第 3 章　母函数

母函数这种手段有点类似于袋子。我们不需要单独拿着很多小物件——那样可能会让人很尴尬；我们把它们都装进袋子里，然后就只需要拿着袋子这一样东西了。

波利亚（G. Pólya），匈牙利数学家

母函数是一种强大的解决组合计数问题的工具。它的中心思想是将数列

$$\{a_n\}:\ a_0, a_1, a_2, \cdots$$

用如下幂级数来表示：

$$G_A(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{3-1}$$

此幂级数将数列中的项组合为了一个整体；通过研究 $G_A(x)$，我们可以推得数列 $\{a_n\}$ 的性质（例如它的通项表示）。

3.1　引论

对于数列 $\{a_n\}$，母函数 $G_A(x)$ 将其表示为一个关于 x 的幂级数，其中 x^k 项的系数是 a_k。我们下面通过几个例子揭示母函数采用这种表示方式的原因。

例 3.1　考虑我们在第 1 章中介绍的二项式定理：

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

在上式中令 $y=1$，得到

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

在上述等式右侧，我们已得到了一个关于 x 的（有限）幂级数。为此，我们构造数列 $\{a_k\}$，其通项为

$$a_k = \binom{n}{k} \qquad (0 \leqslant k \leqslant n)$$

则可知此数列的母函数即为

$$G_A(x) = (1+x)^n \tag{3-2}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{n}x^n \tag{3-3}$$

$G_A(x)$ 有两种表示方式，它除了可以写为幂级数形式 (3-3) 以外，也可写为多项式 $(1+x)$ 的 n 次幂的封闭形式 (3-2)。我们在 1.4 节中已经解释过二项式定理的组合意义，这里我们从母函数的角度出发重新讨论一次。

$a_k=\binom{n}{k}$ 的组合意义是从一个大小为 n 的集合中选出 k 个元素的方法数。在对此集合作组合时，集合中的每个元素都可以独立地选或不选，因此不同元素的选择情况适用乘法原理。我们用 $x^0=1$ 表示不选某一元素，用 $x^1=x$ 表示选择这一元素，二者相加得到多项式 $(1+x)$。考虑 $(1+x)^n$——即 n 个 $(1+x)$ 的乘积——的展开式，根据乘法分配律，展开式中的 x^k 项一定是使用了 k 个 $(1+x)$ 中的 x 这一项，以及其余 $n-k$ 个 $(1+x)$ 中的 1 这一项，它们分别对应了 k 个被选出的元素以及 $n-k$ 个未被选出的元素。因此，展开式中 x^k 项的系数即为从 n 个元素中选出 k 个的方案数。

进一步地，我们还注意到

$$1+x=1+1\cdot x$$

实际上就是集合中只有一个元素（即单元素集）时的母函数形式。常数项 1 和一次项 x 表示从单元素集中不选任何元素或选出一个元素均有 1 种方案。当集合中的元素从一个变为 n 个时，母函数的形式随之从上式变为上式的 n 次幂。

例 3.2　有一枚均匀的正方体骰子，抛掷两次，出现的点数之和为 9，求此事件发生的概率。

这是一个离散概率问题，每一次投掷骰子，出现的点数是 1、2、3、4、5、6 其中之一，每种点数的概率均为 $\frac{1}{6}$。若抛掷两次骰子，则基本事件空间的大小即为 $6^2=36$，且各基本事件是等可能的。

下面求点数之和为 9 对应的基本事件数量。我们用 x^k（$k=1,2,3,4,5,6$）表示抛掷一次骰子时掷出了点数 k 的这一事件，则抛掷一枚骰子的结果可表示为如下多项式：

$$G_1(x)=x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6$$

若抛掷两次，则根据乘法原理，应当将两个上述多项式相乘：

$$G_2(x)=\left(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)\left(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)$$

当我们展开上式右侧的多项式乘积时，左侧括号中多项式的某一 x^j 和右侧括号中多项式的某一 x^k 相乘，将得到 x^{j+k} 项；其意义即是第一次骰子掷出 j 点、第二次掷出 k 点，点数总和为 $j+k$ 的一个基本事件。由此可知，上式展开后，x^9 项的系数即为点数之和为 9 的基本事件数量。实际进行展开（具体过程略），可得 x^9 项的系数为 4，因此所求的概率为

$$P\left(\text{点数之和为}9\right)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

进一步地，假设抛掷 n 次骰子，点数总和为 m，则此事件对应的基本事件数量应为

$$G_n(x)=\left(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)^n$$

中 x^m 项的系数。构造数列 $\{b_m\}$，其中 b_m（$n \leqslant m \leqslant 6n$）表示投掷 n 次骰子使点数总和为 m 的基本事件数量，则 $G_n(x)$ 即为数列 $\{b_m\}$ 的母函数。上面构造的 $G_1(x)$ 和 $G_2(x)$ 分别是 $n=1$ 和 2 时的母函数形式。

例 3.3 有一架托盘天平（没有游码）和 4 枚砝码，砝码的质量分别为 1 克、2 克、3 克、4 克。若砝码和物体必须放在天平上不同的两侧，求这些砝码能称出多少种不同质量的物体、每种质量有多少种配置砝码的方案。

我们考虑用母函数来表示砝码能称出的物体质量，其中 x^n 的系数就代表了有多少种方案称出 n 克的物体。4 枚砝码分别独立选用，最终可称出的物体质量等于各枚砝码对天平一侧质量的贡献之和。因此，质量为 m 克的砝码对应的母函数应为

$$(1+x^m)$$

将 4 枚砝码对应的母函数相乘，得到

$$\begin{aligned} G(x) &= (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4) \\ &= 1+x+x^2+2x^3+2x^4+2x^5+2x^6+2x^7+x^8+x^9+x^{10} \end{aligned}$$

可见，4 枚砝码合在一起能称出 1 克、2 克、……、10 克这 10 种不同质量的物体，其中 3 至 7 克这 5 种质量的物体有两种配置砝码的方案，而其他质量的物体都仅有一种配置砝码的方案。

例 3.4 考虑例 3.3 中的托盘天平，以及 6 枚质量分别为 1 克、2 克、4 克、8 克、16 克、32 克的砝码，砝码和物体仍然必须放在天平上不同的两侧。求这些砝码能称出多少种不同质量的物体、每种质量有多少种配置砝码的方案。

这个例子中，我们仍然先写出多项式乘积形式的母函数：

$$G(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})$$

利用平方差公式展开等式右侧，将会产生 $2^6 = 64$ 项：

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})}{1-x} \\ &= \frac{(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})}{1-x} \\ &= \frac{(1-x^4)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})}{1-x} \\ &= \cdots \\ &= \frac{1-x^{64}}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{63} \end{aligned}$$

