

第 0 章 函数与预备知识

0-1 基本初等函数与函数的几种特性

1. 函数 $y=f(x)$

(1) 自变量 x ; 因变量 y ;

(2) 定义域 D : 自变量的取值范围;

(3) 值域: $f(D)=\{f(x)|x\in D\}$.

2. 函数的特性

名称	定义	几何意义
有界性	- 有界: 存在常数 $M\geq 0$, 使得 $\forall x\in D$ 有 $f(x) \leq M$; - 有上界: 存在常数 M, 使得 $\forall x\in D$ 有 $f(x)\leq M$; - 有下界: 存在常数 m, 使得 $\forall x\in D$ 有 $f(x)\geq m$	- 图像介于两条直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间; - 图像在直线 $y=M$ 之下; - 图像在直线 $y=m$ 之上

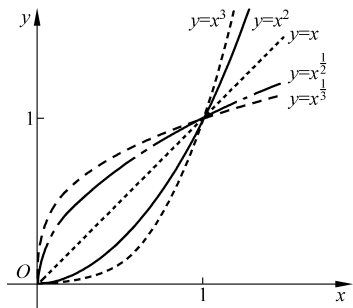
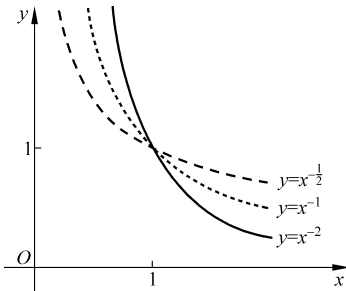
续表

名称	定义	几何意义
单调性	对于区间 I 内的任意两点 $x_1 < x_2$, - 若恒有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 I 内单调增加; - 若恒有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 I 内单调减少	从左往右看: - 函数图像上升; - 函数图像下降
奇偶性	在关于原点对称的区间 I 内, 若 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为 I 上的奇函数; $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为 I 上的偶函数	函数图像: - 关于原点对称; - 关于 y 轴对称
周期性	设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 且存在常数 T , 使得 $\forall x$ 有 $f(x+T) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为以 T 为周期的周期函数. 可使 $f(x+T) = f(x)$ 成立的最小正数 T , 称为最小正周期	每隔一个周期的图像相同

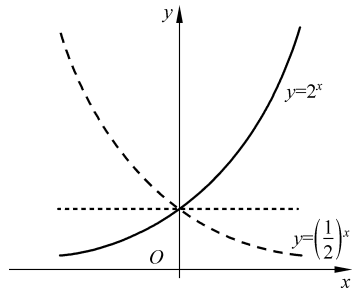
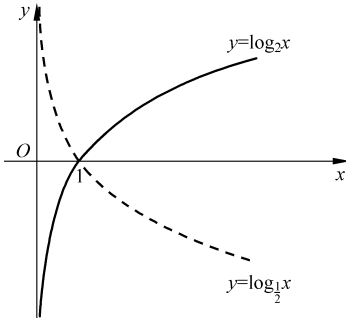
3. 基本初等函数

1) 幂函数 $y=x^a$

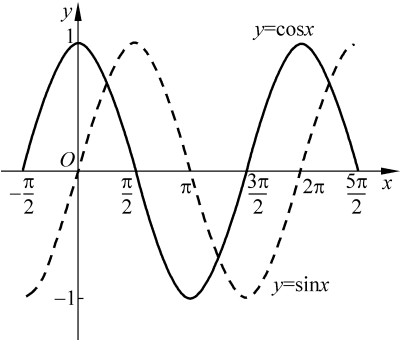
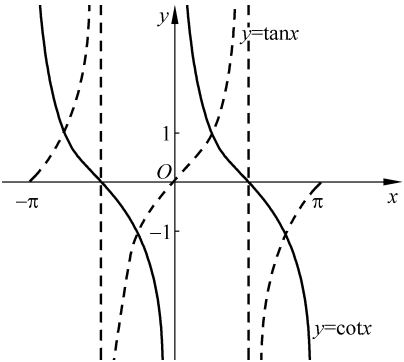
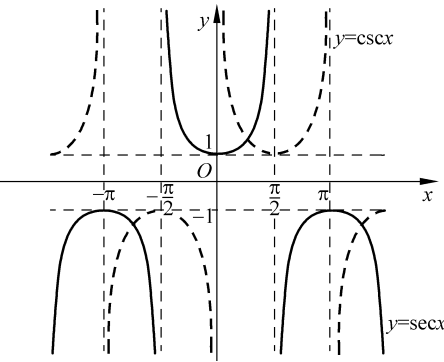
注: 下表中的 n 为既约分数 $a=\frac{m}{n}$ 的分母.

