



新高考数学 培优50讲

三角、向量、不等式与数列

张永辉 主编

清华大学出版社



从纷繁里寻规律

从规律里联万物

从万物里探本源

从本源里破新局

迭代升级
培优致远

MATHEMATICS
新高考数学
培优50讲

三角、向量、不等式与数列

张永辉
主编



清华大学出版社

目 录

第 24 讲	三角函数的图像与性质	1
24.1	三角函数图像与性质的综合应用	2
24.1.1	分析图像,获取信息	2
24.1.2	ω 的取值范围探秘	3
24.1.3	φ 的取值范围探秘	11
24.1.4	三角函数图像性质的转化中枢	12
24.2	三角函数图像的仿射变换	17
训练 24		20
第 25 讲	三角恒等变换	22
25.1	三角函数式的求值	23
25.1.1	三角函数角的变换、名的变换与结构变换	23
25.1.2	巧妙构造图形求值	32
25.2	三角形中的恒等变换	36
训练 25		40
第 26 讲	解三角形	42
26.1	正、余弦定理的基础应用	43
26.1.1	三角形解的个数	43
26.1.2	三角形形状的判断	45
26.2	解三角形中的最值问题	49
26.3	解三角形问题的延伸——四边形问题	64
训练 26		68
第 27 讲	等值线模型与常见恒等式	70
27.1	平面向量中等值线模型	71
27.1.1	等和线	71
27.1.2	等差线	76
27.1.3	等商线	78
27.2	平面向量中的常见恒等式	80

27.2.1	极化恒等式	80
27.2.2	向量数乘余弦定理	87
27.2.3	对角线向量定理	88
训练 27		90
第 28 讲	平面向量运算的不同境界	91
28.1	代数几何运算两重天	92
28.2	动点轨迹背景下的向量最值	98
训练 28		109
第 29 讲	三角形的四心	110
29.1	奔驰定理及其应用	111
29.1.1	奔驰定理及其推论	111
29.1.2	奔驰定理的应用	112
29.2	三角形“四心”的判定与性质	114
29.2.1	外心问题	114
29.2.2	内心问题	117
29.2.3	垂心问题	119
29.2.4	重心问题	120
29.3	欧拉线及其应用	122
29.3.1	欧拉定理的几何证明与向量证明	122
29.3.2	欧拉线的应用	123
训练 29		126
第 30 讲	基本不等式	128
30.1	基本不等式在最值问题中的应用	129
30.1.1	代换法创设应用基本不等式的情景	129
30.1.2	配凑变形创设应用均值不等式的情景	132
30.1.3	轮换对称法(地位等价法)	138
30.2	基本不等式在不等式证明中的应用	145
30.2.1	构造均值不等式证明轮换或对称不等式	145
30.2.2	利用常数配凑构造均值不等式证明不等式	147
30.3	基本不等式的变形(均值不等式串)及其应用	148
训练 30		150
第 31 讲	柯西不等式	152
31.1	柯西不等式的理解及其变形	153

31.2 柯西不等式在最值问题中的应用	157
31.2.1 利用柯西不等式处理整式结构	157
31.2.2 利用柯西不等式处理分式结构	159
31.2.3 利用柯西不等式处理根式结构	162
31.2.4 柯西不等式求几何最值问题	164
31.3 柯西不等式在证明恒等式中的应用	166
31.4 柯西不等式在证明不等式中的应用	167
训练 31	174
第 32 讲 递推数列的通项公式	176
32.1 递推关系 $a_{n+1} - a_n = d$ 的五重视角	177
32.1.1 视角一: d 拓展为 $f(n)$	177
32.1.2 视角二: “ $-$ ”拓展为“ $+$ ”“ $\times$ ”“ $\div$ ”	179
32.1.3 视角三: a_n 拓展为 $f(a_n)$	183
32.1.4 视角四: “ $=$ ”拓展为“ $<$ ”“ $>$ ”“ $\leq$ ”“ $\geq$ ”“ $\equiv$ ”	185
32.1.5 视角五: 系数 1 拓展为不同的系数“ λ ”和“ μ ”	188
32.2 求几种递推数列通项的方法研究	189
32.2.1 S_n 和 a_n 关系式的两种转化	190
32.2.2 二阶线性递推数列的通项公式	191
32.2.3 分式型递推数列的通项公式	193
训练 32	196
第 33 讲 数列放缩的精髓	198
33.1 分式型数列放缩	199
33.1.1 裂项放缩与精度控制	199
33.1.2 部分放缩与精度控制	204
33.1.3 并项重组, 整体放缩	205
33.1.4 构造等比数列放缩	208
33.2 根式型数列放缩	211
33.3 对数型数列放缩	214
训练 33	220
参考答案	223

第 25 讲

三角恒等变换

三角恒等变换涉及的公式很多,变换的方法也很灵活,但无论怎样变换,它们都是围绕着三条主线展开的,即变换角、变换函数、变换式子结构.

在角的变换上,和角、差角、倍角、半角与单角是一个相对的概念,它们的变换,关键在于深入观察,分析联系,从而进行适当的组合、变换.

在函数名的变换上,要根据题目的条件,观察函数的差异与联系,并熟练掌握常用的变形技巧,如切割化弦、化异为同、降次,“1”的变换等.

在式子结构的变换上,需分析、探索等式左、右之间的关系以及条件与结论可能存在的联系,通过化归实现“对接”.解题中需掌握一些常用的技巧,如和积互化、公式变形等.

另外,在三角恒等变换中,若能结合代数、几何的一些方法,常能使问题得到简化.如万能代换,可把三角问题转化为代数问题;利用复数的方法,可使三角问题有直观的解释或通过单位根实现与数列问题的对接;构造几何图形,并结合正、余弦定理,可使三角问题简明易求.

25.1 三角函数式的求值

三角恒等变换求值形式多样、方法灵活,主要从变换角、变换函数、变换式子结构展开变换. 变换时可运用三角恒等变形公式进行适当的降幂升幂、组合、变换. 另外,若能根据问题构造几何图形,并结合正、余弦定理,可使三角求值问题简明易求.

25.1.1 三角函数角的变换、名的变换与结构变换



求值中常见的问题有:求已知角的三角函数值;求已知条件下的三角函数值;求几个三角函数式的和、差、积的混合式的值. 求角问题通常是先求有关三角函数值,再由角的范围,结合单调性求出角. 化简问题的解法与三角求值问题的解法有共通之处,但要注意必须化到最简,最后结果能求出值的应求出值.

在求值、求角、化简的解题过程中,熟练掌握恒等变形公式是关键.

一、恒等变形公式

1. 和(差)角公式

$$\begin{array}{|l} \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \end{array} \rightarrow \begin{array}{|l} \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \end{array}$$



$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \rightarrow \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

2. 倍角公式与降次(幂)公式

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \rightarrow \sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$$



$$\begin{array}{|l} \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \\ = 1 - 2\sin^2\alpha \\ = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{array} \rightarrow \begin{array}{|l} \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \\ \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \end{array}$$



$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

3. 辅助角公式

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varphi), \text{ 其中 } \varphi \text{ 满足 } \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

4. 和差化积、积化和差公式

① 积化和差公式

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

② 和差化积公式

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

5. 万能公式

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}, \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}, \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

6. 三倍角公式

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x = 4 \sin x \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x = 4 \cos x \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

$$\tan 3x = \tan x \tan\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

代数变形与多项式中的一些技巧与思路,在三角函数中也适用,更有其独特的解题策略.

二、解题策略

1. 常值代换

例如 $1 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = \tan 45^\circ$.

2. 角的配凑 整体代换

例如 $\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2}, \beta = \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2}$.

