第一部分　高等数学(微积分)

第一章　极　　限

§1.1　极限的概念与性质

十年真题 2016 — 2025　　　　答案 P238

考点　极限的概念与性质

1. (24-2) 已知数列$\{a_n\}(a_n\neq 0)$. 若$\{a_n\}$发散,则(　　)

(A) $\left\{a_n+\dfrac{1}{a_n}\right\}$发散.　　(B) $\left\{a_n-\dfrac{1}{a_n}\right\}$发散.

(C) $\left\{e^{a_n}+\dfrac{1}{e^{a_n}}\right\}$发散.　　(D) $\left\{e^{a_n}-\dfrac{1}{e^{a_n}}\right\}$发散.

2. (22-1,2) 设数列$\{x_n\}$满足$-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x_n\leqslant\dfrac{\pi}{2}$,则(　　)

(A) 当$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$存在时,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

(B) 当$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$存在时,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

(C) 当$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$存在时,$\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n$存在,但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不一定存在.

(D) 当$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$存在时,$\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n$存在,但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不一定存在.

3. (17-2) 设数列$\{x_n\}$收敛,则(　　)

(A) 当$\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=0$时,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(B) 当$\lim\limits_{n\to\infty}x_n(x_n+\sqrt{|x_n|})=0$时,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(C) 当$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+x_n^2)=0$时,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(D) 当$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sin x_n)=0$时,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

考点分析

考　　点	大 纲 要 求	命 题 特 点
极限的概念与性质	1. 理解极限的概念,理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左极限、右极限之间的关系. 2. 掌握极限的性质及运算法则.	**1. 考试频率:** ★★☆☆☆ **2. 常考题型:** 选择题 **3. 命题趋势:** 在过去的考研中,极限的概念与性质一直以来都较少考查. 近年来,虽考试频率略有增加,但考题难度却并不高,一般都能够通过举反例来选出正确选项.

知识梳理

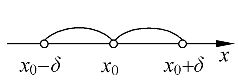
考点　极限的概念与性质

1. 数列极限的概念

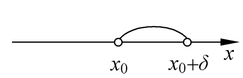
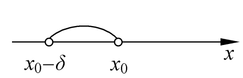
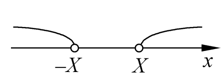
$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow$任取$\varepsilon>0$,存在正整数$N$,使得当①________时,有②________.

若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则称数列$\{x_n\}$收敛于$a$;若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不存在,则称$\{x_n\}$发散.

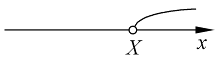
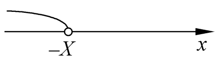
2. 函数极限的概念

	图形	定义
$x\to x_0$		$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow$任取$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,使得当③________时,有④________.

续表

	图形	定义
$x\to x_0^+$		$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A\Leftrightarrow$任取$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,使得当⑤________时,有$\|f(x)-A\|<\varepsilon$.
$x\to x_0^-$		$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A\Leftrightarrow$任取$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,使得当$x_0-\delta<x<x_0$时,有$\|f(x)-A\|<\varepsilon$.
$x\to\infty$		$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow$任取$\varepsilon>0$,存在$X>0$,使得当⑥________时,有$\|f(x)-A\|<\varepsilon$.

续表

	图形	定义
$x\to+\infty$		$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A\Leftrightarrow$任取$\varepsilon>0$,存在$X>0$,使得当$x>X$时,有$\vert f(x)-A\vert<\varepsilon$.
$x\to-\infty$		$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A\Leftrightarrow$任取$\varepsilon>0$,存在$X>0$,使得当⑦________时,有$\vert f(x)-A\vert<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$;

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A\Leftrightarrow$⑧________________________.

【注】 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$和$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$也可分别记作$f(x_0^+)$和$f(x_0^-)$.

3. 极限的性质

(1) 唯一性:若$\{x_n\}$收敛,则其极限唯一;若$\lim\limits_{x\to\cdot} f(x)$存在,则该极限唯一.

(2) 有界性:若$\{x_n\}$收敛,则$\{x_n\}$有界;若$\lim\limits_{x\to\cdot} f(x)=A$,则存在常数$M>0$,使得当$x\to\cdot$时,$|f(x)|\leqslant M$.

(3) 保号性:若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$,且$a>0$(或$a<0$),则当$n\to\infty$时,有$x_n>0$(或$x_n<0$);若$\lim\limits_{x\to\cdot} f(x)=A$,且$A>0$(或$A<0$),则当$x\to\cdot$时,有⑨________(或⑩________).

(4) 收敛数列与其子数列间的关系:在$\{x_n\}$中任意抽取无限多项并保持这些项在$\{x_n\}$中的先后次序,这样得到的一个数列称为$\{x_n\}$的子数列.若$\{x_n\}$收敛于a,则其任一子数列也收敛于a.

(5) 函数极限与数列极限的关系(海涅定理):设$\{x_n\}$为$f(x)$的定义域内任一收敛于a的数列,且$x_n\neq a$(n为正整数),则$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$的充分必要条件是$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=$⑪________.

4. 极限的运算法则

(1) 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$,$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=b$,则

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(k_1x_n\pm k_2y_n)=k_1a\pm k_2b$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n\cdot y_n=$⑫________;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{a}{b}\ (b\neq0)$.

类似地,若$\lim\limits_{x\to\cdot} f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to\cdot} g(x)=B$,则

1) $\lim\limits_{x\to\cdot}[k_1f(x)\pm k_2g(x)]=k_1A\pm k_2B$;

2) $\lim\limits_{x\to\cdot}[f(x)\cdot g(x)]=AB$;

3) $\lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}\ (B\neq0)$.

(2) 设当$x\to\cdot$时,$f[g(x)]$有定义且$g(x)\neq a$,若$\lim\limits_{x\to\cdot} g(x)=a$,$\lim\limits_{u\to a} f(u)=A$,则$\lim\limits_{x\to\cdot} f[g(x)]=$⑬________.

知识梳理·答案

① $n>N$ ② $|x_n-a|<\varepsilon$ ③ $0<|x-x_0|<\delta$
④ $|f(x)-A|<\varepsilon$ ⑤ $x_0<x<x_0+\delta$ ⑥ $|x|>X$
⑦ $x<-X$ ⑧ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$ ⑨ $f(x)>0$
⑩ $f(x)<0$ ⑪ A ⑫ ab ⑬ A

方法探究

考点 极限的概念与性质

极限的概念与性质问题有以下两个思路:

(1) 正面做:利用极限的定义(ε语言)、性质或运算法则证明结论正确;

(2) 反面做:通过举反例说明结论错误.

【例1】 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$且$A\geqslant0$,则存在$\delta>0$,使得当$0<|x-x_0|<\delta$时,满足( )

(A) $|f(x)|>A+1$. (B) $|f(x)|<A+1$.