函数式	$y = x^a (a > 0)$	$y = x^a (a < 0)$
定义域	n 为奇数: $\mathbb{R}$; n 为偶数: $[0, +\infty)$	n 为奇数: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; n 为偶数: $(0, +\infty)$
值域	n 为奇数: $\mathbb{R}$; n 为偶数: $[0, +\infty)$	n 为奇数: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; n 为偶数: $(0, +\infty)$
图像		
单调性	↗	n 为奇数: 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上 ↘; n 为偶数: ↘
奇偶性	与 m 的奇偶性相同	与 m 的奇偶性相同

2) 指数函数与对数函数

函数式	指数函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$	对数函数 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$
定义域	$\mathbb{R}$	$(0, +\infty)$
值域	$(0, +\infty)$	$\mathbb{R}$
图像		
单调性	$a > 1$: ↗; $0 < a < 1$: ↘	$a > 1$: ↗; $0 < a < 1$: ↘

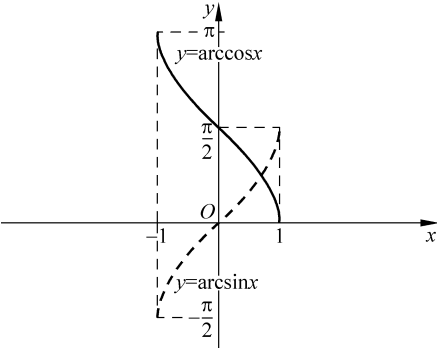
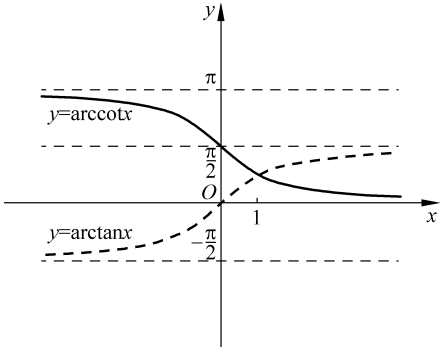
3) 三角函数

函数式	$y = \sin x$ ($y = \cos x$)	$y = \tan x$ ($y = \cot x$)	$y = \sec x$ ($y = \csc x$)
定义域	$\mathbf{R}$	$\left\{x \mid x \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$ $(\{x \mid x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\})$	$\left\{x \mid x \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$ $(\{x \mid x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\})$
值域	$[-1, 1]$	$\mathbf{R}$	$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
图像			
单调性	分段单调	分段 ↗ (↘)	分段单调
奇偶性	奇 (偶)	奇	偶 (奇)
最小正周期	2π	π	2π

4) 反三角函数

函数式	$y = \arcsin x$ ($y = \arccos x$)	$y = \arctan x$ ($y = \operatorname{arccot} x$)
定义域	$[-1, 1]$	$\mathbf{R}$
值域	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ($[0, \pi]$)	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ($[0, \pi]$)

续表

图像		
单调性	↗ (↘)	↗ (↘)
奇偶性	奇 (非奇非偶)	奇 (非奇非偶)

习题 0-1

1. 选择题

(1) 下列各组函数中表示同一个函数的是().

- A. $y = |x|$ 与 $y = \sqrt{x^2}$ B. $y = x$ 与 $y = \sqrt{x^2}$
 C. $y = x$ 与 $y = \frac{x^2}{x}$ D. $y = \sqrt[3]{x^3}$ 与 $y = \sqrt[4]{x^4}$

(2) 若 $f(x)$ 为奇函数, 则下列一定为奇函数的是().

