 Γ 到 B 的一个推演,因而有 $\Gamma\Vdash B$。

其次,依次验证,若 $\Gamma\vdash B$ 是由已有的形式推理关系应用第二条到第十五条变形规则中的某一条变形规则所生成,则当已有的形式推理关系具有该性质 P 时,所生成的形式推理关系 $\Gamma\vdash B$ 也具有该性质 P。其中从第二条到第十条变形规则的验证可以类比命题 3.5.3,只是此时的合式公式为 K 中的合式公式。下面验证后五条变形规则,即(P+)、($\forall-$)、($\forall+$)、($\exists-$)、($\exists+$)。

对于变形规则(P+),$\Gamma\vdash B$ 由 $\Gamma_1\vdash B$ 应用(P+)规则得出,其中 $\Gamma=\Gamma_1\cup\{A\}$。若 $\Gamma_1\Vdash B$,则由于 $\Gamma_1\subset\Gamma$,可得 $\Gamma\Vdash B$。

对于变形规则($\forall-$),$\Gamma\vdash B$ 由 $\Gamma\vdash\forall x_iA$ 应用($\forall-$)规则得出,其中 B 为 $A^t_{x_i}$,项 t 对 x_i 在 A 中代入自由。若 $\Gamma\Vdash\forall x_iA$,则根据 K^* 中公理($\forall_1$)可得 $\Vdash\forall x_iA\to A^t_{x_i}$,进而有 $\Gamma\Vdash\forall x_iA\to A^t_{x_i}$,再根据例 3.4.1(i)可得 $\Gamma\Vdash A^t_{x_i}$,此即为 $\Gamma\Vdash B$。

对于变形规则($\forall+$),$\Gamma\vdash B$ 由 $\Gamma\vdash A$ 应用($\forall+$)规则得出,其中 B 为 $\forall x_iA$,x_i 不在 Γ 的任意合式公式中自由出现。若 $\Gamma\Vdash A$,则根据命题 5.2.2 可知 $\Gamma\Vdash\forall x_iA$,此即为 $\Gamma\Vdash B$。

对于变形规则($\exists-$),$\Gamma\vdash B$ 由 $\Gamma_1,A\vdash B$ 应用($\exists-$)规则得出,其中 Γ 为 $\Gamma_1\cup\{\exists x_iA\}$,$x_i$ 不在 $\Gamma\cup\{B\}$的任意合式公式中自由出现。若 $\Gamma_1,A\Vdash B$,则根据命题 5.2.3 可知 $\Gamma_1,\exists x_iA\Vdash B$,此即为 $\Gamma\Vdash B$。

对于变形规则($\exists+$),$\Gamma\vdash B$ 由 $\Gamma\vdash A^t_{x_i}$ 应用($\exists+$)规则得出,其中 B 为 $\exists x_iA$,项 t 对 x_i 在 A 中代入自由。若 $\Gamma\Vdash A^t_{x_i}$,则根据例 5.2.1(i)可得$\Vdash A^t_{x_i}\to\exists x_iA$,进而有$\Gamma\Vdash A^t_{x_i}\to\exists x_iA$。因此,根据例 3.4.1(i)可得 $\Gamma\Vdash\exists x_iA$,此即为

$\Gamma \Vdash B$。

因而，由 K 中关于形式推理关系的结构归纳法可知，对于任意的 Γ 与 B，若 $\Gamma \vdash B$，则 $\Gamma \Vdash B$。

■

由命题 5.3.2 和命题 5.3.3 可知，$\Gamma \vdash B$ 当且仅当 $\Gamma \Vdash B$。特别地，当 $\Gamma = \varnothing$ 时，$\vdash B$ 当且仅当 $\Vdash B$。可见，形式系统 K 与形式系统 K^* 中的 $\Gamma \vdash B$ 从“形状上”看是完全一样的。考虑到公理推理系统相比于自然推理系统的精练性，所以，以公理推理系统 K^* 为主要讨论对象。

5.4 形式系统的完备性

在 5.1 节和 5.2 节得到了形式系统 K 和形式系统 K^* 内部的一些形式证明和形式推演结果，从这些结果可以看出，它们是第 4 章中所对应的谓词逻辑语义上的结果在语法上的反映。这些提示我们，在谓词逻辑中也存在着语法概念上的 $\vdash$ 和与语义概念上的 $\vDash$ 相互等价。因此，本节讨论谓词逻辑形式系统的一些整体上的性质，在总体思路上与讨论命题逻辑形式系统的整体性质是一样的。当然，由于谓词逻辑讨论的复杂性来源于量词的引入，在具体实施上需要引入一些新的概念和方法来处理涉及量词的地方。考虑到形式系统 K 与形式系统 K^* 在模仿、反映逻辑推理上是等价的，而 K^* 比 K 要精练，因此以 K^* 为对象进行谓词逻辑形式系统整体上的讨论。

【命题 5.4.1】 对于形式系统 K^* 中的合式公式 A，若 $\vdash A$，则 $\vDash A$。

证明： 此命题表明，K^* 中所有的定理均为永真式。采用关于 K^* 中定理的结构归纳法去证明：首先，在 5.2 节一开始介绍 K^* 的公理时就已给出过，K^* 中每一条公理都是永真式。其次，假设定理 A 和定理 $A \to B$ 都是永真式，则根据命题 4.6.1 的(1)可得 B 也是永真式。因而，根据 K^* 中关于定理的结构归纳法可知，K^* 中的每一个定理均为永真式。

■

命题 5.4.1 称为形式系统 K^* 的可靠性定理。命题 5.4.1 的逆命题证明要复杂很多。在讨论形式系统 L^* 的整体性质时采用的有些概念和方法可以借鉴来使用。

【定义 5.4.1】 对于一个谓词逻辑公理推理系统，若其中不存在合式公式 A，使得 A 和 $\neg A$ 均为该公理推理系统中的定理，则称该公理推理系统是一致的。

形式系统 K^* 是一致的。若 K^* 不一致，则说明存在一个合式公式 A，使得 A 和 $\neg A$ 均为 K^* 中的定理，即同时有 $\vdash A$ 和 $\vdash \neg A$。根据可靠性定理可得，$\vDash A$ 并且 $\vDash \neg A$，这说明了 A 和 $\neg A$ 在任何解释下都为真。这是不可能的，因为在同一个解释 $\langle \mathcal{S}, v\rangle$ 下，A 为真当且仅当 $\neg A$ 为假。

【定义 5.4.2】 在形式系统 K^* 的基础上，通过在其公理集合中增加一些合式公式作为新的公理，其他部分不变，这样所得到的形式系统称为 K^* 的扩张。

当形式系统中增加了新的合式公式作为公理后，($\forall_G$)公理中的合式公式 A 也应该包括新增加的合式公式。

【定义 5.4.3】 对于形式系统 K^* 的一个扩张 K_1^*，若对于每一个合式公式 A，A 或者 $\neg A$ 为 K_1^* 中的定理，则称该扩张 K_1^* 是完全的。

可以看出，关于形式系统 K^* 的扩张以及扩张的完全性，沿用了类似于形式系统 L^* 那里的表述。显然，形式系统 K^* 不是完全的，比如，原子合式公式 $F_1^1(x_1)$ 及其否定式 $\neg F_1^1(x_1)$ 都不是定理。由于形式系统 K^* 本身也是 K^* 的一个扩张，下面的讨论从 K^* 的扩张出发，使得结果更具一般性。

类似于形式系统 L^* 中关于形式推演的很多结论在形式系统 K^* 中也都是成立的一样，关于形式系统 L^* 整体性质的许多结论在形式系统 K^* 中也都是成立的。比如，在 K^* 中也有如下的命题。

【命题 5.4.2】 对于形式系统 K^* 的扩张 K_1^*，将其中的合式公式 $\neg A$ 加入 K_1^* 的公理集合后得到扩张 K_2^*，若 A 不是 K_1^* 的定理，则 K_2^* 一定是一致的；反之亦然。

证明： 对于充分性采用反证法。若 K_2^* 不是一致的，则存在合式公式 B 满足 $\vdash_{K_2^*} B$ 和 $\vdash_{K_2^*} \neg B$，这里在符号 $\vdash$ 标出了所在的形式系统。由于 K_2^* 是将合式公式 $\neg A$ 加入 K_1^* 的公理集合所得，有 K_1^* 中的推演 $\neg A \vdash_{K_1^*} B$ 和 $\neg A \vdash_{K_1^*} \neg B$。进而，根据命题 3.4.3 有 $\vdash_{K_1^*} A$，这与已知条件中 A 不是 K_1^* 的定理相矛盾，所以 K_2^* 一定是一致的。

对于必要性还是采用反证法。若 A 是 K_1^* 的定理，则 A 也是 K_2^* 的定理，即 $\vdash_{K_2^*} A$。同时，$\neg A$ 作为 K_2^* 的公理，有 $\vdash_{K_2^*} \neg A$，这就与已知中 K_2^* 是一致的相矛盾。

■

对比命题 5.4.2 和命题 3.6.6 可以看出，命题本身以及证明都完全类似。同样地，类比命题 3.6.7，对于形式系统 K^* 的一致扩张 $\widetilde{K}^*$，总可以通过向 $\widetilde{K}^*$ 的公