(C) $f(x)>|A-1|$. (D) $f(x)<|A-1|$.

【解】法一(反面做):取$f(x)=1$,则$A=1$,可排除(A)(D).再取$f(x)=0$,则$A=0$,可排除(C),故选(B).

法二(正面做):取$\varepsilon=1$,则存在$\delta>0$,使得当$0<|x-x_0|<\delta$时,有$|f(x)-A|<1$.于是$|f(x)|=|[f(x)-A]+A|\leqslant|f(x)-A|+|A|<1+A$,选(B).

【例2】(03-1,2) 设$\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$均为非负数列,且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=1$,$\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\infty$,则必有( )

(A) $a_n<b_n$对任意n成立.

(B) $b_n<c_n$对任意n成立.

(C) 极限$\lim\limits_{n\to\infty} a_nc_n$不存在.

(D) 极限$\lim\limits_{n\to\infty} b_nc_n$不存在.

【解】法一(反面做):取$a_n=\dfrac{1}{n}$,$b_n=1$,$c_n=n$,则当$n=1$时,$a_n=b_n=c_n$,且$\lim\limits_{n\to\infty} a_nc_n=1$,可排除(A)(B)(C),故选(D).

法二(正面做):假设$\lim\limits_{n\to\infty} b_nc_n$存在且等于$A$,则$\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_nc_n}{b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} b_nc_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}=A$,与$\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\infty$矛盾,故$\lim\limits_{n\to\infty} b_nc_n$不存在,选(D).

【注】 其实,若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$,$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=b$,且$a>b$(或$a<b$),则当$n\to\infty$时,有$x_n>y_n$(或$x_n<y_n$);若$\lim\limits_{x\to\cdot} f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to\cdot} g(x)=B$,且$A>B$(或$A<B$),则当$x\to\cdot$时,有$f(x)>g(x)$(或$f(x)<g(x)$).因此,本例中$a_n<b_n$当$n$充分大时才成立.

此外,若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$,$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=b$,且$x_n>y_n$(或$x_n<y_n$),则$a\geqslant b$(或$a\leqslant b$);若$\lim\limits_{x\to\cdot} f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to\cdot} g(x)=B$,且$f(x)>g(x)$(或$f(x)<g(x)$),则$A\geqslant B$(或$A\leqslant B$).

真题精选
1987 — 2015

答案 P238

考点 极限的概念与性质

1. (15-3) 设$\{x_n\}$是数列,下列命题中不正确的是( )

(A) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$.

(B) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

(C) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$.

(D) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

2. (14-3) 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,且$a\neq0$,则当$n$充分大时有( )

(A) $|a_n|>\dfrac{|a|}{2}$.　　(B) $|a_n|<\dfrac{|a|}{2}$.

(C) $a_n>a-\dfrac{1}{n}$.　　(D) $a_n<a+\dfrac{1}{n}$.

3. (00-3) 设对任意的x,总有$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$,且$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$,则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$( )

(A) 存在且等于零.　　(B) 存在但不一定为零.

(C) 一定不存在.　　(D) 不一定存在.

4. (99-2) “对任意给定的$\varepsilon\in(0,1)$,总存在正整数N,当$n\geqslant N$时,恒有$|x_n-a|\leqslant2\varepsilon$”是数列$\{x_n\}$收敛于$a$的( )

(A) 充分条件但非必要条件.

(B) 必要条件但非充分条件.

(C) 充分必要条件.

(D) 既非充分条件又非必要条件.

小　结

极限的概念与性质的考题往往因为形式较抽象,所以会使一些考生在心理上产生恐惧. 同时,若要利用极限的定义或性质来证明结论正确,则在考场上也确实不太容易有思路. 实际上,除了像 1999 年数学二那样直接考查ε语言的考题,其他考题基本上都能够通过举反例来迅速地找到错误的结论,而常值函数或数列是极限存在的常用反例,n、$(-1)^n$、$2^{(-1)^n}$是极限不存在的常用反例.

§ 1.2　极限的计算

十年真题
2016 — 2025

答案 P238

考点一　函数极限的计算

1. (25-1) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^x-1}{\ln x\cdot\ln(1-x)}=$________.

2. (23-3) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(2-x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\right)=$________.

3. (22-2,3) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)^{\cot x}=$________.

4. (20-1) $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]=$________.

5. (19-2) $\lim\limits_{x\to0}(x+2^x)^{\frac{2}{x}}=$________.

6. (18-2) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2[\arctan(x+1)-\arctan x]=$________.

7. (16-2,3) 求极限$\lim\limits_{x\to0}(\cos2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

考点二　数列极限的计算

1. (22-3) 已知$a_n=\sqrt[n]{n}-\dfrac{(-1)^n}{n}(n=1,2,\cdots)$,则数列$\{a_n\}$( )

(A) 有最大值和最小值.　　(B) 有最大值,没有最小值.

(C) 没有最大值,有最小值.　(D) 没有最大值和最小值.

2. (25-2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left[\ln\dfrac{1}{n}+2\ln\dfrac{2}{n}+\cdots+(n-1)\ln\dfrac{n-1}{n}\right]=$________.

3. (19-3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]^n=$________.

4. (16-2,3) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+n\sin\dfrac{n}{n}\right)=$________.

5. (19-1,3) 设$a_n=\int_0^1x^n\sqrt{1-x^2}\,dx\,(n=0,1,2,\cdots)$.

(1) 证明:数列$\{a_n\}$单调减少,且$a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}(n=2,3,\cdots)$;

(2) 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$.

6. (18-1,2,3) 设数列$\{x_n\}$满足:$x_1>0$,$x_n e^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1(n=1,2,\cdots)$. 证明$\{x_n\}$收敛,并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

7. (17-1,2,3) 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$.

考点分析

考　　点	大 纲 要 求	命 题 特 点
一、函数极限的计算	1. 理解无穷小量、无穷大量的概念,会用等价无穷小量求极限. 2. 掌握用洛必达法则和泰勒公式求未定式极限的方法.	**1. 考试频率**:★★★★★ **2. 常考题型**:填空题、解答题 **3. 命题趋势**:极限的计算是考研数学的必考内容,也会在其他考题中有所涉及.在过去的考研中,以考查函数极限的计算为主.而近年来,对于数列极限计算的考查明显增加,尤其以解答题的形式进行考查.
二、数列极限的计算	掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限.	

知识梳理

考点一　函数极限的计算

1. 无穷小与无穷大

(1) 若$\lim\limits_{x\to\cdot}f(x)=$①________,则称$f(x)$为当$x\to\cdot$时的无穷小.

若任取$M>0$,当$x\to\cdot$时都有②________,则称$f(x)$为当$x\to\cdot$时的无穷大,记作$\lim\limits_{x\to\cdot}f(x)=\infty$;若任取$M>0$,当$x\to\cdot$时都有③________,则记作$\lim\limits_{x\to\cdot}f(x)=+\infty$;若任取$M>0$,当$x\to\cdot$时都有$f(x)<-M$,则记作$\lim\limits_{x\to\cdot}f(x)=-\infty$.