- A. $f(x) + C$ B. $f(-x) + C$
 C. $f(x) + f(|x|)$ D. $f[f(-x)]$

(3) 对于定义在 $(-l, l)$ 上的两个奇函数, 下列说法正确的有

().

- A. 和为奇函数 B. 和为偶函数
 C. 乘积为奇函数 D. 乘积为偶函数

(4) 对于定义在 $(-l, l)$ 上的两个偶函数, 下列说法正确的有

().

- A. 和为奇函数 B. 和为偶函数
 C. 乘积为奇函数 D. 乘积为偶函数

(5) 对于定义在 $(-l, l)$ 上的一个奇函数和一个偶函数, 下列说法正确的有().

- A. 和为奇函数 B. 和为偶函数
 C. 乘积为奇函数 D. 乘积为偶函数

2. 下列函数在定义域内,关于有界性,对的打对钩,错的留白.

函数 $f(x)=$	只有下界	有界函数	无界函数	既无上界也无下界
x^3				
x^2				
$\sqrt{x}$				
e^x				
$\ln x$				
$\sin x, \cos x$				
$\sec x, \csc x$				
$\tan x, \cot x$				
$\arcsin x, \arccos x$				
$\arctan x, \operatorname{arccot} x$				

0-2 反函数、复合函数、初等函数、分段函数

反函数	- 定义: 由“y 关于 x 的表达式 $y=f(x)$”反解出“x 关于 y 的表达式”,即其反关系(逆运算),记为 $x=f^{-1}(y)$; 则 f 与 f^{-1} 互为反函数; - 为符合习惯视角,即“自变量 x, 因变量 y”,常将 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x, y 互换,记为 $y=f^{-1}(x)$
复合函数	设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f , 函数 $u=g(x)$ 的定义域为 D_g , 且其值域 $R_g \subset D_f$, 则 $y=f[g(x)]$, $x \in D_g$ 称为由函数 $u=g(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 构成的复合函数, 变量 u 称为中间变量
初等函数	由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算、有限次的函数复合所构成的并可用一个式子表示的函数
分段函数	在自变量的不同变化范围中,对应法则用不同式子来表示的函数

习题 0-2

1. 下面四个函数中,与 $y=|x|$ 不同的是().

A. $y=|e^{\ln x}|$

B. $y=\sqrt{x^2}$

C. $y=\sqrt[4]{x^4}$

D. $y=x \operatorname{sgn} x$

2. 填写下列函数或函数值:

(1) 若 $f(x)=2x+1$, 则 $f(x-1)=$ _____; 若 $f(x-1)=2x+1$, 则 $f(x)=$ _____;

(2) 设 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$, 则 $f(x)=$ _____;

(3) $\arcsin \frac{1}{2} = \underline{\hspace{2cm}}$;

(4) $\arcsin\left(\sin \frac{5\pi}{6}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$;

(5) $\arctan\sqrt{3} = \underline{\hspace{2cm}}$; $\arctan(-1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 填写下列函数的定义域:

(1) 函数 $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x-2}$ 的自然定义域为 $\underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 函数 $y = \arcsin(x+1)$ 的自然定义域为 $\underline{\hspace{2cm}}$;

(3) 函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} - \arcsin \frac{x+1}{3}$ 的自然定义域为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

4. 求下列函数的反函数:

(1) 函数 $y = 1 + \ln(x+2)$ 的反函数 $y = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 求函数 $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 的反函数.

5. 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x) = x^2 e^{\cos x} \sin x$;

(2) $f(x) = |x^2 \sin x| e^{\cos x}$;

(3) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

6. 下列函数是由哪些简单函数复合而成的?

