第 1 章
绪论

1.1 偏微分方程与边界控制

航空航天工程、土木工程、化学工程、电气工程、机械工程和物理学中许多系统都是由偏微分方程（partial differential equation，PDE）模型建模的，研究偏微分系统具有一定的现实意义和使用价值。偏微分方程是解决数学问题和生活问题的一种重要工具。生活中的物理现象（如热传导和渗流问题）可以用抛物型偏微分系统加以描述[1]；物体的振动可以用双曲型偏微分方程刻画；弹性力学的平衡问题可以用椭圆型偏微分方程描述。偏微分方程的发展对数学学科本身的发展也具有巨大的推动作用，比如对于偏微分方程的数值解法及对解的存在性、唯一性和稳定性的研究，促进了数学领域中泛函分析、非线性分析、差分论、动力系统、拓扑学、微分几何等各个方面的发展。关于偏微分系统控制问题的研究始于 20 世纪 60 年代，它是控制理论不可或缺的一个研究方向。

控制理论的发展分为两个阶段，经典控制理论阶段和现代控制理论阶段。1868 年，英国物理学家麦克斯韦提出了具有重大意义的稳定性代数判据，开创性地运用数学方法研究控制系统，为后续的控制理论研究提供了新思路。以此为起点，在众多研究者的努力下，经典控制理论建立起来，并成为设计反馈控制系统的一个重要工具。因为经典控制理论的限制，复杂的系统控制问题未能得到有效的解决，需要对经典控制理论加以改进和推广，于是形成了现代控制理论。1892 年俄国数学家李雅普诺夫提出的稳定性理论在控制理论中得到广泛应用，状态空间模型也成为描述系统的主要数学模型，由原来经典控制理论的频域推广到更易于被理解和接受的时间域，许多复杂的控制理论问题（如能观性、能控性、稳定性）得到简化。

在控制科学中，常微分方程控制理论较为完善，但偏微分方程的控制理论还有很多方面需要进一步发展和研究。偏微分系统的控制如果施加在整个空间域

内称为“分布控制”，如果施加在空间域某些点上则称为“点控制”，如果仅施加在边界上称为“边界控制”。若控制施加在整个空间域内，工程上实现起来难度较大，耗费资源也较多；而边界控制在工程上实现相对简单，且资源耗费较少。边界控制是偏微分系统控制中较为重要的研究方向，近年来受到越来越多控制领域学者的关注。边界控制适用于偏微分系统，可以解决无穷维系统状态方程的控制稳定问题。边界控制器是基于反步变换设计的，是一个反馈控制，这个控制的可行性由增益核函数确定。相较于其他分布式控制，边界控制器的实施只需利用边界的系统状态信号，减少了资源消耗，具有很大的经济优势。

实际系统通常可以用一个非线性偏微分方程和一组常微分方程（ordinary differential equation，ODE）来建模[1]。这种混合动态系统具有无穷大的维数，难以给出有效的控制方法。传统的偏微分方程控制策略存在一些不足：一是为了实现高精度的控制性能，需要增加控制阶数并考虑多种柔性模态；二是需要分布式控制来克服计算无限维增益矩阵的困难；这两个缺点使得控制难以从工程的角度来实现。第三个缺点是控制设计仅限于少数几个关键模式而忽略了高频模式，从而导致系统的控制溢出不稳定。为了克服上述缺点，需对偏微分方程进行边界控制设计，该设计基于原有的系统无穷维模型。与分布式控制相比，边界控制需要更少的传感器和执行器，因此被认为更经济实用。动能、势能及用于建模的非保守力所做的功可以直接用来构建系统稳定性分析的李雅普诺夫函数。近年来，边界控制与滑模控制、神经网络控制、鲁棒自适应控制、迭代学习控制、模糊控制等其他智能控制方法相结合，取得了许多成果。但是在这些研究结果中，大多数的研究对象都是柔性机械臂。对于轴向运动系统，许多学者也做了大量的工作。对控制工程师来说，很少有控制理论的领域像偏微分方程控制那样具有物理动机。甚至像热方程和波动方程这样的普通问题也要求用户在研究这些系统的控制设计方法，特别是边界控制设计之前，具有相当多的偏微分方程和功能分析的背景。因此在工程程序中，偏微分方程的控制课程是非常少见的。控制理论专业的学生很少接受偏微分方程（更不用说控制偏微分方程）的培训，而且缺少了许多物理应用的机会。在这些物理应用中，偏微分方程的课程和培训无论是在技术层面还是在基础层面都可以做出贡献。