可见，用这 6 枚砝码可以称出 1 克到 63 克中的每一个整数质量，每种质量都恰好有一种称法。实际上，由于砝码的质量均是 2 的幂，每种砝码的配置方案都对应一个六位的二进制数，而 6 个二进制位恰好能唯一地表示 0 到 $2^6-1=63$ 这个范围中的每一个非负整数。

从以上几个例子中我们看到，将计数数列 $\{a_n\}$ 的各项作为母函数 $G_A(x)$ 展开式中的各项系数，并非是没有理由的直接规定，其本质是利用多项式乘法解决计数问题。具体地，如果某一组合过程可分为若干独立的步骤（如例 3.1 中的选择每一个元素、例 3.2 中的抛

掷每一次骰子），每一步骤有若干种可能的结果（如元素选或不选、骰子掷出不同的点数），最终结果可表示为每一步骤结果之和（如选出元素的总数、骰子的点数之和），则对此组合过程的计数问题特别适合用母函数解决：

- 每一步骤的不同结果适用加法原理，可表示为一个多项式或幂级数，其中的每一项均使用 x（或其他变量）的幂次表示这一步骤产生的结果。
- 不同步骤间彼此独立适用乘法原理，最终的母函数可表示为不同步骤对应的多项式或幂级数之积。

3.2　母函数的性质

使用母函数 $G(x)$ 研究数列时，通常需要利用其性质对其作各种变形。下面我们介绍两类常用的母函数性质。

第一类性质用于在级数形式的母函数

$$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

和分式形式的母函数之间作相互转换。分式形式的母函数的优点在于容易进行各类代数运算，包括四则运算、求导和积分，因此通常作为推导级数形式母函数手段使用。一般情况下，给定一个分式形式的母函数，对其作 Maclaurin 展开即可得到级数形式。我们最常用到的是如下 Maclaurin 展开式：

$$\frac{1}{1-ax}=\sum_{n=0}^{\infty}a^nx^n=1+ax+a^2x^2+\cdots \tag{3-4}$$

反过来，将级数形式的母函数转化为封闭形式则较为困难，通常需要先凑出上式右侧的形式，再反向利用上式得到形如 $\dfrac{1}{1-ax}$ 的分式。

第二类性质描述两个数列和其对应的母函数之间的关联。设有实数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$，其母函数分别为

$$A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

$$B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots$$

若 $\{a_n\}$ 的项和 $\{b_n\}$ 的项之间存在某些数学关系，则 $A(n)$ 和 $B(n)$ 间也应该存在相应的关系。我们具体讨论 7 种不同类型的关系。

定理 3.1（数列右移）　若

$$b_n=\begin{cases}0 & (0\leqslant n<m)\\ a_{n-m} & (n\geqslant m)\end{cases}$$

则

$$B(x)=x^mA(x) \tag{3-5}$$

证明

$$
\begin{aligned}
B(x) &= 0+0+\cdots+0+b_m x^m + b_{m+1}x^{m+1}+\cdots \\
&= a_0 x^m + a_1 x^{m+1} + \cdots \\
&= x^m A(x)
\end{aligned}
$$

■

定理 3.2（数列左移） 若 $b_n = a_{n+m}$（$m \geqslant 0$），则

$$
B(x) = \frac{1}{x^m}\left[A(x) - \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k\right] \tag{3-6}
$$

证明

$$
\begin{aligned}
B(x) &= a_m + a_{m+1}x + a_{m+2}x^2 + \cdots \\
&= \frac{1}{x^m}\left(a_m x^m + a_{m+1}x^{m+1} + a_{m+2}x^{m+2} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{x^m}\left[A(x) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \cdots - a_{m-1}x^{m-1}\right] \\
&= \frac{1}{x^m}\left[A(x) - \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k\right]
\end{aligned}
$$

■

以上两条性质中，数列 $\{b_n\}$ 由数列 $\{a_n\}$ 通过“左右平移”若干项得到，相当于将母函数整体乘上或除以 x 的对应次幂。需要注意的是当数列 $\{a_n\}$ “左移” m 项得到 $\{b_n\}$ 时，其前 m 项 $a_0, a_1, \cdots, a_{m-1}$ 被丢弃了，因此在由 $A(x)$ 计算 $B(x)$ 时也需要首先减去这些项对应的多项式，再除以 x^m。

定理 3.3（数列前缀和） 若 $b_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$，则

$$
B(x) = \frac{A(x)}{1-x} \tag{3-7}
$$

证明 将 $B(x)$ 的表达式中的各项系数用 $\{a_n\}$ 中的项表示：

$$
\begin{aligned}
B(x) &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots \\
&= a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + \cdots
\end{aligned}
$$

考查上述和式中 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ 这些数列元素的系数：

$$
\begin{aligned}
B(x) &= (1 + x + x^2 + \cdots)a_0 + (x + x^2 + \cdots)a_1 + (x^2 + \cdots)a_2 + \cdots \\
&= \frac{1}{1-x}a_0 + \frac{x}{1-x}a_1 + \frac{x^2}{1-x}a_2 + \cdots \\
&= \frac{1}{1-x}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right) \\
&= \frac{A(x)}{1-x}
\end{aligned}
$$

■

定理 3.4（数列后缀和） 若级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ 收敛，$b_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$，则

$$
B(x) = \frac{A(1) - xA(x)}{1-x} \tag{3-8}
$$

证明 幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 的收敛半径至少为 1，因此我们有

$$A(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

从而就有

$$b_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots = A(1) - a_0 - a_1 - \cdots - a_{n-1}$$

将后缀和转化为 $A(1)$ 与前缀和的差后，我们就可以与定理 3.2 中类似的方式进行后续推导：

$$\begin{aligned}
B(x) &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots \\
&= A(1) + \left[A(1) - a_0\right] x + \left[A(1) - a_0 - a_1\right] x^2 + \cdots \\
&= \left(1 + x + x^2 + \cdots\right) A(1) - \left(x + x^2 + \cdots\right) a_0 - \left(x^2 + \cdots\right) a_1 - \cdots \\
&= \frac{A(1)}{1-x} - \left(\frac{x}{1-x} a_0 + \frac{x^2}{1-x} a_1 + \cdots\right) \\
&= \frac{A(1)}{1-x} - \frac{x}{1-x} \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right) \\
&= \frac{A(1) - xA(x)}{1-x}
\end{aligned}$$

■

以上两条性质讨论的是 $\{b_n\}$ 是 $\{a_n\}$ 的前缀和或后缀和的场景。当 $\{b_n\}$ 的母函数难以直接求出，但其元素能表示为另一数列中元素之和时，可以利用这两条性质，首先构造数列 $\{a_n\}$ 并求出 $A(x)$，进而求出 $B(x)$。