理集合中增加新的公理而获得同时满足一致性和完全性的 K^* 的扩张。具体方法：由于 K^* 的符号表集合是可列集，而合式公式又是有限个符号构成的符号串，K^* 中合式公式的集合也是可列集。因而，可以把 K^* 中所有的合式公式排成一个合式公式序列 $A_0, A_1, \cdots, A_n, \cdots$。令 $K_0^* = \widetilde{K}^*$，对于 $1 \leqslant n$，设已经得到了 K_{n-1}^*，那么可以按照方法得到 K_n^*：如果 $\vdash_{K_{n-1}^*} A_{n-1}$，就令 $K_n^* = K_{n-1}^*$；如果 $\nvdash_{K_{n-1}^*} A_{n-1}$，就将 $\neg A_{n-1}$ 加入 K_{n-1}^* 的公理集合中，从而得到 K_{n-1}^* 的一个扩张 K_n^*。对应着合式公式序列 $A_0, A_1, \cdots, A_n, \cdots$ 得到了 K^* 的扩张的序列 $K_0^*, K_1^*, \cdots, K_n^*, \cdots$。令 K_c^* 是将 $K_0^*, K_1^*, \cdots, K_n^*, \cdots$ 中所有公理集合的并作为 K_c^* 的公理集合所得到的，可见 K_c^* 为 K^* 的一个扩张。采用与命题 3.6.7 类似的方法可以证明 K_c^* 不仅是一致的，而且是完全的。

类似于命题 3.6.8，希望对于形式系统 K^* 可以得出结论：对于形式系统 K^* 的一致扩张 $\widetilde{K}^*$，存在一个解释 $\langle \mathcal{S}, v \rangle$，使得 $\widetilde{K}^*$ 中的每个定理都在该解释下为真。有了该结论，就可以很容易得到可靠性定理的逆命题。在该结论中需要找到这个适当的解释 $\langle \mathcal{S}, v \rangle$，使得满足一致性的形式系统 $\widetilde{K}^*$ 的每个定理都在该解释下为真。然而，仅仅通过将 $\widetilde{K}^*$ 扩张成满足完全性和一致性的形式系统是无法找到这个解释 $\langle \mathcal{S}, v \rangle$ 的。相对于形式系统 L^*，形式系统 K^* 中的量词增加了讨论的复杂度，需要在之前对于讨论 L^* 的方法基础上增加对于量词的处理方法。这种方法需要对形式系统 K^* 进行另一种“扩张”——对符号表集合进行扩张。具体地，在 K^* 的符号表集合中，增加一列个体词常元 $b_0, b_1, \cdots, b_n, \cdots$。这种语言上的扩张会在 K^* 中引入新的合式公式，进而会产生公理新的具体实例，如合式公式 $\forall x_1 F_1^1(x_1) \to F_1^1(b_1)$ 就是公理($\forall_1$)新的具体实例。这些新产生的情况也会体现在形式定理和形式推演上。由于形式系统的一致性是与形式定理和形式推演相关，希望进行符号表集合扩张后的形式系统不会改变一致性。对于合式公式 A，类比之前关于个体词变元 x_i 的代入 $A_{x_i}^t$，用符号 A_b^t 表示将 A 中所有出现的个体词常元 b 都换成项 t 后的合式公式。

【命题 5.4.3】 对于形式系统 K^*，在其符号表集合中加入一个个体词常元 b 得到形式系统 J，如果合式公式 A 为 J 的公理，x_i 为不在 A 中出现的个体词变元，那么 $A_b^{x_i}$ 为 K^* 的公理。

证明： 若 A 是 J 的关于连接词的前三条公理($\to_1$)、($\to_2$)、($\to\neg$)，那么 $A_b^{x_i}$ 还会是 K^* 中相同的公理。

若 A 为公理($\forall_1$)，即 A 为 $\forall x_j B \to B^t_{x_j}$，其中项 t 对 x_j 在 B 中代入自由，则 $A^{x_i}_b = (\forall x_j B)^{x_i}_b \to (B^t_{x_j})^{x_i}_b$。由于 x_i 不在 A 中出现，可得 $x_i \neq x_j$，而且 x_i 不会出现在合式公式 B 中和项 t 中，因而对于 $(\forall x_j B)^{x_i}_b$，有 $(\forall x_j B)^{x_i}_b = \forall x_j B^{x_i}_b$，对于 $(B^t_{x_j})^{x_i}_b$，$B^t_{x_j}$ 中可能出现 b 的地方一个是在 B 中，另一个是在 t 中，所以 $(B^t_{x_j})^{x_i}_b = (B^{x_i}_b)^{t^{x_i}_b}_{x_j}$。因此 $A^{x_i}_b = \forall x_j B^{x_i}_b \to (B^{x_i}_b)^{t^{x_i}_b}_{x_j}$。为了 $A^{x_i}_b$ 是 K^* 中的公理($\forall_1$)，还需要说明项 $t^{x_i}_b$ 对 x_j 在 $B^{x_i}_b$ 中代入自由。因为项 t 对 x_j 在 B 中代入自由，而 $t^{x_i}_b$ 至多比 t 在自由变元上多出一个 x_i，$B^{x_i}_b$ 也至多比 B 在自由变元上多出一个 x_i，而 $B^{x_i}_b$ 是将 B 中 b 出现的地方换成 x_i，个体词常元 b 是不会出现在量词之后的，所以 x_j 不会出现在 $B^{x_i}_b$ 中 $\forall x_i$ 的辖域内，可见 $t^{x_i}_b$ 对 x_j 在 $B^{x_i}_b$ 中代入自由。

若 A 为公理($\forall_2$)，即 A 为 $B \to \forall x_j B$，其中 x_j 不在 B 中自由出现，则 $A^{x_i}_b = B^{x_i}_b \to \forall x_j B^{x_i}_b$。因为 $x_i \neq x_j$，而且 x_i 不会出现在合式公式 A 中，所以 $B^{x_i}_b$ 至多比 B 在自由变元上多出一个 x_i。可见 x_j 不会在 $B^{x_i}_b$ 中自由出现，因而 $A^{x_i}_b$ 为 K^* 中的公理($\forall_2$)。

若 A 为公理($\forall_3$)，即 A 为 $\forall x_j(B \to C) \to (\forall x_j B \to \forall x_j C)$，则 $A^{x_i}_b$ 为 $\forall x_j(B^{x_i}_b \to C^{x_i}_b) \to (\forall x_j B^{x_i}_b \to \forall x_j C^{x_i}_b)$，此即为 K^* 中的公理($\forall_3$)。

若 A 为公理($\forall_G$)，即 A 为 $\forall x_{j_1} \forall x_{j_2} \cdots \forall x_{j_n} B$，其中 B 具有($\to_1$)、($\to_2$)、($\to\neg$)、($\forall_1$)、($\forall_2$)、($\forall_3$)中合式公式的形式，则 $A^{x_i}_b$ 为 $\forall x_{j_1} \forall x_{j_2} \cdots \forall x_{j_n} B^{x_i}_b$，由前面的情况已得出 $B^{x_i}_b$ 均为 K^* 中的公理，因此 $A^{x_i}_b$ 依然为 K^* 中的公理。

■

【命题 5.4.4】 对于形式系统 K^* 的扩张 $\widetilde{K}^*$，在其符号表集合中加入一个个体词常元 b 得到形式系统 J，若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 J 中的一个证明，则 $(A_1)^{x_i}_b$，$(A_2)^{x_i}_b, \cdots, (A_n)^{x_i}_b$ 是 $\widetilde{K}^*$ 中的一个证明，其中 x_i 为不在 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中出现的个体词变元。

证明： 对于任意的 $1 \leqslant k \leqslant n$，若 A_k 为 J 中的公理，则分为两种情况：①A_k 为 K^* 中的公理，那么根据命题 5.4.3 可知，$(A_k)^{x_i}_b$ 为 K^* 中的公理，当然也是 $\widetilde{K}^*$ 中的公理；②如果 A_k 是为了得到扩张 $\widetilde{K}^*$，在 K^* 的公理集合中增加的合式公式，此时它不是公理模式，而是 K^* 中一个具体的合式公式，所以 A_k 中不含有个体词常元 b，因此 $(A_k)^{x_i}_b = A_k$ 还是 $\widetilde{K}^*$ 中的公理。

如果 A_k 是由 A_m 和 $A_n = A_m \to A_k$ 应用(MP)得到，其中 $m, n < k$，那么

$(A_k)_b^{x_i}$ 也可由 $(A_m)_b^{x_i}$ 和 $(A_n)_b^{x_i}=(A_m)_b^{x_i}\to(A_k)_b^{x_i}$ 应用(MP)得到。所以，$(A_1)_b^{x_i},(A_2)_b^{x_i},\cdots,(A_n)_b^{x_i}$ 不再含有个体词常元 b，因而也就是 $\widetilde{K}^*$ 中的一个证明。