3. 降次与升次

可利用倍角公式、半角公式、相关不等式等, 例如 $\cos 4\alpha = 8\cos^4 \alpha - 8\cos^2 \alpha + 1, \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$. 对于锐角 θ , 有 $1 > \sin \theta > \sin^2 \theta$.

4. 利用辅助角公式、万能公式

辅助角公式和万能公式都可以将异名三角函数“消元”化为单一的三角函数, 从而将异名三角函数视为单元函数来求解.

5. 两端出发

从条件和结论双管齐下, 观察各自的繁简难易程度, 进而判断前进的方向. 更要观察细节, 例如三角函数名称、次数、结构, 发现异同, 抓住主要矛盾, 灵活运用公式, 统一内外, 解决问题.

例 25.1 (2019 江苏 13) 已知 $\frac{\tan \alpha}{\tan(\alpha + \frac{\pi}{4})} = -\frac{2}{3}$, 则 $\sin(2\alpha + \frac{\pi}{4})$ 的值为 _____.

分析 ▶ 思路一: 重点关注角的变换和函数名的变换: 利用 $2\alpha + \frac{\pi}{4} = \alpha + (\alpha + \frac{\pi}{4})$ 以及

$(\alpha + \frac{\pi}{4}) - \alpha = \frac{\pi}{4}$ 对角进行配凑. 关于弦的齐次式, 进行弦化切. 思路二: 已知条件使用两角和公式后, 只有一个未知数 $\tan \alpha$, 可以直接解出. 待求式使用两角和公式后出现 $\sin 2\alpha, \cos 2\alpha$, 使用万能公式 $\sin 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}, \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$ 弦化切, 代入 $\tan \alpha$ 即可求值.

解析 ▶ **解法一:** 由 $\sin(2\alpha + \frac{\pi}{4}) = \sin[\alpha + (\alpha + \frac{\pi}{4})] = \sin \alpha \cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) + \cos \alpha \sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$, 且 $\sin \frac{\pi}{4} = \sin[(\alpha + \frac{\pi}{4}) - \alpha] = \sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) \cos \alpha - \cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) \sin \alpha$, 可得 $\sqrt{2} \sin(2\alpha + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sin(2\alpha + \frac{\pi}{4})}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\sin[(\alpha + \frac{\pi}{4}) + \alpha]}{\sin[(\alpha + \frac{\pi}{4}) - \alpha]} = \frac{\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) \cos \alpha + \cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) \sin \alpha}{\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) \cos \alpha - \cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) \sin \alpha} = \frac{\tan(\alpha + \frac{\pi}{4}) + \tan \alpha}{\tan(\alpha + \frac{\pi}{4}) - \tan \alpha} =$

$$\frac{1 + \frac{\tan \alpha}{\tan(\alpha + \frac{\pi}{4})}}{1 - \frac{\tan \alpha}{\tan(\alpha + \frac{\pi}{4})}} = \frac{1 - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{1}{5}, \text{ 因此 } \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

解法二: 由 $\frac{\tan \alpha}{\tan(\alpha + \frac{\pi}{4})} = -\frac{2}{3}$, 可得 $\frac{\tan \alpha (1 - \tan \alpha)}{1 + \tan \alpha} = -\frac{2}{3}$, 解得 $\tan \alpha = 2$ 或 $\tan \alpha = -\frac{1}{3}$.

$$\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2\alpha \cos \frac{\pi}{4} + \cos 2\alpha \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin 2\alpha + \cos 2\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{2\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} + \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot$$

$$\frac{1 + 2\tan \alpha - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}.$$

当 $\tan \alpha = 2$ 时, 原式 $= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1 + 2 \times 2 - 2^2}{1 + 2^2} = \frac{\sqrt{2}}{10}$; 当 $\tan \alpha = -\frac{1}{3}$ 时, 原式 $= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot$

$$\frac{1 + \left(-\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

综上所述, $\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ 的值为 $\frac{\sqrt{2}}{10}$.

变式 1 已知 $\begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{1}{3} \\ \cos x - \cos y = \frac{1}{5} \end{cases}$, 求 $\cos(x+y)$ 与 $\sin(x-y)$ 的值.

解析 ▶ $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$, 将 $\sin x + \sin y = \frac{1}{3}$ 和 $\cos x - \cos y = \frac{1}{5}$ 两式平

方相加得 $(\sin x + \sin y)^2 + (\cos x - \cos y)^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{25} = \frac{34}{225}$, 即 $2 + 2(\sin x \sin y - \cos x \cos y) = \frac{34}{225}$, 可

得 $2 - 2\cos(x+y) = \frac{34}{225}$. 故 $\cos(x+y) = 1 - \frac{17}{225} = \frac{208}{225}$.

解法一: 由 $\sin x + \sin y = 2\sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ ①, $\cos x - \cos y = -2\sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$ ②, ②

得 $\tan \frac{x-y}{2} = -\frac{\cos x - \cos y}{\sin x + \sin y} = -\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}} = -\frac{3}{5}$, 则 $\sin(x-y) = 2\sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x-y}{2} =$

$$\frac{2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}{\sin^2\frac{x-y}{2}+\cos^2\frac{x-y}{2}}=\frac{2\tan\frac{x-y}{2}}{\tan^2\frac{x-y}{2}+1}=\frac{-\frac{6}{5}}{\frac{9}{25}+1}=-\frac{15}{17}.$$

解法二: 由 $\sin x + \sin y = \frac{1}{3}$ 及 $\cos x - \cos y = \frac{1}{5}$, 得 $(\sin x + \sin y)(\cos x - \cos y) = \frac{1}{15}$, 即 $\sin x \cos x - \sin x \cos y + \cos x \sin y - \sin y \cos y = \frac{1}{15}$, 可得 $\frac{1}{2}(\sin 2x - \sin 2y) - \sin(x-y) = \frac{1}{15}$, 所以 $\cos(x+y)\sin(x-y) - \sin(x-y) = \frac{1}{15}$.

$$\text{又 } \cos(x+y) = \frac{208}{225}, \text{ 可得 } \sin(x-y) = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{208}{225}-1} = \frac{\frac{1}{15}}{-\frac{17}{225}} = -\frac{15}{17}.$$

变式 2 已知 $\tan \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $\tan \alpha \tan \beta = \frac{13}{7}$, 求 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值.

解析 ▶ **解法一:** 因为 $\tan \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 由万能公式得 $\cos(\alpha+\beta) = \frac{1-\tan^2 \frac{\alpha+\beta}{2}}{1+\tan^2 \frac{\alpha+\beta}{2}} = -\frac{1}{5}$.

又因为 $\tan \alpha \tan \beta = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)} = \frac{13}{7}$, 所以 $\cos(\alpha-\beta) = -\frac{10}{3} \cos(\alpha+\beta) = -\frac{10}{3} \times \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{3}$.