定理 3.5　若 $b_n = n a_n$，则

$$B(x) = xA'(x) \tag{3-9}$$

证明

$$\begin{aligned}
B(x) &= 0 + a_1 x + 2a_2 x^2 + \cdots \\
&= x\left(0 + a_1 + 2a_2 x + \cdots\right) \\
&= x\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right)' \\
&= xA'(x)
\end{aligned}$$

■

定理 3.6　若 $b_n = \dfrac{a_n}{1+n}$，则

$$B(x) = \frac{1}{x}\int_0^x A(t)\mathrm{d}t \tag{3-10}$$

证明

$$\begin{aligned}
B(x) &= a_0 + \frac{a_1}{2}x + \frac{a_2}{3}x^2 + \frac{a_3}{4}x^3 + \cdots \\
&= \frac{1}{x}\left(a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \frac{a_3}{4}x^4 + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{x}\left(a_0 t + \frac{a_1}{2}t^2 + \frac{a_2}{3}t^3 + \frac{a_3}{4}t^4 + \cdots\right)\Bigg|_0^x \\
&= \frac{1}{x}\int_0^x A(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

■

以上两条性质通过对母函数求导和定积分来对数列进行变形。求导和定积分这两个操作的独特性在于它们不是线性变换，能在幂级数的不同项上引入不同的系数。

下面我们讨论由 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 的母函数进行加、减、乘运算生成的新数列。

定理 3.7 若数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = a_n + b_n$，则

$$C(x) = A(x) + B(x) \tag{3-11}$$

同理，若数列 $\{d_n\}$ 满足 $c_n = a_n + b_n$，则

$$D(x) = A(x) - B(x) \tag{3-12}$$

证明 显然成立。 ■

定理 3.8 若数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$，则

$$C(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots = A(x)B(x) \tag{3-13}$$

证明

$$\begin{aligned} C(x) &= a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) x + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) x^2 + \cdots \\ &= a_0 (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots) + a_1 x (b_0 + b_1 x + \cdots) + a_2 x^2 (b_0 + \cdots) + \cdots \\ &= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots) \\ &= A(x)B(x) \end{aligned}$$

■

当 $b_n \equiv 1$ 时，式 (3-13) 就退化为式 (3-7)，所以后者可看作前者的一个特殊情形。$C(x)$ 即为母函数 $A(x)$ 与 $B(x)$ 之积，称为二者的**Cauchy 乘积**。

例 3.5 设数列 $\{a_n\}$ 的母函数为

$$G_A(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

为了求数列的通项表示，我们可借助如下结论：

$$G_B(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$$

此母函数对应数列 $\{b_n\}$，其中 $b_n \equiv 1$。定理 3.3 指出 $\{a_n\}$ 中的项可表示为 $\{b_n\}$ 的前缀和：

$$G_A(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} b_k \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

由此可得通项表达式 $a_n = n + 1$。

在对母函数作任何变形时，均无须考虑幂级数收敛性问题，这是因为母函数 $G(x)$ 中的变量 x 可认为是一遵守实数运算规则的代数符号，而不是某一具体实数。附录 B.2 对此进行了详细的讨论。

3.3 整数拆分与 Ferrers 图像

本节中，我们研究将一个正整数拆分为若干正整数之和的问题。由于加法满足交换律，因此在计算拆分方案数前需要先决定是否考虑求和顺序。如果考虑顺序，那么称为**有序拆分**（composition），否则称为**无序拆分**（partition）。

3.3.1 有序拆分

有序拆分的情形相对容易处理。假如要将正整数 n 表示为 r 个正整数 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 之和，即

$$n = x_1 + x_2 + \cdots + x_r$$

这是线性方程的非负整数解问题，可以利用隔板法求解，我们在 1.6.1 节已经对此作过讨论。设想将 n 个相同的小球一字排开，代表待拆分的正整数 n；将 $r-1$ 个隔板插入小球间的 $n-1$ 个空隙中，方案数为

$$\binom{n-1}{r-1}$$

如果允许将 n 拆分为任意多个正整数，那么只需要对所有可能的 r 求上式的和：

$$\sum_{r=1}^{n} \binom{n-1}{r-1} = 2^{n-1}$$

这个结果的组合学意义也可以用隔板法解释：n 个小球间的 $n-1$ 个空隙中，每个空隙都可以独立地选择是否放置一个隔板，共有 2 种选择，利用乘法原理即得到上述结果。

例 3.6 $n = 4$ 有 8 种有序拆分方案：

$$\begin{aligned} 4 &= 4 \\ &= 1+3 = 2+2 = 3+1 \\ &= 1+1+2 = 1+2+1 = 2+1+1 \\ &= 1+1+1+1 \end{aligned}$$

3.3.2 无序拆分

与有序拆分不同，无序拆分只考虑拆分出的正整数的个数和取值，而不关心对这些整数作加法的顺序。在这种情况下，隔板法就不再适用了，这是因为“隔板”这一概念天然具有左右之分，导致它无法处理不考虑顺序的情况。

无序拆分问题可以表述为如下等价形式。

> 从 $1, 2, \cdots, n$ 中选取某些数，其中每个数都允许重复选取，对不同数的选取彼此独立，问有多少种方案使选取的数总和为 n？

我们可以使用母函数来解决无序拆分问题。具体地，我们考虑拆分得到的每种正整数对总和的贡献。对任何正整数 k 而言，拆分结果中可以出现 $0, 1, 2, \cdots$ 个 k，因此 k 对总和的贡献即是 $0, k, 2k, \cdots$ 之一，从而其对应的母函数即为

$$1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + \cdots = \frac{1}{1-x^k} \tag{3-14}$$

拆分结果中可能出现的正整数只有可能是 $1,2,\cdots,n$ 这 n 种情况，将它们对应的母函数乘在一起，得到

$$G_n(x)=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^n)} \tag{3-15}$$

上式展开成级数形式后，其中 x^n 的系数即为 n 的无序拆分方案数，称为 n 的**拆分数**，记作 $p(n)$。我们引入记号

$$[x^n]G(x) \tag{3-16}$$

表示幂级数 $G(x)$ 中 x^n 项的系数。由此，我们即有

$$p(n)=[x^n]G_n(x)$$

一般情况下，若我们只关心 $G_n(x)$ 中 x^n 项的系数，则可以将每个正整数 k 对应的母函数都写成多项式

$$1+x^k+x^{2k}+x^{3k}+\cdots+x^{mk}=\frac{1-x^{(m+1)k}}{1-x^k}\qquad\left(mk\leqslant n,\ (m+1)k>n\right)$$

