

第

1

篇

力

学

质点运动学

一、概念原理复习

1. 参考系

描述质点运动时用的,固定在参考物上的空间坐标系(如笛卡儿直角坐标系)和配置在各处的一套同步的钟构成一个参考系,通常就以选定的参考物命名,如太阳坐标系、地心参考系、地面参考系等。

2. 运动函数

相对于一定参考系表示的质点位置随时间变化的函数,即

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

其中 $\mathbf{r}(t)$ 为质点在时刻 t 的径矢,即从坐标系原点指到时刻 t 质点所在位置的长度矢量。 $x(t), y(t), z(t)$ 分别为径矢沿 x, y 和 z 轴的分量,也表示沿三个轴的分运动。上式表示运动的合成。

3. 位移和速度

质点在时间 Δt 内的位移为

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$$

一般地

$$|\Delta \mathbf{r}| \neq \Delta r$$

质点在时刻 t 的速度

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}$$

速度的方向沿质点运动轨道的切线方向且指向运动的前方。 $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ 为速度沿 x, y 和 z 轴的分量,为代数值,其正负表示该分量与相应的坐标轴的方向相同或相反。

4. 加速度和匀加速运动

质点在时刻 t 的加速度

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{k}$$

匀加速运动: \mathbf{a} 为常矢量, 由积分可得

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$$

式中 $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$ 为初始条件。

匀加速直线运动: 取运动轨道为 x 轴, 初始条件为 $x_0 = 0$ 和 v_0 , 则

$$v = v_0 + at, \quad x = v_0t + \frac{1}{2}at^2, \quad v^2 - v_0^2 = 2ax$$

5. 抛体运动

抛体运动为平面运动, 设运动平面为 x - y 平面, y 轴竖直向上, 则有 $a_x = 0, a_y = -g$, 以抛出点为原点, 抛出时开始计时, 则有

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos\theta, & v_y &= v_0 \sin\theta - gt \\ x &= v_0 \cos\theta \cdot t, & y &= v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

抛体运动可以看成是沿竖直方向的匀加速运动和水平方向的匀速运动的合成。

6. 圆周运动

线速度或速率 $v = \frac{ds}{dt}$

角速度 $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R}$

角加速度 $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

加速度 $\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_t, \quad a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$

法向加速度 $a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$ (指向圆心)

切向加速度 $a_t = \frac{dv}{dt} = R\alpha$, 沿轨道的切线方向。 $a_t > 0$ 表示 \mathbf{a}_t 与 \mathbf{v} 的方向相同, 质点速率不断增大。

7. 相对运动

运动的描述随所用的参考系的不同而不同。对于相对速度为 \mathbf{u} 的两个参考系, 同一质点的

位移变换: $\Delta \mathbf{r}_{SE} = \Delta \mathbf{r}_{SV} + \Delta \mathbf{r}_{VE}$

速度变换: $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{u}$

加速度变换: $\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_0, \quad \mathbf{a}_0 = \frac{d\mathbf{u}}{dt}$

$\mathbf{a}_0 = \mathbf{0}$ 时, $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$

以上变换式都是根据绝对时空概念导出的, 只适用于 u 远小于光速 c 的情形。它们称为伽利略变换。

二、解题要点

(1) 解题的一般原则是先仔细审题, 了解题意, 构思出题述的物理图像, 明确已知和要

求；然后根据题目给出的条件选择合适的数学公式求解。解题时如涉及数字运算，要注意有效位数，一般取3位有效数字即可。还要注意公式中各量的单位。本教材的公式与计算都用国际单位制的单位。对计算的数字结果要判断其是否合乎实际。对不合乎实际的结果，要仔细审查解题的过程以纠正其错误。

(2) 本章题目只涉及质点的运动，题目中所指的物体都当质点看待。对直线运动或其合成，一般要画出坐标系以帮助表达和思考，本章习题所涉及的直线运动(或直线分运动)都是匀加速的，即加速度保持不变。代公式时要注意这一条件。