若$\lim\limits_{x\to\cdot}f(x)=\infty$,则$\lim\limits_{x\to\cdot}\frac{1}{f(x)}=0$;若$\lim\limits_{x\to\cdot}f(x)=0$,且$f(x)\neq0$,则$\lim\limits_{x\to\cdot}\frac{1}{f(x)}=$④________.

(2) 关于无穷小的结论:

1) $\lim\limits_{x\to\cdot}f(x)=A$的充分必要条件是$f(x)=A+\alpha(x)$,其中$\alpha(x)$为当$x\to\cdot$时的无穷小;

2) 有限个无穷小的和与乘积都是无穷小;

3) 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

(3) 常用于替换的等价无穷小:当$\alpha(x)\to0$时,

1) $\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$;　2) $\tan\alpha(x)\sim\alpha(x)$;

3) $\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$;　4) $\arctan\alpha(x)\sim\alpha(x)$;

5) $e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$;

6) $\ln[1+\alpha(x)]\sim$⑤________;

7) $1-\cos\alpha(x)\sim$⑥________;

8) $[1+\alpha(x)]^{\mu}-1\sim$⑦________.

【注】(i) 只有独立的或乘除形式的等价无穷小才可以替换,加减形式的等价无穷小一般不能替换.

(ii) 等价无穷小具有传递性:若$\alpha\sim\beta$,$\beta\sim\gamma$,则$\alpha\sim\gamma$.

2. 洛必达法则

对于$\lim\limits_{x\to\cdot}\frac{f(x)}{g(x)}$,若

(1) $\lim\limits_{x\to\cdot}f(x)=\lim\limits_{x\to\cdot}g(x)=0\left(\frac{0}{0}型\right)$或$\lim\limits_{x\to\cdot}f(x)=\lim\limits_{x\to\cdot}g(x)=\infty\left(\frac{\infty}{\infty}型\right)$;

(2) $f(x)$,$g(x)$在$x\to\cdot$时可导,且$g'(x)\neq0$;

(3) ⑧________________存在(或为无穷大),

则$\lim\limits_{x\to\cdot}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\cdot}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

3. 常用于求极限的泰勒展开式

当$x\to0$时,

(1) $\sin x=x+$⑨________$x^3+o(x^3)$;

(2) $\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$;

(3) $\arcsin x=x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$;

(4) $\arctan x=x+$⑩________$x^3+o(x^3)$;

(5) $e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$；

(6) $\ln(1+x)=x+$⑪________ $x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$；

(7) $\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)$；

(8) $(1+x)^\mu=1+\mu x+\frac{\mu(\mu-1)}{2}x^2+o(x^2)$.

考点二　数列极限的计算

1. 极限存在的两个准则

(1) 夹逼准则：若

1) 当 $n\to\infty$ 时，$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$；

2) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，

则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$⑫________.

类似地，若

1) 当 $x\to\cdot$ 时，$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$；

2) $\lim\limits_{x\to\cdot}g(x)=\lim\limits_{x\to\cdot}h(x)=A$，

则 $\lim\limits_{x\to\cdot}f(x)=A$.

【注】 准则中的任一“$\leqslant$”都能改写为“$<$”.

(2) 单调有界准则：单调有界数列必有极限.

【注】 此处“单调有界”体现为单调递增且有上界或者单调递减且有下界.

2. 用于求数列极限的定积分定义式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=⑬\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

知识梳理·答案

① 0　② $|f(x)|>M$　③ $f(x)>M$　④ ∞　⑤ $\alpha(x)$

⑥ $\frac{1}{2}\alpha^2(x)$　⑦ $\mu\alpha(x)$　⑧ $\lim\limits_{x\to\cdot}\frac{f'(x)}{g'(x)}$　⑨ $-\frac{1}{6}$　⑩ $-\frac{1}{3}$

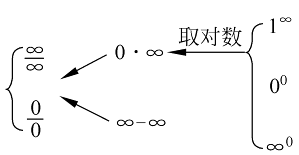
⑪ $-\frac{1}{2}$　⑫ a　⑬ $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

方法探究

答案 P240

考点一　函数极限的计算

函数极限的计算主要考查$\frac{\infty}{\infty}$型、$\frac{0}{0}$型、$0\cdot\infty$型、$\infty-\infty$型、1^∞型、0^0型和∞^0型这 7 种未定式的极限. 其中，剩余 5 种未定式的极限都能转化为$\frac{\infty}{\infty}$型或$\frac{0}{0}$型来计算：



1. $\frac{\infty}{\infty}$型和$\frac{0}{0}$型

(1) 对于$\frac{\infty}{\infty}$型极限，可以考虑分子分母同时除以趋于无穷大“速度最快”的项，或利用洛必达法则.

(2) 对于$\frac{0}{0}$型极限，一般先通过无穷小的等价替换、有理化、换元等方法来化简，再利用洛必达法则或泰勒公式.

【例 1】 (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+e^x}{1+e^x}=$________.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+\tan x}}{x\tan^2x}=$________.

【解】 (1) **法一**：原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{e^x}+1}{\frac{1}{e^x}+1}=\frac{0+1}{0+1}=1$.

法二：原式$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{洛}{=\!=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+e^x}{e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{洛}{=\!=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$.

(2) **法一**：原式$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+\tan x}}{x\tan^2x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+\tan x}}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1+\tan x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+\tan x})}{x^3(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+\tan x})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x-\tan x}{x^3}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+\tan x}}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x-\tan x}{x^3}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{洛}{=\!=}}\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{1-\sec^2x}{3x^2}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{洛}{=\!=}}\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{-2\sec^2x\tan x}{6x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{-2\sec^2x}{6}=-\frac{1}{6}.$$

法二：用泰勒公式把 $\tan x$ 展开，

$$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3),$$

故

$$x-\tan x=-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\sim-\frac{1}{3}x^3\ (x\to0).$$

于是原式$=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\tan x}{x^3}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{3}x^3}{x^3}=-\frac{1}{6}.$$

【注】 当 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时，e^x 的极限不同：

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty,\\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0.\end{cases}\quad 类似地，\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

变式 1.1(97-2) 求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

变式 1.2(92-4) 求极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}$.

2. 0·∞型和∞−∞型

(1) 求 0·∞型极限的思路如下:当 $x\to\cdot$ 时,若 $f(x)\to0,g(x)\to\infty$,则

$$\lim_{x\to\cdot}[f(x)\cdot g(x)]=\begin{cases}\lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\left(\dfrac{0}{0}\text{ 型}\right),\\ \lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{ 型}\right).\end{cases}$$

(2) ∞−∞型极限可通过通分[如例 2(2)]、有理化(如变式 2.1)、倒代换(即令 $t=\dfrac{1}{x}$,如变式 2.2)等方法转化为 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型或 $\dfrac{0}{0}$ 型极限.