而非如式 (3-14) 那样的无穷幂级数，从而简化对展开式中 x^n 项系数的计算过程。这是因为对任意给定的 n，其拆分方案中每个正整数的出现次数都显然有上限，否则拆分出的正整数之和将超过 n。

例 3.7 $n=4$ 的无序拆分对应的母函数为

$$\begin{aligned}G_1(x)&=\left(1+x+x^2+x^3+x^4\right)\left(1+x^2+x^4\right)\left(1+x^3\right)\left(1+x^4\right)\\&=1+x+2x^2+3x^3+5x^4+\cdots\end{aligned}$$

因此正整数 4 有 5 种无序拆分方案。

这个例子中的母函数也可写成与式 (3-15) 类似的形式：

$$G_2(x)=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

然后对其作 Maclaurin 展开到四阶项：

$$G_2(x)=1+x+2x^2+3x^3+5x^4+\cdots$$

由此能得到与上面相同的结论。但是，相较于求复杂分式的多阶导数，化简多项式乘积显然是更加简便的做法。

上面考虑的母函数 $G_n(x)$ 是给定了 n 时的母函数，仅在 $m\leqslant n$ 时有 $p(m)=[x^m]G_n(x)$，对于更大的 m 则不成立。为此，我们考虑构造适用于所有 $p(n)$ 的母函数（规定 $p(0)=1$）：

$$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p(n)x^n$$

我们令 k 取遍全部正整数，分别计算每个 k 对应的母函数（同式 (3-14)），将其全部相乘，得到

$$G(x)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^n}=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots} \tag{3-17}$$

我们始终没有使用母函数求 $p(n)$ 的具体值。实际上，用母函数求 $p(n)$ 并不方便，需要作复杂的级数展开；但在推导拆分数的性质方面，母函数则是最有力的工具之一。下面我们讨论几个关于拆分数的性质，并通过母函数方法证明这些性质。

例 3.8 将正整数 n 拆分为不大于 m 的正整数的和，求拆分方案数。

这个例子中，我们仅需考虑数 k（$k = 1, 2, \cdots, m$）对总和的贡献，因此母函数为

$$G_m(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$$

而所求的方案数即为 $[x^n]G_m(x)$。

例 3.9 将正整数 n 拆分为不大于 m 的正整数的和，要求拆分出至少一个 m，求拆分方案数。

这个例子中，我们仍然仅需考虑数 k（$k = 1, 2, \cdots, m$）对总和的贡献。但是，数 m 对应的母函数不再是

$$1 + x^m + x^{2m} + x^{3m} + \cdots = \frac{1}{1-x^m}$$

由于至少拆分出一个 m，因此数 m 对总和的贡献只能是 $m, 2m, 3m, \cdots$，其母函数变为

$$x^m + x^{2m} + x^{3m} + x^{4m} + \cdots = \frac{x^m}{1-x^m}$$

因此，母函数为

$$G(x) = \frac{x^m}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$$

这个例子还可以利用减法原理求解。如果一个拆分方案不满足要求，则其中就不能包含 m，因此就相当于将正整数 n 拆分为不大于 $m-1$ 的正整数的和。从上个例子的母函数中减去不满足要求的拆分方案对应的母函数，就得到了待求的母函数：

$$G(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)} - \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^{m-1})}$$

容易验证，上面两种 $G(x)$ 的表示方式是彼此等价的。

例 3.10 将正整数 n 拆分为互不相同的正整数之和的方案数，与将 n 拆分为奇数之和的方案数相同。例如，当 $n = 8$ 时，两者分别有 6 种拆分方案：

$$\begin{aligned} 8 &= 8 \\ &= 7+1 \\ &= 6+2 \\ &= 5+3 \\ &= 5+2+1 \\ &= 4+3+1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 8 &= 7+1 \\ &= 5+3 \\ &= 5+1+1+1 \\ &= 3+3+1+1 \\ &= 3+1+1+1+1+1 \\ &= 1+1+1+1+1+1+1+1 \end{aligned}$$

设 $G_1(x)$ 表示将 n 表示为互不相同的正整数之和的方案数的母函数，$G_2(x)$ 表示将 n 表示为奇数之和的方案数的母函数。如果 $G_1(x) = G_2(x)$，那么它们的展开式中 x^n 项的系数就对应相等，从而两种拆分方案数对任意的 n 都相等。

先求 $G_1(x)$。使用的正整数互不相同，则每个正整数至多使用一次，因此整数 k 对母函数的贡献就是 $(1 + x^k)$。由此可得

$$\begin{aligned} G_1(x) &= (1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^k)\cdots \\ &= \frac{1-x^2}{1-x}\,\frac{1-x^4}{1-x^2}\cdots\frac{1-x^{2k}}{1-x^k}\cdots \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^3}\cdots\frac{1}{1-x^{2k-1}}\cdots$$

上述推导的最后一步中，我们用无穷乘积中每一项的分子约去对应的分母。

再求 $G_2(x)$。拆分时只能使用奇数。考虑奇数 $2k-1$（$k=1,2,3,\cdots$），它对母函数的贡献的计算方式与之前相同，为

$$1+x^{2k-1}+x^{4k-2}+\cdots=\frac{1}{1-x^{2k-1}}$$

由此可得

$$G_2(x)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2k-1}}=\frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^3}\cdots\frac{1}{1-x^{2k-1}}\cdots$$

显然 $G_1(x)=G_2(x)$。因此，将正整数 n 拆分为互不相同的正整数之和的方案数，与拆分为奇数之和的方案数相同。

例 3.11　设 $p(n)$ 为正整数 n 的拆分数，则

$$p(n)<\exp\left(\sqrt{\frac{2\pi^2 n}{3}}\right)$$

其中 $\exp(x)$ 表示指数函数 e^x。

这个例子给出了关于整数拆分数的一个较为宽松的上界，因此虽然其中出现了常数 e 和 π，但并不必然意味着 $p(n)$ 与二者之间有某种紧密的联系。我们使用母函数证明此结论。

证明　首先写出 $p(n)$ 的母函数，并将其视为一个正常的幂级数：

$$\begin{aligned}G(x)&=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-x^n)}\\&=\frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^2}\cdots\frac{1}{1-x^k}\cdots\end{aligned}$$

我们任取 $0<x<1$，并在等式两侧分别取自然对数，然后在等式右侧对每一项作 Maclaurin 展开，得

$$\begin{aligned}\ln G(x)&=-\ln(1-x)-\ln\left(1-x^2\right)-\cdots\\&=\left(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots\right)+\left(x^2+\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^6+\cdots\right)+\cdots\end{aligned}$$