(3) 对圆周运动除会计算法向(向心)加速度外，还要会计算切向加速度。注意切向加速度 $\frac{dv}{dt}$ 是速率的变化率，即速率对时间的导数，而速率又是时间的函数。

(4) 在速度变换的计算中，要十分明确各个速度是“谁对谁”的速度，要会用速度变换的“串联”法则(即伽利略变换)：

$$\boldsymbol{v}_{SE} = \boldsymbol{v}_{SV} + \boldsymbol{v}_{VE}$$

(5) 在本章和以后的力学题目的分析与计算中要特别注意矢量与标量的区别，并能用适当的文字标志来表示它们：矢量在书中用黑斜体表示，手写体请在相应字符的正上方标以箭头。

(6) 解题要能正确表达思路，写出各步骤的根据，不能只写公式和数字。只有写出正确的文字表达才能说明自己真正理解了物理概念和定律。

三、思考题选答

1.7 根据开普勒第一定律，行星轨道为椭圆(图1.1)。已知任一时刻行星的加速度方向都指向椭圆的一个焦点(太阳所在处)。分析行星在通过图中 M, N 两位置时，它的速率分别应正在增大还是正在减小？

答 行星越过 M 点时，其切向加速度 \boldsymbol{a}_t 沿轨道的切线方向而和其速度方向相反， $dv/dt < 0$ ，所以速率在减小。行星越过 N 点时， \boldsymbol{a}_t 的方向与速度的方向相同， $dv/dt > 0$ ，速率在增大。

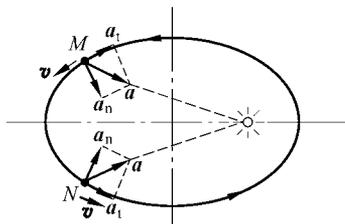


图1.1 思考题1.7答用图

1.8 一斜抛物体的水平初速度是 v_{0x} ，它的轨道最高点处的曲率圆的半径是多大？

答 斜抛物体的轨道最高点处的斜率是水平的，该处的曲率圆的半径沿竖直方向，该处物体的速度方向为水平方向。由于物体在水平方向没有加速度，所以在此处物体的切向加速度为零。物体的总加速度即法向加速度沿竖直方向向下，此加速度就是重力加速度 \boldsymbol{g} 。由法向加速度公式 $a_n = v^2/R$ 可得所求曲率圆的半径为

$$R = v^2/a_n = v_{0x}^2/g$$

* 1.11 如果使时间反演，即把时刻 t 用 $t' = -t$ 取代，质点的速度(原书式(1.7))、加速度(原书式(1.15))、运动学公式(以原书式(1.21)和式(1.22)的第二式为例)等将会有何变化？电影中武士登上高墙的运动形象是武士跳下动作的实拍录像倒放的结果，为什么

看起来和“真正的”跃上动作一样?

答 以 $t' = -t$ 代替 t 后,原书式(1.7)将变为 $\boldsymbol{v}' = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt'} = -\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = -\boldsymbol{v}$,即速度与原来的方向相反。原书式(1.15)将变为 $\boldsymbol{a}' = \frac{d\boldsymbol{v}'}{dt'} = -\frac{d(-\boldsymbol{v})}{dt'} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{a}$,即加速度不变。由此可知,质点运动将逆向重复原来的运动,即如倒放电影片时所看的。武士由高处向下跳,是加速运动,倒放时,速度反向,而加速度方向不变,则运动表现为向上减速,和真的直接用同样初速上抛时的运动一样。这样编辑电影时,就可以用原来下跳的影片倒录成情节要求的向上跃的影片以“欺骗”或“迷惑”观众了。

这一解答也说明了“纯粹”的机械运动是可逆的,即一旦把质点的速度逆过来,它的运动就可以逆向重复原来的运动过程,如时间倒流了一样。

四、习题解答

1.1 木星的一个卫星——木卫 1——上面的珞玑火山喷发出的岩块上升高度可达 200 km,这些石块的喷出速度是多大? 已知木卫 1 上的重力加速度为 1.80 m/s^2 ,而且在木卫 1 上没有空气。

$$\text{解 } v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 1.80 \times 200 \times 10^3} \text{ m/s} = 849 \text{ m/s}$$

1.2 一种喷气推进的实验车,从静止开始可在 1.80 s 内加速到 1600 km/h 的速率。按匀加速运动计算,它的加速度是否超过了人可以忍受的加速度 $25g$? 这 1.80 s 内该车跑了多远距离?