【例 2】求下列极限:

(1) (04-2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$;

(2) (04-3) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^2x}-\dfrac{\cos^2x}{x^2}\right)$.

【解】(1) 当 $x\to0$ 时,

$$\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1=e^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}-1\sim x\ln\frac{2+\cos x}{3}.$$

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\frac{2+\cos x}{3}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\frac{1}{6}.$$

(2) $$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2x\cos^2x}{x^2\sin^2x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\frac{1}{4}\sin^22x}{x^4}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{洛}}{=\!=}}\lim_{x\to0}\frac{2x-\frac{1}{2}\sin4x}{4x^3}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{洛}}{=\!=}}\lim_{x\to0}\frac{2-2\cos4x}{12x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos4x}{6x^2}=\lim_{x\to0}\frac{8x^2}{6x^2}=\frac{4}{3}.$$

【注】在求极限时,若局部出现幂指函数,则可局部取对数.

变式 2.1 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})=$________.

变式 2.2(94-5) 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

3. 1^∞ 型、0^0 型和 ∞^0 型

当 $x\to\cdot$ 时,若 $f(x)\to1$ 且 $g(x)\to\infty$、$f(x)\to0^+$ 且 $g(x)\to0$ 或者 $f(x)\to+\infty$ 且 $g(x)\to0$,则

$$\lim_{x\to\cdot}f(x)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\cdot}\ln f(x)^{g(x)}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\cdot}g(x)\ln f(x)}\quad(0\cdot\infty\text{ 型}).$$

【例 3】(11-2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=$________.

【解】原式$\overset{1^\infty}{=\!=}e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+2^x}{2}\right)}$

$$\overset{0\cdot\infty}{=\!=}e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{2^x-1}{2}\right)}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2^x-1}{2x}}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{洛}}{=\!=}}e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2^x\ln2}{2}}=\sqrt{2}.$$

【注】对于 1^∞ 型极限,在取对数后可进行无穷小的等价替换,即

$$\lim_{x\to\cdot}f(x)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\cdot}g(x)\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\cdot}g(x)[f(x)-1]}$$

(当 $x\to\cdot$ 时,$f(x)\to1,g(x)\to\infty$).但是对于 0^0 型(如变式 3.2)和 ∞^0 型(如变式 3.1)极限,切莫如此替换.

变式 3.1(89-5) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$.

变式 3.2(10-3) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$.

考点二 数列极限的计算

1. 转化为函数的极限

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=A$.

【例 1】(94-2) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n}\right)$.

【解】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\tan^{x}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{x}\right)=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{x}\right)}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{x}\right)-1\right]}$$

$$\xlongequal{\text{令 } t=\frac{1}{x}}e^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+2t\right)-1}{t}}$$

$$\xlongequal[\text{洛}]{\frac{0}{0}}e^{\lim\limits_{t\to0^+}2\sec^2\left(\frac{\pi}{4}+2t\right)}=e^4.$$

故原式$=e^4$.

变式 1 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left[\sin\frac{1}{n}+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]=$________.

2. 利用夹逼准则

在考研中,常根据第(1)问所得的不等式,利用夹逼准则来求第(2)问的极限(如例 2).也可利用夹逼准则来求数列 n 项和的极限(如变式 2).

【例 2】(10-1,2,3) (1) 比较$\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t$ 与 $\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t(n=1,2,\cdots)$ 的大小,说明理由;

(2) 记 $u_n=\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t(n=1,2,\cdots)$,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

【解】(1) 当 $0\leqslant t\leqslant1$ 时,由于 $0\leqslant\ln(1+t)\leqslant t$,故 $|\ln t|[\ln(1+t)]^n\leqslant t^n|\ln t|$,从而

$$\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t.$$

(2) 由(1) 可知 $0\leqslant u_n\leqslant\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t$.

因为$\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t=-\int_0^1 t^n\ln t\mathrm{d}t=-\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln t\right]_0^1+\int_0^1\frac{t^n}{n+1}\mathrm{d}t=\frac{1}{(n+1)^2}$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t=0$.

故由夹逼准则可知 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

【注】 $\ln(1+x)\leqslant x$ 和 $e^x\geqslant x+1$ 是考研常用的不等式.

变式 2(95-2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=$________.

3. 利用定积分定义

对于数列 n 项和的极限,若将$\frac{1}{n}$提出连加符号后,“$\frac{k}{n}$”以整体出现,无孤立的 n 和 k,则可利用定积分定义式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

来求.有时,也可将定积分定义与夹逼准则相结合使用(如变式 3).

【例 3】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=$________.

【解】原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=\ln2.$$

变式 3(98-1) 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right).$$

4. 利用单调有界准则

若已知$\{x_n\}$的递推关系式,则常利用单调有界准则来证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,然后在递推关系式两边同时取极限,并根据 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}$,便可求出 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

在证明数列极限存在时,可利用基本不等式(如例 4)、数学归纳法(如变式 4.1)、拉格朗日中值定理(如 2018 年的考题),以及第(1)问的结论(如变式 4.2),等等.

【例 4】(02-2) 设 $0<x_1<3,x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}(n=1,2,\cdots)$.证明数列$\{x_n\}$的极限存在,并求此极限.

【证】因为

$$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}\leqslant\frac{1}{2}(x_n+3-x_n)=\frac{3}{2},$$

故$\{x_n\}$有上界.

又由 $x_n\leqslant\frac{3}{2}$可知

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\sqrt{\frac{x_n(3-x_n)}{x_n^2}}=\sqrt{\frac{3}{x_n}-1}\geqslant1,$$

故$\{x_n\}$单调递增,从而$\{x_n\}$极限存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=a$,对 $x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$两边同时取极限,有 $a=\sqrt{a(3-a)}$,解得 $a=\frac{3}{2}$或 $a=0$(由于 $x_n>0$,故舍去).所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{3}{2}$.

变式 4.1(96-1) 设 $x_1=10,x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}(n=1,2,\cdots)$,试证数列$\{x_n\}$极限存在,并求此极限.

变式 4.2(11-1,2) (1) 证明:对任意的正整数 n,都有$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$成立;

(2) 设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\,(n=1,2,\cdots)$,证明数列$\{a_n\}$收敛.

真题精选 1987—2015

答案 P241

考点一 函数极限的计算

1. (13-2) $\lim\limits_{x\to 0}\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=$________.

2. (09-3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=$________.

3. (07-2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x-\sin x}{x^3}=$________.

4. (07-3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=$________.

5. (03-1) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=$________.

6. (99-1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)=$________.

7. (98-1,2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$________.

8. (97-1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$________.