由于 $x>0$，等式右侧的级数中每一项均为正数；因此其只要收敛，则必为绝对收敛，调整求和顺序不影响结果。由此可得

$$\begin{aligned}\ln G(x)&=\left(x+x^2+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^4+\cdots\right)+\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}x^6+\cdots\right)+\cdots\\&=\frac{x}{1-x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{1-x^3}+\cdots\end{aligned}$$

又由 $0<x<1$，注意到

$$\begin{aligned}\frac{x^n}{1-x^n}&=\frac{x}{1-x}\cdot\frac{x^{n-1}}{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}}\\&<\frac{x}{1-x}\cdot\frac{x^{n-1}}{x^{n-1}+x^{n-1}+\cdots+x^{n-1}}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n}\frac{x}{1-x}$$

将其代入前式，得到

$$\begin{aligned}\ln G(x) &< \frac{x}{1-x} + \frac{1}{2^2}\cdot\frac{x}{1-x} + \frac{1}{3^2}\cdot\frac{x}{1-x} + \cdots \\ &= \frac{x}{1-x}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right) \\ &= \frac{\pi^2}{6}\frac{x}{1-x}\end{aligned}$$

最后一步使用了著名的 p 级数求和公式：

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$\ln G(x)$ 有上界同时也证明了 $G(x)$ 收敛，从而我们上面所进行的推导均是有效的。

现在我们从幂级数 $G(x)$ 中提取出 $p(n)$。由于 $p(n) > 0, x > 0$，因此我们有

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p(k)x^k > p(n)x^n$$

对不等式两侧分别取自然对数，然后运用 $\ln x \leqslant x - 1$ 进行放缩，得到

$$\begin{aligned}\ln p(n) &< \ln G(x) + n\ln\frac{1}{x} \\ &< \ln G(x) + n\left(\frac{1}{x} - 1\right) \\ &< \frac{\pi^2}{6}\frac{x}{1-x} + n\frac{1-x}{x}\end{aligned}$$

此不等式对任意 $0 < x < 1$ 成立，因此可令不等式右侧取其极小值，以获得 $\ln p(n)$ 的一个尽量紧的上界。为此，我们利用平均值不等式从不等式右侧式中消去 x，得到

$$\begin{aligned}\ln p(n) &< 2\sqrt{\frac{\pi^2}{6}\frac{x}{1-x}\cdot n\frac{1-x}{x}} \\ &= \sqrt{\frac{2\pi^2 n}{3}}\end{aligned}$$ ■

上述证明过程中进行的放缩较为激进，导致最终求得的上界非常宽松。例如，$p(8) = 22$，但例 3.11 给出的上界是 $p(8) \leqslant 1415$，二者相差了 60 多倍。

3.3.3　Ferrers 图像

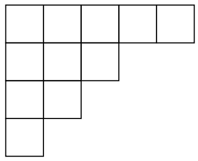
除了母函数以外，还有多种手段可用于研究整数的无序拆分。我们下面讨论的 Ferrers 图像即是一种专门用于研究无序拆分的数学工具。

Ferrers 图像是正整数的无序拆分方案的一种图形表示，它用 n 个边长相同的小正方形方格表示正整数 n。拆分出的每一个正整数对应 Ferrers 图像的一行，若拆分出的正整数为 r，则在 Ferrers 图像的它对应的那一行中左对齐地画出 r 个小方格。由于拆分是无序的，为了保证与拆分方案间的一一对应关系，Ferrers 图像中从上到下的每一行方格数单调不增；

换句话说，Ferrers 图像必须以从大到小的顺序依次画出拆分出的每个正整数。例如，对正整数 11 的拆分方案

$$11 = 5 + 2 + 3 + 1$$

表示为如下 Ferrers 图像：



拆分出的 3 必须画在 2 的上方，否则就违反了 Ferrers 图像的规则。

Ferrers 图像看上去像是一个倒过来的台阶：图形在上部和左部对齐，在右下方则形成台阶状的折线。利用 Ferrers 图像，我们能得到一些关于整数拆分方案数的相当有趣的结论。

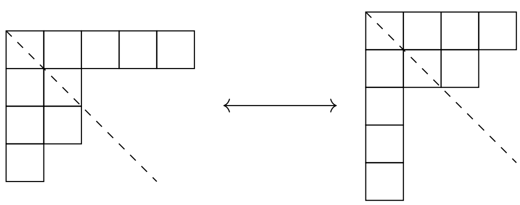
例 3.12　将正整数 n 拆分为不多于 m 个正整数之和的方案数，与将 n 拆分为不超过 m 的正整数之和的方案数相同。

通过 Ferrers 图像，我们可以轻易证明这个结论。对于任何一个不多于 m 个正整数的拆分方案，它对应的 Ferrers 图像最多有 m 行；对于任何一个使用不超过 m 的正整数的拆分方案，它对应的 Ferrers 图像最多有 m 列。我们下面证明这两类 Ferrers 图像间存在一一对应关系，从而二者的数量也就必然相等。

证明　考虑从 Ferrers 图像的左上角开始，向右下方 45° 方向作一条对角线，然后作 Ferrers 图像关于此对角线的对称图形（可以理解为绕此对角线翻转 180°）。对称操作使得原来图形中的每一行变成了新图形中的每一列，原来的每一列变成了新图形中的每一行。因此，对一个最多 m 行的 Ferrers 图像做上述对称操作，我们就能得到一个最多 m 列的图形；如果该图形也是一个 Ferrers 图像，那么我们就成功建立了一种从“不超过 m 个正整数的拆分方案”到“使用不超过 m 的正整数的拆分方案”的一一对应关系。

实际上，Ferrers 图像绕对角线做对称操作，得到的一定仍然是一个 Ferrers 图像。首先，经由对称操作得到的图形仍然包含 n 个小方格，并且它们在上部和左部对齐。其次，原本的 Ferrers 图像中每行的小方格都左对齐，因此必然不会出现某一列比它左侧一列更长的情况，否则就意味着多出来的这些方格没有左对齐；因此，在由对称操作得到的新图形中，每一行都不比它上方一行更长，满足 Ferrers 图像的性质。 ■

例如，考虑将 10 拆分为不超过 4 个正整数的方案，以及将 10 拆分为不超过 4 的正整数的方案。我们画出一个满足前者要求的 Ferrers 图像，然后做它关于对角线的对称：