(1) $y = e^{\arctan x}$;

(2) $y = \sqrt[3]{(1+x)^2 + 1}$;

(3) (a) $y = \sin^2 x$; (b) $y = \sin x^2$;

$$(4) y = \sin^2(3x+1);$$

$$(5) (a) y = \sqrt[5]{\ln \sin x^3}; (b) y = \sqrt[5]{\ln \sin^3 x};$$

$$(c) y = \sqrt[5]{\ln^3 \sin x}.$$

7. 用分段函数表示下列函数:

$$(1) y = 2x + |2 - x|; \quad (2) y = \frac{|x-1|}{x-1};$$

$$(3) y = \frac{2x + |x|}{4x - 3|x|}.$$

0-3 常用公式

1. 代数公式

1) 数字 0

$$(1) 0+0=0, 0+0+0+\cdots=0 (\text{无穷多个 } 0 \text{ 的和为 } 0);$$

$$(2) a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0;$$

$$(3) a \neq 0 \text{ 时}, \frac{0}{a} = 0, 0^a = 0, a^0 = 1.$$

2) 乘法及因式分解

(1) 因式分解

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2),$$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$= (a - b) \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} b^i.$$

(2) 二项式公式

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$$

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots + nab^{n-1} + b^n$$

$$= \sum_{i=0}^n C_n^i a^{n-i} b^i.$$

3) 分式

(1) 分数运算: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}, \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot$

$$\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc};$$

(2) 分项分式: 设 $P_n(x)$ 为至多 n 次多项式(下列各式中, a, b, A_i, B_i 均为常数, 右端均为真分式).

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} \right),$$

$$\frac{P_2(x)}{(x-a)(x-b)^2} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{x-b} + \frac{A_3}{(x-b)^2},$$

$$\frac{P_3(x)}{(x^2-ax+b)^2} = \frac{A_1x+B_1}{x^2-ax+b} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2-ax+b)^2} \quad (a^2 < 4b).$$

4) 不等式

(1) 设以下各数为正数, 则

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \quad \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc},$$

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},$$

即: 算术平均 $\geq$ 几何平均.

(2) 绝对值

$$|a \pm b| \leq |a| + |b|, \quad |a \pm b| \geq ||a| - |b||,$$

$$-|a| \leq a \leq |a|,$$

$$|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b,$$

$$|a| \geq b \Leftrightarrow a \geq b \text{ 或 } a \leq -b.$$

 5) 某些数列的前 n 项和

$$1+2+3+\cdots+n = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$1+q+q^2+\cdots+q^{n-1} = \sum_{i=1}^n q^{i-1} = \frac{1-q^n}{1-q},$$

$$1+3+5+\cdots+(2n-1) = \sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2,$$

$$2+4+6+\cdots+2n = \sum_{i=1}^n 2i = n(n+1),$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \sum_{i=1}^n i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2,$$

$$\begin{aligned} 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots + n(n+1) &= \sum_{i=1}^n i(i+1) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

6) 指数^①

$$\begin{array}{ccc}
 \boxed{a^m a^n = a^{m+n}} & \boxed{(ab)^m = a^m b^m} & \boxed{(a^m)^n = a^{mn}} \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} & \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n} & a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \\
 \uparrow & \downarrow & \uparrow \\
 \boxed{a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}} & \sqrt[n]{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{a}} & \boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}
 \end{array}$$

7) 对数($a>0, b>0$)

$$(1) \log_a 1 = 0, \log_a a = 1, \log_a b^c = c \log_a b, a^{\log_a b} = b;$$

$$\log_e x = \ln x;$$

(2) 运算法则(不妨以 $\ln x$ 为例)

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b, \quad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b,$$

$$\ln(a_1 a_2 \cdots a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n.$$

8) 韦达(Vieta)定理(一元 n 次方程的根与系数的关系)

(1) 设 x_1, x_2 是一元二次方程 $x^2 + ax + b = 0$ 的两个根, 那么

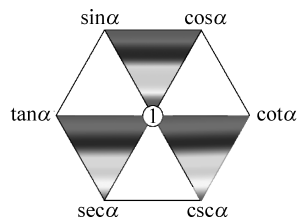
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a, \\ x_1 \cdot x_2 = b; \end{cases}$$