■

从命题 5.4.4 的证明中可以看出，该命题成立的关键在于“新加入的个体词常元 b 不会出现在 J 中那些不是$(\to_1)$、$(\to_2)$、$(\to\neg)$、$(\forall_1)$、$(\forall_2)$、$(\forall_3)$、$(\forall_G)$的公理中”，因为在命题 5.4.3 中已经验证过了这 7 条公理经过将 b 换成 x_i 之后还会是 $\widetilde{K}^*$ 中的公理，当然也是 J 中的公理，而形式证明中出现的合式公式将 b 换成 x_i 的前后在使用规则(MP)上是不变的。进而可以在形式系统中一个一个地加入个体词常元，使得 K^* 中的 7 条公理经过将所含有的新加入语言中的个体词常元，换成不在公理中出现的个体词变元后，依然还会是公理。

【命题 5.4.5】 对于形式系统 K^* 的扩张 $\widetilde{K}^*$，在其符号表集合中加入一列个体词常元 $b_0,b_1,\cdots,b_n,\cdots$得到形式系统 J，那么 $\widetilde{K}^*$ 是一致的当且仅当 J 是一致的。

证明：首先，如果 $\widetilde{K}^*$ 是一致的，用反证法证明 J 也是一致的。假设 J 不是一致的，那么存在 J 中的合式公式 B，有 $\vdash_J B$，且 $\vdash_J\neg B$。设它们的证明分别为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 和 $A_1',A_2',\cdots,A_m'$。由于 m、n 的有限性，可知 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 和 $A_1',A_2',\cdots,A_m'$中含有新引入的个体词变元的数目是有限的，设为 k，令这 k 个新引入的个体词常元为 $b_{i_1},b_{i_2},\cdots,b_{i_k}$。从个体词变元中选择 k 个 $x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_k}$，使得它们不在 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 和 $A_1',A_2',\cdots,A_m'$中出现，那么类似于命题 5.4.4，通过将 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 和 $A_1',A_2',\cdots,A_m'$中的个体词常元 $b_{i_1},b_{i_2},\cdots,b_{i_k}$ 分别换成 $x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_k}$，就会分别得到 $\widetilde{K}^*$ 中的关于 B 和 $\neg B$ 的证明，因而有 $\vdash_{\widetilde{K}^*}B$ 和 $\vdash_{\widetilde{K}^*}\neg B$，而这与 $\widetilde{K}^*$ 的一致性相矛盾。

其次，如果 J 是一致的，用反证法证明 $\widetilde{K}^*$ 也是一致的。假设 $\widetilde{K}^*$ 不是一致的，那么存在 $\widetilde{K}^*$ 中的合式公式 B，有 $\vdash_{\widetilde{K}^*}B$，且 $\vdash_{\widetilde{K}^*}\neg B$。由于 $\widetilde{K}^*$ 中的合式公式也是 J 中的合式公式，有 $\vdash_J B$，且 $\vdash_J\neg B$，这就与 J 的一致性相矛盾。

■

通过命题 5.4.5，对形式系统 K^* 的扩张 $\widetilde{K}^*$ 引入新的个体词常元后，不会改变形式系统的一致性，这样就可以在扩大符号表集合的形式系统中进行下一步的

操作。现在开始处理量词,对于已经在形式系统 K^* 的一致扩张 $\widetilde{K}^*$ 中加入一列个体词常元 $b_0,b_1,\cdots,b_n,\cdots$ 的形式系统 J 来说,向 J 中加入一些关于量词的公理,以获得关于 J 的一系列扩张。其具体操作:首先,在形式系统 J 中,对于每个合式公式 A_k 以及每个个体词变元 x_{i_k},构造合式公式 $B_k=\neg\forall x_{i_k}A_k\to\neg(A_k)_{x_{i_k}}^{c_k}$,其中 c_k 是从 $b_0,b_1,\cdots,b_n,\cdots$ 选取的一些个体词常元。由于 J 中所有合式公式的集合以及所有个体词变元的集合都是可列集,根据 1.5 节关于可列集的结果可知,这两个集合的笛卡儿积也是可列集,因而对于所有的合式公式和所有的个体词变元,可以按照 $\langle A_0,x_{i_0}\rangle,\langle A_1,x_{i_1}\rangle,\cdots,\langle A_k,x_{i_k}\rangle,\cdots$ 的顺序依次列出它们,然后从 $b_0,b_1,\cdots,b_n,\cdots$ 中选取一个个体词常元,记为 c_0,满足 c_0 不在 A_0 中出现的,进而构造合式公式 $B_0=\neg\forall x_{i_0}A_0\to\neg(A_0)_{x_{i_0}}^{c_0}$;假如已经得到 c_n,并构造出了合式公式 $B_n=\neg\forall x_{i_n}A_n\to\neg(A_n)_{x_{i_n}}^{c_n}$,那么由于 $A_0,A_1,\cdots,A_n,A_{n+1}$ 中所含新引入的个体词常元 b_n 是有限多的,从 $\{b_0,b_1,\cdots,b_n,\cdots\}-\{c_0,c_1,\cdots,c_n\}$ 中选取一个个体词常元,记为 c_{n+1},满足 c_{n+1} 不在 $A_0,A_1,\cdots,A_n,A_{n+1}$ 中出现,并构造合式公式 $B_{n+1}=\neg\forall x_{i_{n+1}}A_{n+1}\to\neg(A_{n+1})_{x_{i_{n+1}}}^{c_{n+1}}$;将会依次得到合式公式的序列 $B_0,B_1,\cdots,B_n,\cdots$。令 $J_0=J$,并将 B_0 加入到 J_0 的公理集合中得到 J_1;对于 $1<n$,将 B_n 加入到 J_n 的公理集合中得到 J_{n+1};对应着合式公式序列 B_0,$B_1,\cdots,B_n,\cdots$,得到 J_0 的扩张序列 $J_0,J_1,\cdots,J_n,\cdots$。令 J_c 是将 $J_0,J_1,\cdots$,$J_n,\cdots$中所有公理集合的并作为 J_c 的公理集合所得到的形式系统,由于 J_0 是对一致扩张 $\widetilde{K}^*$ 中加入一列个体词常元 $b_0,b_1,\cdots,b_n,\cdots$所得到的形式系统,根据命题 5.4.5 可知 J_0 是一致的。J_c 也是一致的。

【命题 5.4.6】 形式系统 J_c 是一致的。

证明: 首先证明每一个 J_n 都是一致的,采用数学归纳法证明此结论。具体地,J_0 是一致的。假设 J_n 是一致的,按照数学归纳法,只需证明 J_{n+1} 也是一致的。若 J_{n+1} 不一致,则存在 J_{n+1} 中的合式公式 C 满足 $\vdash_{J_{n+1}}C$ 和 $\vdash_{J_{n+1}}\neg C$。由于对于任意的合式公式 D_1、D_2,有 $D_1\to(\neg D_1\to\neg D_2)$是重言式,因此有 $\vdash_{J_{n+1}}C\to(\neg C\to\neg B_n)$。利用 $\vdash_{J_{n+1}}C$ 和 $\vdash_{J_{n+1}}\neg C$ 对上式使用(MP)规则两次,可得 $\vdash_{J_{n+1}}\neg B_n$。由于 J_{n+1} 是通过将 B_n 加入 J_n 的公理集合中得到的,有 $B_n\vdash_{J_n}\neg B_n$,进而根据推演定理可得 $\vdash_{J_n}B_n\to\neg B_n$。根据例题 3.4.6 可得 $\vdash_{J_n}(B_n\to\neg B_n)\to\neg B_n$,因而使用(MP)规则可得 $\vdash_{J_n}\neg B_n$,即 $\vdash_{J_n}\neg(\neg\forall x_{i_n}A_n\to\neg(A_n)_{x_{i_n}}^{c_n})$。由于对于任意的合式公式 D_1,D_2,有 $\neg(D_1\to D_2)\to D_1$ 和 $\neg(D_1\to D_2)\to\neg D_2$ 是重言式,

可得 $\vdash_{J_n} \neg(\neg\forall x_{i_n}A_n \rightarrow \neg(A_n)_{x_{i_n}}^{c_n}) \rightarrow \neg\forall x_{i_n}A_n$ 和 $\vdash_{J_n} \neg(\neg\forall x_{i_n}A_n \rightarrow \neg(A_n)_{x_{i_n}}^{c_n}) \rightarrow (A_n)_{x_{i_n}}^{c_n}$，对它们利用 $\vdash_{J_n} \neg(\neg\forall x_{i_n}A_n \rightarrow \neg(A_n)_{x_{i_n}}^{c_n})$ 并使用(MP)规则可得 $\vdash_{J_n} \neg\forall x_{i_n}A_n$ 和 $\vdash_{J_n}(A_n)_{x_{i_n}}^{c_n}$。