解法二: 由 $\tan \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 得 $\cos(\alpha+\beta) = \cos^2 \frac{\alpha+\beta}{2} - \sin^2 \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\cos^2 \frac{\alpha+\beta}{2} - \sin^2 \frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha+\beta}{2} + \sin^2 \frac{\alpha+\beta}{2}} =$

$$\frac{1-\tan^2 \frac{\alpha+\beta}{2}}{1+\tan^2 \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{1-\frac{3}{2}}{1+\frac{3}{2}} = -\frac{1}{5}.$$

又 $\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \frac{1+\tan \alpha \tan \beta}{1-\tan \alpha \tan \beta} = \frac{1+\frac{13}{7}}{1-\frac{13}{7}} = -\frac{10}{3}$, 则 $\cos(\alpha-\beta) = -\frac{10}{3} \cdot$

$$\cos(\alpha+\beta) = -\frac{10}{3} \times \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{3}.$$

解法三: 由 $\tan \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 得 $\cos(\alpha+\beta) = \cos^2 \frac{\alpha+\beta}{2} - \sin^2 \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\cos^2 \frac{\alpha+\beta}{2} - \sin^2 \frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha+\beta}{2} + \sin^2 \frac{\alpha+\beta}{2}} =$

$$\frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha + \beta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha + \beta}{2}} = \frac{1 - \frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{2}} = -\frac{1}{5}.$$

又 $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2\sin\alpha\sin\beta = -2\cos\alpha\cos\beta\tan\alpha\tan\beta = -\frac{26}{7}\cos\alpha\cos\beta$, 即

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2\sin\alpha\sin\beta = -\frac{13}{7}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)], \text{ 所以 } \cos(\alpha + \beta) = -\frac{3}{10} \cdot$$

$$\cos(\alpha - \beta), \text{ 因此 } \cos(\alpha - \beta) = -\frac{10}{3}\cos(\alpha + \beta) = \frac{2}{3}.$$

解法四: 由 $\tan\alpha\tan\beta = \frac{13}{7}$, 得 $\tan\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2}\right)\tan\left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \frac{13}{7}$, 即 $\frac{\tan \frac{\alpha + \beta}{2} + \tan \frac{\alpha - \beta}{2}}{1 - \tan \frac{\alpha + \beta}{2} \tan \frac{\alpha - \beta}{2}} \cdot$

$$\frac{\tan \frac{\alpha + \beta}{2} - \tan \frac{\alpha - \beta}{2}}{1 + \tan \frac{\alpha + \beta}{2} \tan \frac{\alpha - \beta}{2}} = \frac{13}{7}.$$

令 $\tan \frac{\alpha + \beta}{2} = x$, $\tan \frac{\alpha - \beta}{2} = y$, 即 $\frac{x + y}{1 - xy} \cdot \frac{x - y}{1 + xy} = \frac{x^2 - y^2}{1 - x^2 y^2} = \frac{13}{7}$. 又 $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 所以 $\frac{\frac{3}{2} - y^2}{1 - \frac{3}{2}y^2} =$

$$\frac{13}{7}, \text{ 解得 } y^2 = \frac{1}{5}.$$

$$\text{故 } \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} - \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} - \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha - \beta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha - \beta}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{5}}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{2}{3}.$$

例 25.2 求下列三角函数式的值.

(1) $\cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7}$;

(2) $8\cos^2 \frac{\pi}{7} \cos^2 \frac{2\pi}{7} \cos^2 \frac{3\pi}{7}$;

(3) $\sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ$;

(4) $\cos 6^\circ \cos 42^\circ \cos 66^\circ \cos 78^\circ$.

分析 $\gg$ (1) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, 这个公式可以实现 $\cos\alpha \rightarrow \sin 2\alpha$ 的转变. 根据诱导公式

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$, 可得 $\cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} = -\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}$, 使得所有角度呈倍数关

系, 只需匹配一个 $\sin \frac{\pi}{7}$, 连续用 3 次二倍角公式就可以实现函数名统一为 $\sin$, 角度统一为 $\frac{8\pi}{7}$,

再使用诱导公式 $\sin \frac{8\pi}{7} = -\sin \frac{\pi}{7}$, 抵消匹配的 $\sin \frac{\pi}{7}$.

(2) 由 $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha$, 可得 $\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}$, 将函数名变换成 $\sin$, 根据诱导公式 $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$, 可得 $\frac{\sin(\pi - \alpha)}{\sin\alpha} = 1$, 使得不同角的正弦函数可以约分.

(3) 根据同角三角函数的基本关系改变函数名, 使得角度呈倍数关系, 只需匹配一个 $\cos 6^\circ$, 连续用 4 次二倍角公式就可以实现将函数名统一为 $\sin$, 角度统一为 96° , 再使用诱导公式 $\sin 96^\circ = \cos 6^\circ$, 抵消匹配的 $\cos 6^\circ$.

(4) 观察式子中的角度可以发现 $\cos 6^\circ, \cos 66^\circ = \cos(60^\circ + 6^\circ)$, 若匹配一个 $\cos(60^\circ - 6^\circ) = \cos 54^\circ$, 可用三倍角公式 $\cos 3\alpha = 4\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$ 化简. 同理, $\cos 42^\circ = \cos(60^\circ - 18^\circ)$, $\cos 78^\circ = \cos(60^\circ + 18^\circ)$, 若匹配一个 $\cos 18^\circ$ 可用三倍角公式化简, 原式转化为

$$\frac{\frac{1}{4}\cos(3 \times 6^\circ) \cdot \frac{1}{4}\cos(3 \times 18^\circ)}{\cos 54^\circ \cdot \cos 18^\circ}.$$

解析

$$\begin{aligned} \text{解} \quad (1) \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} &= -\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} = -\frac{\sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = \\ &= -\frac{\frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = -\frac{\frac{1}{4} \sin \frac{4\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = -\frac{\frac{1}{8} \sin \frac{8\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = -\frac{-\frac{1}{8} \sin \frac{\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

$$(2) 8\cos^2 \frac{\pi}{7} \cos^2 \frac{2\pi}{7} \cos^2 \frac{3\pi}{7} = 8 \left(\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7} \right)^2 = 8 \left(\frac{\sin \frac{2\pi}{7}}{2\sin \frac{\pi}{7}} \cdot \frac{\sin \frac{4\pi}{7}}{2\sin \frac{2\pi}{7}} \cdot \frac{\sin \frac{6\pi}{7}}{2\sin \frac{3\pi}{7}} \right)^2 = 8 \times \frac{1}{8^2} = \frac{1}{8}.$$

$$\begin{aligned} (3) \text{原式} &= \sin 6^\circ \sin 42^\circ \cos 24^\circ \cos 12^\circ = \frac{2\sin 6^\circ \cos 6^\circ}{2\cos 6^\circ} \cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ = \frac{2\sin 12^\circ \cos 12^\circ}{4\cos 6^\circ} \cdot \\ \cos 24^\circ \cos 48^\circ &= \frac{2\sin 24^\circ \cos 24^\circ}{8\cos 6^\circ} \cos 48^\circ = \frac{2\sin 48^\circ \cos 48^\circ}{16\cos 6^\circ} = \frac{\sin 96^\circ}{16\cos 6^\circ} = \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

$$(4) \cos 3\alpha = 4\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right), \text{不难发现 } \left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) + \left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + \alpha - \alpha = \frac{\pi}{3},$$

$$66^\circ - 6^\circ = 60^\circ, 42^\circ + 78^\circ = 120^\circ.$$

$$\text{因此我们运用三倍角公式的逆变换 } \cos 6^\circ \cos 66^\circ \cos 42^\circ \cos 78^\circ = \frac{\cos 54^\circ \cos 6^\circ \cos 66^\circ}{\cos 54^\circ}.$$

$$\frac{\cos 42^\circ \cos 18^\circ \cos 78^\circ}{\cos 18^\circ} = \frac{\frac{1}{4}\cos 18^\circ \cdot \frac{1}{4}\cos 54^\circ}{\cos 54^\circ \cos 18^\circ} = \frac{1}{16}.$$

 拓展引伸

第(3)题也可通过三倍角公式的逆变换来求解.

$$\begin{aligned} \sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ &= \sin 6^\circ \sin 66^\circ \sin 42^\circ \sin 78^\circ, \text{ 结合 } \sin 3\alpha = -4 \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) \sin \alpha \cdot \\ \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) &= 4 \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \sin \alpha \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right), \text{ 所以 } \sin 6^\circ \sin 66^\circ = \frac{\sin 54^\circ \sin 6^\circ \sin 66^\circ}{\sin 54^\circ}, \sin 42^\circ \sin 78^\circ = \\ \frac{\sin 42^\circ \sin 18^\circ \sin 78^\circ}{\sin 18^\circ}, \text{ 则 } \sin 6^\circ \sin 66^\circ \sin 42^\circ \sin 78^\circ &= \frac{\sin 54^\circ \sin 6^\circ \sin 66^\circ}{\sin 54^\circ} \cdot \frac{\sin 42^\circ \sin 18^\circ \sin 78^\circ}{\sin 18^\circ} = \\ \frac{1}{4} \sin 18^\circ \cdot \frac{1}{4} \sin 54^\circ &= \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

变式 1 求 $\sin^4 10^\circ + \sin^4 50^\circ + \sin^4 70^\circ$ 的值.