如此，我们就建立了如下两个拆分方案的一一对应关系：

$$10 = 5 + 2 + 2 + 1$$

$$10 = 4 + 3 + 1 + 1 + 1$$

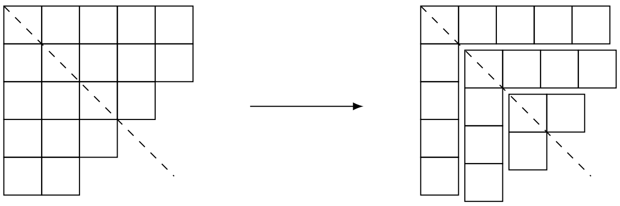
对特定的 n，如果两个拆分方案对应的 Ferrers 图像关于对角线对称，则我们称这样的两个拆分方案互为**共轭**（conjugate）。如果一个拆分方案的共轭是它自身，则称这个拆分方案自共轭，它的 Ferrers 图像应当沿对角线轴对称。

例 3.13　正整数 n 的自共轭的拆分方案数与仅使用奇数的拆分方案数相同。

证明　我们使用 Ferrers 图像证明这个结论。考虑某个自共轭的拆分方案，例如

$$19 = 5 + 5 + 4 + 3 + 2$$

画出它的 Ferrers 图像，这将是一个沿对角线轴对称的图形。现在设想"切下"这个图形的第一行和第一列。由于第一行和第一列关于对角线轴对称，因此切下它们之后，余下的图形仍然关于对角线轴对称；简单讨论可知，余下的图形仍然是一个 Ferrers 图像。我们继续切下余下的 Ferrers 图像的第一行和第一列，如此反复，我们就将原本的 Ferrers 图像切成了若干层，如下所示：



由于图形沿对角线对称，因此每次切下的第一行和第一列的长度都相等；又因为第一行和第一列恰好共享一个小方格，因此每次切下的小方格的数量必然是一个奇数。另一方面，每进行一次切割，剩下的 Ferrers 图像的行数和列数都至少要减少 1，因此每次切下的小方格数量都必然比上次更少。因此，每次切下的小方格的数目将是一系列互不相同的奇数，而这同样对应于 n 的一个拆分方案。例如，上图对应的拆分方案是

$$19 = 9 + 7 + 3$$

拆分出的 3 个正整数分别对应从 Ferrers 图像中切出的 3 层。

上述讨论表明，n 的每一个自共轭的拆分方案都对应一个使用互不相同的奇数的拆分方案。简单讨论可以得知，每一个使用互不相同的奇数的拆分方案同样也对应一个自共轭的拆分方案：我们可以逆向执行上面的流程，把每个奇数替换为"L"字形的方格，然后将它们拼在一起，得到一个沿对角线对称的 Ferrers 图像。综上所述，n 的自共轭的拆分方案与使用互不相同的奇数的拆分方案之间存在一一对应关系，因此二者方案数相同。　■

3.4　指数型母函数

回顾 3.1 节中对母函数适用范围的讨论：母函数适合解决"组合"问题而非"排列"问题，即将问题分为若干独立的步骤后，不同的步骤之间没有顺序（或者也可说是有一预先确定的顺序）。如果不同的步骤间可以有不同的顺序，则上述母函数形式就相对不适用。

我们以组合数 $\binom{n}{k}$ 和排列数 $P(n,k)$ 为例展示母函数在处理排列类问题时的困难。对

$\binom{n}{k}$ 而言，其母函数有简洁的封闭形式：

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=(1+x)^n \tag{3-18}$$

封闭形式 $(1+x)^n$ 有明确的组合意义：n 个元素中的每一个均可以独立地选或不选，因此对单元素集作组合的方案数的母函数即为 $(1+x)$；由乘法原理，它的 n 次幂即为对 n 元素集作组合的方案数的母函数。现在再考虑排列数 $P(n,k)$，它的母函数为

$$\sum_{k=0}^{n}P(n,k)x^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k!\cdot x^k \tag{3-19}$$

一方面，我们难以将上述和式表示为一个简洁的封闭形式，这给后续的变形和分析带来了困难；更关键的是，排列数的母函数与组合数不同，不适用乘法原理。例如，对单元素集作排列，其方案数的母函数仍为 $(1+x)$，但它的 n 次幂则显然不是对 n 元素集作排列的方案数的母函数。

为了解决上述问题，我们考查式 (3-18) 和式 (3-19) 的区别：后者在 x^k 这一项的系数上额外乘上了 $k!$。从组合学意义的角度来看，二者的展开式中，x^k 项均对应于从一大小为 n 的集合中选出 k 个元素的组合场景，区别在于组合数不考虑这些元素的顺序，而排列数考虑元素顺序，因此需要在组合数的基础上再乘上 $k!$，代表不同的元素排列方式。正是这多出来的 $k!$ 使母函数变得难以化简且不满足乘法原理。

考虑母函数本身的含义，母函数 $G(x)$ 可以视为对数列 $\{a_n\}$ 的一种编码，它应当满足两个条件：从 $\{a_n\}$ 出发能够求得 $G(x)$ 展开式中的各项系数，反过来从 $G(x)$ 出发也能求得 $\{a_n\}$ 的各项。因此，母函数的性质

$$[x^n]G(x)=a_n$$

实际上并不必须成立。理论上，只需令

$$[x^n]G(x)=f_n(a_n)$$

就能使上述两个条件得到满足，其中 f_n（$n=0,1,2,\cdots$）均是可逆函数。

综合以上讨论的结果，我们发现，在处理排列问题时，我们可以不使用原本的母函数形式

$$G(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$

改为使用

$$G_{\mathrm{e}}(x)=a_0+a_1x+\frac{a_2}{2!}x^2+\frac{a_3}{3!}x^3+\cdots$$

以消去式 (3-19) 中的 $k!$，从而使其能够继续化简，同时也能重新适用乘法原理。这种形式的母函数称为**指数型母函数**。

定义 3.9（指数型母函数）　设 $\{a_n\}$ 是实数列。定义 $\{a_n\}$ 的指数型母函数为

$$G_{\mathrm{e}}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^n}{n!}=a_0+a_1x+\frac{a_2}{2!}x^2+\frac{a_3}{3!}x^3+\cdots \tag{3-20}$$

如果令 $a_n \equiv 1$，则

$$G_e(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

结果是自然指数函数 e^x，此即为指数型母函数命名的由来。

例 3.14　有 8 颗小球，其中 3 颗红球、3 颗黄球、2 颗蓝球，每种颜色的小球之间无任何区别。从中选取 4 个小球排成一行，求方案数。

这个例子中，我们分别考虑每种颜色的小球对应的指数型母函数：

- 红球：$G_R(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3$
- 黄球：$G_Y(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3$
- 蓝球：$G_B(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2$