9. (89-3) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x=$________.

10. (88-3) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}=$________.

11. (88-4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x-1}{x\ln x}=$________.

12. (12-3) 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^{2-2\cos x}}{x^4}$.

13. (09-2) 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}$.

14. (08-1,2) 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

15. (08-3) 计算$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}$.

16. (99-2) 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$.

17. (91-4) 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$,其中 n 是给定的自然数.

考点二 数列极限的计算

1. (**12-2**) 设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，则数列$\{S_n\}$有界是数列$\{a_n\}$收敛的(　　)

(A) 充分必要条件.

(B) 充分非必要条件.

(C) 必要非充分条件.

(D) 既非充分也非必要条件.

2. (**04-2**) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}$ 等于(　　)

(A) $\int_1^2 \ln^2 x\,\mathrm{d}x$.　　(B) $2\int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x$.

(C) $2\int_1^2 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x$.　　(D) $\int_1^2 \ln^2(1+x)\,\mathrm{d}x$.

3. (**12-2**) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{1+n^2}+\frac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}\right)=$________.

4. (**02-2**) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\frac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\frac{n\pi}{n}}\right]$ $=$________.

5. (**93-5**) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right]=$ ________.

6. (**13-2**) 设函数 $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$.

(1) 求 $f(x)$的最小值；

(2) 设数列$\{x_n\}$满足 $\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

7. (**06-1,2**) 设数列$\{x_n\}$满足 $0<x_1<\pi$，$x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$.

(1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求该极限；

(2) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

8. (**99-2**) 设 $f(x)$是区间$[0,+\infty)$上单调减少且非负的连续函数，$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x(n=1,2,\cdots)$，证明数列$\{a_n\}$的极限存在.

小　结

在考研中，函数极限的计算一直以来都重点考查不能等价替换的“无穷小±无穷小”，比如2023年数学三的填空题所转化的极限 $\lim\limits_{t\to0}\frac{2t-\sin t-t\cos t}{t^3}$、2016年数学二、三的解答题所转化的极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 2x+2x\sin x-1}{x^4}$、2012年数学三的解答题所转化的极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2+2\cos x-2}{x^4}$、2009年数学二的解答题所转化的极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\ln(1+\tan x)}{2x^2}$、2008年数学一、二的解答题所转化的极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}$ 的分子部分，以及1999年数学二的解答题所转化的极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x\ln(1+x)-x^2}$ 的分子和分母部分等等. 利用泰勒公

式来处理它们往往会比洛必达法则更方便.此外,$\frac{0}{0}$型和1^{∞}型极限所考查的频率较高.

数列极限的计算近年来经常以难度较高的综合性解答题的形式进行考查,比如2019年数学一、三关于夹逼准则的解答题平均分仅分别为2.46分和2.08分,2018年数学一、二、三关于单调有界准则的解答题平均分仅分别为2.04分、1.66分和1.27分.这些考题对考生灵活应用所学知识分析、解决问题的能力有较高的要求,不少考生都交了白卷.

§1.3 极限的应用

十年真题 2016—2025

答案 P243

考点一 无穷小的比较

1. (25-2) 设函数$f(x)$,$g(x)$在$x=0$的某去心邻域内有定义且恒不为零.若当$x\to0$时,$f(x)$是$g(x)$的高阶无穷小,则当$x\to0$时(　　)

(A) $f(x)+g(x)=o[g(x)]$.

(B) $f(x)g(x)=o[f^2(x)]$.

(C) $f(x)=o[e^{g(x)}-1]$.

(D) $f(x)=o[g^2(x)]$.

2. (25-3) 当$x\to0^+$时,下列无穷小量中,与x等价的是(　　)

(A) $e^{-\sin x}-1$.　　(B) $\sqrt{x+1}-\cos x$.

(C) $1-\cos\sqrt{2x}$.　　(D) $1-\frac{\ln(1+x)}{x}$.

3. (23-2) 已知$\{x_n\}$,$\{y_n\}$满足$x_1=y_1=\frac{1}{2}$,$x_{n+1}=\sin x_n$,$y_{n+1}=y_n^2(n=1,2,\cdots)$,则当$n\to\infty$时(　　)

(A) x_n是y_n的高阶无穷小.

(B) y_n是x_n的高阶无穷小.

(C) x_n与y_n是等价无穷小.

(D) x_n与y_n是同阶但不等价的无穷小.

4. (22-2,3) 当$x\to0$时,$\alpha(x)$,$\beta(x)$是非零无穷小量,给出以下四个命题:

① 若$\alpha(x)\sim\beta(x)$,则$\alpha^2(x)\sim\beta^2(x)$;

② 若$\alpha^2(x)\sim\beta^2(x)$,则$\alpha(x)\sim\beta(x)$;

③ 若$\alpha(x)\sim\beta(x)$,则$\alpha(x)-\beta(x)=o[\alpha(x)]$;

④ 若$\alpha(x)-\beta(x)=o[\alpha(x)]$,则$\alpha(x)\sim\beta(x)$.

其中所有真命题的序号是(　　)

(A) ①③.　　(B) ①④.

(C) ①③④.　　(D) ②③④.

5. (16-2) 设$\alpha_1=x(\cos\sqrt{x}-1)$,$\alpha_2=\sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x})$,$\alpha_3=\sqrt[3]{x+1}-1$.当$x\to0^+$时,以上3个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是(　　)

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.　　(B) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1$.

(C) $\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3$.　　(D) $\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1$.

考点二 平面曲线的渐近线

1. (23-1,2) 曲线$y=x\ln\left(e+\frac{1}{x-1}\right)$的斜渐近线方程为(　　)

(A) $y=x+e$.　　(B) $y=x+\frac{1}{e}$.

(C) $y=x$.　　(D) $y=x-\frac{1}{e}$.

2. (25-2) 曲线$y=\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}$的渐近线方程为________.

3. (25-3) 设$g(x)$是函数$f(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{3+x}{3-x}$的反函数,则曲线$y=g(x)$的渐近线方程为________.

4. (17-2) 曲线$y=x\left(1+\arcsin\frac{2}{x}\right)$的斜渐近线方程为________.

5. (16-2) 曲线$y=\frac{x^3}{1+x^2}+\arctan(1+x^2)$的斜渐近线方程为________.

6. (20-2) 求曲线$y=\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}(x>0)$的斜渐近线方程.

考点三 函数的连续性与间断点

1. (24-2) 函数$f(x)=|x|^{\frac{1}{(1-x)(x-2)}}$的第一类间断点的个数是(　　)

(A) 3.　　(B) 2.　　(C) 1.　　(D) 0.

2. (24-3) 设函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+nx^{2n}}$,则$f(x)$(　　)

(A) 在$x=1$,$x=-1$处都连续.

(B) 在$x=1$处连续,$x=-1$处不连续.