解析 $\sin^4 10^\circ + \sin^4 50^\circ + \sin^4 70^\circ$.

$$\begin{aligned} &= \cos^4 80^\circ + \cos^4 40^\circ + \cos^4 20^\circ \\ &= \left(\frac{1+\cos 160^\circ}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 80^\circ}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 40^\circ}{2}\right)^2 \\ &= \frac{3}{4} + \frac{\cos^2 160^\circ + \cos^2 80^\circ + \cos^2 40^\circ}{4} + \frac{1}{2}(\cos 160^\circ + \cos 80^\circ + \cos 40^\circ) \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{8}(1 + \cos 320^\circ + 1 + \cos 160^\circ + 1 + \cos 80^\circ) + \frac{1}{2}(\cos 160^\circ + \cos 80^\circ + \cos 40^\circ) \\ &= \frac{9}{8} + \frac{1}{8}(\cos 320^\circ + \cos 160^\circ + \cos 80^\circ) + \frac{1}{2}(\cos 160^\circ + \cos 80^\circ + \cos 40^\circ) \\ &= \frac{9}{8} + \frac{1}{8}(2\cos 240^\circ \cos 80^\circ + \cos 80^\circ) + \frac{1}{2}(2\cos 100^\circ \cos 60^\circ + \cos 80^\circ) \\ &= \frac{9}{8} + \frac{1}{8}\left[2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \cos 80^\circ + \cos 80^\circ\right] + \frac{1}{2}\left[2 \times (-\cos 80^\circ) \times \frac{1}{2} + \cos 80^\circ\right] \\ &= \frac{9}{8}. \end{aligned}$$

例 25.3 已知 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 为锐角, 在 $\sin \alpha + \cos \beta, \sin \beta + \cos \gamma, \sin \gamma + \cos \delta, \sin \delta + \cos \alpha$ 四个值中, 大于 $\sqrt{2}$ 的个数的最大值记为 m , 小于 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 的个数的最大值记为 n , 则 $m+n =$ _____.

分析 运用整体与局部的思想, 建立角之间的联系, 利用联系来分析不等关系.

解析 由 $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right), \sin \beta + \cos \beta = \sqrt{2} \sin\left(\beta + \frac{\pi}{4}\right), \sin \gamma + \cos \gamma = \sqrt{2} \cdot$
 $\sin\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right), \sin \delta + \cos \delta = \sqrt{2} \sin\left(\delta + \frac{\pi}{4}\right),$ 得 $\sin \alpha + \cos \beta + \sin \beta + \cos \gamma + \sin \gamma + \cos \delta + \sin \delta + \cos \alpha =$

$$(\sin\alpha + \cos\alpha) + (\sin\beta + \cos\beta) + (\sin\gamma + \cos\gamma) + (\sin\delta + \cos\delta) = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\sin\left(\beta + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\sin\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\sin\left(\delta + \frac{\pi}{4}\right).$$

又 $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\alpha + \frac{\pi}{4}, \beta + \frac{\pi}{4}, \gamma + \frac{\pi}{4}, \delta + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$, 因此上式 $\leq 4\sqrt{2}$, 所以在 $\sin\alpha + \cos\beta, \sin\beta + \cos\gamma, \sin\gamma + \cos\delta, \sin\delta + \cos\alpha$ 四个数中大于 $\sqrt{2}$ 的个数至多有 3 个.

不妨取 $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin\gamma = \frac{1}{2}, \sin\delta = \frac{12}{13}$, 此时 $\sin\alpha + \cos\beta = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2} > \sqrt{2}$, $\sin\beta + \cos\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} > \sqrt{2}$, $\sin\gamma + \cos\delta = \frac{1}{2} + \frac{5}{13} < \sqrt{2}$, $\sin\delta + \cos\alpha = \frac{12}{13} + \frac{1}{2} > \sqrt{2}$. 故在 $\sin\alpha + \cos\beta, \sin\beta + \cos\gamma, \sin\gamma + \cos\delta$ 以及 $\sin\delta + \cos\alpha$ 中大于 $\sqrt{2}$ 的个数的最大值 $m = 3$.

在 $\sin\alpha + \cos\beta, \sin\beta + \cos\gamma, \sin\gamma + \cos\delta, \sin\delta + \cos\alpha$ 中, 若 $\alpha = \beta = \gamma = \delta$, 则 $\sin\alpha + \cos\beta = \sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$, $\sin\beta + \cos\gamma = \sin\beta + \cos\beta = \sqrt{2}\sin\left(\beta + \frac{\pi}{4}\right)$, $\sin\gamma + \cos\delta = \sin\gamma + \cos\gamma = \sqrt{2}\sin\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right)$, $\sin\delta + \cos\alpha = \sin\delta + \cos\delta = \sqrt{2}\sin\left(\delta + \frac{\pi}{4}\right)$.

当 $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \left(0, \frac{\pi}{12}\right)$ 时, 可得 $\sin\alpha + \cos\beta, \sin\beta + \cos\gamma, \sin\gamma + \cos\delta, \sin\delta + \cos\alpha$ 均小于 $\frac{\sqrt{6}}{2}$, 则 $n = 4$.

综上所述, $m + n$ 的值为 7.

变式 1 已知 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 为锐角, 在 $\sin\alpha\cos\beta, \sin\beta\cos\gamma, \sin\gamma\cos\delta, \sin\delta\cos\alpha$ 四个值中, 大于 $\frac{1}{2}$ 的个数的最大值记为 m , 小于 $\frac{1}{4}$ 的个数的最大值记为 n , 则 $m + n$ 的值为 ().

A. 8

B. 7

C. 6

D. 5

解析 由 $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 得 $\sin\alpha\cos\beta \leq \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\beta}{2}$, $\sin\beta\cos\gamma \leq \frac{\sin^2\beta + \cos^2\gamma}{2}$, $\sin\gamma\cos\delta \leq \frac{\sin^2\gamma + \cos^2\delta}{2}$, $\sin\delta\cos\alpha \leq \frac{\sin^2\delta + \cos^2\alpha}{2}$, 即 $\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\gamma + \sin\gamma\cos\delta + \sin\delta\cos\alpha \leq \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\beta + \cos^2\beta + \sin^2\gamma + \cos^2\gamma + \sin^2\delta + \cos^2\delta}{2} = 2$, 当且仅当 $\alpha + \beta = \beta + \gamma = \gamma + \delta = \delta + \alpha = \frac{\pi}{2}$ 时, 取等号.