偏微分方程的控制大致有两种设置，取决于执行器和传感器的位置。在域控制中，执行器穿透到偏微分系统的域内，或者均匀地分布在域内的任何地方（同样通过传感器）实施边界控制，执行器和传感器仅通过边界条件应用。边界控制通常被认为是物理上更现实的，因为驱动和传感是非侵入性的（例如

流体流动问题中驱动通常来自流动区域的壁）。边界控制通常也被认为是比较困难的问题，因为输入算子和输出算子都是无界算子。由于更大的数学难度，近年来开发的方法已经很少涉及偏微分方程的边界控制问题，且大多数关于偏微分方程控制的书籍要么没有涵盖边界控制，要么只有一小部分内容包含边界控制。

1.2 反步法与边界控制

随着科学技术的进步，控制技术已广泛应用于航空航天、机械、化工、生物医药等各个领域。在控制系统的所有特性中，稳定性占有举足轻重的地位，相比于不稳定的系统，稳定的系统在实际生活中有更多的应用。边界控制的普及和应用给工业生产带来了极大的便利和经济效益。对于偏微分系统边界控制的研究，文献 [2] 做了大量基础性工作。

在工程控制中，以常微分方程系统来刻画控制模型的方法很常见，如文献 [3] 中考虑了包含中间点信息的耦合二阶常微分波动系统的稳定性；在文献 [4] 中研究了一类由常微分方程和边界扰动不确定梁方程描述的非线性耦合系统的混合模糊边界控制问题。基于 Takagi-Sugeno（T-S）模糊模型的非线性系统控制技术因其可以结合模糊逻辑理论和线性系统理论的优点[5-7]，也已被广泛应用于非线性微分方程[8-10] 中。在最近的几十年里，由偏微分方程刻画控制模型的方法也被广泛研究。在文献 [11-15] 中研究了关于耦合双曲线偏微分方程–常微分方程系统的控制问题。在文献 [16-17] 中，反应扩散方程的边界控制被研究；另外反应扩散方程与常微分方程的耦合问题[18-20]，反应扩散方程与常微分方程的级联问题[21-23] 也都被广泛研究。

关于控制的方法多种多样，目前可采用多种控制方法设计控制器实现系统的稳定性，其中边界输出反馈控制方式最为广泛。边界输出反馈的控制方法通常有李雅普诺夫函数法、阻尼法、反步法等。近年来，Krstic 和 Smyshlyaev 等将反步法引入偏微分方程的边界控制中[2,24-26]。反步法控制器包含一个积分算子，这个积分算子称为变换的“核函数”，由于反步法计算简单且容易实现，所以得到了很好的发展：在文献 [25] 中利用该方法设计了只有边界检测功能的一类抛物型偏微分方程的指数收敛观测器；在文献 [27] 中研究了不受控制的边界上反阻尼反稳定波动方程的边界控制；在文献 [28] 中利用反步法研究了一类一维抛物型偏微分方程的边界稳定问题，其中该论文在研究中避免了以往工作中需要的空间离散化；在文献 [3] 中考虑的耦合二阶常微分波动系统的稳定性问题，也