形式系统 J_n 中的公理包括 J_0 中的公理以及合式公式 $B_0, B_1, \cdots, B_{n-1}$，根据命题5.4.4，如果把 J_n 中关于 $(A_n)_{x_{i_n}}^{c_n}$ 证明中的每一个合式公式里出现的 c_n 都换成不在证明中出现的个体词变元 x_l，那么由于 c_n 不在 $B_0, B_1, \cdots, B_{n-1}$ 中出现，将关于 $(A_n)_{x_{i_n}}^{c_n}$ 证明中出现的 c_n 换成 x_l 之后，这些证明就成为关于 $((A_n)_{x_{i_n}}^{c_n})_{c_n}^{x_l}$ 的证明，即 $\vdash_{J_n}((A_n)_{x_{i_n}}^{c_n})_{c_n}^{x_l}$。$c_n$ 是个体词常元，所以 $((A_n)_{x_{i_n}}^{c_n})_{c_n}^{x_l} = (A_n)_{x_{i_n}}^{x_l}$，因而有 $\vdash_{J_n}(A_n)_{x_{i_n}}^{x_l}$，再根据公理($\forall_G$)可得 $\vdash_{J_n}\forall x_l(A_n)_{x_{i_n}}^{x_l}$。而根据例5.2.7有 $\forall x_l(A_n)_{x_{i_n}}^{x_l} \vdash_{J_n} \forall x_{i_n}A_n$，进而可得 $\vdash_{J_n} \forall x_{i_n}A_n$，这就与前面已经得到的 $\vdash_{J_n} \neg\forall x_{i_n}A_n$ 矛盾，因此，如果 J_n 是一致的，那么 J_{n+1} 一定也是一致的，根据数学归纳法可得，对于任意的 $n \in \mathbb{N}$，J_n 都是一致的。

由于 J_c 是将 $J_0, J_1, \cdots, J_n, \cdots$ 中所有公理集合的并作为 J_c 的公理集合所得到的形式系统，采用与命题3.6.7中证明 L_c^* 一致性同样的方法可得，如果 J_c 不是一致的，那么一定会在某一个 J_n 上也呈现出不一致性，这就与 J_n 是一致的相矛盾。

■

由于 J_c 是一致的，可以采用命题3.6.7中构造同时满足一致性和完全性的扩张方法得到 J_c 的一个扩张 $\widetilde{J}_c$，使得它同时满足一致性和完全性。现在可以根据这个 $\widetilde{J}_c$ 构造出一个解释 $\langle \mathcal{S}, v\rangle$，使得 $\widetilde{J}_c$ 中的每一个定理在该解释下都为真。

【定义5.4.4】 定义形式系统 $\widetilde{J}_c$ 形式语言部分的一个解释 $\langle \mathcal{S}, v\rangle$ 如下所示：

(1) 结构 $\mathcal{S}$ 中的论域 S 为 $\widetilde{J}_c$ 中所有项的集合；

(2) 在结构 $\mathcal{S}$ 中，对于 n 元谓词 F_i^n，其所对应的 S 上的 n 元关系 $\bar{F}_i^n$ 为 $\langle t_1, t_2, \cdots, t_n\rangle \in \bar{F}_i^n$ 当且仅当 $\vdash_{\widetilde{J}_c} F_i^n(t_1, t_2, \cdots, t_n)$，其中 $t_1, t_2, \cdots, t_n \in S$；

(3) 在结构 $\mathcal{S}$ 中，对于 n 元函数词 f_i^n，其所对应的 S 上的 n 元运算 $\bar{f}_i^n$ 为 $\bar{f}_i^n(t_1, t_2, \cdots, t_n) = f_i^n(t_1, t_2, \cdots, t_n)$，其中 $t_1, t_2, \cdots, t_n \in S$；

(4) 在结构 $\mathcal{S}$ 中，对于个体词常元 a_i，其所对应的 S 中的元素 $\bar{a}_i = a_i$；

(5) 结构 $\mathcal{S}$ 上的指派 v 满足 $v(x_i) = x_i$。

定义 5.4.4 中的解释称为正则解释(canonical interpretation)。该解释将 $\widetilde{J}_c$ 中所有的项的集合作为论域，这是非常具有特点的。在引入项的定义时曾谈到过，项是用来解释为论域中的对象，而在正则解释中将项本身作为论域中的元素。因此直观上看，在正则解释中项在指派下应该等于其自身。

【命题 5.4.7】 对于形式系统 $\widetilde{J}_c$ 中的任意项 t，正则解释中项的指派 $\tilde{v}$ 满足 $\tilde{v}(t)=t$。

证明： 采用关于项的结构归纳法。

若 t 为个体词变元 x_i，则有

$$\tilde{v}(t)=\tilde{v}(x_i)=v(x_i)=x_i=t$$

若 t 为个体词常元 a_i，则有

$$\tilde{v}(t)=\tilde{v}(a_i)=\bar{a}_i=a_i=t$$

若项 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 满足 $\tilde{v}(t_1)=t_1,\tilde{v}(t_2)=t_2,\cdots,\tilde{v}(t_n)=t_n$，则对于任意的函数词 n 元函数词 f_i^n，有

$$\begin{aligned}\tilde{v}(f_i^n(t_1,t_2,\cdots,t_n)) &= \bar{f}_i^n(\tilde{v}(t_1),\tilde{v}(t_2),\cdots,\tilde{v}(t_n)) \\ &= \bar{f}_i^n(t_1,t_2,\cdots,t_n)=f_i^n(t_1,t_2,\cdots,t_n)\end{aligned}$$

根据项的结构归纳法可得，对于任意的项 t，均有 $\tilde{v}(t)=t$。

■

【命题 5.4.8】 对于形式系统 $\widetilde{J}_c$ 中的任意合式公式 A，$\vdash_{\widetilde{J}_c} A$ 当且仅当 A 在正则解释 $\langle S,v\rangle$ 下为真。

证明： 对合式公式的层次 k 采用数学归纳法进行证明。

首先，当 $k=0$ 时，A 为原子合式公式，即 A 为 $F_i^n(t_1,t_2,\cdots,t_n)$。若 A 为定理，即 $\vdash_{\widetilde{J}_c} F_i^n(t_1,t_2,\cdots,t_n)$，则有 $\langle t_1,t_2,\cdots,t_n\rangle\in\bar{F}_i^n$，根据命题 5.4.7 可得 $\langle\tilde{v}(t_1),\tilde{v}(t_2),\cdots,\tilde{v}(t_n)\rangle\in\bar{F}_i^n$，所以 A 在解释 $\langle\mathcal{S},v\rangle$ 下为真。若 A 在解释 $\langle\mathcal{S},v\rangle$ 下为真，则有 $\langle\tilde{v}(t_1),\tilde{v}(t_2),\cdots,\tilde{v}(t_n)\rangle\in\bar{F}_i^n$，再根据命题 5.4.7 可得 $\langle t_1,t_2,\cdots,t_n\rangle\in\bar{F}_i^n$，因而有 $\vdash_{\widetilde{J}_c} F_i^n(t_1,t_2,\cdots,t_n)$，即 $\vdash_{\widetilde{J}_c} A$。

然后，假设对于层次小于 k 的合式公式 A，有 $\vdash_{\widetilde{J}_c} A$ 当且仅当 A 在正则解释 $\langle\mathcal{S},v\rangle$ 下为真。证明在此假设下，对于层次等于 k 的合式公式 A，有 $\vdash_{\widetilde{J}_c} A$ 当且仅当 A 在正则解释 $\langle\mathcal{S},v\rangle$ 下为真。

(1) 如果 $A=\neg C$。对于 A，若 A 为定理，即 $\vdash_{\widetilde{J}_c}\neg C$。因为 $\widetilde{J}_c$ 是一致的，所

以 C 不是定理，由假设可知 C 在解释 $\langle\mathcal{S},v\rangle$ 下为假，进而 $\neg C$ 在解释 $\langle\mathcal{S},v\rangle$ 下为真，即 A 在解释 $\langle\mathcal{S},v\rangle$ 下为真。若 A 在解释 $\langle\mathcal{S},v\rangle$ 下为真，则 C 在解释 $\langle\mathcal{S},v\rangle$ 下为假，所以 C 不是定理，由 $\widetilde{J}_c$ 的完全性可得 $\vdash_{\widetilde{J}_c}\neg C$，即 $\vdash_{\widetilde{J}_c}A$。