所以 $\sin\alpha\cos\beta, \sin\beta\cos\gamma, \sin\gamma\cos\delta, \sin\delta\cos\alpha$ 中至多有 3 个大于 $\frac{1}{2}$, 取 $\sin\alpha = \frac{3}{5}, \sin\beta = \frac{5}{13}$, $\sin\gamma = \frac{12}{13}, \sin\delta = \frac{4}{5}$, 则 $\sin\alpha\cos\beta = \frac{3}{5} \times \frac{12}{13} = \frac{36}{65} > \frac{1}{2}$, $\sin\beta\cos\gamma = \left(\frac{5}{13}\right)^2 < \frac{1}{2}$, $\sin\gamma\cos\delta = \frac{12}{13} \times \frac{3}{5} =$

$\frac{36}{65} > \frac{1}{2}$, $\sin\delta\cos\alpha = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{25} > \frac{1}{2}$, 因此 $\sin\alpha\cos\beta, \sin\beta\cos\gamma, \sin\gamma\cos\delta, \sin\delta\cos\alpha$ 中最多有 3 个大于 $\frac{1}{2}$, 即 m 的值为 3.

令 $\alpha = \beta = \gamma = \delta$ 且 $\sin\alpha = \frac{1}{5}$, 则 $\sin\alpha\cos\beta = \sin\beta\cos\gamma = \sin\gamma\cos\delta = \sin\delta\cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{25} < \frac{1}{4}$, 因此 $n =$

4. 所以 $m+n=7$. 故选 B.

25.1.2 巧妙构造图形求值



研究思路

三角恒等变换求值毕竟从几何而来, 不可舍本逐末, 忽略了三角函数的几何意义. 因此对于某些问题, 可以构造出相关几何图形, 结合三角函数几何意义、三角公式, 数形结合来思考问题, 有时会有四两拨千斤之妙.

例 25.4 求 $\sin 18^\circ$ 的值.

分析 ▶ 思路一(代数法): $\sin(2 \times 18^\circ) = \cos(3 \times 18^\circ)$, 使用倍角公式和同角三角函数的基本关系恒等变形, 转化为关于 $\sin 18^\circ$ 的一元二次方程, 使用求根公式可得 $\sin 18^\circ$ 的值. 思路二(几何法): 作一个顶角为 36° 的等腰三角形, 再作底角的角平分线, 通过相似三角形对应边成比例可得 $\sin 18^\circ$ 的值.

解析 ▶ 解法一(代数法, 方程思想): 因为 $\sin 36^\circ = \cos 54^\circ$, 即 $\sin(2 \times 18^\circ) = \cos(3 \times 18^\circ)$, 所以 $2\sin 18^\circ \cos 18^\circ = 4\cos^3 18^\circ - 3\cos 18^\circ$.

因为 $\cos 18^\circ \neq 0$, 所以 $2\sin 18^\circ = 4\cos^2 18^\circ - 3$, 故 $4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ - 1 = 0$. 又 $\sin 18^\circ > 0$, 所以 $\sin 18^\circ = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

解法二(几何法): 如图 25.1 所示构造等腰 $\triangle ABC$, 使 $AB = AC = 1, \angle BAC = 36^\circ$.

作 $AD \perp BC$ 于点 D , 则 $\angle BAD = \angle CAD = 18^\circ, BD = CD = \frac{1}{2}BC$. 又作 BE 平分 $\angle ABC$ 交 AC 于点 E , 则 $\angle ABC = \angle C = 72^\circ, \angle ABE = \angle EBC = 36^\circ$, 所以 $\angle BEC = \angle C = 72^\circ$.

设 $AE = BE = BC = x$, 则 $EC = 1 - x$, 所以 $\triangle ABC \sim \triangle BEC$, 则 $\frac{AB}{BC} = \frac{BE}{EC}$,

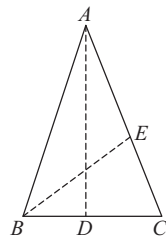


图 25.1

即 $\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$, 解得 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

因为 $x > 0$, 所以 $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, 在 $\text{Rt}\triangle ADB$ 中, $\sin \angle BAD = \sin 18^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{x}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

变式 1 (2015 全国 I 卷理 16) 在平面四边形 $ABCD$ 中, $\angle A = \angle B = \angle C = 75^\circ$, $BC = 2$, 则 AB 的取值范围是_____.

解析 ▶ **解法一**: 易知 $\angle ADC = 135^\circ$. 如图 25.2(a) 所示, 连接 BD . 设 $\angle BDC = \alpha$, $\angle ADB = \beta$, 则 $\alpha + \beta = 135^\circ$.

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 中, 由正弦定理得 $\frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{BD}{\sin 75^\circ} = \frac{AB}{\sin \beta}$, 则 $AB = \frac{BC \cdot \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{2 \sin(135^\circ - \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{2 \sin(\alpha + 45^\circ)}{\sin \alpha} = \sqrt{2}(1 + \cot \alpha)$.

由 $\begin{cases} \alpha + 75^\circ < 180^\circ \\ 135^\circ - \alpha + 75^\circ < 180^\circ \end{cases}$, 得 $30^\circ < \alpha < 105^\circ$, 故 $\sqrt{3} - 2 < \cot \alpha < \sqrt{3}$, 则 $\sqrt{6} - \sqrt{2} < AB < \sqrt{6} + \sqrt{2}$. 故 AB 的取值范围是 $(\sqrt{6} - \sqrt{2}, \sqrt{6} + \sqrt{2})$.

解法二: 如图 25.2(b) 所示, 连接 AC , 同解法一可以得到 $AB = \frac{1}{2} [\sqrt{6} - \sqrt{2} + (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cot \alpha]$,

其中 $\begin{cases} \alpha < 75^\circ \\ 75^\circ - \alpha < 45^\circ \end{cases}$, 则 $30^\circ < \alpha < 75^\circ$, 亦可得 $\sqrt{6} - \sqrt{2} < AB < \sqrt{6} + \sqrt{2}$. 故 AB 的取值范围是 $(\sqrt{6} - \sqrt{2}, \sqrt{6} + \sqrt{2})$.

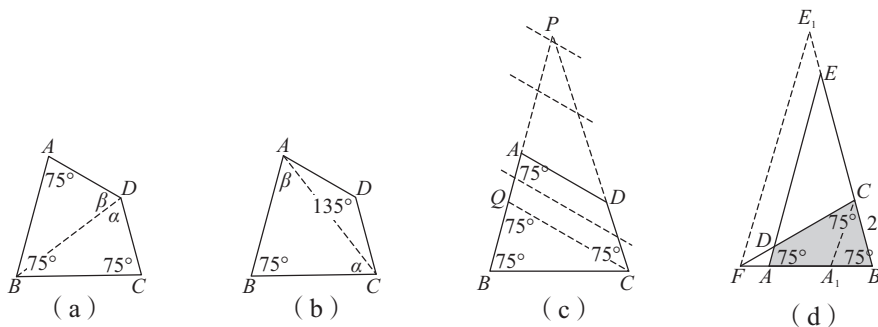


图 25.2

解法三: 如图 25.2(c) 所示, 动态地审视平面四边形 $ABCD$: 边 $BC = 2$ 固定, $\angle B = \angle C = 75^\circ$ 固定, 延长 BA, CD 交于点 P . 虽然 $\angle BAD = 75^\circ$, 但边 AB 并不固定, 平行移动边 AD , 则容易看出 $BQ < AB < BP$.

在 $\triangle BCQ$ 中, 易求得 $BQ = \sqrt{6} - \sqrt{2}$. 在 $\triangle BCP$ 中, 易求得 $BP = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, 则 AB 的取值范围是 $(\sqrt{6} - \sqrt{2}, \sqrt{6} + \sqrt{2})$.