是利用该方法进行研究的。

在众多研究工作中，偏微分系统的边界控制成为一个重点研究对象。近年来，四阶方程得到了广泛的研究，并在物理工程、计算机技术、图像处理等领域得到了广泛的应用。其中文献 [29-31] 讨论了四阶 Kuramoto-Sivashinsky 方程（KSE）的镇定问题。在文献 [31] 中，使用输入延迟方法提出了点测量下 KSE 的采样数据控制。此外，文献 [29-30] 讨论了其他使 KSE 稳定的反馈控制器设计方法。在众多关于边界控制的论文中，致力于研究四阶偏微分方程模型的成果较少。因此，有必要对本书提出的四阶偏微分方程进行研究。四阶偏微分系统的控制比低阶偏微分系统的控制更具挑战性，证明核函数存在性的过程是冗长而复杂的。在文献 [32] 中，研究了由关于时间二阶、关于空间四阶的偏微分方程组成的剪切梁系统的稳定性，通过引入变量将四阶剪切梁系统转化为波动方程。在文献 [33-34] 中，分别研究了三阶 Korteweg-de Vries（KdV）方程和三阶线性与非线性薛定谔方程的镇定问题。文献 [33] 中证明核函数存在性的方法巧妙地解决了高阶偏微分方程的相应问题，本书将该方法应用于四阶抛物型系统。此外，二阶方程（如热传导方程和波动方程）在大量的文章中被研究，例如文献 [32, 35-37]。特别地，在文献 [35-36] 中考虑了边界上的不确定性扰动；其中在文献 [35] 中运用了两步反步变换法，引入中间辅助波动系统，将初始系统间接转化为简单目标系统；利用逐次逼近方法解决了文献 [37] 中提出的奇异边值问题，并得到了核函数的光滑性。对于四阶波动方程，在文献 [38] 中研究了一类非线性四阶波动方程的能量守恒性，在文献 [39] 中讨论了局部能控性。通过文献 [40]，导出了四阶杆方程 $u_{tt}+u_{xxxx}+p(t)u_{xx}=0$ 的能控性，利用这一特性可以设计一个控制器来镇定这一模型。

在实际工业生产中，由于驱动器和传感器是非侵入性的，所以边界控制比内部控制更容易实现。在过去几十年中，偏微分系统的边界控制在控制领域得到了越来越广泛的应用。在文献 [4, 41-42] 中已经发展了各种方法来解决边界控制问题。其中反步法是目前流行的一种数学工具，用于推导使闭环系统稳定的边界反馈控制律。这种方法最初被用于文献 [43] 中提出的热方程，然后被应用于许多类型的偏（积分）微分方程，包括一个空间变系数的不稳定热方程[37]、一类线性抛物线偏（积分）微分方程[28] 和双曲偏（积分）微分方程[42,44]。反步法也应用到了边界观测器设计中，如文献 [25] 所述。一些关于反步法的基础工作和入门知识可以参考文献 [2]。通过使用反步法，基于可逆 Volterra 积分变换建立有效的反馈律，可将初始系统映射成具有某些理想稳定性的目标系统。由于变换的可逆性，两个系统的稳定性是相同的。另一种方法是李雅普诺夫函数法，李雅

普诺夫函数在研究动态系统的渐近稳定性方面具有重要作用。根据不同的动力学系统和收敛速度的要求，李雅普诺夫函数有不同的选择，如在文献 [45] 中研究的时滞常微分–热级联系统考虑的是 Lyapunov-Krasovskii 函数；而在文献 [2] 中讨论的抛物型偏微分方程采用的是 Lyapunov-Razumikhin 函数。然而值得注意的是，一般的李雅普诺夫函数并不能帮助证明本书中观测器闭环系统的指数稳定性。因此，特殊的李雅普诺夫函数在本书中也将被研究。

状态观测器的设计取决于边界类型（Dirichlet 或 Neumann）以及观测器和执行器的位置。文献 [46] 考虑了传感器和执行器放置在两端和放置在同一端的两种情况。文献 [25] 考虑了一类只有边界传感的抛物型偏积分微分方程的观测器设计问题，讨论了非同位配置和同位配置的观测器设计问题，为稳定观测器误差系统，设计了观测器增益。文献 [2] 为观测器的设计提供了一个清晰的框架，其中还讨论了一类具有边界传感的热方程的观测器设计。

此外，反应扩散方程是偏微分方程中应用十分广泛的一类方程，在偏微分方程中具有重要地位，社会生活中许多现象都可用它来建立模型，如传染病的传播[47]、热传导和扩散现象[32]、生物波等。反应扩散方程是一类描述在时间和空间上一些变量分布（如密度分布和温度分布）的方程。扩散项与反应项之间的相互作用体现了这类方程的特点。反应扩散方程最初被用来描述一些物理现象，如非线性热传导、生活中的扩散现象以及半导体中的电子等[16]。随着偏微分方程理论的发展，类似的模型也被应用到化学、生物学以及生态学上，燃烧问题[48] 及种群之间相互作用的数学模型等都可以用反应扩散方程来表示。近年来许多科研工作者关注到反应扩散方程在各个领域发挥的重要作用，研究重心逐步转移到利用反应扩散方程研究物理生物模型。然而由于现实情况的复杂性，有时标量偏微分系统无法描述所有现象。因此，最近的研究集中在耦合偏微分方程[49-51]。许多化学和生物物理过程可以用耦合偏微分系统来描述，例如不同类型的核糖核酸（RNA）分子之间的相互作用[52] 和椭圆管道中的蠕动流[53]。同时，也有大量的文献致力于耦合反应扩散方程的研究。因此，反应扩散方程的理论成果不断丰富，衍生了许多围绕反应扩散方程的研究课题，其中一个重要的研究课题就是耦合反应扩散方程的镇定性研究[36-37]。文献 [50] 研究了常系数耦合反应扩散方程的边界控制问题，分别讨论设计了在相同扩散系数下和不同扩散系数下的控制律。以此为基础，文献 [54] 考虑了反应项是空间变系数的耦合反应扩散方程模型；文献 [55] 考虑了扩散项和反应项都是空间变系数的耦合反应扩散方程模型，并给出了双边控制器设计。除了系数对系统稳定性的影响，系统的一个本质特征——时滞，通常也会导致系统不稳定，而时滞在生活中屡见不