解 实验车的加速度为

$$a = \frac{v}{t} = \frac{1600 \times 10^3}{3600 \times 1.80} \text{ m/s}^2 = 2.47 \times 10^2 \text{ m/s}^2 = 25.20g$$

基本上超过了 $25g$ 。

1.80 s 内实验车跑的距离为

$$s = \frac{v}{2}t = \frac{1600 \times 10^3}{2 \times 3600} \times 1.80 \text{ m} = 400 \text{ m}$$

1.3 一辆卡车为了超车,以 90 km/h 的速度驶入左侧逆行道时,猛然发现前方 80 m 处一辆汽车正迎面驶来。假定该汽车以 65 km/h 的速度行驶,同时也发现了卡车超车。设两司机的反应时间都是 0.70 s(即司机发现险情到实际刹车所经过的时间),他们刹车后的减速度都是 7.5 m/s^2 ,试问两车是否会相撞? 如果会相撞,相撞时卡车的速度多大?

解 已知 $v_{10} = 90 \text{ km/h} = 25 \text{ m/s}$, $v_{20} = 65 \text{ km/h} = 18 \text{ m/s}$, $s_0 = 80 \text{ m}$, $\Delta t = 0.70 \text{ s}$, $a = 7.5 \text{ m/s}^2$ 。两车开始刹车时,它们之间的距离为

$$s'_0 = s_0 - (v_{10} + v_{20})\Delta t = 80 \text{ m} - (25 + 18) \times 0.70 \text{ m} = 50 \text{ m}$$

卡车到停止需继续开行的距离

$$s_1 = \frac{v_{10}^2}{2a} = \frac{25^2}{2 \times 7.5} \text{ m} = 41.7 \text{ m}$$

汽车到停止需继续开行的距离

$$s_2 = \frac{v_{20}^2}{2a} = \frac{18^2}{2 \times 7.5} \text{ m} = 21.7 \text{ m}$$

因为 $s_1 + s_2 > s'_0$, 所以两车会相撞。

以 t 表示两车刹车后到相撞所用的时间, 则有

$$s'_0 = v_{10}t - \frac{1}{2}at^2 + v_{20}t - \frac{1}{2}at^2 = (v_{10} + v_{20})t - at^2$$

代入已知数, 为

$$50 = (25 + 18)t - 7.5t^2$$

解此方程可得

$$t = 1.62 \text{ s}, 4.11 \text{ s} (\text{舍去})$$

由此得碰撞时卡车的速度为

$$v_1 = v_{10} - at = 25 \text{ m/s} - 7.5 \times 1.62 \text{ m/s} = 12.9 \text{ m/s} = 46 \text{ km/h}$$

1.4 跳伞运动员从 1200 m 高空下跳, 起初不打开降落伞作加速运动。由于空气阻力的作用, 会加速到一“终极速率”200 km/h 而开始匀速下降。下降到离地面 50 m 处时打开降落伞, 很快速率会变为 18 km/h 而匀速下降着地。若起初加速运动阶段的平均加速度按 $g/2$ 计, 此跳伞运动员在空中一共经历了多长时间?