解法四: 如图 25.2(d) 所示, 根据题意, 四边形 $ABCD$ 可以看成两个等腰三角形 (底角为 75° , 相似) 有一底角重合所成的图形, 即 $\triangle BCF$ 与 $\triangle BAE$ 的底角 $\angle B$ 重合, 其中 $BC = 2$ 固定, $\angle A = \angle B = \angle C = 75^\circ$.

由于 BC 固定不变, 则 $\triangle BCF$ 不变, 从而另一个三角形的边 AE 属于动直线. 容易知道 AB 的

最大值是 BF , 最小值是 BA_1 .

在 $\triangle A_1CB$ 中, 由余弦定理可知 $BA_1 = \sqrt{6} - \sqrt{2}$, 在 $\triangle E_1FB$ 中, 由余弦定理可知 $BF = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, 则 AB 的取值范围是 $(\sqrt{6} - \sqrt{2}, \sqrt{6} + \sqrt{2})$.

评注

解法一、二的共同点都是将四边形分割为三角形, 运用正弦定理来解, 属于通性通法. 解法三、四的共同点都是注意到图形的特殊性: 四边形中的三个内角固定, 一条边为定长. 在图 25.2(c) 中, 与定长边 BC 相对的边 AD 可以平移, 这样就得到了无数个符合题意的四边形, 确定了两个极限位置, 从而 AB 的长度范围就求出来了. 解法四的视角比解法三更为宏观, 将问题放在了两个相关的三角形中, 两个解法都是体现了“几何问题几何方法解”的思维流向, 将动态思维发挥到了极致.

本题充分说明解三角形问题的两个思维起点: 一是关注边角关系, 设法化为熟悉的情境(三角形), 用正、余弦定理求解; 二是认真分析图形结构, 找到隐含的动态关系, 尤其是最值(范围)类问题.

变式 2 在凸四边形 $ABCD$ 中, $\angle A = \angle B = \angle C = 72^\circ$, $BC = 2$, 则 AB 的取值范围是_____.

解析 如图 25.3 所示, 构造等腰 $\triangle A_2BC$, 使得 $\angle B = \angle C = 72^\circ$, $BC = 2$. 作 $\angle C$ 的平分线 CA_1 , 交 A_2B 于点 A_1 , 平移 A_1C 交 A_2B 和 A_2C 分别于点 A, D , 则四边形 $ABCD$ 符合题意.

要求线段 AB 的范围, 显然 $A_1B < AB < A_2B$, 又 $A_1B = 4\sin 18^\circ = \sqrt{5} - 1$, $A_2B = \frac{1}{\sin 18^\circ} = \sqrt{5} + 1$, 则 AB 的取值范围是 $(\sqrt{5} - 1, \sqrt{5} + 1)$.

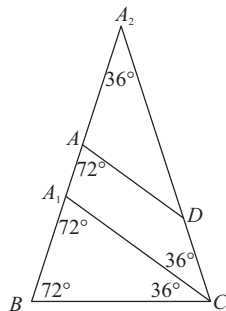


图 25.3

变式 3 A, B, C 是 $\triangle ABC$ 的三个内角, 则 $\cos A (3\sin B + 4\sin C)$ 的最小值为_____.

解析 解法一(利用柯西不等式放缩消元): $\cos A (3\sin B + 4\sin C) = \cos A [3\sin B + 4\sin(A+B)] = \cos A (3\sin B + 4\sin A \cos B + 4\cos A \sin B) = \cos A [(3+4\cos A)\sin B + 4\sin A \cdot \cos B]$.

由柯西不等式得 $[(3+4\cos A)\sin B + 4\sin A \cos B] \leq \sqrt{(3+4\cos A)^2 + (4\sin A)^2} \cdot$

$\sqrt{\sin^2 B + \cos^2 B} = \sqrt{(3+4\cos A)^2 + (4\sin A)^2} = \sqrt{25+24\cos A}$, 又当取得最小值时 $A \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$,

所以 $\cos A < 0$, 从而有 $\cos A (3\sin B + 4\sin C) \geq \cos A \sqrt{25+24\cos A} = -\sqrt{\cos^2 A (25+24\cos A)}$.

故只需求出 $\cos^2 A(25+24\cos A)$ 的最大值,下面用两种方法进行求解.

方法 1(导数法):令 $t=\cos A, t \in (-1, 0)$, 则 $\cos^2 A(25+24\cos A)=t^2(25+24t)$.

令 $f(t)=t^2(25+24t), f'(t)=72t^2+50t$, 易判断当 $t=-\frac{25}{36}$ 时, 函数取最大值, 最大值为

$f\left(-\frac{25}{36}\right)=\frac{125\sqrt{3}}{108}$, 等号成立条件为 $\cos A=-\frac{25}{36}$ 且 $\frac{3+4\cos A}{4\sin A}=\frac{\sin B}{\cos B}$, 即 $\tan B=\frac{2\sqrt{671}}{671}$, 符合题意.

从而 $\cos A(3\sin B+4\sin C) \geq -\frac{125\sqrt{3}}{108}$, 故 $\cos A(3\sin B+4\sin C)$ 的最小值为 $-\frac{125\sqrt{3}}{108}$.

方法 2(基本不等式法): $t^2(25+24t)=\frac{1}{12^2}(-12t)(-12t)(25+24t) \leq \frac{1}{12^2}\left(\frac{25}{3}\right)^3$, 从而有

$\cos A(3\sin B+4\sin C) \geq -\sqrt{\cos^2 A(25+24\cos A)} \geq -\frac{125\sqrt{3}}{108}$, 当 $\cos A=-\frac{25}{36}$ 且 $\frac{3+4\cos A}{4\sin A}=\frac{\sin B}{\cos B}$, 即 $\cos A=-\frac{25}{36}$ 且 $\tan B=\frac{2\sqrt{671}}{671}$ 时, 等号成立. 故 $\cos A(3\sin B+4\sin C)$ 的最小值为 $-\frac{125\sqrt{3}}{108}$.

解析二(利用几何的方法):建立几何图形,如图 25.4 所示.

要使得 $\cos A(3\sin B+4\sin C)$ 最小, 则 $\cos A < 0$, 得 $0 < B+C < \frac{\pi}{2}$, $|QN|=3\sin B, |PR|=4\sin C$, 且 $|PQ| \geq |PR|+|NQ|$, 当且仅当点 R 和 N 重合时取等号或 $3\cos B=4\cos C$ 时取等号, 所以 $\cos A \cdot (3\sin B+4\sin C) \geq \cos A \cdot |PQ|$.

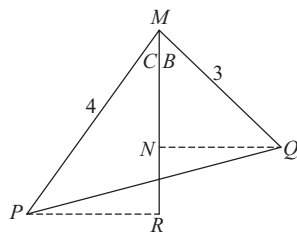


图 25.4

不妨设 $|PQ|=m (1 < m < 5)$, $\cos(B+C)=\frac{3^2+4^2-m^2}{24}=\frac{25-m^2}{24}$, 即 $\cos A=-\cos(B+C)=\frac{m^2-25}{24}$. 令 $\cos A \cdot |PQ|=f(m)=\frac{m^3-25m}{24}, 1 < m < 5, f'(m)=\frac{3m^2-25}{24}$. 令 $f'(m)=0$, 得 $m=\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

当 $1 < m < \frac{5\sqrt{3}}{3}$ 时, $f'(m) < 0, f(m)$ 单调递减; 当 $\frac{5\sqrt{3}}{3} < m < 5$ 时, $f'(m) > 0, f(m)$ 单调递

增, 所以 $f(m)_{\min}=f\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\frac{5\sqrt{3}}{3}\left(\frac{25}{3}-25\right)}{24}=-\frac{125\sqrt{3}}{108}$, 当且仅当 $\begin{cases} 3\cos B=4\cos C \\ 3\sin B+4\sin C=m=\frac{5\sqrt{3}}{3} \end{cases}$ 时

取到最小值, 解得 $\sin B=\frac{2\sqrt{3}}{45}, \sin C=\frac{23\sqrt{3}}{60}$. 所以 $\cos A \cdot (3\sin B+4\sin C)$ 的最小值为 $-\frac{125\sqrt{3}}{108}$.