(2) 如果 $A=C\rightarrow D$。对于 A，若 A 为定理，即 $\vdash_{\widetilde{J}_c}C\rightarrow D$，采用反证法证明 A 在解释 $\langle\mathcal{S},v\rangle$ 下为真。如果 A 在解释 $\langle\mathcal{S},v\rangle$ 下为假，则 C 在解释 $\langle\mathcal{S},v\rangle$ 下为真，且 D 在解释 $\langle\mathcal{S},v\rangle$ 下为假。由假设可知 C 为定理且 D 不为定理。利用 $\widetilde{J}_c$ 的完全性可知 $\neg D$ 为定理，即 $\vdash_{\widetilde{J}_c}C$ 且 $\vdash_{\widetilde{J}_c}\neg D$。利用重言式 $C\rightarrow(\neg D\rightarrow\neg(C\rightarrow D))$，有 $\vdash_{\widetilde{J}_c}C\rightarrow(\neg D\rightarrow\neg(C\rightarrow D))$，对其根据 $\vdash_{\widetilde{J}_c}C$ 和 $\vdash_{\widetilde{J}_c}\neg D$，并利用两次(MP)规则可得 $\vdash_{\widetilde{J}_c}\neg(C\rightarrow D)$，即 $\vdash_{\widetilde{J}_c}\neg A$，而已知 A 为定理，这就与 $\widetilde{J}_c$ 的一致性相矛盾。如果 A 在解释 $\langle\mathcal{S},v\rangle$ 下为真，利用反证法证明 $\vdash_{\widetilde{J}_c}A$。若 A 不是定理，利用 $\widetilde{J}_c$ 的完全性可知 $\neg A$ 为定理，即 $\vdash_{\widetilde{J}_c}\neg(C\rightarrow D)$。因为 $\neg(C\rightarrow D)\rightarrow C$ 和 $\neg(C\rightarrow D)\rightarrow\neg D$ 为重言式，所以 $\vdash_{\widetilde{J}_c}\neg(C\rightarrow D)\rightarrow C$ 和 $\vdash_{\widetilde{J}_c}\neg(C\rightarrow D)\rightarrow\neg D$，所以对它们利用(MP)规则有 $\vdash_{\widetilde{J}_c}C$ 和 $\vdash_{\widetilde{J}_c}\neg D$。利用 $\widetilde{J}_c$ 的一致性可得 D 不为定理，因此 C 为定理且 D 不为定理，根据假设可知 C 在解释 $\langle\mathcal{S},v\rangle$ 下为真，且 D 在解释 $\langle\mathcal{S},v\rangle$ 下为假，因而有 $C\rightarrow D$ 在解释 $\langle\mathcal{S},v\rangle$ 下为假，也就是 A 在解释 $\langle\mathcal{S},v\rangle$ 下为假，这就产生了矛盾。

(3) 如果 $A=\forall x_iC$。对于 A，若 A 为定理，即 $\vdash_{\widetilde{J}_c}\forall x_iC$，采用反证法证明 A 在解释 $\langle\mathcal{S},v\rangle$ 下为真。如果 $\forall x_iC$ 在解释 $\langle\mathcal{S},v\rangle$ 下为假，则存在 $t\in S$，使得 C 在解释 $\langle\mathcal{S},v_{t\rightarrow x_i}\rangle$ 下为假。由于正则解释中，论域 S 为 $\widetilde{J}_c$ 中所有项 t 的集合，所以这里采用了 $v_{t\rightarrow x_i}$ 而非之前的 $v_{a\rightarrow x_i}$。为了利用命题 4.4.7，需要项 t 对 x_i 在 C 中代入自由。为此，选择 C 的一个约束变元换名 C'，使得 t 对 x_i 在 C' 中代入自由。根据命题 4.5.3，C 和 C' 是永真等价的，因而可得 C' 在解释 $\langle\mathcal{S},v_{t\rightarrow x_i}\rangle$ 下为假。根据命题 5.4.7，$\tilde{v}(t)=t$，因此 C' 在解释 $\langle\mathcal{S},v_{\tilde{v}(t)\rightarrow x_i}\rangle$ 下为假。此时，根据命题 4.4.7 可得 $(C')^t_{x_i}$ 在解释 $\langle\mathcal{S},v\rangle$ 下为假，进而根据假设可得 $\nvdash_{\widetilde{J}_c}(C')^t_{x_i}$。利用例 5.2.7 及其下面的说明，有 $C\vdash C'$ 且 $C'\vdash C$，进而 $\forall x_iC\vdash_{\widetilde{J}_c}\forall x_iC'$ 且 $\forall x_iC'\vdash_{\widetilde{J}_c}\forall x_iC$。而已知 $\vdash_{\widetilde{J}_c}\forall x_iC$，所以有 $\vdash_{\widetilde{J}_c}\forall x_iC'$，再根据公理($\forall_1$)有 $\vdash_{\widetilde{J}_c}\forall x_iC'\rightarrow(C')^t_{x_i}$，进而利用(MP)规则有 $\vdash_{\widetilde{J}_c}(C')^t_{x_i}$，这就与 $\widetilde{J}_c$ 的一致性产生了矛盾。如果 A 在解

释$\langle\mathcal{S},v\rangle$下为真，利用反证法证明$\vdash_{\widetilde{J}_c}A$。对于$A$中的$C$和$x_i$，由它们构成的有序对$\langle C,x_i\rangle$必然是前面构造$B_n=\neg\forall x_{i_n}A_n\to\neg(A_n)_{x_{i_n}}^{c_n}$时所使用的序列$\langle A_0,x_{i_0}\rangle,\langle A_1,x_{i_1}\rangle,\cdots,\langle A_k,x_{i_k}\rangle,\cdots$中的某一个。设$\langle C,x_i\rangle$为$\langle A_m,x_{i_m}\rangle$，则根据$\langle A_m,x_{i_m}\rangle$所构造出的$B_m$为$\neg\forall x_{i_m}A_m\to\neg(A_m)_{x_{i_m}}^{c_m}$。当然，$B_m$是$\widetilde{J}_c$中的公理，因而有$\vdash_{\widetilde{J}_c}\neg\forall x_{i_m}A_m\to\neg(A_m)_{x_{i_m}}^{c_m}$。根据已知，$\forall x_{i_m}A_m$在解释$\langle\mathcal{S},v\rangle$下为真，则根据命题 4.4.8 的(1)可得$(A_m)_{x_{i_m}}^{c_m}$在解释$\langle\mathcal{S},v\rangle$下为真，因而根据假设可得$\vdash_{\widetilde{J}_c}(A_m)_{x_{i_m}}^{c_m}$。如果$A$不是定理，利用$\widetilde{J}_c$的完全性可知$\neg A$为定理，即$\vdash_{\widetilde{J}_c}\neg\forall x_{i_m}A_m$，根据$\vdash_{\widetilde{J}_c}\neg\forall x_{i_m}A_m\to\neg(A_m)_{x_{i_m}}^{c_m}$利用(MP)规则可得$\vdash_{\widetilde{J}_c}\neg(A_m)_{x_{i_m}}^{c_m}$，这就与$\widetilde{J}_c$的一致性产生了矛盾。

至此对合式公式的层次k采用数学归纳法完成了证明。

■

根据命题 5.4.8，形式系统$\widetilde{J}_c$中的每个定理A在正则解释$\langle\mathcal{S},v\rangle$下都为真。回顾构造$\widetilde{J}_c$的整个过程，首先对$\widetilde{K}^*$的符号表集合中加入个体词常元，以对形式语言部分进行扩张，然后再加入一些合式公式到$\widetilde{K}^*$的公理集中，以对形式推理部分进行扩张，包括加入特定的$B_n=\neg\forall x_{i_n}A_n\to\neg(A_n)_{x_{i_n}}^{c_n}$以及为了获得形式系统的完全性所加入的一些合式公式。$\widetilde{K}^*$中原有的公理没有改变，所以$\widetilde{K}^*$中的定理也是$\widetilde{J}_c$中的定理，进而在正则解释$\langle\mathcal{S},v\rangle$下也会为真。当然，由于$\widetilde{K}^*$的语言部分不含有后来新加入的个体词常元，$\widetilde{K}^*$中的正则解释$\langle\mathcal{S},v\rangle$是指把关于新加入个体词常元的解释全部去除，就得到了只针对$\widetilde{K}^*$中符号的解释。这也就是说，对于形式系统K^*的一致扩张$\widetilde{K}^*$，存在一个解释$\langle\mathcal{S},v\rangle$，使得$\widetilde{K}^*$中的每一个定理都在该解释下为真。有了上述的准备工作，现在可以证明可靠性定理的逆命题。

【命题 5.4.9】 对于形式系统K^*中的合式公式A，若$\vDash A$，则$\vdash A$。

证明： 对于K^*中的合式公式A，如果它为永真式，即$\vDash A$，采用反证法证明$\vdash A$。如果$\nvdash A$，就可以把$\neg A$加入到K^*的公理集合中，得到K^*的一致扩张$\widetilde{K}^*$。根据前面的分析，存在一个解释$\langle\mathcal{S},v\rangle$，使得$\widetilde{K}^*$中的每一个定理都在该解释下为真。作为$\widetilde{K}^*$的公理，$\neg A$也是定理，所以$\neg A$在解释$\langle\mathcal{S},v\rangle$下为真，进而

A 在解释 $\langle\mathcal{S},v\rangle$ 下为假，而这就与 A 为永真式矛盾。

■

命题 5.4.9 称为形式系统 K^* 的完备性定理。历史上，形式系统 K^* 的完备性定理首先是由德国数学家、逻辑学家哥德尔(K. Gödel)于 1930 年得到的。由于该定理的意义以及难度，吸引了很多学者的注意。我们所采用的证明方法主要来自美国数学家、逻辑学家亨金(L. Henkin)1949 年给出的证明方法。

形式系统 K^* 的完备性定理表明了，谓词逻辑推理在形式系统中得到了完备地模拟、反映。根据形式系统 K^* 的可靠性定理和完备性定理得到了在形式系统 K^* 中，$\vdash A$ 当且仅当 $\vDash A$，即谓词逻辑语法概念 $\vdash$ 和语义概念 $\vDash$ 是相互等价的。