鲜，也不可避免，因此研究时滞系统十分具有实际意义。文献 [56] 在一般的反应扩散方程的基础上加入了状态时滞项，在其边界上设计反步控制器使系统指数稳定。与文献 [56] 不同，文献 [57] 考虑的是输入时滞，即在系统边界上加入时滞项，为了处理时滞项，引入了另一个状态变量，进而转化为研究一个没有时滞的耦合系统。时滞反应扩散模型应用广泛，不仅在物理工程领域有所应用，在生物、化学和医学等方面也有着重要作用。在本书的第 7 章考虑了具有空间变系数的时变时滞反应扩散系统的边界控制和稳定性原理的证明问题。

目前偏微分系统的边界控制已经成为一个热点。具有未知输入时滞的反应–对流–扩散方程的自适应控制问题是一个代表。近年来，受物理定律支配的局部量和局部反应动力学的相互作用通常用反应–对流–扩散方程描述。涉及化学反应[58]、热流体[59]、生物模型[60] 等的各种物理过程中扩散现象的发生带来了各种挑战并得到广泛的应用。通过边界驱动控制扩散驱动的分布参数系统已经取得了相关进展。早期的控制器是基于降阶模型构建的，这些模型用有限维系统逼近无限维系统。然而这种设计的稳定性和性能应该针对原始偏微分方程进行验证，或者至少对其进行高阶近似，以避免不稳定[61]。