评注

本题深刻体现了高考对数学思想方法灵活、综合、深层次考查的命题理念. 在高考复习备考的过程中, 不能简单以知识为主线进行粗浅复习, 要站在数学思想、方法的角度将不同的问题联系起来, 真正地学会举一反三.

25.2 三角形中的恒等变换



研究思路

由于三角形各角之间的制约性, 在三角恒等变形公式的基础上会进一步演化出一些恒等式与不等式. 这些恒等式分为无条件恒等式与条件恒等式, 证明的关键在于消除等式左、右的差异、消除条件与结论的差异. 三角不等式首先是不等式, 要掌握证明不等式的常用方法: 配方法、比较法、放缩法、基本不等式、柯西不等式等. 另外, 要充分利用好三角形内角和为 180° 这一结论. 如果同时涉及边和角, 应尽量使用正、余弦定理实现边角统一.

例 25.5 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角的正切值均为正整数, 请求出这三个内角的正切值.

分析

已知条件没有体现角度和函数关系, 需要充分利用三角形内角和为 180° 这一结论及其变形. $A+B+C=\pi$, 结合条件三个内角的正切值均为正整数, 可得最小的角的正切值为 1, 借助恒等式 $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ 建立起三个正切值之间的关系, 代入转化为两个正切值之间的关系, 求整数解即可证明.

解析

因为 $\triangle ABC$ 的三个内角的正切值均为正整数, 即 $\tan A > 0, \tan B > 0, \tan C > 0$.

设 $A \leq B \leq C$, 则 $A+B+C=\pi \geq 3A$, 所以 $A \leq \frac{\pi}{3}$.

又 $\tan A \leq \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, 由于 $\tan A$ 为正整数, 所以 $\tan A = 1$. 因为 $\tan C = \tan(\pi - A - B) = -\tan(A+B) = \frac{-\tan A - \tan B}{1 - \tan A \tan B}$, 所以有 $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$.

将 $\tan A = 1$ 代入上式得 $\tan B \tan C = \tan B + \tan C + 1$, 所以 $(\tan C - 1)(\tan B - 1) = 2$.

因为 $\tan B \in \mathbb{N}^*$, 则 $\tan B \geq 2$ (因为 $\tan B = 1$ 时, C 为直角, 不合题意). 又 $\tan A, \tan B, \tan C$ 为正整数, 所以由上式可得 $\begin{cases} \tan B - 1 = 1 \\ \tan C - 1 = 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \tan B - 1 = 2 \\ \tan C - 1 = 1 \end{cases}$, 由假设 $A \leq B \leq C$, 则 $\tan B \leq \tan C$,

所以 $\begin{cases} \tan B = 2 \\ \tan C = 3 \end{cases}$.

综上所述, 这三个内角的正切值分别为 1, 2, 3.

变式 1 在锐角 $\triangle ABC$ 中,若 $\sin A = 2\sin B \sin C$,则 $\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$ 的最小值是_____.

解析 ▶ 由 $\sin A = \sin(B+C) = 2\sin B \sin C$,即 $\sin B \cos C + \cos B \sin C = 2\sin B \sin C$,两边同除以 $\cos B \cos C$,得 $\tan B + \tan C = 2\tan B \tan C$. 则 $\tan A \tan B \tan C = \tan A + \tan B + \tan C = \tan A + 2\tan B \tan C \geq 2\sqrt{2\tan A \tan B \tan C}$,即 $\tan A \tan B \tan C \geq 8$,当且仅当 $\tan A = 2\tan B \tan C$ 时取等号,也即 $\tan A = 4, \tan B \tan C = 2$ 时取等号,所以 $\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$ 的最小值是8.

变式 2 证明:在锐角 $\triangle ABC$ 中,有 $\tan A \tan B \tan C \geq 3\sqrt{3}$.

解析 ▶ **解法一:** 由 $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C \geq 3\sqrt[3]{\tan A \tan B \tan C}$,则 $\tan A \tan B \tan C \geq 3\sqrt{3}$,当且仅当 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ 时取等号.

解法二: 设 $f(x) = \tan x$,易知 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上是下凸函数,则对于 $A, B, C \in (0, \frac{\pi}{2})$,有 $\frac{f(A)+f(B)+f(C)}{3} \geq f(\frac{A+B+C}{3}) = f(\frac{\pi}{3})$,所以 $\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}$,即 $\tan A \tan B \tan C \geq 3\sqrt{3}$.

变式 3 证明:在锐角 $\triangle ABC$ 中,有 $\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$.

解析 ▶ **解法一:** 不等式 $\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2}\right)^2 \geq 3$,即 $\tan^2 \frac{A}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{C}{2} + 2\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + 2\tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + 2\tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} \geq 3$.
又 $\tan^2 \frac{A}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{C}{2} \geq \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2}$ (依据 $x, y, z \in \mathbf{R}$,有 $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$ 恒成立),因此 $\tan^2 \frac{A}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{C}{2} + 2\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + 2\tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + 2\tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} \geq 3\left(\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2}\right) = 3$ (其中用到三角形中的恒等式 $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} = 1$).

综上所述, $\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$,当且仅当 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ 时取等号.

解法二: 由 $A+B+C=\pi$,得 $\tan \frac{A}{2} = \tan \frac{\pi-(B+C)}{2} = \frac{1}{\tan \frac{B+C}{2}} = \frac{1 - \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}}{\tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2}}$,因此

$$\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} = \frac{1 - \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}}{\tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2}} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2}, \text{ 且 } \tan \frac{B}{2}, \tan \frac{C}{2} > 0, \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} \leqslant \left(\frac{\tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2}}{2} \right)^2, \text{ 所以 } \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geqslant \frac{1 - \frac{\left(\tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \right)^2}{4}}{\tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2}} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} = \frac{1}{\tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2}} + \frac{3}{4} \left(\tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \right) \geqslant 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}, \text{ 当且仅当 } B = C = \frac{\pi}{3}, \text{ 也即 } A = B = C = \frac{\pi}{3} \text{ 时}$$

取等号.

例 25.6 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 证明: $\sin A + \sin B + \sin C > 2$.

分析 为减少变量, 先对要证的式子进行变形: $\sin A + \sin B + \sin C = \sin A + \sin B + \sin(A+B) = \sin A + \sin B + \sin A \cos B + \sin B \cos A > 2 = \sin^2 A + \sin^2 B + \cos^2 B + \cos^2 A$. 根据正、余弦函数的有界性可得 $\sin A > \sin^2 A, \sin B > \sin^2 B$, 因为 A, B, C 都是锐角, 所以 $A+B > \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \sin A > \cos B$, 同理有 $\sin B > \cos A$, 所以 $\sin A \cos B > \cos^2 B, \sin B \cos A > \cos^2 A$, 相加即可证明.

解析 **解法一:** 因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 所以 $A+B > \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow A > \frac{\pi}{2} - B \Leftrightarrow \sin A > \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) \Leftrightarrow \sin A > \cos B$, 同理有 $\sin B > \cos A$.