在谓词逻辑中也有广义可靠性定理和广义完备性定理，因而也就有 $\Gamma\vdash A$ 当且仅当 $\Gamma\vDash A$。广义可靠性定理的证明是容易的。

【命题 5.4.10】 对于形式系统 K^* 中的合式公式集合 Γ 和合式公式 A，若 $\Gamma\vdash A$，则 $\Gamma\vDash A$。

证明： 采用 K^* 中“从 Γ 可推演出的结论”的结构归纳法去证明。

(1) 若 A 为 K^* 中的公理，则由于 A 为永真式，有 $\vDash A$，进而有 $\Gamma\vDash A$。

(2) 若 $A\in\Gamma$，则有 $\Gamma\vDash A$。

(3) 若 $\Gamma\vdash B$ 和 $\Gamma\vdash B\to A$，且 $\Gamma\vDash B$，$\Gamma\vDash B\to A$，则根据命题 4.6.1 的(1)可得 $\Gamma\vDash A$。

根据 K^* 中“从 Γ 可推演出的结论”的结构归纳法可知，对于任意满足 $\Gamma\vdash A$ 的合式公式 A，均具有 $\Gamma\vDash A$。

■

对于广义完备性定理，其证明在思路和方法上与完备性定理几乎一样。其证明过程中会涉及一些有用的概念和结果，下面简要地介绍。

【定义 5.4.5】 对于谓词逻辑中的合式公式集合 Γ，若 Γ 中的每一个合式公式都在解释 $\langle\mathcal{S},v\rangle$ 下为真，则称解释 $\langle\mathcal{S},v\rangle$ 满足 Γ。

当 $\Gamma=\{A\}$ 时，解释 $\langle\mathcal{S},v\rangle$ 满足 Γ 就是 A 在解释 $\langle\mathcal{S},v\rangle$ 下为真。所以 $\Gamma\vDash A$ 也可以描述为，满足 Γ 的解释也一定会满足 A。

【定义 5.4.6】 对于谓词逻辑中的合式公式集合 Γ，若存在一个解释 $\langle\mathcal{S},v\rangle$，使得该解释 $\langle\mathcal{S},v\rangle$ 满足 Γ，则称 Γ 是可满足的。

类似于命题 3.6.11，在谓词逻辑中也有相应的结论。

【命题 5.4.11】 对于谓词逻辑中的合式公式集合 Γ 和合式公式 A，$\Gamma\nvDash A$ 当且仅当 $\Gamma\cup\{\neg A\}$ 是可满足的。

证明： 如果 $\Gamma \nvDash A$，则存在解释 $\langle \mathcal{S}, v \rangle$ 使得 Γ 中的每一个合式公式都在解释 $\langle \mathcal{S}, v \rangle$ 下为真，且 A 在解释 $\langle \mathcal{S}, v \rangle$ 下为假。A 在解释 $\langle \mathcal{S}, v \rangle$ 下为假说明了 $\neg A$ 在解释 $\langle \mathcal{S}, v \rangle$ 下为真。因此，$\Gamma \cup \{\neg A\}$ 在解释 $\langle \mathcal{S}, v \rangle$ 下为真，因此解释 $\langle \mathcal{S}, v \rangle$ 满足 $\Gamma \cup \{\neg A\}$，即 $\Gamma \cup \{\neg A\}$ 是可满足的。另外，如果 $\Gamma \cup \{\neg A\}$ 是可满足的，那么存在解释 $\langle \mathcal{S}, v \rangle$，使得 $\Gamma \cup \{\neg A\}$ 中的每个合式公式都在解释 $\langle \mathcal{S}, v \rangle$ 下为真，因而可得 Γ 中的每个合式公式都在解释 $\langle \mathcal{S}, v \rangle$ 下为真，且 A 在解释 $\langle \mathcal{S}, v \rangle$ 下为假。这就说明了并不是所有满足 Γ 的解释都会满足 A，因此 $\Gamma \nvDash A$。

■

为了在语法上描述 Γ 是可满足的，需要引入合式公式集合 Γ 的一致性。

【定义 5.4.7】 对于形式系统 K^* 中的合式公式集合 Γ，若不存在合式公式 A，使得 $\Gamma \vdash A$ 和 $\Gamma \vdash \neg A$ 均成立，则称 Γ 是一致的。

由形式系统 K^* 的一致性可知，若合式公式集合 Γ 中的合式公式均为 K^* 中的定理，则 Γ 是一致的。特别地，K^* 中所有公理构成的合式公式集合 Γ 是一致的。

有了合式公式集合一致性的概念，命题 3.6.12 中关于命题逻辑的结论在谓词逻辑这里也都成立。特别地，$\Gamma \nvdash A$ 当且仅当 $\Gamma \cup \{\neg A\}$ 是一致的。类似于命题逻辑那里，可以把证明广义完备性定理"若 $\Gamma \vDash A$，则 $\Gamma \vdash A$"转化为证明命题"若 $\Gamma \cup \{\neg A\}$ 是一致的，则 $\Gamma \cup \{\neg A\}$ 是可满足的"。因此，只要证明出命题"Γ 是一致的蕴涵 Γ 是可满足的"，而该命题的证明与证明完备性定理的思路完全一样，只是在一些具体证明细节上稍加改变。

【定义 5.4.8】 对于形式系统 K^* 中的合式公式集合 Γ，若 Γ 是一致的，且任意满足 $\Gamma \subsetneq \Gamma_1$ 的 Γ_1 都是不一致的，则称 Γ 是极大一致的。

合式公式集合 Γ 是极大一致的，类似于形式系统同时是一致的和完全的。极大一致合式集合比一般的一致合式集合具有更好的一些性质。比如，"Γ 是极大一致的，当且仅当对于任意的合式公式 A，有 $\Gamma \vdash A$ 或者 $\Gamma \nvdash A$""Γ 是极大一致的，则 $\Gamma \vdash A$ 当且仅当 $A \in \Gamma$"。

对于形式系统 K^* 中的合式公式集合 Γ，为了找到可以满足 Γ 的解释 $\langle \mathcal{S}, v \rangle$，采用之前的方法，首先在形式系统 K^* 中引入个体词常元，也就是说，对 K^* 的形式语言部分进行扩张，可以证明引入个体词常元不会破坏 Γ 在 K^* 中的一致性；接着对于每个合式公式 A_k 以及每个个体词变元 x_{i_k}，构造合式公式 $B_k = \neg \forall x_{i_k} A_k \rightarrow \neg (A_k)_{x_{i_k}}^{c_k}$，令 Δ 为所有这些构造出来的合式公式集合，即 $\Delta = \{B_1, B_2, \cdots, B_k, \cdots\}$，可以证明 $\Gamma \cup \Delta$ 是一致的；利用林登鲍姆的方法，将 $\Gamma \cup \Delta$ 扩张到极大一致集合 Γ^*，进而可以根据 Γ^* 引入正则解释 $\langle \mathcal{S}, v \rangle$，此正则解释只需将

之前正则解释中关于谓词的部分修改为“对于 n 元谓词 F_i^n，其所对应的论域 S 上的 n 元关系 $\bar{F}_i^n$ 为 $\langle t_1, t_2, \cdots, t_n \rangle \in \bar{F}_i^n$ 当且仅当 $\Gamma^* \vdash F_i^n(t_1, t_2, \cdots, t_n)$，其中 $t_1, t_2, \cdots, t_n \in S$”，其他地方不用改变，由于 Γ^* 是极大一致的，所以“$\langle t_1, t_2, \cdots, t_n \rangle \in \bar{F}_i^n$ 当且仅当 $\Gamma^* \vdash F_i^n(t_1, t_2, \cdots, t_n)$”等价于“$\langle t_1, t_2, \cdots, t_n \rangle \in \bar{F}_i^n$ 当且仅当 $F_i^n(t_1, t_2, \cdots, t_n) \in \Gamma^*$”；然后证明正则解释 $\langle \mathcal{S}, v \rangle$ 满足 Γ^*，进而也满足 Γ。至此，就证明了广义完备性定理：若 $\Gamma \vDash A$，则 $\Gamma \vdash A$。

由于形式系统中的形式证明和形式推演都是有限步的，语法上的 $\Gamma \vdash A$ 蕴涵了存在 Γ 的有限子集 Γ_0 满足 $\Gamma_0 \vdash A$。对于语义上的 $\Gamma \vDash A$ 并不直接与有限性相关。但是，广义完备性定理建立了语义与语法之间的联系，根据 $\Gamma \vDash A$ 可以得到 $\Gamma \vdash A$，进而存在 Γ 的有限子集 Γ_0 满足 $\Gamma_0 \vdash A$，再根据广义可靠性定理可得 $\Gamma_0 \vDash A$。可见，$\Gamma \vDash A$ 当且仅当存在 Γ 的有限子集 Γ_0 满足 $\Gamma_0 \vDash A$。