(2) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是一元 n 次方程 $x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$ 的 n 个根, 那么

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -a_1, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n = (-1)^n a_n. \end{cases}$$

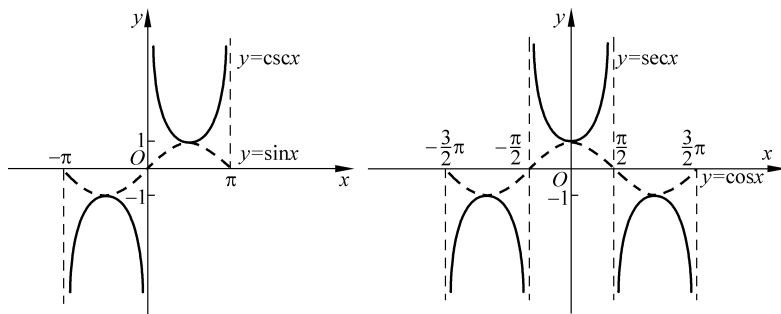
2. 常用公式(三角函数部分)

1) 三角函数关系: 基本函数关系记忆法



(1) 倒数关系: 对角的两个函数乘积为 1

$$\sin \alpha \cdot \csc \alpha = 1, \quad \cos \alpha \cdot \sec \alpha = 1, \quad \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1.$$



(2) 乘积关系: 任意函数等于相邻两个函数的乘积

$$\begin{aligned}
 \sin \alpha &= \tan \alpha \cdot \cos \alpha, & \cos \alpha &= \sin \alpha \cdot \cot \alpha, & \cot \alpha &= \cos \alpha \cdot \csc \alpha, \\
 \csc \alpha &= \cot \alpha \cdot \sec \alpha, & \sec \alpha &= \csc \alpha \cdot \tan \alpha, & \tan \alpha &= \sec \alpha \cdot \sin \alpha.
 \end{aligned}$$

(3) 在阴影的三角形里, 两个上角顶函数的平方和等于下角

^① 此表中要求: (1) 分母上的 $a \neq 0$; (2) n 为奇数时, 根号中的 $a > 0$; (3) $\frac{m}{n}$ 为既约分数.

底函数的平方

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha, \quad 1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha.$$

2) 两角和公式

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta, \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}, \quad \cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}.$$

3) 二倍角公式、半角公式、万能公式

$$\begin{array}{ccc} \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha & \xleftarrow[\cos^2 \alpha]{\sin^2 \alpha + 1} & \boxed{\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha} \\ & & \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ & \xleftarrow[\cos^2 \alpha]{\text{上下同除以}} & \\ \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} & \xrightarrow{\quad} & \tan \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \\ \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \sin 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} & & \\ \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} & & \\ \tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} & & \\ \cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2\cot \alpha} & & \end{array}$$

4) 三倍角公式

$$\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha, \quad \cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha,$$

$$\tan 3\alpha = \frac{3\tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3\tan^2 \alpha}.$$

5) 和差与积

和差化积	积化和差
$\sin \alpha + \sin \beta = 2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$	$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$
$\sin \alpha - \sin \beta = 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$	$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$
$\cos \alpha + \cos \beta = 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$	$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$

续表

和差化积	积化和差
$\cos \alpha - \cos \beta = -2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$	$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$

6) 三角函数补充公式

$$(1) \tan \alpha \pm \tan \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad \cot \alpha \pm \cot \beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta};$$

$$(2) \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta, \\ \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta;$$

$$(3) (\sin \alpha \pm \cos \alpha)^2 = 1 \pm \sin 2\alpha.$$

7) 恒等式

$$\sin(\arcsin x) = \cos(\arccos x) = \tan(\arctan x) = x,$$

$$\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2},$$

$$\tan(\arcsin x) = \cot(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$\sin(\arctan x) = \cos(\operatorname{arccot} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}},$$

$$\arcsin x + \arccos x = \arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}.$$

习题 0-3

1. 填写下列分式的裂项:

$$(1) \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \underline{\hspace{2cm}};$$