(C) 在$x=1$,$x=-1$处都不连续.

(D) 在$x=1$处不连续,$x=-1$处连续.

3.（20-2,3）函数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}$ 的第二类间断点的个数为（　　）

（A）1.　　（B）2.　　（C）3.　　（D）4.

考点分析

考　　点	大 纲 要 求	命 题 特 点
一、无穷小的比较	掌握无穷小量的比较方法.	**1. 考试频率：**★★★★☆ **2. 常考题型：**选择题 **3. 命题趋势：**极限的应用在考研中经常考查.这部分考题一般难度不高，只要掌握了基本的概念和方法，就能够做对.
二、平面曲线的渐近线	会求函数图形的水平、铅直和斜渐近线.	
三、函数的连续性与间断点	理解函数连续性的概念（含左连续与右连续），会判断函数间断点的类型.	

知识梳理

考点一　无穷小的比较

设 $\lim\limits_{x\to\cdot}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to\cdot}\beta(x)=0$，且 $\alpha(x)\neq 0$.

（1）若 $\lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=$①________，则称当 $x\to\cdot$ 时 $\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 高阶的无穷小，记作 $\beta(x)=o[\alpha(x)]$；

（2）若 $\lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\infty$，则称当 $x\to\cdot$ 时 $\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 低阶的无穷小；

（3）若 $\lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=c\neq 0$，则称当 $x\to\cdot$ 时 $\beta(x)$ 与 $\alpha(x)$ 是同阶无穷小；

（4）若 $\lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{\beta(x)}{\alpha^k(x)}=c\neq 0(k>0)$，则称当 $x\to\cdot$ 时 $\beta(x)$ 是关于 $\alpha(x)$ 的 k 阶无穷小；

（5）若 $\lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=$②________，则称当 $x\to\cdot$ 时 $\beta(x)$ 与 $\alpha(x)$ 是等价无穷小，记作 $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

【注】$\alpha(x)\sim\beta(x)\Leftrightarrow\beta(x)=\alpha(x)+o[\alpha(x)]$.

考点二　平面曲线的渐近线

（1）若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0^+\\(x\to x_0^-)}}f(x)=\infty$（或 $+\infty$，$-\infty$），则直线③________是曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线.

（2）若 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}f(x)=A$，则直线 $y=A$ 是曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线.

（3）若 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\dfrac{f(x)}{x}=a\neq 0$，④________________$=b$，则直线 $y=ax+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线.

考点三　函数的连续性与间断点

1. 函数的连续性

若⑤________________，则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续；若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处左连续；若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处右连续.

【注】（i）若 $f(x)$ 在 (a,b) 内的每点处都连续，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续；若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且在 $x=a$ 处右连续，在 $x=b$ 处左连续，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

（ii）由常数和基本初等函数（幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数）经有限次四则运算或复合构成的用一个式子表示的函数称为初等函数.一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

2. 函数的间断点

（1）设 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时有定义，若 $f(x)$ 有以下三种情况之一：

1）$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处无定义；

2）虽 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在；

3）虽 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$，

则称 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的间断点.

（2）间断点的类型：

间断点的类型		小类特性	大类共性
第一类间断点	可去间断点	$f(x_0^+)=f(x_0^-)$	$f(x_0^+)$，$f(x_0^-)$ 都存在
	跳跃间断点	⑥__________	
第二类间断点	无穷间断点	$f(x_0^+)$，$f(x_0^-)$ 至少有一个为 ∞ 或 $+\infty$，$-\infty$	$f(x_0^+)$，$f(x_0^-)$ 至少有一个不存在
	振荡间断点	$f(x)$ 的图形在 $x\to x_0$ 时产生振荡现象	

3. 常见的左右极限不相等的函数

（1）指数函数与反正切函数.如 $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$；$\lim\limits_{x\to 0^+}\arctan\dfrac{1}{x}=$⑦________，$\lim\limits_{x\to 0^-}\arctan\dfrac{1}{x}=$⑧________.

（2）分段函数，包括绝对值函数和取整函数.如 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{|x|}=1$，$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{|x|}=-1$；$\lim\limits_{x\to 0^+}[x]=$⑨________，$\lim\limits_{x\to 0^-}[x]=$⑩________（$[x]$ 表示不大于 x 的最大整数）.

知识梳理・答案

① 0　② 1　③ $x=x_0$　④ $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}[f(x)-ax]$

⑤ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$　⑥ $f(x_0^+)\neq f(x_0^-)$　⑦ $\dfrac{\pi}{2}$

⑧ $-\dfrac{\pi}{2}$　⑨ 0　⑩ -1

方法探究

答案 P245

考点一 无穷小的比较

无穷小的比较问题有以下两个方法:

(1) 等价替换法. 主要用于比较方便等价替换的多个无穷小;

(2) 极限法(定义法). 主要用于比较不便等价替换的两个无穷小.

【例】(07-1,2) 当 $x\to0^+$ 时,与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是( )

(A) $1-e^{\sqrt{x}}$. (B) $\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$.

(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$. (D) $1-\cos\sqrt{x}$.

【解】 由于 $1-e^{\sqrt{x}}\sim-\sqrt{x}$,$(1+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}-1\sim\dfrac{1}{2}\sqrt{x}$,$1-\cos\sqrt{x}\sim\dfrac{1}{2}x$,故排除(A)(C)(D),选(B).

而 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}}=1.$

变式(89-3) 设 $f(x)=2^x+3^x-2$,则当 $x\to0$ 时( )

(A) $f(x)$是 x 的等价无穷小.

(B) $f(x)$与 x 是同阶但非等价无穷小.

(C) $f(x)$是比 x 更高阶的无穷小.

(D) $f(x)$是比 x 较低阶的无穷小.

考点二 平面曲线的渐近线

求 $y=f(x)$的渐近线可遵循如下步骤:

(1) 找到 $f(x)$的无定义点 x_0,并考察 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0^+\\(x\to x_0^-)}}f(x)$是否为 ∞或$+\infty$,$-\infty$,从而判断 $y=f(x)$是否有铅直渐近线. 一条曲线的铅直渐近线可以有无数条.

(2) 分别考察 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}f(x)$和 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\dfrac{f(x)}{x}$是否存在,从而判断 $y=f(x)$是否有水平渐近线和斜渐近线. 应注意当 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\dfrac{f(x)}{x}=a\neq0$ 时,只有 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\x\to-\infty}}[f(x)-ax]$也存在,才能断定 $y=f(x)$有一条斜渐近线. 一条曲线的水平渐近线和斜渐近线总共至多两条,并且在 $x\to+\infty$和 $x\to-\infty$这两个方向上每个方向总共至多一条.

【例】(94-3) 曲线 $y=e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x+1)(x-2)}$的渐近线有( )

(A) 1 条. (B) 2 条. (C) 3 条. (D) 4 条.