$\sin A + \sin B + \sin C > \sin^2 A + \sin^2 B + \sin(A+B) = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin A \cos B + \sin B \cos A > \sin^2 A + \sin^2 B + \cos^2 B + \cos^2 A = 2$.

解法二: 由 $\sin x > \frac{2}{\pi}x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 得 $\sin A + \sin B + \sin C > \frac{2}{\pi} \cdot (A+B+C) = 2$.

变式 1 在 $\triangle ABC$ 中, 证明: $\frac{1}{1+\cos^2 A + \cos^2 B} + \frac{1}{1+\cos^2 A + \cos^2 C} + \frac{1}{1+\cos^2 B + \cos^2 C} \leqslant 2$.

解析 $\sin^2 C = \sin^2(A+B) = (\sin A \cos B + \sin B \cos A)^2$, 由柯西不等式, 可得 $(\sin A \cos B + \sin B \cos A)^2 \leqslant (\sin^2 A + \sin^2 B)(\cos^2 A + \cos^2 B)$, 所以 $\cos^2 A + \cos^2 B \geqslant \frac{\sin^2 C}{\sin^2 A + \sin^2 B}$, 即 $\cos^2 A + \cos^2 B + 1 \geqslant \frac{\sin^2 C + \sin^2 A + \sin^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B}$, 所以 $\frac{1}{\cos^2 A + \cos^2 B + 1} \leqslant \frac{\sin^2 A + \sin^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}$. 同理 $\frac{1}{\cos^2 B + \cos^2 C + 1} \leqslant \frac{\sin^2 B + \sin^2 C}{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}, \frac{1}{\cos^2 C + \cos^2 A + 1} \leqslant \frac{\sin^2 C + \sin^2 A}{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}$.

以上三式相加得 $\frac{1}{1+\cos^2 A+\cos^2 B} + \frac{1}{1+\cos^2 A+\cos^2 C} + \frac{1}{1+\cos^2 B+\cos^2 C} \leqslant \frac{2(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)}{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}=2$.



小结

三角形中的三角恒等变换等式的证明会根据需要化繁为简,转化方向上可从左证右、从右证左或左右同时化为另一个式子. 以下是一些三角形中较为常见的恒等变换公式.

- (1) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A \cos B \cos C)$;
- (2) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \cos B \cos C$;
- (3) $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x = 4\sin x \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$;
- (4) $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} = 1$;
- (5) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$;
- (6) $\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot A \cot C = 1$.

例 25.7 如图 25.5 所示,任意 $\triangle ABC$, 作其三个角的三等分线, 两两成对相交. 证明: 三个交点一定构成正三角形.

分析 已知条件是三个内角三等分, 所以考虑将结果向角度方向转换. 在 $\triangle AA_1C_1$ 中, 由余弦定理得 $A_1C_1^2 = AA_1^2 + AC_1^2 - 2AA_1 \cdot AC_1 \cos \alpha$, 使用正弦定理把边 AA_1 和 AC_1 转换成角度, 根据式子的结构特征构造三角形, 并结合正、余弦定理进行化简. 由于 A_1C_1, A_1B_1, B_1C_1 地位对等, 将 A_1B_1, B_1C_1 用轮换的原则表示出来, 若相等则命题得证.

解析 如图 25.6 所示, 设 $\angle A = 3\alpha, \angle B = 3\beta, \angle C = 3\gamma, \triangle ABC$ 的外接圆的直径为 $2R$, 则 $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{3}$.

在 $\triangle AA_1C_1$ 中, 由余弦定理得 $A_1C_1^2 = AA_1^2 + AC_1^2 - 2AA_1 \cdot AC_1 \cos \alpha$, 且在 $\triangle A_1AB$ 中, 由正弦定理得 $\frac{AA_1}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{AB}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \gamma\right)} =$

$$\frac{2R \sin 3\gamma}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \gamma\right)} = 8R \sin \gamma \sin\left(\gamma + \frac{\pi}{3}\right) \text{ (用到正弦的三倍角公式), 即 } AA_1 =$$

$$8R \sin \beta \sin \gamma \sin\left(\gamma + \frac{\pi}{3}\right).$$

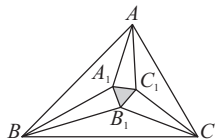


图 25.5

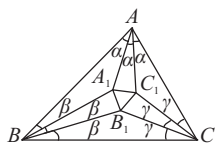


图 25.6

同理, 在 $\triangle ACC_1$ 中, 由正弦定理得 $\frac{AC_1}{\sin\gamma} = \frac{AC}{\sin(\alpha+\gamma)} = \frac{AC}{\sin(\frac{\pi}{3}-\beta)} = \frac{2R\sin 3\beta}{\sin(\frac{\pi}{3}-\beta)} =$

$8R\sin\beta\sin(\frac{\pi}{3}+\beta)$, 即 $AC_1 = 8R\sin\gamma\sin\beta\sin(\frac{\pi}{3}+\beta)$, 所以 $A_1C_1^2 = AA_1^2 + AC_1^2 - 2AA_1 \cdot$

$AC_1\cos\alpha = (8R\sin\beta\sin\gamma)^2 \left[\sin^2(\frac{\pi}{3}+\gamma) + \sin^2(\frac{\pi}{3}+\beta) - 2\sin(\frac{\pi}{3}+\gamma)\sin(\frac{\pi}{3}+\beta)\cos\alpha \right]$.

对于 $\sin^2(\frac{\pi}{3}+\gamma) + \sin^2(\frac{\pi}{3}+\beta) - 2\sin(\frac{\pi}{3}+\gamma)\sin(\frac{\pi}{3}+\beta)\cos\alpha$ 这个式子, 构造三角形, 使得

三个内角分别为 $\frac{\pi}{3}+\gamma, \frac{\pi}{3}+\beta$ 和 α , 且三角形的外接圆直径为 1, 则 $\sin^2(\frac{\pi}{3}+\gamma) + \sin^2(\frac{\pi}{3}+\beta) -$

$2\sin(\frac{\pi}{3}+\gamma)\sin(\frac{\pi}{3}+\beta)\cos\alpha = \sin^2\alpha$. 因此 $A_1C_1^2 = (8R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)^2$, 即 $A_1C_1 = 8R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

同理 $A_1B_1 = 8R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma, B_1C_1 = 8R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$, 所以 $A_1B_1 = A_1C_1 = B_1C_1$, 则 $\triangle A_1B_1C_1$ 为等边三角形.

训练 25

1. (2022 新高考 II 卷 6) 若 $\sin(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+\beta) = 2\sqrt{2}\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})\sin\beta$, 则().

A. $\tan(\alpha+\beta) = 1$

B. $\tan(\alpha+\beta) = -1$

C. $\tan(\alpha-\beta) = 1$

D. $\tan(\alpha-\beta) = -1$

2. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$, 则 $\cos A + \cos B + 2\cos C$ 的最大值为().

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

B. $\sqrt{5}$

C. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

D. $\sqrt{6}$

3. 求 $\cos^2 36^\circ + \cos^2 72^\circ$ 的值.

4. $\cos \frac{\pi}{11} - \cos \frac{2\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} - \cos \frac{4\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} =$ _____. (用数字作答)
5. $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 满足 $A = 3B = 9C$, 则 $\cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A =$ _____.
_____.
6. 已知在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $3a^2 = c^2 - b^2$, 则 $\tan A \cdot \tan B$ 的取值范围是 _____.
7. 证明: $\triangle ABC$ 为直角三角形的充分必要条件是 $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$.