类似于命题 3.6.14，也可以得到谓词逻辑中的紧致性定理：Γ 是可满足的，当且仅当它的每个有限子集是可满足的。

之前在讨论形式系统的时候，形式系统包括形式语言部分和形式推理部分。在前面讨论形式系统完备性的时候，有时需要对形式语言部分进行扩张；此外，在描述不同数学分支的时候，需要采用具体不同的符号，为了讨论方便，可以将形式语言部分拿出，标记为$\mathcal{L}$。不同的形式语言体现在符号表上的不同，合式公式的形成规则都是相同的，因此，可以将符号$\mathcal{L}$视为形式语言的符号表。由于不同形式语言的逻辑符号都是相同的，也可以将符号$\mathcal{L}$视为符号表中的非逻辑符号。此时再谈合式公式 A，就可以针对某语言谈合式公式 A。比如，说 A 是语言$\mathcal{L}$中的合式公式，是指 A 所使用的符号是语言$\mathcal{L}$中的符号。对于形式推理部分，它是关于形式语言$\mathcal{L}$的合式公式的一些公理和推理规则，可以认为是基于形式语言的。为了强调形式语言，可以将其标记出来。比如，形式系统 K^* 可以标记为 $K_{\mathcal{L}}^*$，此时可以将 $K_{\mathcal{L}}^*$ 视为形式语言$\mathcal{L}$下的形式推理部分，也就是说把形式推理部分拿出进行标记。对形式系统 K^* 的形式语言部分进行扩张，由$\mathcal{L}$扩张为$\mathcal{L}^+$，那么语言扩张后的形式系统可以标记为 $K_{\mathcal{L}^+}^*$。

5.5 模型

在 4.6 节引入了合式公式在结构下的真与假。这个概念是重要的，因为对于闭式或者语句来说，它在结构下非真即假。进而，对于一个语句而言，考虑所有使

得该语句为真的结构$\mathcal{S}$，也就相当于考虑了所有使得该语句为真的解释$\langle\mathcal{S},v\rangle$。而在4.6节中谈到，合式公式$A$在一个结构下为真，当且仅当$\forall x_i A$在同样的结构下为真，进而总是可以将含有自由变元的合式公式在结构下的真值转换为不含自由变元的语句在结构下的真值，因此，当考虑合式公式A在结构下的真值时，等同于考虑与之相关的语句在结构下的真值。通常，自然语言描述的数学命题经过形式化之后都是语句，比如，1.6节的皮亚诺公设，对于公设中出现的变量m，n，公设中均有表示量词含义的“任意”出现，以对m，n进行约束。此外，语句相对于一般的合式公式而言更为重要，因为含有自由变元的合式公式就好比一个含有自变量的未定式一样，它是“开放的”，而语句是“封闭的”，含有自由变元的合式公式相对于语句而言，有时并不具有良好的性质，这从上一章和这一章中一些命题条件中要求变元“不自由出现”这点可以看出。鉴于合式公式在结构下为真的重要性，给它以专门的定义。

【定义 5.5.1】 给定语言$\mathcal{L}$的一个结构$\mathcal{S}$，若合式公式A在结构$\mathcal{S}$下为真，则称结构$\mathcal{S}$是A的模型。对于语言$\mathcal{L}$的合式公式集合Γ，若Γ中的每个合式公式都在结构$\mathcal{S}$下为真，则称结构$\mathcal{S}$是Γ的模型。对于形式系统$K_{\mathcal{L}}^{*}$的扩张$\widetilde{K}_{\mathcal{L}}^{*}$，若它的定理都在结构$\mathcal{S}$下为真，则称结构$\mathcal{S}$是$\widetilde{K}_{\mathcal{L}}^{*}$的模型。

形式系统中的定理是由公理应用变形规则(MP)得到的，而变形规则会保持合式公式在解释下的真假，因而对合式公式在结构下的真假也会保持。有如下命题。

【命题 5.5.1】 对于形式系统$K_{\mathcal{L}}^{*}$的扩张$\widetilde{K}_{\mathcal{L}}^{*}$，若$\widetilde{K}_{\mathcal{L}}^{*}$的公理在结构$\mathcal{S}$下都为真，则$\mathcal{S}$是$\widetilde{K}_{\mathcal{L}}^{*}$的模型。

证明： 此命题表明，在前提下，$\widetilde{K}_{\mathcal{L}}^{*}$中所有的定理均在结构$\mathcal{S}$下为真。采用关于定理的结构归纳法去证明：首先，若$A$为$\widetilde{K}_{\mathcal{L}}^{*}$的公理，则根据前提可知$A$在结构$\mathcal{S}$下为真；其次，假设定理$A$和定理$A\to B$都在结构$\mathcal{S}$下为真，即对于任意$\mathcal{S}$的指派$v$，$A$和$A\to B$在解释$\langle\mathcal{S},v\rangle$下为真，由于$A\to B$在解释$\langle\mathcal{S},v\rangle$下为真表明，或者$A$在解释$\langle\mathcal{S},v\rangle$下为假，或者$B$在解释$\langle\mathcal{S},v\rangle$下为真，可得$B$在解释$\langle\mathcal{S},v\rangle$下为真，再由指派$v$的任意性可得$B$在结构$\mathcal{S}$下为真。因而，根据关于定理的结构归纳法可知，$\widetilde{K}_{\mathcal{L}}^{*}$中所有的定理均在结构$\mathcal{S}$下为真。

■

根据命题5.5.1可见，谈论一个形式系统的模型与谈论该形式系统的公理集

合的模型是一回事。这类似于之前说过的形式系统的一致性与合式公式集合的一致性之间的联系。

由于形式系统 $K_{\mathcal{L}}^{*}$ 具有可靠性和完备性，形式系统 $K_{\mathcal{L}}^{*}$ 可以看作谓词逻辑形式系统的统一“平台”，其他的谓词逻辑形式系统都建立在这个平台上，即在 $K_{\mathcal{L}}^{*}$ 基础之上进行形式系统的扩张。关注 $K_{\mathcal{L}}^{*}$ 基础之上的扩张 $\widetilde{K}_{\mathcal{L}}^{*}$ 的模型，而非 $K_{\mathcal{L}}^{*}$ 本身的模型，是因为 $K_{\mathcal{L}}^{*}$ 中公理的永真性表明了任意的结构都是 $K_{\mathcal{L}}^{*}$ 的模型。换句话说，$\widetilde{K}_{\mathcal{L}}^{*}$ 相对于 $K_{\mathcal{L}}^{*}$ 所新加入的公理是我们所关注的，因为使得这些新加入公理为真的结构 $\mathcal{S}$，也一定会使得 $K_{\mathcal{L}}^{*}$ 中公理为真。

【命题 5.5.2】 形式系统 $K_{\mathcal{L}}^{*}$ 的扩张 $\widetilde{K}_{\mathcal{L}}^{*}$ 是一致的，当且仅当 $\widetilde{K}_{\mathcal{L}}^{*}$ 有模型。

证明：根据命题 5.4.8 已经得出了形式系统 $K_{\mathcal{L}}^{*}$ 的一致扩张 $\widetilde{K}_{\mathcal{L}}^{*}$ 中的每个定理，都在去除了新加入个体词常元解释之后的正则解释 $\langle\mathcal{S},v\rangle$ 下为真。我们有 $\widetilde{K}_{\mathcal{L}}^{*}$ 中的每个定理都在结构 $\mathcal{S}$ 下为真，这是因为如果 A 为 $\widetilde{K}_{\mathcal{L}}^{*}$ 中的定理，即 $\vdash_{\widetilde{K}_{\mathcal{L}}^{*}} A$，那么类比命题 5.2.2 的证明，在形式系统 $\widetilde{K}_{\mathcal{L}}^{*}$ 中也可以得出类似命题 5.2.2 的结论，进而可得 $\vdash_{\widetilde{K}_{\mathcal{L}}^{*}} \forall x_{i_1} \forall x_{i_2} \cdots \forall x_{i_m} A$，其中 $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_m}$ 为 A 所含有的所有自由出现的个体词变元。由于 $\forall x_{i_1} \forall x_{i_2} \cdots \forall x_{i_m} A$ 为语句，同时它又为 $\widetilde{K}_{\mathcal{L}}^{*}$ 中的定理，所以它在结构 $\mathcal{S}$ 下为真。在 4.6 节中谈到，合式公式 A 在结构 $\mathcal{S}$ 下为真，当且仅当 $\forall x_i A$ 在结构 $\mathcal{S}$ 下为真，进而当且仅当 $\forall x_{i_1} \forall x_{i_2} \cdots \forall x_{i_m} A$ 在结构 $\mathcal{S}$ 下为真，所以可得 $\widetilde{K}_{\mathcal{L}}^{*}$ 中的定理 A 在结构 $\mathcal{S}$ 下为真。这就说明了结构 $\mathcal{S}$ 是 $\widetilde{K}_{\mathcal{L}}^{*}$ 的一个模型。另外，如果 $\widetilde{K}_{\mathcal{L}}^{*}$ 有一模型 $\mathcal{S}$，若 $\widetilde{K}_{\mathcal{L}}^{*}$ 不是一致的，则存在合式公式 A，有 $\vdash_{\widetilde{K}_{\mathcal{L}}^{*}} A$ 和 $\vdash_{\widetilde{K}_{\mathcal{L}}^{*}} \neg A$，这说明 A 和 $\neg A$ 均为 $\widetilde{K}_{\mathcal{L}}^{*}$ 中的定理，所以它们在模型 $\mathcal{S}$ 下均为真，这就产生了矛盾。