【解】 由于 $\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x+1)(x-2)}=-\infty$,故有铅直渐近线 $x=0$.

由于 $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x+1)(x-2)}=\dfrac{\pi}{4}$,故有水平渐近线 $y=\dfrac{\pi}{4}$. 选(B).

变式(00-2) 曲线 $y=(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线方程为________.

考点三 函数的连续性与间断点

判断 $f(x)$的间断点类型可遵循如下步骤:

(1) 找出 $f(x)$可能的间断点 x_0. 初等函数的间断点只可能是其无定义点;分段函数的间断点既可能是其无定义点,又可能是其分段点.

(2) 分别求 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$和 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$,从而判断间断点的类型.

【例】(05-2) 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$,则( )

(A) $x=0$,$x=1$ 都是 $f(x)$的第一类间断点.

(B) $x=0$,$x=1$ 都是 $f(x)$的第二类间断点.

(C) $x=0$ 是 $f(x)$的第一类间断点,$x=1$ 是 $f(x)$的第二类间断点.

(D) $x=0$ 是 $f(x)$的第二类间断点,$x=1$ 是 $f(x)$的第一类间断点.

【解】 由 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty$可知 $x=0$ 为 $f(x)$的无穷间断点.

当 $x\to1^+$时,$\dfrac{x}{x-1}\to+\infty$,从而 $e^{\frac{x}{x-1}}\to+\infty$,即 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=0$;当 $x\to1^-$时,$\dfrac{x}{x-1}\to-\infty$,从而 $e^{\frac{x}{x-1}}\to0^+$,即 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-1$. 故 $x=1$ 为 $f(x)$的跳跃间断点. 选(D).

变式 1(09-2,3) 函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$的可去间断点的个数为( )

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 无穷多个.

变式 2(98-3) 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$,讨论函数 $f(x)$的间断点,其结论为( )

(A) 不存在间断点. (B) 存在间断点 $x=1$.

(C) 存在间断点 $x=0$. (D) 存在间断点 $x=-1$.

真题精选

1987 — 2015

答案 P245

考点一 无穷小的比较

1.(13-3) 当 $x\to0$ 时,用 $o(x)$表示比 x 的高阶无穷小,则下列式子中错误的是( )

(A) $x\cdot o(x^2)=o(x^3)$. (B) $o(x)\cdot o(x^2)=o(x^3)$.

(C) $o(x^2)+o(x^2)=o(x^2)$. (D) $o(x)+o(x^2)=o(x^2)$.

2. (01-2) 设当 $x\to 0$ 时,$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小,$x\sin x^n$ 是比$(e^{x^2}-1)$高阶的无穷小,则正整数 n 等于(　　)

(A) 1.　(B) 2.　(C) 3.　(D) 4.

3. (92-3) 当 $x\to 0$ 时,下列四个无穷小量中,哪一个是比其他三个更高阶的无穷小量?(　　)

(A) x^2.　(B) $1-\cos x$.

(C) $\sqrt{1-x^2}-1$.　(D) $x-\tan x$.

考点二　平面曲线的渐近线

1. (14-1,2,3) 下列曲线中有渐近线的是(　　)

(A) $y=x+\sin x$.　(B) $y=x^2+\sin x$.

(C) $y=x+\sin\dfrac{1}{x}$.　(D) $y=x^2+\sin\dfrac{1}{x}$.

2. (12-1,2,3) 曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$渐近线的条数为(　　)

(A) 0.　(B) 1.　(C) 2.　(D) 3.

3. (07-1,3) 曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$渐近线的条数为(　　)

(A) 0.　(B) 1.　(C) 2.　(D) 3.

4. (91-1) 曲线 $y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$(　　)

(A) 没有渐近线.

(B) 仅有水平渐近线.

(C) 仅有铅直渐近线.

(D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线.

5. (06-2) 曲线 $y=\dfrac{x+4\sin x}{5x-2\cos x}$的水平渐近线方程为________.

6. (05-2) 曲线 $y=\dfrac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$的斜渐近线方程为________.

7. (98-2) 曲线 $y=x\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)(x>0)$的渐近线方程为________.

8. (00-3) 求函数 $f(x)=(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$ 图形的渐近线.

考点三　函数的连续性与间断点

1. (15-2) 函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}\left(1+\dfrac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}$ 在$(-\infty,+\infty)$内(　　)

(A) 连续.　(B) 有可去间断点.

(C) 有跳跃间断点.　(D) 有无穷间断点.

2. (13-3) 设函数 $f(x)=\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$的可去间断点个数为(　　)

(A) 0.　(B) 1.　(C) 2.　(D) 3.

3. (10-2) 函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点的个数为(　　)

(A) 0.　(B) 1.　(C) 2.　(D) 3.

4. (07-2) 函数 $f(x)=\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}$在区间$[-\pi,\pi]$上的第一类间断点是 $x=$(　　)

(A) 0.　(B) 1.　(C) $-\dfrac{\pi}{2}$.　(D) $\dfrac{\pi}{2}$.

5. (04-3) 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义,且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$,

$$g(x)=\begin{cases}f\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$ 则(　　)

(A) $x=0$ 必是 $g(x)$的第一类间断点.

(B) $x=0$ 必是 $g(x)$的第二类间断点.

(C) $x=0$ 必是 $g(x)$的连续点.

(D) $g(x)$在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关.

6. (95-2) 设 $f(x)$和 $\varphi(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义,$f(x)$为连续函数,且 $f(x)\neq 0$,$\varphi(x)$有间断点,则(　　)

(A) $\varphi[f(x)]$必有间断点.

(B) $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点.

(C) $f[\varphi(x)]$必有间断点.

(D) $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$必有间断点.

7. (04-2) 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$,则 $f(x)$的间断点为 $x=$________.

8. (03-3) 设 $f(x)=\dfrac{1}{\pi x}+\dfrac{1}{\sin\pi x}-\dfrac{1}{\pi(1-x)}$,$x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right)$.

试补充定义 $f(1)$使得 $f(x)$在$\left[\dfrac{1}{2},1\right]$上连续.

9. (01-2) 求极限$\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$,记此极限为 $f(x)$,求函数 $f(x)$的间断点并指出其类型.

小　结

对于无穷小比较的考题，常用方法是等价替换法，偶尔用到极限法(定义法).

平面曲线的渐近线，以及函数的连续性与间断点问题，主要考查的是函数极限的计算：

在求斜渐近线时，形如 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}[f(x)-ax]$ 的极限的计算有时会比较灵活，比如 2020 年数学二的解答题中所涉及的 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}-\dfrac{x}{e}\right]$、2007 年数学一、三的选择题中所涉及的 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)-x\right]$、2005 年数学二的填空题中所涉及的 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}-x\right]$，以及 2000 年数学三的解答题中所涉及的 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}-e^{\pi}x]$ 等等.