将以上三者相乘，即得所要求的指数型母函数：

$$\begin{aligned} G_e(x) &= G_R(x)G_Y(x)G_B(x) \\ &= \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3\right)^2 \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2\right) \\ &= 1 + 3x + 9 \cdot \frac{x^2}{2!} + 26 \cdot \frac{x^3}{3!} + 70 \cdot \frac{x^4}{4!} + \cdots \end{aligned}$$

可得有 70 种不同的方案。

我们作一些额外的讨论来展示这个例子中指数型母函数的作用。首先，为 x 加上 R、Y、B 这 3 种下标之一以区分不同颜色小球的贡献：

$$G_e(x) = \left(1 + x_R + \frac{1}{2!}x_R^2 + \frac{1}{3!}x_R^3\right)\left(1 + x_Y + \frac{1}{2!}x_Y^2 + \frac{1}{3!}x_Y^3\right)\left(1 + x_B + \frac{1}{2!}x_B^2\right)$$

考虑展开式中的 x^4 项，它有多种表示方式，例如其中一种为

$$x_R x_Y^2 x_B$$

这代表选出一个红球、两个黄球和一个蓝球的情况。将这 4 个小球排成一行，对应于 1.5.1 节讨论过的多重排列，其方案数为

$$\frac{4!}{1! \cdot 2! \cdot 1!} \tag{3-21}$$

注意到在三种颜色的小球各自对应的指数型母函数中，x_R、x_Y^2、x_B 的系数分别是 $\frac{1}{1!}$、$\frac{1}{2!}$、$\frac{1}{1!}$，因此这三项乘在一起，将得到

$$\frac{1}{1! \cdot 2! \cdot 1!} x_R x_Y^2 x_B$$

当利用指数型母函数的定义式 (3-20) 求 a_4 时，我们需要把 $G_e(x)$ 展开式中 x^4 项的系数乘以 4!，这将使上式中 $x_R x_Y^2 x_B$ 的系数变为式 (3-21)，即真正的多重排列方案数。由此可见，在每种颜色的小球对应的指数型母函数中，x^n 项系数除以 $n!$ 的组合学意义在于：n 个相同颜色的小球彼此间交换位置不影响最终的排列结果，因此需要排除它们之间顺序对结果的影响，故应除以 $n!$。

例 3.15 求 1、3、5、7、9 这 5 个数字组成的 n 位数的个数，要求 3 和 7 两个数字各自出现的次数均为偶数，其余数字的出现次数则没有限制。

这个例子中，我们可以设满足条件的 n 位正整数的数量为 a_n。先写出数列 $\{a_n\}$ 的指数型母函数：

$$G_e(x)=\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^2\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^3$$

其中等式右侧的三次方项对应的是 1、5、9 这 3 个不受限制的数字，它即等于 e^{3x}。等式右侧的二次方项对应的是 3 和 7 这两个受限的数字，我们可利用 e^x 的展开式对其进行化简：

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

因此，得

$$1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$$

由此，我们可以化简并展开 $G_e(x)$：

$$\begin{aligned}G_e(x)&=\frac{1}{4}\left(e^x+e^{-x}\right)^2e^{3x}\\&=\frac{1}{4}\left(e^{2x}+2+e^{-2x}\right)e^{3x}\\&=\frac{1}{4}\left(e^{5x}+2e^{3x}+e^x\right)\\&=\frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^nx^n}{n!}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^nx^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4}\left(5^n+2\cdot 3^n+1\right)\frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

最终，我们得到

$$a_n=\frac{1}{4}\left(5^n+2\cdot 3^n+1\right)$$

例 3.16 设 n 为非负整数，求将 $2n$ 名学生两两分组、各组间没有顺序的方案数。

记分组方案数为 a_{2n}，我们下面求解数列 $\{a_n\}$ 的指数型母函数。首先单独考虑一组学生的情况：由于每组中恰好有 2 名学生，因此其指数型母函数为

$$G_e^*(x)=\frac{x^2}{2!}$$

总共可以有 $n=0,1,2,\cdots$ 组学生，因此分组方案数的指数型母函数即为

$$\begin{aligned}G_e(x)&=1+G_e^*(x)+\frac{1}{2!}G_e^*(x)^2+\frac{1}{3!}G_e^*(x)^3+\cdots\\&=e^{G_e^*(x)}\\&=e^{\frac{x^2}{2}}\end{aligned}$$

要求的是其中 x^{2n} 项的系数，为 $\dfrac{1}{2^n \cdot n!}$，因此分组方案数即为 $\dfrac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$。这一结果可作如下解释：首先，我们将 $2n$ 名同学排成一行，并将第 1、2 人分为一组、第 3、4 人分为一组，以此类推，方案数为 $(2n)!$；每组内的两人没有顺序，因此结果要除以 2^n，另外分出的 n 组间也没有顺序，因此结果要再除以 $n!$。

表面上，这个例子中每组内部的两个学生之间没有顺序，分出的各组间也没有顺序，看似是一个组合问题，应该使用普通的母函数。然而，实际上，将上述求解过程中的指数型母函数替换为普通的母函数，最终只能得到方案数为 1 的错误结论。这主要是因为普通的母函数无法刻画 n 名学生之间的区别。

使用指数型母函数时，需注意使 x^k 项对应的组合场景中包含恰好 k 个可排列顺序的对象。因此，若有一个能使用母函数解决的组合问题，对其增加顺序约束后，问题不一定能用指数型母函数求解。例如，重新考虑例 3.3 中的天平和砝码，将其修改为一个包含顺序约束的版本：

> 有一架天平（没有游码）和若干不同质量的砝码，天平一侧是放置物品的托盘，另一侧是用于悬挂砝码的挂钩。第一枚砝码挂在天平上，后续砝码依次挂在上一枚砝码下方，因此砝码可以有不同的悬挂顺序。现有一质量为 m_0 克的物体，问有多少种悬挂砝码的方式使天平平衡？

这个例子中如不考虑砝码顺序，则可令 x^n 中的幂次 n 对应砝码的质量，从而一枚质量为 m 克的砝码就对应于多项式 $(1+x^m)$，将所有砝码对应的多项式乘在一起即得到要求的母函数，其中 x^{m_0} 项的系数即为答案。但是，若要考虑砝码的顺序，则指数型母函数

$$G_e(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

中的 $n!$ 将不具有任何实际意义，因为我们没有办法将每一克质量分开进行排序。因此，指数型母函数不能用于求解这个例子中的问题。

下面我们讨论指数型母函数的几个性质。设有实数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$，其指数型母函数分别为

$$A_e(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n=a_0+a_1x+\frac{a_2}{2!}x^2+\frac{a_3}{3!}x^3+\cdots$$

$$B_e(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}x^n=b_0+b_1x+\frac{b_2}{2!}x^2+\frac{b_3}{3!}x^3+\cdots$$