■

对于形式系统 $K_{\mathcal{L}}^{*}$ 的一致扩张 $\widetilde{K}_{\mathcal{L}}^{*}$，其公理在 $\widetilde{K}_{\mathcal{L}}^{*}$ 的模型下均为真，而推理规则（MP）又会保持合式公式在结构下的真假，因此，若一致扩张 $\widetilde{K}_{\mathcal{L}}^{*}$ 的每个模型都使得语句 A 为真，则 A 应该为 $\widetilde{K}_{\mathcal{L}}^{*}$ 中的定理。换句话说，由于模型是一个语义上的概念，那么 A 在 $\widetilde{K}_{\mathcal{L}}^{*}$ 的每个模型下均为真就说明了 A 在一定程度上与语义无关，那么 A 就有可能在与语义无关的形式系统中得到证明。进而可以得出，A 为 $\widetilde{K}_{\mathcal{L}}^{*}$ 中的定理当且仅当 A 在 $\widetilde{K}_{\mathcal{L}}^{*}$ 的每个模型下均为真。

【命题 5.5.3】 形式系统 $\widetilde{K}_{\mathcal{L}}^{*}$ 是 $K_{\mathcal{L}}^{*}$ 的一致扩张，若合式公式 A 在 $\widetilde{K}_{\mathcal{L}}^{*}$ 的每个模型下都为真，则 A 为 $\widetilde{K}_{\mathcal{L}}^{*}$ 中的定理。

证明： 采用反证法。在已知条件下，若合式公式 A 不是 $\widetilde{K}_{\mathcal{L}}^{*}$ 中的定理，则根据命题 5.4.2，通过将合式公式 $\neg A$ 加入 $\widetilde{K}_{\mathcal{L}}^{*}$ 的公理集合中，得到 $K_{\mathcal{L}}^{*}$ 的一致扩张 $\widetilde{\widetilde{K}}_{\mathcal{L}}^{*}$。根据命题 5.5.2 可知，$\widetilde{\widetilde{K}}_{\mathcal{L}}^{*}$ 有一模型 $\mathcal{S}$，由于 $\neg A$ 为 $\widetilde{\widetilde{K}}_{\mathcal{L}}^{*}$ 的公理，所有 $\neg A$ 在 $\mathcal{S}$ 下为真，进而可得 A 在 $\mathcal{S}$ 下为假。由于 $\mathcal{S}$ 也是 $\widetilde{K}_{\mathcal{L}}^{*}$ 的模型，这就与已知中 A 在 $\widetilde{K}_{\mathcal{L}}^{*}$ 的每一个模型下都为真，形成了矛盾。所以 A 一定为 $\widetilde{K}_{\mathcal{L}}^{*}$ 中的定理。

■

在 5.4 节得到 $K_{\mathcal{L}}^{*}$ 的广义完备性定理之后，得到了 $K_{\mathcal{L}}^{*}$ 中的紧致性定理：Γ 是可满足的，当且仅当它的每个有限子集是可满足的。特殊情况是，若 Γ 是语句的集合，则 Γ 有模型当且仅当它的每个有限子集有模型。事实上，不需要限定 Γ 为语句的集合，对于 Γ 为合式公式的集合，同样有 Γ 有模型当且仅当它的每个有限子集有模型。

【命题 5.5.4】 对于形式系统 $K_{\mathcal{L}}^{*}$ 的一致扩张 $\widetilde{K}_{\mathcal{L}}^{*}$，若 $\widetilde{K}_{\mathcal{L}}^{*}$ 有模型，则 $\widetilde{K}_{\mathcal{L}}^{*}$ 有一论域为可列集的模型。

证明： 若 $\widetilde{K}_{\mathcal{L}}^{*}$ 有模型，则根据命题 5.5.2 可知，$\widetilde{K}_{\mathcal{L}}^{*}$ 是一致的，进而对于去除了新加入个体词常元解释之后的正则解释 $\langle\mathcal{S},v\rangle$ 来说，$\mathcal{S}$ 就是 $\widetilde{K}_{\mathcal{L}}^{*}$ 的一个模型。由于语言 $\mathcal{L}$ 是可列集，其所有的项构成的集合也是可列集，所以 $\mathcal{S}^{*}$ 的论域为可列集。

■

命题 5.5.4 称为洛文海姆-斯科伦定理(Löwenheim-Skolem's theorem)，它是由德国数学家 L. Löwenheim 和挪威数学家 T. Skolem 分别给出的。

习题

1. 在形式系统 K 中，给出下列各变形关系的形式证明：

(1) $\neg(\exists x_i A)\vdash\forall x_i(\neg A)$；

(2) $\forall x_i(\neg A)\vdash\neg(\exists x_i A)$。

2. 在形式系统 K 中，给出下列各变形关系的形式证明(其中 x_j 对 x_i 在 A 中代入自由，且 x_j 不在 A 中自由出现)：

(1) $\forall x_i A \vdash \forall x_j A_{x_i}^{x_j}$；

(2) $\forall x_j A_{x_i}^{x_j} \vdash \forall x_i A$。

3. 在形式系统 K 中，给出下列各变形关系的形式证明：

(1) $\forall x_i(A \wedge B) \vdash \forall x_i A \wedge \forall x_i B$；

(2) $\forall x_i A \wedge \forall x_i B \vdash \forall x_i(A \wedge B)$；

(3) $\exists x_i(A \vee B) \vdash \exists x_i A \vee \exists x_i B$；

(4) $\exists x_i A \vee \exists x_i B \vdash \exists x_i(A \vee B)$。

4. 在形式系统 K 中给出下列各变形关系的形式证明(其中 x_i 不在 B 中自由出现)：

(1) $\exists x_i(A \rightarrow B) \vdash \forall x_i A \rightarrow B$；

(2) $\forall x_i A \rightarrow B \vdash \exists x_i(A \rightarrow B)$；

(3) $\exists x_i(B \rightarrow A) \vdash B \rightarrow \exists x_i A$；

(4) $B \rightarrow \exists x_i A \vdash \exists x_i(B \rightarrow A)$。

5. 在形式系统 K 中给出下列各变形关系的形式证明(其中 x_i 不在 B 中自由出现)：

(1) $\exists x_i(A \vee B) \vdash \exists x_i A \vee B$；

(2) $\exists x_i A \vee B \vdash \exists x_i(A \vee B)$；

(3) $\exists x_i(A \wedge B) \vdash \exists x_i A \wedge B$；

(4) $\exists x_i A \wedge B \vdash \exists x_i(A \wedge B)$。

6. 在命题 5.1.1 中，验证(iii)、(iv)、(v)、(vii)。

7. 给出命题 5.1.2 的详细证明。

8. 给出命题 5.2.4 中 $\Gamma, \exists x_i A \vdash \exists x_i B$ 的证明。

9. 证明下列 K^* 中的推演关系：

(1) $\exists x_i \exists x_j A \vdash \exists x_j \exists x_i A$；

(2) $\exists x_j \exists x_i A \vdash \exists x_i \exists x_j A$。

10. 证明下列 K^* 中的推演关系：

(1) $\forall x_i(A \wedge B) \vdash \forall x_i A \wedge \forall x_i B$；

(2) $\forall x_i A \wedge \forall x_i B \vdash \forall x_i(A \wedge B)$；

(3) $\exists x_i(A \vee B) \vdash \exists x_i A \vee \exists x_i B$；

(4) $\exists x_i A \vee \exists x_i B \vdash \exists x_i(A \vee B)$。

11. 证明下列 K^* 中的推演关系(其中 x_i 不在 B 中自由出现)：

(1) $\exists x_i(B \rightarrow A) \vdash B \rightarrow \exists x_i A$；

（2）$B\to\exists x_iA\vdash\exists x_i(B\to A)$。

12. 证明对于形式系统 K^* 中的合式公式集合 Γ，若 Γ 是极大一致的，则有 $\Gamma\vdash A$ 当且仅当 $A\in\Gamma$。

13. 令 $\widetilde{K}^*$ 是在形式系统 K^* 的符号表集合中加入一列个体词常元 $b_0,b_1,\cdots,b_n,\cdots$ 所得到的形式系统，合式公式 $B_k=\neg\forall x_{i_k}A_k\to\neg(A_k)^{c_k}_{x_{i_k}}$ 是按照本章中的构造方法构造出的，Δ 为所有这些构造出来的合式公式集合，证明 $\Gamma\cup\Delta$ 在 $\widetilde{K}^*$ 中是一致的。

14. 证明形式系统 K^* 中，合式公式集合 Γ 是不一致的，当且仅当存在 Γ 的一个有限子集是不一致的。

15. 证明对于形式系统 K^* 中极大一致的合式公式集合 Γ，以及任意的合式公式 A，有 $A\in\Gamma$ 当且仅当 $\neg A\notin\Gamma$。

16. 证明谓词逻辑中合式公式的集合 Γ 是可满足的，当且仅当它的每个有限子集是可满足的。

17. 证明对于谓词逻辑中合式公式的集合 Γ，Γ 有模型当且仅当它的每个有限子集有模型。