解 $h_0 = 1200 \text{ m}$, $v_1 = 200 \text{ km/h} = 55.6 \text{ m/s}$, $v_2 = 18 \text{ km/h} = 5 \text{ m/s}$, $h_2 = 50 \text{ m}$ 。
运动员加速下落的时间

$$t_1 = \frac{v_1}{g/2} = \frac{2 \times 55.6}{9.8} \text{ s} = 11.3 \text{ s}$$

加速下落的距离

$$h_1 = \frac{v_1^2}{2g/2} = \frac{v_1^2}{g} = \frac{55.6^2}{9.8} \text{ m} = 315 \text{ m}$$

以速率 v_1 匀速下落的时间

$$t'_1 = \frac{h_0 - h_1 - h_2}{v_1} = \frac{1200 - 315 - 50}{55.6} \text{ s} = 15.0 \text{ s}$$

以速率 v_2 匀速下落的时间

$$t_2 = \frac{h_2}{v_2} = \frac{50}{5} \text{ s} = 10 \text{ s}$$

运动员在空中总共经历的时间为

$$t = t_1 + t'_1 + t_2 = 11.3 \text{ s} + 15.0 \text{ s} + 10 \text{ s} = 36.3 \text{ s}$$

1.5 由消防水龙带的喷嘴喷出的水的流量是 $q = 280 \text{ L/min}$, 水的流速 $v = 26 \text{ m/s}$ 。若这喷嘴竖直向上喷射, 水流上升的高度是多少? 在任一瞬间空中有多少升水?

解 水流上升的高度

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{26^2}{2 \times 9.8} \text{ m} = 34.5 \text{ m}$$

同一滴水在空中运动的时间

$$t = \frac{2v}{g} = \frac{2 \times 26}{9.8} \text{ s} = 5.31 \text{ s}$$

在时间 t 内喷嘴喷出的水即在任一瞬间空中所有的水。这些水的总体积是

$$V = qt = 280 \times 5.31/60 \text{ L} = 24.7 \text{ L}$$

1.6 在以初速率 $v_0 = 15.0 \text{ m/s}$ 竖直向上扔一块石头后,

(1) 在 $\Delta t_1 = 1.0 \text{ s}$ 末又竖直向上扔出第二块石头,后者在 $h = 11.0 \text{ m}$ 高度处击中前者,求第二块石头扔出时的速率;

(2) 若在 $\Delta t_2 = 1.3 \text{ s}$ 末竖直向上扔出第二块石头,它仍在 $h = 11.0 \text{ m}$ 高度处击中前者,求这一次第二块石头扔出时的速率。

解 (1) 设第一块石头扔出后 t 秒末被第二块击中,则

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

代入已知数得

$$11 = 15t - \frac{1}{2} \times 9.8t^2$$

解此方程,可得二解为

$$t_1 = 1.84 \text{ s}, \quad t'_1 = 1.22 \text{ s}$$

第一块石头上升到顶点所用的时间为

$$t_u = v_{10}/g = (15/9.8) \text{ s} = 1.53 \text{ s}$$

由于 $t_1 > t_u$, 这对应于第一块石头回落时与第二块相碰; 又由于 $t'_1 < t_u$, 这对应于第一块石头上升时被第二块赶上击中。

以 v_{20} 和 v'_{20} 分别对应于在 t_1 和 t'_1 时刻两石块相碰时第二石块的初速度, 则由于

$$h = v_{20}(t_1 - \Delta t_1) - \frac{1}{2} g(t_1 - \Delta t_1)^2$$

所以

$$v_{20} = \frac{h + \frac{1}{2} g(t_1 - \Delta t_1)^2}{t_1 - \Delta t_1} = \frac{11 + \frac{1}{2} \times 9.8 \times (1.84 - 1)^2}{1.84 - 1} \text{ m/s} = 17.2 \text{ m/s}$$

同理,

$$v'_{20} = \frac{h + \frac{1}{2} g(t'_1 - \Delta t_1)^2}{t'_1 - \Delta t_1} = \frac{11 + \frac{1}{2} \times 9.8 \times (1.22 - 1)^2}{1.22 - 1} \text{ m/s} = 51.1 \text{ m/s}$$

(2) 由于 $\Delta t_2 = 1.3 \text{ s} > t'_1$, 所以第二石块不可能在第一块上升时与第一块相碰。对应于 t_1 时刻相碰, 第二块的初速度为

$$v''_{20} = \frac{h + \frac{1}{2} g(t_1 - \Delta t_2)^2}{t_1 - \Delta t_2} = \frac{11 + \frac{1}{2} \times 9.8 \times (1.84 - 1.3)^2}{1.84 - 1.3} \text{ m/s} = 23.0 \text{ m/s}$$