在考查函数的连续性与间断点时，经常用一个极限来定义函数 $f(x)$. 这时，应先将 $f(x)$ 的表达式求出来，并且在求表达式的过程中，要把 x 看作常量，而把 t 或 n 看作变量，比如 2024 年数学三、2015 年数学二和 1998 年数学三的选择题、2004 年数学二的填空题，以及 2001 年数学二的解答题.

§1.4　已知极限问题

十年真题 2016—2025　答案 P247

考点一　已知极限求另一极限

1.（**20-3**）设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-a}{x-a}=b$，则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin f(x)-\sin a}{x-a}=$（　　）

(A) $b\sin a$.　　(B) $b\cos a$.

(C) $b\sin f(a)$.　　(D) $b\cos f(a)$

2.（**16-3**）已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$________

考点二　已知极限求参数的值

1.（**19-1,2,3**）当 $x\to 0$ 时，若 $x-\tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小量，则 $k=$（　　）

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

2.（**18-2**）若 $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+ax^2+bx)^{\frac{1}{x^2}}=1$，则（　　）

(A) $a=\dfrac{1}{2},b=-1$.　　(B) $a=-\dfrac{1}{2},b=-1$.

(C) $a=\dfrac{1}{2},b=1$.　　(D) $a=-\dfrac{1}{2},b=1$.

3.（**18-2**）设函数

$$f(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0,\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}2-ax, & x\leqslant -1,\\ x, & -1<x<0,\\ x-b, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

若 $f(x)+g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，则（　　）

(A) $a=3,b=1$.　　(B) $a=3,b=2$.

(C) $a=-3,b=1$.　　(D) $a=-3,b=2$.

4.（**17-1,2,3**）若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0,\\ b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则（　　）

(A) $ab=\dfrac{1}{2}$.　　(B) $ab=-\dfrac{1}{2}$.

(C) $ab=0$.　　(D) $ab=2$.

5.（**24-1**）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+ax^2)^{\sin x}-1}{x^3}=6$，则 $a=$________.

6.（**23-1,2**）当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=ax+bx^2+\ln(1+x)$ 与 $g(x)=e^{x^2}-\cos x$ 是等价无穷小，则 $ab=$________

7.（**18-1**）若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=e$，则 $k=$________

8.（**21-3**）已知 $\lim\limits_{x\to 0}[a\arctan\dfrac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}]$ 存在，求 a 的值.

9.（20-3）已知 a,b 为常数，若 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e$ 与 $\frac{b}{n^a}$ 在 $n\to\infty$ 时是等价无穷小，求 a,b.

10.（18-3）已知实数 a,b 满足

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(ax+b)e^{\frac{1}{x}}-x\right]=2,$$

求 a,b.

考点分析

考　点	命 题 特 点
一、已知极限求另一极限	**1. 考试频率**：★★★★☆ **2. 常考题型**：选择题、填空题、解答题 **3. 命题趋势**：已知极限问题是近年来考研的重点，也是难点. 其中，已知极限求另一极限考得较少，而已知极限求参数的值却频繁地考查.
二、已知极限求参数的值	

方法探究

答案 P248

考点一　已知极限求另一极限

若已知某极限，要求另一极限，则可通过极限的运算法则、无穷小的等价替换、泰勒公式等方法将已知极限与所求极限进行相互转化.

【例】 已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{xf(x)}-1}{\ln(1+x^2)}=1$，则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(2x)}{\sin x}=$______.

【解】 由

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{xf(x)}-1}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{xf(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$$

知

$$\lim_{x\to0}\frac{f(2x)}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{f(2x)}{x}\xlongequal{令 t=2x}2\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}=2.$$

考点二　已知极限求参数的值

已知极限求参数的值常用泰勒公式. 有时也会以无穷小的比较（如变式 1）或函数的连续性与间断点（如变式 2）的形式来出题.

【例】（94-3）设 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$，则（　　）

(A) $a=1,b=-\frac{5}{2}$.　　(B) $a=0,b=-2$.

(C) $a=0,b=-\frac{5}{2}$.　　(D) $a=1,b=-2$.

【解】 当 $x\to0$ 时，用泰勒公式把 $\ln(1+x)$ 展开，$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$，故 $\ln(1+x)-(ax+bx^2)=(1-a)x-\left(b+\frac{1}{2}\right)x^2+o(x^2)$，从而由 $\begin{cases}1-a=0,\\-\left(b+\frac{1}{2}\right)=2\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=1,\\b=-\frac{5}{2}.\end{cases}$ 选(A).

变式 1（09-1，2，3） 当 $x\to0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小，则（　　）

(A) $a=1,b=-\frac{1}{6}$.　　(B) $a=1,b=\frac{1}{6}$.

(C) $a=-1,b=-\frac{1}{6}$.　　(D) $a=-1,b=\frac{1}{6}$.

变式 2（03-2） 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}, & x<0,\\ 6, & x=0,\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\frac{x}{4}}, & x>0,\end{cases}$$

问 a 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；a 为何值时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点？

真题精选 1987—2015

答案 P248

考点一 已知极限求另一极限

(00-2) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$ 为( )

(A) 0. (B) 6. (C) 36. (D) ∞.

考点二 已知极限求参数的值

1. (11-2,3) 已知当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小量，则( )

(A) $k=1,c=4$. (B) $k=1,c=-4$.

(C) $k=3,c=4$. (D) $k=3,c=-4$.

2. (10-3) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}-\left(\dfrac{1}{x}-a\right)e^x\right]=1$，则 a 等于( )

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

3. (94-1) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=2$，其中 $a^2+c^2\neq 0$，则必有( )

(A) $b=4d$. (B) $b=-4d$.

(C) $a=4c$. (D) $a=-4c$.

4. (08-3) 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & |x|\leqslant c,\\ \dfrac{2}{|x|}, & |x|>c\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则 $c=$________.

5. (05-2) 当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)=kx^2$ 与 $\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小量，则 $k=$________.

6. (04-3) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，则 $a=$________，$b=$________.

7. (97-2) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{x^{-2}}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$________.

8. (96-1) 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$，则 $a=$________.

9. (13-2,3) 当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小，求 n 与 a 的值.

10. (02-1) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有一阶连续导数，且 $f(0)\neq 0$，$f'(0)\neq 0$，若 $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 在 $h\to 0$ 时是比 h 高阶的无穷小，试确定 a,b 的值.

小 结

已知极限问题其实是函数极限计算的另一种考查形式.

已知极限求另一极限，所考查的是如何正确地使用求函数极限的方法，对抽象函数的极限进行恒等变形，比如 2000 年数学二的选择题切莫误将 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}$ 中的 $\sin 6x$ 等价替换为 $6x$.

已知极限求参数的值依然重点考查不能等价替换的"无穷小±无穷小"，如果能够有使用泰勒公式的意识，那么许多考题都能方便地解决.