对二者作加、减、乘三种运算，可以生成新的数列。对此，我们有如下结论。

定理 3.10　若数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n=a_n+b_n$，则

$$C_e(x)=A_e(x)+B_e(x) \tag{3-22}$$

同理，若数列 $\{d_n\}$ 满足 $c_n=a_n+b_n$，则

$$D_e(x)=A_e(x)-B_e(x) \tag{3-23}$$

证明 显然成立。 ■

定理 3.11 若数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}$，则

$$C_e(x) = c_0 + c_1 x + \frac{c_2}{2!}x^2 + \frac{c_3}{3!}x^3 + \cdots = A_e(x)B_e(x) \tag{3-24}$$

证明 考虑 $C_e(x)$ 中 x^n 项的系数：

$$\begin{aligned}
[x^n]C_e(x) &= \sum_{k=0}^{n}[x^k]A_e(x)\cdot[x^{n-k}]B_e(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k!}\cdot\frac{b_{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \frac{1}{k!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k b_{n-k}
\end{aligned}$$

这表明 $C_e(x)$ 即为 $c_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k b_{n-k}$ 的指数型母函数。 ■

习题

3.1 设 $a_n = n^2$（$n \geqslant 0$），求数列 $\{a_n\}$ 的母函数，化简至封闭形式。

3.2 设 $a_n = n^3$（$n \geqslant 0$）。

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的母函数，化简至封闭形式。

（2）设 $b_n = \sum_{k=1}^{n+1} a_k$（$n \geqslant 0$），求数列 $\{b_n\}$ 的母函数，化简至封闭形式。

3.3 设 $a_n = \binom{n+3}{3}$（$n \geqslant 0$），求数列 $\{a_n\}$ 的母函数，化简至封闭形式。

3.4 设 k 是正整数，$a_n = \binom{n+k}{k}$（$n \geqslant 0$），求数列 $\{a_n\}$ 的母函数，化简至封闭形式。

3.5 求母函数 $\dfrac{3}{1-5x-6x^2}$ 对应的数列的通项公式。

3.6 求母函数 $\dfrac{5-51x}{1-15x-54x^2}$ 对应的数列的通项公式。

3.7 设数列 $\{a_n\}$ 的母函数为

$$A(x) = \frac{4-3x}{(1-x)(1+x-x^3)}$$

按如下方式定义数列 $\{b_n\}$：

$$b_n = \begin{cases} a_0 & (n=0) \\ a_n - a_{n-1} & (n>0) \end{cases}$$

求数列 $\{b_n\}$ 的母函数，化简至封闭形式。

3.8　求如下数列的母函数，化简至封闭形式（数列均从第 0 项开始）：

（1）$1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,\cdots$。

（2）$1,0,1,0,1,0,1,0,\cdots$。

（3）$1,0,2,0,3,0,4,0,\cdots$。

3.9　设 α 是实数，求如下数列的母函数，化简至封闭形式（数列均从第 0 项开始）：

（1）$\binom{\alpha}{0},\binom{\alpha}{1},\binom{\alpha}{2},\cdots,\binom{\alpha}{n},\cdots$。

（2）$\binom{\alpha}{0},-\binom{\alpha}{1},\binom{\alpha}{2},\cdots,(-1)^n\binom{\alpha}{n},\cdots$。

3.10　设 $a_n=\dfrac{1}{n+1}$（$n\geqslant 0$），求数列 $\{a_n\}$ 的指数型母函数，化简至封闭形式。

3.11　设 $a_n=n^2$（$n\geqslant 0$），求数列 $\{a_n\}$ 的指数型母函数，化简至封闭形式。

3.12　利用母函数方法，求以下递推关系的解，假设 $a_0=0,a_1=1$：

（1）$a_n-2a_{n-2}=0$。

（2）$a_n-7a_{n-1}+12a_{n-2}=0$。

（3）$a_n+12a_{n-1}+36a_{n-2}=0$。

（4）$a_n-a_{n-1}-6a_{n-2}=0$。

3.13　利用母函数方法，证明：$\sum\limits_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}\binom{n+m-i}{r}=\binom{n}{r-m}$。

3.14　由 a、b、c、d、e、f 这 6 个字母组成长度为 n 的字符串，要求 a 和 b 至少出现一次，且 c 和 d 均出现偶数次，求满足要求的字符串数目。

3.15　设 n 是正整数，有不定方程 $a+b+c+d=n$。分别考虑如下给出的每个条件，记在该组条件下不定方程的非负整数解的数目为 a_n，求数列 $\{a_n\}$ 的母函数：

（1）a,b,c,d 均是偶数。

（2）a,b,c,d 均是奇数。

（3）$a=0$、$b\leqslant 1$。

（4）$a\in\{2,3,13\}$、$b\in\{5,7,11\}$。

（5）a 是偶数、b 是 4 的倍数、$c\leqslant 3$、$d\leqslant 1$。

3.16　已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_0=1$。

（1）若 $a_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_ka_{n-1-k}$，求 $\{a_n\}$ 的母函数，化简至封闭形式。

（2）若 $a_n=a_{n-1}+\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_ka_{n-1-k}$，求 $\{a_n\}$ 的母函数，化简至封闭形式。

3.17　设 $a_0=1$，且对任意 $n\geqslant 1$ 有 $a_n=\sum\limits_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor}a_i$。

（1）证明：数列 $\{a_n\}$ 的母函数为 $A(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\prod\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{1-x^{2^n}}$。

（2）证明：$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}x^n = \frac{A(x)}{1-x}$。

（3）设 n 是正整数。设 $\{p_k\}$ 是各项之和为 n 的正整数数列，且对任意小于数列长度的正整数 k 有 $\sum_{i=0}^{k-1} p_i \leqslant p_k$。证明：共有 a_n 个这样的数列。

（4）证明：存在正常数 C 和 n_0，使得对任意正整数 $n \geqslant n_0$ 均有 $a_n \leqslant Cn^{\lfloor \frac{1}{2}\log_2 n \rfloor}$。

3.18 求不同的 n 行 m 列的 Ferrers 图像的数目。

3.19 求如下整数拆分方案的共轭：

（1）$13 = 5 + 4 + 3 + 1$。

（2）$16 = 5 + 5 + 3 + 3$。

（3）$21 = 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$。

（4）$24 = 7 + 6 + 6 + 4 + 1$。

3.20 设 n 是正整数，证明：在 n 的全部无序拆分方案中，没有 4 的倍数的方案数目等于没有重复偶数的方案数目。

3.21 对所有正整数 n，讨论是否存在 n 的一个自共轭的无序拆分方案；如果存在，则构造一个这样的拆分。