1.7 一质点在 xy 平面上运动, 运动函数为 $x = 2t, y = 4t^2 - 8$ (采用国际单位制)。

(1) 求质点运动的轨道方程并画出轨道曲线;

(2) 求 $t_1 = 1 \text{ s}$ 和 $t_2 = 2 \text{ s}$ 时, 质点的位置、速度和加速度。

解 (1) 在运动函数中消去 t , 可得轨道方程为

$$y = x^2 - 8$$

轨道曲线为一抛物线如图 1.2 所示。

$$(2) \text{ 由 } \mathbf{r} = 2t\mathbf{i} + (4t^2 - 8)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2\mathbf{i} + 8t\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 8\mathbf{j}$$

可得在 $t = 1$ s 时,

$$\mathbf{r}_1 = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}, \quad \mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i} + 8\mathbf{j}, \quad \mathbf{a}_1 = 8\mathbf{j}$$

在 $t = 2$ s 时,

$$\mathbf{r}_2 = 4\mathbf{i} + 8\mathbf{j}, \quad \mathbf{v}_2 = 2\mathbf{i} + 16\mathbf{j}, \quad \mathbf{a}_2 = 8\mathbf{j}$$

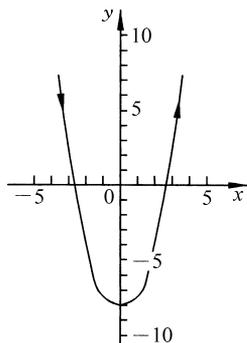


图 1.2 习题 1.7 解用图

1.8 男子排球的球网高度 2.43 m, 球网两侧的场地大小都是 9.0 m × 9.0 m。一运动员采用跳发球姿势, 其击球点高度为 3.5 m, 与网的水平距离是 8.5 m。(1) 球以多大速度沿水平方向被击出时, 才能使球正好落在对方后方边线上? (2) 球以此速度被击出后过网时, 超过网高多少米? (3) 这样, 球落地时速率多大(忽略空气阻力)?

解 (1) 由 $h_0 = gt_0^2/2$ 可得球被击出后在空中飞行的时间为

$$t_0 = \sqrt{2h_0/g} = \sqrt{2 \times 3.5/9.8} \text{ s} = 0.845 \text{ s}$$

从而得球被击出的速率应为

$$v_0 = s/t = (17.5/0.845) \text{ m/s} = 20.7 \text{ m/s} = 74.6 \text{ km/h}$$

(2) 球从被击出到网上方经历的时间为 $t = t_0 \times 8.5/17.5$, 在此时间内球下落的距离为

$$h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \times 9.8 \times (0.845 \times 8.5/17.5)^2 \text{ m} = 0.83 \text{ m}$$

此时球在网上方的高度为

$$\Delta h = 3.5 \text{ m} - 0.83 \text{ m} - 2.43 \text{ m} = 0.24 \text{ m} = 24 \text{ cm}$$

(3) 球落地时的速率为

$$v = \sqrt{v_0^2 + (gt_0)^2} = \sqrt{20.7^2 + (9.8 \times 0.845)^2} \text{ m/s} = 22.3 \text{ m/s}$$

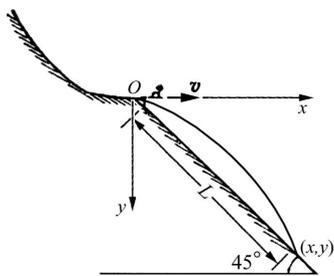


图 1.3 习题 1.9 解用图

1.9 滑雪运动员离开水平滑雪道飞入空中时的速率 $v = 110 \text{ km/h}$, 着陆的斜坡与水平面夹角 $\theta = 45^\circ$ (图 1.3)。

(1) 计算滑雪运动员着陆时沿斜坡的位移 L 是多大(忽略起飞点到斜面的距离)?