在过去的几十年中，偏微分系统的边界控制在控制领域得到了越来越广泛的应用。在此对反步法进行简要介绍（见图 1.1 和图 1.2）。

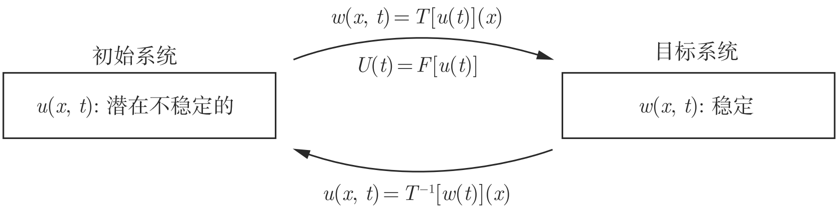

图 1.1 反步法

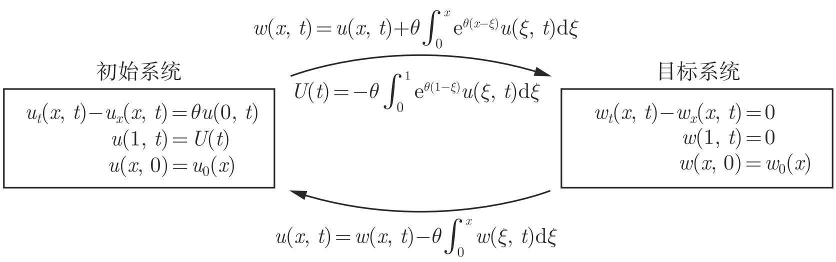

图 1.2 反步控制器的例子

反步法是目前流行的一种数学工具，用于推导使闭环系统稳定的边界反馈控制律。随着各种基于偏微分方程动力学的无限维控制设计技术的出现，反步变换可以处理具有不稳定反应项的情况[62-63]。此外对于受到不可测量的域内和边界扰动的系统的鲁棒调节，已经通过反步设计实现了[64]。后来，反步法被用于控制具有常数和空间变化系数的耦合反应扩散系统[50,65-66]。反步设计的关键思想依赖于可逆 Volterra 变换，它将不稳定的对象映射到稳定的目标系统，其稳定性原理可以用李雅普诺夫方法证明。自文献 [57] 做出开创性工作以来，由反应扩散方程控制的动力系统受到执行器延迟来影响系统的稳定性已成为一个热门的研究课题，文献 [57] 开发了一种偏微分方程反步边界控制器来补偿延迟效应。上述方法已扩展到 3−D 编队控制问题，为补偿潜在输入延迟的影响[67-69] 分别提出了级数展开方法和基于李雅普诺夫理论的点控制方法设计。在可以通过采样点测量和延迟点远程驱动反应扩散过程的网络架构的背景下，文献 [69-71] 中的工作使用 Lyapunov-Krasovskii 泛函开发了有效的控制算法来导出基于 LMI 的稳定性条件（另请参见文献 [72]，以处理偏微分方程的采样数据控制）。对于相对较小的未知输入延迟，Katz 和 Fridman[73] 使用模态分解方法开发了一种基于有限维观测器的反应扩散方程控制器，其稳定性通过李雅普诺夫泛函结合 Halanay 不等式进行分析。进一步研究反应扩散方程的控制，该偏微分方程受到恒定边界输入延迟的影响，在这种情况下，延迟表示为与系统反应扩散动力学级联的传输偏微分方程，其已被用于借助反步设计来补偿已知且任意大的延迟的影响[57]。同样，最近的一些研究应用反步技术来设计多智能体系统的延迟补偿边界控制器，当作用于边界输入的延迟已知时[67,74]，该控制器由在圆柱拓扑上定义的 3−D 反应扩散方程描述；此外还采用了反步法来补偿反应扩散方程中的空间分布输入延迟[75]。一种新的设计方法促成了基于经典 Artstein 变换的显式形式的边界控制器的构建，该变换应用于延迟系统的有限维不稳定部分，该部分源自一维反应扩散 PDE 解的扩展并作为一系列基本特征函数[68] 采用相同的方法来稳定多个具有输入延迟的偏微分方程（包括线性 Kuramoto-Sivashinsky 方程[76]、对角无限维系统[77] 等），并进行鲁棒性分析[78]。

Krstic 等在文献 [46] 中已经针对具有未知不稳定参数（如扩散率、反应系数、边界系数）的各类扩散偏微分方程的自适应反步边界控制器设计进行了研究。对于双曲型偏微分方程，可以参考丰富的文献 [79-85]。上述结果扩展为非线性常微分方程提出的三参数标识符[86]，从而实现了基于李雅普诺夫无源性或交换方法的多个无延迟一维偏微分方程的边界自适应控制。众所周知，如文献 [87] 所述的李雅普诺夫方法可以提供卓越的瞬态性能。此外，文献 [88] 采

用的滑模方法提供了良好的性能来自适应稳定不确定的分布参数以及模型参考自适应控制技术[89-91]。

与此同时，随着分数阶微分和积分理论的丰富和发展，分数阶反应扩散系统的应用越来越广泛。分数扩散模型可以更精确、更具体地描述系统的状态，也可以更好地描述自然界物理信息过程，其广泛应用于生物、物理、天文等领域。在现有的文献中，对不同类型的反应扩散系统（如分数反应扩散系统[92]、时间分数反应扩散系统[93]、时间分数反常扩散系统、离散系统[94]、时间分数反应扩散的 Riesz 方法[95] 等）都有许多有趣的研究，特别是基于记忆电阻的分数阶神经网络的全局 Mittag-Leffler 稳定性和同步性的研究[96]。时变（或时间和空间变量或仅有空间变量）分数阶反应–对流–扩散方程可以用来描述随机和无序介质、多孔介质、分形和渗流、流动团簇、生物系统、地球物理和地质过程中发生的重要物理现象[97-99]。考虑到该系统在许多领域的广泛应用，解决这类具有空间相关系数的分数阶反应扩散系统的控制问题具有重要意义。