(2) 在实际的跳跃中, 滑雪运动员所达到的距离 $L = 165 \text{ m}$, 这个结果为什么与计算结果不符?

解 (1) 如图 1.3 所示, 运动员着陆点的坐标为

$$x = L \cos 45^\circ = vt, \quad y = L \sin 45^\circ = \frac{1}{2}gt^2$$

解此两个方程, 得

$$t = \frac{2v}{g}$$

而运动员沿斜坡的位移为

$$L = \frac{vt}{\cos 45^\circ} = \frac{2v^2}{g \cos 45^\circ} = \frac{2 \times 2}{9.8 \times \sqrt{2}} \left(\frac{110 \times 10^3}{3600} \right)^2 \text{ m} = 269 \text{ m}$$

(2) 实际 L 的数值小于上述计算值,是由于空气阻力对运动员的影响。

1.10 一个人扔石头的最大出手速率 $v = 25 \text{ m/s}$, 他能击中一个与他的手水平距离 $L = 50 \text{ m}$, 高 $h = 13 \text{ m}$ 处的一座墙吗? 在这个距离内他能击中的目标的最大高度是多少?

解 如图 1.4 所示, 石头的轨道方程为

$$y = x \tan \theta - \frac{1}{2} \frac{gx^2}{v^2 \cos^2 \theta}$$

以 $\cos^2 \theta = (1 + \tan^2 \theta)^{-1}$ 代入可得

$$\frac{gx^2}{2v^2} \tan^2 \theta - x \tan \theta + \left(\frac{gx^2}{2v^2} + y \right) = 0$$

能击中该目标的 θ 角需满足上式, 即条件为

$$\tan \theta = \frac{v^2}{gL} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{2g}{v^2} \left(h + \frac{gL^2}{2v^2} \right)} \right]$$

将已知数据代入后, 可得根号下的值

$$1 - \frac{2g}{v^2} \left(h + \frac{gL^2}{2v^2} \right) = -0.022 < 0$$

由此可知 θ 无实数解, 所以该目标不在可能的轨道上, 所以不能被石头击中。

只有当

$$1 - \frac{2g}{v^2} \left(h + \frac{gL^2}{2v^2} \right) \geq 0$$

时, θ 才有解, 由此得

$$h \leq \frac{v^2}{2g} - \frac{gL^2}{2v^2} = \frac{25^2}{2 \times 9.8} \text{ m} - \frac{9.8 \times 50^2}{2 \times 25^2} \text{ m} = 12.3 \text{ m}$$

所以在 $L = 50 \text{ m}$ 这个距离上, 他能击中的目标的最大高度为 12.3 m 。附带算出相应的

$$\theta = \arctan \frac{v^2}{gL} = \arctan \frac{25^2}{9.8 \times 50} = 51.9^\circ$$

1.11 为迎接香港回归, 柯受良 1997 年 6 月 1 日驾车飞越黄河壶口瀑布 (见原书图 1.26)。东岸跑道长 265 m , 柯受良驾车从跑道东端起动, 到达跑道终端时速度为 150 km/h , 他随即以仰角 5° 冲出, 飞越跨度为 57 m , 安全落到西岸木桥上。

- (1) 按匀加速运动计算, 柯受良在东岸驱车的加速度和时间各是多少?
- (2) 柯受良跨越黄河用了多长时间?
- (3) 若起飞点高出河面 10.0 m , 柯受良驾车飞行的最高点离河面几米?
- (4) 西岸木桥桥面和起飞点的高度差是多少?

解 在图 1.5 中, $s = 265 \text{ m}$, $v_0 = 150 \text{ km/h}$, $\theta = 5^\circ$, $L = 57 \text{ m}$, $h_1 = 10 \text{ m}$ 。

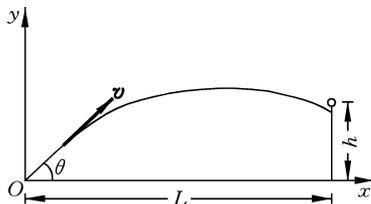


图 1.4 习题 1.10 解用图