与整数阶反应–对流–扩散系统[65] 相比，分数阶反应–扩散系统可以看作一个具有 α-阶 Caputo 时间分数导数的扩张系统。为了稳定这类系统，需要设计一种基于反演变换的边界反馈控制器，使得闭环系统稳定。因此对于不同的边界条件，可以得到不同的边界控制器，其中的 Dirichlet 边界条件和 Robin 边界条件在文献 [93] 中提到，并获得了相应的控制器使初始系统稳定。

1.3 本书的主要工作

考虑到当下的研究热点和研究的必要性，本书研究了时滞偏微分级联系统的边界控制问题。本书各个章节的内容如下：

第 1 章简述了偏微分系统边界控制的研究背景和研究现状，尤其是边界控制理论的发展过程和趋势，近年来科研工作者研究的热点问题，以及前人对偏微分系统边界控制研究的主要贡献和基础工作，最后阐述了本书的主要思路和工作。

第 2 章给出了本书所用到的基础知识，包括基本概念、引理和不等式。

第 3 章研究了一维波动方程边界状态反馈指数稳定问题。首先选择一个已经被证明指数稳定的系统作为目标系统，然后在反步反馈控制律的设计中证明正逆变换的二阶核函数的存在性，最后证明原系统在任意给定条件下的闭环系统中指数稳定。

第 4 章考虑了具有中间点热源的线性热方程的边界控制稳定性问题。基于

比例常系数法，构造出了待设计函数的特殊的精确解，从而巧妙地解决了如何设计反馈控制器这一问题。第 4 章克服了来自局部项的干扰和其制造的困难，证明了逆变换中核函数的存在性，使得目标系统与原系统在控制下实现了等价；同时，边界反馈控制还节约了成本且更具有实用性。

第 5 章首先针对所研究的四阶抛物型偏微分系统设计反步控制器，选择一个指数稳定的目标系统，在标准可逆反步变换下使得初始系统能转化到预先设定的目标系统。因此，需要运用逐次逼近法证明核函数的存在性，以此为前提设计在右端点的两个控制器使得系统指数稳定。其次基于控制器设计观测器，以此来解决状态不能直接量测的问题。观测器的设计要求是实际状态变量和估计状态变量组成的误差系统应具有指数稳定性，由此求出观测器增益。再次运用算子理论和 Lumer-Philips 定理证明受控系统解的适定性。最后以一个数值仿真例子验证了结果的有效性。

第 6 章研究了具有 Robin 边界控制条件（Robin boundary control condition，RBCC）的分数阶反应扩散（fractional-order reaction-diffusion，FRD) 系统的镇定问题。目的是利用边界反馈控制器（boundary feedback controller，BFC）的方法对带有 RBCC 的 FRD 系统进行反演镇定。此外，根据李雅普诺夫 Mittag-Leffler 稳定性理论，第 6 章通过三种基于反步变换的 BFC 证明了具有 RBCC 的 FRD 系统是 Mittag-Leffler 稳定的。

第 7 章针对一类具有时变时滞和空间变系数的反应扩散耦合方程，研究了其边界控制镇定问题。受文献 [100] 的启发，选择了一个具有时变时滞的 H^1-范数指数稳定的目标系统，该目标系统的稳定性证明运用了 Halanay 不等式和李雅普诺夫理论，基于可逆的反步变换，设计了边界反馈控制器使得闭环系统稳定。控制器的可行性通过数值仿真的结果可以证明。

第 8 章针对研究的反应–对流–扩散方程，首先通过变量代换消除对流项，再将时滞转化为与反应扩散方程级联的传输偏微分方程，与其组成偏微分级联系统。设计反馈控制器，选择一个指数稳定的目标系统，在标准可逆反步变换下，使得初始系统能转化到预先设定的目标系统。通过初始系统与目标系统的等价性，求出满足此变换的核函数方程，并得出核函数的具体表达式。其次基于边界控制器得出自适应边界反馈控制器，并设计出参数更新律来估计未知时滞。运用李雅普诺夫理论证明受控系统轨迹的局部有界性和渐近收敛稳定性。最后通过数值仿真验证了自适应边界反馈控制器的优越性并支持了理论结果。

第 9 章则针对一类具有分布式输入时滞的波动方程，选择一个稳定的目标

系统，设计出反馈控制器，并由李雅普诺夫理论证明该反馈控制器的可行性。基于确定性等价原理得出自适应反馈控制器，并设计出参数更新律，利用李雅普诺夫理论证明了自适应控制器作用下的受控系统的全局稳定性并支持了理论结果。